Федеральное государственное унитарное предприятие
Государственный Научный Центр Российской Федерации
Институт Теоретической и Экспериментальной Физики
им. А.И.Алиханова

На правах рукописи

Борк
Леонид Владимирович

Инфракрасно безопасные наблюдаемые в $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2011

УДК 539.12

Работа выполнена в ФГУП ГНЦ РФ — Институте Теоретической и Экспериментальной Физики

Научный руководитель:	доктор физ.-мат. наук Д.И. Казаков, (ГНЦ РФ ИТЭФ, г. Москва)
Официальные оппоненты:	доктор физ.-мат. наук А.С. Горский, (ГНЦ РФ ИТЭФ, г. Москва)
	доктор физ.-мат. наук В.А. Смирнов, (НИИЯФ МГУ, г. Москва)
Ведущая организация :	Объединенный институт ядерных исследований г. Дубна, Московская обл.

Защита состоится 24 мая 2011 года в 11 часов на заседании Диссертационного совета Д.201.002.01 по защите кандидатских диссертаций в ФГУП ГНЦ РФ ИТЭФ по адресу: г. Москва, ул. Б. Черемушкинская, д. 25, Конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГНЦ РФ ИТЭФ.

Автореферат разослан 22 апреля 2011 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук В.В.Васильев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объект исследования и актуальность темы

В последнее десятилетие был достигнут значительный прогресс в понимании структуры $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса. Этот прогресс связан, в той или иной степени, с выдвинутой в 1998г. Х.Малдаценой [1], А.Поляковым и Э.Виттеном [2] гипотезой о дуальности теории струн типа IIB на фоне пространства $AdS_5 \times S_5$ и $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса, определенной на границе AdS_5, получившей название AdS/CFT соответствия. В дальнейшем эта гипотеза получила обобщения на теории обладающие меньшей ($\mathcal{N} = 1$) суперсимметрией. В частности, было установлено аналогичное соответствие для β-деформированной [3, 4] $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса и теории струн на фоне пространства $AdS_5 \times \tilde{S}_5$ ($\tilde{S}_5$ – некоторое многообразие топологически эквивалентное сфере). Аналогичные попытки были предприняты и для более общей деформации Ли-Страслера[1] $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса (в дальнейшем будет использоваться сокращение LS–деформация), хотя в настоящий момент точное дуальное описание LS–деформации $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса в терминах какой-либо теории струн остается неизвестным.

Синтез методов теории струн и КТП, мотивированный гипотезой AdS/CFT соответствия, позволил получить ряд крайне нетривиальных, непертурбативных результатов, как для $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса, так и для других четырехмерных калибровочных теорий, например, таких как β-деформированная и LS–деформированная $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричная теория Янга-Миллса. В планарном пределе ожидается, что $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричная теория Янга-Миллса будет интегрируемой на квантовом уровне КТП и ее возможное решение станет примером решения первой нетривиальной КТП в четырехмерном пространстве-времени [5]. Сам термин "точное решение"понимается в зависимости от контекста по-разному и поэтому требует уточнения. Под "точным решением"может пониматься нахождение всех амплитуд теории (ее S-матрицы) [5].

В последнее десятилетие был достигнут большой прогресс, во многом так же стимулированный гипотезой AdS/CFT соответствия, в понимании

[1] β и LS-деформации заключаются в добавлении к суперпотенциалу лагранжиана $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса записанному в терминах $\mathcal{N} = 1$ суперполей дополнительных киральных операторов наивной массовой размерности Δ_0=3.

структуры амплитуд в суперсимметричных калибровочных теориях, таких как $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричная теория Янга-Миллса и $\mathcal{N} = 8$ супергравитация [6,7]. В частности, благодаря использованию техники унитарных разрезов [8–10] стали доступны 3 – 5 петлевые результаты для 4-точечных амплитуд в $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса в планарном пределе [6] и удалось сделать некоторые утверждения о свойствах всего ряда теории возмущений (ТВ) в целом: применение техники унитарных разрезов [8–10] $\mathcal{N} = 4$ SYM в планарном пределе позволило пронаблюдать итерационную структуру определенного класса, так называемых, MHV амплитуд и формально просуммировать весь соответствующий ряд ТВ.

Применение этой же техники (техники унитарных разрезов) так же сделало возможным вычисление 3 петлевых 4 точечных амплитуд в $\mathcal{N} = 8$ супергравитации, что позволило вновь поднять вопрос о возможной ультрафиолетовой конечности $\mathcal{N} = 8$ супергравитации [7,11,12].

Заметим, что все эти результаты было бы затруднительно получить используя обычную диаграмную технику (как компонентную, так и доступную на сегодняшний момент суперполевую) в связи с чрезвычайной сложностью таких вычислений связанной, в частности, с факториальным ростом числа диаграмм с ростом порядка ТВ или числа внешних импульсов [11,12].

Амплитуды (S-матрица) в $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса и $\mathcal{N} = 8$ супергравитации, как было сказано выше, имеют множество нетривиальных и удивительных свойств, и существует надежда, что новые виды симметрий, которыми, как ожидается, обладает $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричная теория Янга-Миллса и благодаря которым эта теория может оказаться интегрируемой, позволят полностью или частично зафиксировать ее S-матрицу [5].

Однако несмотря на отсутствие ультрафиолетовых расходимостей, амплитуды в $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса и, может быть, в $\mathcal{N} = 8$ супергравитации, как и в любой безмассовой калибровочной теории, имеют инфракрасные расходимости и, вообще говоря, не определены в физической размерности пространства-времени $D = 4$ (в отсутствии какого-либо инфракрасного регулятора).

В случае с безмассовыми частицами в калибровочных теориях физический смысл имеют не амплитуды (S-матрица) сами по себе, а построенные на их основе, инфракрасно безопасные наблюдаемые, которые не содержат зависимости от инфракрасного регулятора и могут быть определены в физической размерности пространства-времени.

Построению подобных наблюдаемых и посвящена данная работа. Несмотря на то, что теорема Киношиты-Ли-Науэнберга [13], в принципе, гарантирует существование подобных наблюдаемых, конкретная их реализация может быть весьма разнообразной и технически сложной. Одна из возможностей это специальным образом построенные "достаточно инклюзивные"сечения рассеяния. Такие наблюдаемые были впервые построены для КЭД [14]. Еще одна возможность это, "функции потока энергии" [15], определяемые как корреляционные функции тензора энергии импульса теории. Такие наблюдаемые были рассмотрены в режиме слабой связи в [16,17] в КХД и недавно в режиме сильной связи [18] в $\mathcal{N}=4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса.

В данной работе будут рассмотрены инклюзивные сечения рассеяния [19–21]. Целью работы является получение конечных, не содержащих зависимости от инфракрасного регулятора, выражений в аналитическом виде. Именно такие выражения и должны в конечном итоге представлять основной физический интерес. Нам представляется важным изучить вопрос о том, сохраняются ли замечательные свойства амплитуд (итерационная структура и т.д.) в таких наблюдаемых, сохраняется ли "простота"ответов для амплитуд в таких физически осмысленных выражениях.

Цель работы

Построение инфракрасно безопасных наблюдаемых в $\mathcal{N}=4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса, которые основанны на амплитудах рассеяния поляризованных глюонов и аналитическое вычисление конечных частей таких наблюдаемых.

Построение инфракрасно безопасных наблюдаемых в $\mathcal{N}=8$ супергравитации, которые основанны на амплитудах рассеяния поляризованных гравитонов.

Построение класса ультрафиолетово (UV) конечных теорий, основанных на $\mathcal{N}=4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса, но обладающих меньшей ($\mathcal{N}=1$) суперсимметрией, однако, сохраняющие привлекательные свойства $\mathcal{N}=4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса (такие как, например, UV конечность, супер-конформная инвариантность и итерационные свойства амплитуд).

Научная новизна и практическая ценность

Впервые было получено семейство инфракрасно безопасных наблюдаемых (дифференциальных по углу инклюзивных сечений рассеяния) в следующим за лидирующим (NLO) порядке ТВ в $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса. Эти наблюдаемые основаны на амплитудах рассеяния поляризованных глюонов. Были получены аналитические выражения для конечных (не зависящих от инфракрасного регулятора) частей этих наблюдаемых.

Развитая методика получения аналитических выражений для конечных частей инфракрасно безопасных наблюдаемых (дифференциальных по углу инклюзивных сечений рассеяния) может быть применена без каких-нибудь существенных изменений не только к теориям с расширенной суперсимметрией, но и к КХД, что может позволить получить аналитические выражения в тех случаях, когда, на сегодняшний момент, доступны результаты только численного счета.

Теории, обладающие меньшей суперсимметрией ($\mathcal{N} = 1$), но сохраняющие привлекательные свойства $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса (такие как UV конечность, итерационные свойства амплитуд, и т.д.) могут быть использованы для построения феноменологических моделей в физике элементарных частиц.

<u>На защиту выносятся следующие результаты:</u>

1. Построено семейство инфракрасно безопасных наблюдаемых (дифференциальных по углу инклюзивных сечений рассеяния) в NLO порядке ТВ в $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса основанных на амплитудах рассеяния поляризованных глюонов. Было явно продемонстрировано сокращение инфракрасных расходимостей в дифференциальных по углу инклюзивных сечениях рассеяния и были получены анлитические выражения для конечных частей этих наблюдаемых в NLO порядке ТВ.

2. Построено семейство инфракрасно безопасных наблюдаемых (дифференциальных по углу инклюзивных сечений рассеяния) в NLO порядке ТВ в $\mathcal{N} = 8$ супергравитации. Явно продемонстрировано сокращение инфракрасных расходимостей в рассматриваемых наблюдаемых.

3. Получена, при использовании метода пертурбативной подстройки юкавовских констант связи в формализме $\mathcal{N} = 1$ суперполей, $\mathcal{N} = 1$ калибровочная теория с суперпотенциалом вида

$$\mathcal{W} = ih \int d^6z[qTr(\Phi_1\Phi_2\Phi_3) - \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{3}\frac{Tr(\Phi_i^3)}{3}],$$

где $|h|^2 = g^2$ и $|q| = 1$, являющаяся ультрафиолетово конечной и суперконформно инвариантной во всех порядках ТВ в планарном пределе.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на семинарах ИТЭФ, выездной сессии Отделения ЯФ РАН (декабрь 2007, ИТЭФ, Москва) и следующих международных конференциях: International Workshop Supersymmetries and Quantum Symmetries, август 2007, ОИЯИ, Дубна; 4 Международной Сахаровскй конференции по физике,май 2009, ФИАН, Москва; Helmholtz International School - Workshop Calculations for Modern and Future Colliders, июль 2009, ОИЯИ, Дубна; International Workshop Supersymmetries and Quantum Symmetries, август 2009, ОИЯИ, Дубна.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и дополнения. Общий объем диссертации 84 страниц машинописного текста, включая 8 рисунков и список литературы из 85 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении представлен подробный обзор основных работ и результатов по теме инфракрасно безопасные наблюдаемые в $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса. Там же кратко описаны основные результаты, составляющие данную диссертацию.

Во второй главе *“Вычисление инклюзивного сечения рассеяния в NLO порядке ТВ и инфракрасно безопасные наблюдаемые в $\mathcal{N} = 4$ SYM”* дано обсуждение [22, 23] общих вопросов, связанных с построением инфракарсно безопасных наблюдаемых, основанных на инклюзивных сечениях рассеяния в безмассовой КТП. В таких инклюзивных сечениях рассеяния часть расходимостей из петлевых интегралов (мягкие и коллинеарно-конечные) сокращается с аналогичными расходимостями из интегрирования по фазовому объему дополнительных частиц в конечном состоянии, а оставшиеся расходимости (коллинеарно-начальные) сокращаются при введении вероятностных распределений $q(z)$ по доли переносимого импульса z для начальных и конечных частиц. Необходимость введения таких вероятностных распределений следует из того, что в безмассовых КТП частица с импульсом p неотличима от набора коллинеарных частиц с такими же суммарными квантовыми числами и импульсом, который называется джетом. В первом нетривиальном порядке ТВ в размерной регуляризации $q(z)$ имеет вид

$$q_i(z, \frac{Q_f^2}{\mu^2}) \ = \ \delta(1-z) + \frac{g^2}{2\pi}\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\mu^2}{Q_f^2}\right)^{\epsilon}\sum_j P_{ij}(z) + O(g^4), \tag{1}$$

где $P_{ij}(z)$ – функции расщепления, есть вероятность того, что частица i испустит коллинеарную ей частицу j, g – константа связи, μ – массовый параметр размерной регуляризации. Величина Q_f обычно называется масштабом факторизации и может быть интерпретирована как ширина джета коллинеарных частиц. Вклады в сечение рассеяния связанные с $P_{ij}(z)$ иногда называют "инфракрасными контрчленами".

Схематично класс рассматриваемых инфракрасно конечных наблюдаемых может быть записан в виде

$$\begin{aligned} d\sigma_{obs}^{incl} \ &= \ \sum_{n=2}^{\infty}\int\limits_0^1 dz_1 q_1(z_1, \frac{Q_f^2}{\mu^2})\int\limits_0^1 dz_2 q_2(z_2, \frac{Q_f^2}{\mu^2})\prod_{i=1}^{n}\int\limits_0^1 dx_i q_i(x_i, \frac{Q_f^2}{\mu^2}) \times \\ &\times d\sigma^{2\to n}(z_1 p_1, z_2 p_2, ...)S_n(\{z\},\{x\}) = g^4\sum_{L=0}^{\infty}\left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right)^L d\sigma_L^{Finite}, \end{aligned}$$

где $S_n(\{z\},\{x\})$ – функция измерения, которая определяет какое именно (полное, дифференциальное и т.д.) инклюзивное сечение рассеяния рассматривается. Например для дифференциального по углу сечения рассеяния в NLO порядке ТВ S_n должна быть выбрана пропорциональной $\delta^{D-2}(\Omega - \Omega_{Det})$, где Ω_{Det} – телесный угол на который рассматривается процесс рассеяния.

Далее дана демонстрация описанной выше техники на примере модельной, в данном контексте, задачи о рассеянии электрона на свободном кварке (который не является партоном в адроне, т.к. в данном случае это не принципиально) в "конформной КЭД". Явно показывается как происходит сокращение инфракрасных расходимостей в инклюзивном сечении рассеяния. Аналитически вычисляются конечные части. В результате ответ для дифференциального по углу сечения рассеяния электрона на свободном кварке в NLO порядке ТВ имеет вид, при выборе масштаба факторизации $Q_f^2 = -\hat{t}$, где $\hat{t} = t2z/((z+1) - c(1-z))$ принимает вид:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{13}}\right)^{IR}_{safe} = \left(\frac{d\sigma_{2\to2}}{d\Omega_{13}}\right)_B + \left(\frac{d\sigma_{2\to2}}{d\Omega_{13}}\right)_l + \left(\frac{d\sigma_{2\to3}}{d\Omega_{13}}\right)_B + \left(\frac{d\sigma_{2\to2}}{d\Omega_{13}}\right)_{Spl} =$$
$$= \frac{\alpha^2}{2E^2}\left\{\frac{c^2+2c+5}{(1-c)^2} - \frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{C_F}{(1-c)(1+c)^2}\left[(c^3+5c^2-3c+5)\log^2(\frac{1-c}{2}) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}(7c^3+19c^2-55c-3)\log(\frac{1-c}{2}) - (1+c)(3c^2+21c+2)\right]\right\}. \quad (2)$$

Здесь и далее $c = \cos(\theta_{13})$ – косинус угла рассеяния частицы 3 по отношению к частице 1 (в данном случае кварка по отношению к электрону) в системе центра масс (ц.м.). E – энергия электрона в системе ц.м., C_F – соответствующий оператор Казимира калибровочной группы. Индексы l, B, Spl обозначают вклады в процесс от виртуальных частиц, испускания реальных частиц и учета коллинеарных частиц (функций расщепления) в начальном/конечном состоянии, соответственно.

Далее вычисляется NLO поправка для сечения рассеяния MHV глюонов (т.е. глюонов со спиральной конфигурацией $(--++)$) в $\mathcal{N}=4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса в системе ц.м.

$$\left(\frac{d\sigma_{2\to2}}{d\Omega_{13}}\right)^{(--++)}_{(tree)} = \frac{\alpha^2 N_c^2}{E^2}\frac{4(3+c^2)}{(1-c^2)^2}\left(\frac{\mu^2}{s}\right)^{\epsilon}. \quad (3)$$

Она включает в себя следующие объекты: однопетлевую поправку к рассеянию $2\to2$ глюонов

$$\left(\frac{d\sigma_{2\to2}}{d\Omega_{13}}\right)^{(--++)}_{virt} = \frac{4\alpha^2 N_c^2}{E^2}\left(\frac{\mu^2}{s}\right)^{2\epsilon}\left\{\frac{\alpha}{4\pi}\left[-\frac{16}{\epsilon^2}\frac{3+c^2}{(1-c^2)^2} + \frac{4}{\epsilon}\left(\frac{5+2c+c^2}{(1-c^2)^2}\log(\frac{1-c}{2}) + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{5-2c+c^2}{(1-c^2)^2}\log(\frac{1+c}{2})\right) + \frac{16(3+c^2)\pi^2}{3(1-c^2)^2} - \frac{16}{(1-c^2)^2}\log(\frac{1-c}{2})\log(\frac{1+c}{2})\right]\right\}. \quad (4)$$

Древесный вклад $2\to3$ рассеяния глюонов различных спиральных конфигураций (MHV и anti-MHV), с интегрированием по фазовому пространству дополнительного глюона

$$\left(\frac{d\sigma_{2\to3}}{d\Omega_{13}}\right)_{Real} = \frac{1}{J}\int d\phi_3 |\mathcal{M}_5^{(tree)}|^2 \mathcal{S}_3, \quad (5)$$

где $d\phi_3$ – трехчастичный фазовый объем

$$d\phi_3 = \frac{d^D p_3 \delta^+(p_3^2)}{(2\pi)^{D-1}}\frac{d^D p_4 \delta^+(p_4^2)}{(2\pi)^{D-1}}\frac{d^D p_5 \delta^+(p_5^2)}{(2\pi)^{D-1}}(2\pi)^D \delta^D(p_1+p_2-p_3-p_4-p_5), \quad (6)$$

J – плотность потока частиц и $\mathcal{S}_3$ – функция измерения, которая определяет, какую именно наблюдаемую мы рассматриваем. Для рассматриваемых нами спиральных конфигураций квадраты матричного элемента $|\mathcal{M}_5^{(tree)}|^2$ и функции измерения $\mathcal{S}_3$ имеют вид:

$$1)\quad |\mathcal{M}_5^{(tree)(--+++)}|^2 = g^6 N_c^3(N_c^2-1)\sum_{\sigma\in P_4}\frac{s_{12}^4}{s_{1\sigma(1)}s_{\sigma(1)\sigma(2)}s_{\sigma(2)\sigma(3)}s_{\sigma(3)\sigma(4)}s_{\sigma(4)1}}, \quad (7)$$

$$\mathcal{S}_3^{(--+++),1} = \delta_{+,h_3}\Theta(p_3^0 > p_4^0)\Theta(p_3^0 > p_5^0)\delta^{D-2}(\Omega_{Det}-\Omega_{13}), \quad (8)$$

что соответствует детектированию третьей частицы с наибольшей энергией.

$$\mathcal{S}_3^{(--+++),2} = \delta_{+,h_3}\delta_{+,h_4}\Theta(p_3^0 > p_5^0)\Theta(p_4^0 > p_5^0)\delta^{D-2}(\Omega_{Det}-\Omega_{13}), \quad (9)$$

что соответствует тому, что мы требуем что бы в конечном состоянии было два глюона с положительной спиральностью упорядоченные по энергии и мы детектируем "самый быстрый"из них.

$$2)\quad |\mathcal{M}_5^{(tree)(--++-)}|^2 = g^6 N_c^3(N_c^2-1)\sum_{\sigma\in P_4}\frac{s_{34}^4}{s_{1\sigma(1)}s_{\sigma(1)\sigma(2)}s_{\sigma(2)\sigma(3)}s_{\sigma(3)\sigma(4)}s_{\sigma(4)1}}, \quad (10)$$

$$\mathcal{S}_3^{(--++-),1} = \delta_{+,h_3}\Theta(p_3^0 > p_4^0)\delta^{D-2}(\Omega_{Det}-\Omega_{13}), \quad (11)$$

что соответствует детектрованию третьей частицы с наибольшей энергией.

$$\mathcal{S}_3^{(--++-),2} = \delta_{+,h_3}\delta_{+,h_{4(5)}}\delta^{D-2}(\Omega_{Det}-\Omega_{13}), \quad (12)$$

что соответствует тому, что мы требуем что бы в конечном состоянии было два глюона с положительной спиральностью упорядоченные по энергии и мы детектируем "самый быстрый"из них. Также рассматриваются вклады от дополнительных частиц из $\mathcal{N}=4$ супермультиплета[2] в конечном состоянии (фермионы $q\bar{q}$ и скаляры $\Lambda\Lambda$):

$$3)\quad |\mathcal{M}_5^{(tree)(--+q\bar{q})}|^2 = g^6 N_c^3(N_c^2-1)\sum_{\sigma\in P_4}\frac{s_{34}s_{35}(s_{34}^2+s_{35}^2)}{s_{1\sigma(1)}s_{\sigma(1)\sigma(2)}s_{\sigma(2)\sigma(3)}s_{\sigma(3)\sigma(4)}s_{\sigma(4)1}}. \quad (13)$$

[2] $\mathcal{N}=4$ супермультиплет состоит из глюона g, 4 фермионов ("кварков") q^A и 6 действительных скаляров Λ^{AB}; A и B являются $SU(4)_R$ индексами, Λ антисимметричный $SU(4)_R$ тензор. Подразумевается, что все ответы усреднены по $SU(4)_R$ индексам.

В данном случае мы имеем только оду возможную функцию измерения

$$\mathcal{S}_3^{(--+q\bar{q})} = \delta_{+,h_3}\delta^{D-2}(\Omega_{Det} - \Omega_{13}). \quad (14)$$

4) $$|\mathcal{M}_5^{(tree)(--+\Lambda\Lambda)}|^2 = g^6 N_c^3(N_c^2-1)\sum_{\sigma\in P_4}\frac{s_{34}^2 s_{35}^2}{s_{1\sigma(1)}s_{\sigma(1)\sigma(2)}s_{\sigma(2)\sigma(3)}s_{\sigma(3)\sigma(4)}s_{\sigma(4)1}}. \quad (15)$$

В данном случае функция измерения совпадает с предыдущей. На практике технически удобнее работать с функцией измерения вида

$$\mathcal{S}_3(p_3,p_4,p_5) = \Theta(p_3^0 - \frac{1-\delta}{2}E)\delta^{D-2}(\Omega - \Omega_3), \quad (16)$$

где δ – произвольный параметр, а потом зафиксировать значение δ из требования того, что наблюдаемая частица самая "быстрая"(это соответствует $\delta = 1/3$). В дальнейшем мы оставим значение δ произвольным, так как мы увидим, что сокращение инфракрасных полюсов происходит при произвольных δ.

Учет вкладов от функций расщепления в начальном и конечном состоянии, который схематично можно представить в виде

$$d\sigma_{2\to 2}^{spl,init} = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\mu^2}{Q_f^2}\right)^{\epsilon}\sum_{i,j}\int_0^1 dz\sum_l P_{gl}(z)d\sigma_{2\to 2}(zp_i,p_j,p_3,p_4)\mathcal{S}_2^{spl,init}(z), \quad (17)$$

$$d\sigma_{2\to 2}^{spl,fin} = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\mu^2}{Q_f^2}\right)^{\epsilon} d\sigma_{2\to 2}(p_1,p_2,p_3,p_4)\int_0^1 dz\sum_l P_{gl}(z)\mathcal{S}_2^{spl,fin}(z). \quad (18)$$

В заключении главы получен набор величин, из которых могут быть получены инфракрасно конечные инклюзивные дифференциальные сечения рассеяния в $\mathcal{N}=4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса. А именно, может быть составлено три набора величин *в которых происходит полное сокращение инфракрасных расходимостей*, из которых могут быть составлены различные физические наблюдаемые:

MHV вклад глюонов A^{MHV} равный

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma_{2\to 2}}{d\Omega_{13}}\right)_{Virt}^{(--++)} + \left(\frac{d\sigma_{2\to 3}}{d\Omega_{13}}\right)_{Real}^{(--+++)} + \left(\frac{d\sigma_{2\to 2}}{d\Omega_{13}}\right)_{InSplit}^{(--+++)} + \left(\frac{d\sigma_{2\to 2}}{d\Omega_{13}}\right)_{FnSplit}^{(--+++)} ; \quad (19)$$

anti-MHV вклад глюонов $B^{anti-MHV}$ равный

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma_{2\to 2}}{d\Omega_{13}}\right)_{Virt}^{(--++)} + \left(\frac{d\sigma_{2\to 3}}{d\Omega_{13}}\right)_{Real}^{(--++-)} + \left(\frac{d\sigma_{2\to 2}}{d\Omega_{13}}\right)_{InSplit}^{(--++-)} + \left(\frac{d\sigma_{2\to 2}}{d\Omega_{13}}\right)_{FnSplit}^{(--++-)} ; \quad (20)$$

anti-MHV вклад от фермионов и скаляров из $\mathcal{N}=4$ супермультиплета в конечном состоянии C^{Matter} равный

$$\left(\frac{d\sigma_{2\to 3}}{d\Omega_{13}}\right)^{(--+,\ q\bar{q}+\Lambda\Lambda)}_{Real} + \left(\frac{d\sigma_{2\to 2}}{d\Omega_{13}}\right)^{(--+,\ q\bar{q}+\Lambda\Lambda)}_{InSplit}. \tag{21}$$

Для полного anti-MHV вклада ($B^{anti-MHV}+C^{Matter}$) при выборе масштаба факторизации $Q_f^2=E^2$ и $\delta=1$ ответ может быть записан в относительно простой аналитической форме

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{13}}\right)_{anti-MHV} &= \frac{4\alpha^2 N_c^2}{E^2}\left\{\frac{3+c^2}{(1-c^2)^2}-\right. \\ &-\frac{\alpha}{4\pi}\left[2\frac{(c^4+2c^3+4c^2+6c+19)\log^2(\frac{1-c}{2})}{(1-c)^2(1+c)^4}+2\frac{(c^4-2c^3+4c^2-6c+19)\log^2(\frac{1+c}{2})}{(1-c)^4(1+c)^2}-\right. \\ &-8\frac{(c^2+1)\log(\frac{1+c}{2})\log(\frac{1-c}{2})}{(1-c^2)^2}+\frac{6\pi^2(3c^2+13)-5(61c^2+99)}{9(1-c^2)^2}- \\ &\left.\left.-2\frac{(11c^3-31c^2-47c-133)\log(\frac{1-c}{2})}{3(1+c)^3(1-c)^2}+2\frac{(11c^3+31c^2-47c+133)\log(\frac{1+c}{2})}{3(1-c)^3(1+c)^2}\right]\right\}.\end{aligned} \tag{22}$$

<u>В третьей главе</u> *"Вычисление инклюзивного сечения рассеяния в NLO порядке ТВ и инфракрасно безопасные наблюдаемые в $\mathcal{N}=8$ супергравитации"* , используя алгоритм вычислений представленный в предыдущих главах, явно демонстрируется сокращение инфракрасных расходимостей в инклюзивных дифференциальных сечениях рассеяния поляризованных гравитонов для $\mathcal{N}=8$ супергравитации в NLO порядке ТВ в MHV секторе [23]. А именно, сингулярные части для виртуального вклада, вклада от дополнительных реальных частиц в конечном состоянии и от функций расщепления в начальном и конечном состоянии имеют, соответственно вид:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{(--++)}_{virt} &= \frac{(\alpha_{Gr}E^2)^3}{\pi E^2}\left(\frac{\mu^2}{s}\right)^{2\epsilon}\frac{128}{(1-c^2)^2}\left[\frac{1}{\epsilon}\left((1+c)\log\frac{1+c}{2}+\right.\right. \\ &\left.\left.+(1-c)\log\frac{1-c}{2}\right)+2\log\frac{1+c}{2}\log\frac{1-c}{2}\right],\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{13}}\right)^{(--+++)}_{Real} &= \frac{(\alpha_{Gr}E^2)^3}{\pi E^2}\left(\frac{\mu^2}{s}\right)^{2\epsilon}\frac{64}{(1-c^2)^2}\left[\frac{1}{\epsilon}\left((1+c)\log\frac{1+c}{2}+\right.\right. \\ &\left.\left.+(1-c)\log\frac{1-c}{2}\right)+\text{Finite part}(\delta,c)\right],\end{aligned} \tag{24}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{13}}\right)^{(--+++)}_{InSplit} = \frac{(\alpha_{Gr}E^2)^3}{\pi E^2}\left(\frac{\mu^2}{s}\right)^{2\epsilon}\frac{128}{(1-c^2)^2}\left[\frac{1-2\delta}{(\delta-1)\delta}-\right. \tag{25}$$
$$\left.-2\log\frac{1-\delta}{\delta}-(1-c)\log\frac{1-c}{2}-(1+c)\log\frac{1+c}{2}+\text{Finite part}(\delta,c)\right],$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{13}}\right)^{(--+++)}_{FnSplit} = \frac{(\alpha_{Gr}E^2)^3}{\pi E^2}\left(\frac{\mu^2}{s}\right)^{2\epsilon}\frac{128}{(1-c^2)^2}\left[\frac{2\delta-1}{(\delta-1)\delta}+2\log\frac{1-\delta}{\delta}\right]. \tag{26}$$

Здесь $\alpha_{Gr} = 16\pi G_N/4\pi$ (G_N – гравитационная постоянная).

По аналогии с предыдущим разделом для MHV вклада гравитонов A^{MHV} равного

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma_{2\to2}}{d\Omega_{13}}\right)^{(--++)}_{Virt}+\left(\frac{d\sigma_{2\to3}}{d\Omega_{13}}\right)^{(--+++)}_{Real}+\left(\frac{d\sigma_{2\to2}}{d\Omega_{13}}\right)^{(--+++)}_{InSplit}+\left(\frac{d\sigma_{2\to2}}{d\Omega_{13}}\right)^{(--+++)}_{FnSplit} \tag{27}$$

происходит полное сокращение инфракрасных расходимостей.

В четвертой главе *"Другие суперконформные теории"* обсуждается вопрос о построении теорий, основанных на $\mathcal{N}=4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса, но обладающих меньшей суперсимметрией, однако, сохраняющих ее привлекательные свойства, такие как ультрафиолетовая конечность и супер-конформная инвариантность [24, 25].

Рассматриваются такие деформации $\mathcal{N}=4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса, которые заключаются в добавлении к лагранжиану исходной теории операторов маргинальной массовой размерности и которые сохраняют $\mathcal{N}=1$ суперсимметрию и не меняют калибровочный сектор теории. Действие для $\mathcal{N}=4$ SYM в $\mathcal{N}=1$ суперполях принимает вид:

$$\begin{aligned} S^{N=4}_{SYM} &= \int d^8z Tr\left(e^{-gV}\bar{\Phi}_i e^{gV}\Phi^i\right)+\frac{1}{2g^2}\int d^6z Tr(W^\alpha W_\alpha)+ \\ &+ \int d^6z\, \mathcal{W}(\Phi)+h.c., \end{aligned} \tag{28}$$

где $W_\alpha = \bar{D}^2(e^{-gV}D_\alpha e^{gV})$, $V = V^aT_a$ – векторное суперполе, $\Phi_i = \Phi_i^aT_a$, $i=1...3$ – киральное суперполе, T_a – матрицы фундаментального представления калибровочной группы $SU(N_c)$ и суперпотенциал $\mathcal{W}$ имеет вид:

$$\mathcal{W} = ig(Tr(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)-Tr(\Phi_1\Phi_3\Phi_2)). \tag{29}$$

В пространстве–времени размерности D=4 оператор является маргинальным, если его массовая размерность $\Delta_0 = 3$, и следовательно единственными маргинальными операторами, обладающими данным свойством, являются:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= Tr(\Phi_1[\Phi_2, \Phi_3]), \qquad (30)\\ \mathcal{O}_2 &= Tr(\Phi_1\{\Phi_2, \Phi_3\}), \qquad (31)\\ \mathcal{O}_3 &= \sum_{i=1}^{3} Tr(\Phi_i^3). \qquad (32) \end{aligned}$$

Деформация $\mathcal{N} = 4$ SYM вида

$$S_{LS} = S_{SYM}^{N=4} + \sum_{k=1}^{3} \int d^6 z \mu_k \mathcal{O}_k + h.c. \qquad (33)$$

называется деформацией Ли-Страслера (LS–деформацией). Она может быть записана в виде следующей модификации суперпотенциала исходной $\mathcal{N} = 4$ SYM теории:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{N=4\ SYM} &= ig[Tr(\Phi_1\Phi_2\Phi_3) - Tr(\Phi_1\Phi_3\Phi_2)] \rightarrow \qquad (34)\\ \mathcal{W}_{LS\ SYM} &= i[h_1 Tr(\Phi_1\Phi_2\Phi_3) - h_2 Tr(\Phi_1\Phi_3\Phi_2) + \frac{h_3}{3}\sum_{i=1}^{3} Tr(\Phi_i^3)], \end{aligned}$$

где h_1, h_2, h_3 – комплексные "юкавовские"константы взаимодействия.

Полученная теория помимо очевидной $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрии инвариантна относительно циклических перестановок полей $(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3)$ и замены $h_1 \leftrightarrow -h_2$. В случае $h_3 = 0$ говорят о β-деформации и обычно используют немного другую параметризацию оставшихся двух констант:

$$h_1 = hq,\ h_2 = h/q,\ q = e^{i\pi\beta},$$

где h и β в общем случае комплексны.

В планарном пределе, при использовании размерной регуляризации (редукции) полученная $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная калибровочная теория является ультрафиолетово конечной и супер-конформно инвариантной до 4 петель в случае когда перенормированные параметры деформации h_i параметризуются калибровочной константой связи g в виде

$$\begin{aligned} h_i &= g\left(a_i + \alpha_{0i}^{(3)}\varepsilon^3 + g^2\alpha_{2i}^{(2)}\varepsilon^2 + g^4\alpha_{4i}^{(1)}\varepsilon + g^6\alpha_{6i}^{(0)} + O(g^6, \varepsilon^4)\right),\\ i &= 1, 2, 3; \qquad (35) \end{aligned}$$

и удовлетворяют условию

$$\begin{aligned}
|h_1|^2 \ &+\ |h_2|^2+|h_3|^2 = g^2\{2+\frac{5}{18}\zeta_5 G^{\Sigma}_{41}\varepsilon^3+\frac{5}{3}\zeta_5 G^{\Sigma}_{41}(\frac{g^2N}{16\pi^2})\varepsilon^2+ \\
&+\ 5\zeta_5 G^{\Sigma}_{41}(\frac{g^2N}{16\pi^2})^2\varepsilon+10\zeta_5 G^{\Sigma}_{41}(\frac{g^2N}{16\pi^2})^3+O(g^6,\varepsilon^4)\},
\end{aligned}\tag{36}$$

где G^{Σ}_{41} имеет вид

$$\begin{aligned}
G^{\Sigma}_{41} \ &= \ \{(a_3\overline{a}_3)^4+(a_1\overline{a}_1-a_2\overline{a}_2)^4+6(a_3\overline{a}_3)^2(a_1\overline{a}_1+a_2\overline{a}_2)^2+ \\
&+\ 24a_1\overline{a}_1a_2\overline{a}_2a_3\overline{a}_3(a_1\overline{a}_1+a_2\overline{a}_2)+8a_3^3(a_2\overline{a}_2\overline{a}_1^3-a_1\overline{a}_1\overline{a}_2^3)+ \\
&+\ 8\overline{a}_3^3(a_2\overline{a}_2a_1^3-a_1\overline{a}_1a_2^3)-8a_3\overline{a}_3(\overline{a}_1^3a_2^3+\overline{a}_2^3a_1^3)- \\
&-\ 4ca_3\overline{a}_3(a_1\overline{a}_1+a_2\overline{a}_2)^3-4(a_3\overline{a}_3)^3(a_1\overline{a}_1+a_2\overline{a}_2)\}.
\end{aligned}\tag{37}$$

Условие 4-петлевой ультрафиолетовой конечности и супер-конформной инвариантности не получает петлевых поправок (т.е. сводится к однопетлевому условию $|h_1|^2+|h_2|^2+|h_3|^2=2g^2$) в двух случаях: когда параметры деформации выбраны в виде

$$h_1=hq,\ h_2=h/q,\ q=e^{i\pi\beta},\ h_3=0,$$

где $h,\ \beta$ – действительны, что соответствует β-деформации и суперпотенциалу вида

$$\mathcal{W}\ =\ ih[qTr(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)-\frac{1}{q}Tr(\Phi_1\Phi_3\Phi_2)],$$

а так же при выборе параметров деформации в виде

$$h_1=hq,\ h_3=h/q,\ q=e^{i\pi\beta},\ h_2=0,$$

где $h,\ \beta$ – действительны, что соответствует суперпотенциалу вида

$$\mathcal{W}=ih[qTr(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)-\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{3}\frac{Tr(\Phi_i^3)}{3}].\tag{38}$$

Известно, что для β-деформации, при действительном параметре деформации β, однопетлевое условие ультрафиолетовой конечности и суперконформной инвариантности не получает петлевых поправок во всех порядках ТВ. Вообще говоря не было получено строгого доказательства того, что второе найденное решение является точным во всех порядках ТВ, но косвенные данные основанные на анализе свойств интегрируемости теории и дальнейшие исследования условия конечности, которые позволяют отодвинуть границу появления поправок до 7 петель (!), говорят в пользу такого предположения.

Для амплитуд рассеяния в рассмотренных выше теориях, соответствующих найденным решениям, выделенные свойства амплитуд $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса, по крайней мере частично, сохраняются. Развитая в предыдущих главах методика построения инфракрасно безопасных наблюдаемых может быть применена к полученным теориям без каких либо существенных изменений.

В заключении кратко сформулированы полученные в диссертации результаты, которые и выносятся на защиту.

В дополнении представлено подробное описание вычислительных приемов, использовавшихся в работе, и приведены аналитические выражения для конечных частей инфракрасно безопасных наблюдаемых (инклюзивных дифференциальных сечений рассеяния) в $\mathcal{N} = 4$ максимально суперсимметричной теории Янга-Миллса.

Публикации автора по теме диссертации

1. Construction of Infrared Finite Observables in N = 4 Super Yang-Mills Theory. L.V. Bork, (Moscow, ITEP) , D.I. Kazakov, (Dubna, JINR; Moscow, ITEP) , G.S. Vartanov, (Dubna, JINR; Potsdam, Max Planck Inst.), A.V. Zhiboedov, (Dubna, JINR; Princeton U.). Phys.Rev.D81:105028,2010.

2. Infrared Safe Observables in N = 4 Super Yang-Mills Theory. L.V. Bork, (Moscow, ITEP) , D.I. Kazakov, (Dubna, JINR; Moscow, ITEP) , G.S. Vartanov, (Dubna, JINR) , A.V. Zhiboedov, (Dubna, JINR ; Moscow State U.). Phys.Lett.B681:296-303,2009.

3. Conformal Invariance in the Leigh-Strassler deformed N=4 SYM Theory. L.V. Bork, (Moscow, ITEP; Moscow Phys. Eng. Inst.) , D.I. Kazakov, (Dubna, JINR; Moscow, ITEP) , G.S. Vartanov, A.V. Zhiboedov, (Dubna, JINR). JHEP 0804:003,2008.

4. Conformal invariance = finiteness and beta deformed N=4 SYM theory. D.I. Kazakov, (Dubna, JINR; Moscow, ITEP) , L.V. Bork, (Moscow, ITEP; Moscow Phys. Eng. Inst.). JHEP 0708:071,2007.

5. Conformal Invariance in Deformed N=4 SYM Theory. D.I. Kazakov, (Dubna, JINR; Moscow, ITEP) , L.V. Bork, (Moscow, ITEP; Moscow Phys. Eng. Inst.). Contribution to special volume "Problems of Modern Theoretical Physics"in honor of Professor I.L. Buchbinder in the occasion of his 60th birthday.

6. Conformal invariance in Beta-deformed N=4 SYM theory. D.I. Kazakov, (Dubna, JINR; Moscow, ITEP) , L.V. Bork, (Moscow, ITEP; Moscow Phys. Eng. Inst.). Proceedings of international Workshop "Supersimmetries and Quatum Symmetries"(SQS 07) Dubna 2008. Proceedings of international Workshop.

Список литературы

[1] J.M. Maldacena, *The Large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Adv.Theor.Math.Phys. **2** (1998) 231; Int.J.Theor.Phys. **38** (1999) 1131.

[2] S.S. Gubser, I.R. Klebanov and A.M. Polyakov, *Gauge theory correlators from noncritical string theory*, Phys.Lett. **B428** (1998) 105;

E. Witten, *Anti-de Sitter space and holography*, Adv.Theor.Math.Phys. **2** (1998) 253.

[3] O. Lunin and J. Maldacena, *Deforming field theories with U(1) x U(1) global symmetry and their gravity duals*, JHEP **0505** (2005) 033.

[4] D.Z.Freedman and U.Gursoy, *Comments on the beta-deformed $\mathcal{N} = 4$ SYM theory*, JHEP **0511** (2005) 042, hep-th/0506128.

[5] N. Beisert, *On Yangian Symmetry in Planar $\mathcal{N} = 4$ SYM*, [arXiv:1004.5423v2 [hep-th]].

[6] Z. Bern, M. Czakon, L.J. Dixon, D.A. Kosower and V.A. Smirnov, *The Four-Loop Planar Amplitude and Cusp Anomalous Dimension in Maximally Supersymmetric Yang-Mills Theory*, Phys. Rev. D **75** (2007) 085010, [arXiv:hep-th/0610248];
F. Cachazo, M. Spradlin and A. Volovich, *Four-Loop Cusp Anomalous Dimension From Obstructions*, Phys. Rev. D **75** (2007) 105011, [arXiv:hep-th/0612309].

[7] Z. Bern, L. J. Dixon, M. Perelstein and J. S. Rozowsky, *Multi-leg one-loop gravity amplitudes from gauge theory*, Nucl. Phys. B **546**, 423 (1999) [arXiv:hep-th/9811140].

[8] Z. Bern, L. J. Dixon, D. C. Dunbar and D. A. Kosower, *One-Loop n-Point Gauge Theory Amplitudes, Unitarity and Collinear Limits*, Nucl. Phys. B **425** (1994) 217, [arXiv:hep-ph/9403226].

[9] Z. Bern, L. J. Dixon, D. C. Dunbar and D. A. Kosower, *Fusing gauge theory tree amplitudes into loop amplitudes*, Nucl. Phys. B **435** (1995) 59, [arXiv:hep-ph/9409265].

[10] Z. Bern, L. J. Dixon and D. A. Kosower, *Progress in one-loop QCD computations*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **46** (1996) 109, [arXiv:hep-ph/9602280].

[11] Z. Bern, Lance J. Dixon,R. Roiban, *Is $\mathcal{N} = 8$ supergravity ultraviolet finite?*, Phys. Lett. B**644** (2007) 265-271, [hep-th/0611086].

[12] Z. Bern, J.J.M. Carrasco, H. Johansson, *Progress on Ultraviolet Finiteness of Supergravity*, [arXiv:0902.3765 [hep-th]]

[13] T. Kinoshita, *Mass singularities of Feynman amplitudes*, J. Math.Phys. **3** (1962) 650;
T. D. Lee, M. Nauenberg, *Degenerate Systems and Mass Singularities*, Phys. Rev. **133** (1964) B1549.

[14] S. Weinberg, *Infrared photons and gravitons*, Phys. Rev. **140** (1965) B516.

[15] C. L. Basham, L. S. Brown, S. D. Ellis and S. T. Love, *Energy Correlations In Electron - Positron Annihilation: Testing QCD*, Phys. Rev. Lett. **41** (1978) 1585.
C. L. Basham, L. S. Brown, S. D. Ellis and S. T. Love, *Energy Correlations In Electron-Positron Annihilation In Quantum Chromodynamics: Asymptotically Free Perturbation Theory*, Phys. Rev. D **19** (1979) 2018.

[16] N. A. Sveshnikov and F. V. Tkachov, *Jets and quantum field theory*, Phys. Lett. B **382** (1996) 403, [arXiv:hep-ph/9512370].
M. Testa, *Exploring the light-cone through semi-inclusive hadronic distributions*, JHEP **9809** (1998) 006, [arXiv:hep-ph/9807204].

[17] G. P. Korchemsky, G. Oderda and G. Sterman, *Power corrections and nonlocal operators*, arXiv:hep-ph/9708346.
G. P. Korchemsky and G. Sterman, *Power corrections to event shapes and factorization*, Nucl. Phys. B **555** (1999) 335, [arXiv:hep-ph/9902341].
A. V. Belitsky, G. P. Korchemsky and G. Sterman, *Energy flow in QCD and event shape functions*, Phys. Lett. B **515** (2001) 297, [arXiv:hep-ph/0106308].

[18] D. M. Hofman and J. Maldacena, *Conformal collider physics: Energy and charge correlations*, JHEP **0805** (2008) 012, [arXiv:0803.1467 [hep-th]].

[19] S. D. Ellis, Z. Kunszt, D. E. Soper, *The One Jet Inclusive Cross-Section at α_s^3: Gluons Only.* Phys. Rev. D **40** (1989) 2188.

[20] S. D. Ellis, Z. Kunszt, D. E. Soper, *The one-jet inclusive cross-section at order α_s^3: Quarks and gluons.* Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 2121.

[21] Z. Kunszt, D. E. Soper, *Calculation of jet cross-sections in hadron collisions at order α_s^3*, Phys. Rev. D **46** (1992) 192.

[22] L. V. Bork, D. I. Kazakov, G. S. Vartanov and A. V. Zhiboedov, *Infrared Safe Observables in $\mathcal{N}=4$ Super Yang-Mills Theory*, Phys. Lett. B **681** (2009) 296, [arXiv:0908.0387 [hep-th]]; *Construction of Infrared Finite Observables*

in $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills Theory, Phys. Rev. D **81** (2010) 105028, arXiv:0911.1617 [hep-th].

[23] L. V. Bork, D. I. Kazakov, G. S. Vartanov and A. V. Zhiboedov, *Infrared Finite Observables in $\mathcal{N} = 8$ Supergravity*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **272** (2011), arXiv:1008.2302 [hep-th].

[24] D.I.Kazakov and L.V.Bork, *Conformal invariance = finiteness and beta deformed $\mathcal{N} = 4$ SYM theory*, JHEP **0708** (2007) 071, arXiv:0706.4245.

[25] L.V. Bork, D.I. Kazakov, G.S. Vartanov, A.V. Zhiboedov, *Conformal Invariance in the Leigh-Strassler deformed $\mathcal{N} = 4$ SYM Theory* JHEP **0804** (2008) 003, arXiv:0712.4132.