

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

на правах рукописи

Гани Вахид Абдулович

**ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ КИНКИ И ПУЗЫРЬКИ
КИРАЛЬНОГО КОНДЕНСАТА В НЕКОТОРЫХ
ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВЫХ МОДЕЛЯХ**

специальность 01.04.02 — теоретическая физика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МОСКВА 2009 г.

УДК 539.1.01

Работа выполнена в государственном научном центре Российской Федерации
Институте теоретической и экспериментальной физики, г. Москва

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук Кудрявцев А. Е.,
ГНЦ РФ ИТЭФ, г. Москва

Официальные оппоненты: кандидат физ.-мат. наук Абрикосов А. А.,
ГНЦ РФ ИТЭФ, г. Москва

доктор физ.-мат. наук Рубин С. Г.,
Московский инженерно-физический институт

Ведущая организация: Институт ядерных исследований, г. Москва

Защита диссертации состоится 19 мая 2009 года в 14 часов на заседании дис-
сертационного совета Д.201.002.01 в ГНЦ РФ ИТЭФ по адресу: г. Москва, ул.
Большая Черемушкинская, дом 25, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИТЭФ.

Автореферат разослан 17 апреля 2009 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук

Васильев В. В.

1. Общая характеристика работы

1.1. Актуальность темы

Спонтанное нарушение симметрии и механизм Хиггса играют чрезвычайно важную роль в современной теоретической физике. Топологические решения, называемые обычно кинками, представляют собой классические решения уравнений движения в $(1+1)$ -мерных моделях со спонтанным нарушением симметрии, имеющие различные асимптотики на пространственных бесконечностях. Для конечности энергии такого решения необходимо, чтобы асимптотические значения поля совпадали с вакуумами модели – минимумами потенциала лагранжиана. Свойства кинков модели "двойной синус-Гордон" исследуются в первой главе диссертации. При рассмотрении эволюции первоначально сформированного пузырька дезориентированного кирального конденсата во второй главе также проявляются свойства солитонных решений уравнения синус-Гордон.

В последние десятилетия значительно возрос интерес к всевозможным топологическим дефектам. Доменные стенки представляют собой, пожалуй, наиболее простой и наглядный пример топологических дефектов: они возникают в полевых моделях с лагранжианами, потенциальная часть которых имеет дискретный набор минимумов, и представляют собой полевые конфигурации, соединяющие эти минимумы. В третьей главе диссертации изучается пространственно-временная картина столкновения двух параллельных доменных стенок в модели с двумя действительными скалярными полями.

Решение, найденное и исследованное в четвертой главе диссертации, обладает свойствами, сходными со свойствами возможных Q -боллов в $(3+1)$ -мерном пространстве Минковского, которые, как полагают, могут иметь отношение к проблеме барионной асимметрии Вселенной. Один из механизмов, который может обуславливать барионную асимметрию, предложен Аффлекком и Дайном в публикации 1985 года. В соответствии с этим механизмом на поздних стадиях инфляции образуется конденсат, который может эволюционировать в Q -боллы, несущие такой же барионный заряд, но более выгодные энергетически, причем Q -боллы могут существовать до сих пор и давать вклад в темную материю. Значительно позже в работе А. Кусенко и др. было отмечено, что такие "реликтовые" Q -боллы могут быть важным фактором при рассмотрении вопроса

об устойчивости нейтронных звезд. Полученное точное решение типа топологического Q -болла в $(1+1)$ -мерном пространстве Минковского, наряду с его значением как приближения к $(3+1)$ -мерным Q -боллам, может представлять и самостоятельный интерес в связи с изучением доменных стенок и процессов на них.

1.2. Цели и задачи исследования

1. Объяснение явления квазирезонансов в столкновениях кинка и антикинка в модели "двойной синус-Гордон" при значении параметра $R = 0.5$ в рамках механизма резонансного обмена энергией. Качественное объяснение сдвига резонансной частоты в системе кинк-антикинк по сравнению с частотой уровня дискретного спектра в потенциальной яме уединенного кинка.
2. Численное и аналитическое исследование временной эволюции первоначально сформированного пузырька дезориентированного кирального конденсата. Исследование зависимости процесса распада от самодействия пионных полей, выяснение возможных наблюдаемых следствий нелинейности процесса.
3. Исследование процесса столкновения двух параллельных доменных стенок в суперсимметричной модели с двумя действительными скалярными полями. Рассмотрение случая как BPS-насыщенных, так и случая не BPS-насыщенных конфигураций.
4. Исследование свойств точного топологического решения – $U(1)$ -заряженного солитона в модели с одним действительным и одним комплексным скалярными полями в $(1+1)$ -измерениях. Исследование его устойчивости относительно распада в конфигурацию типа "кинк + плоские волны" (из энергетических соображений), а также устойчивости в рамках линейной теории возмущений.

1.3. Научная новизна

1. Для объяснения явления квазирезонансов в столкновениях кинка и антикинка в модели "двойной синус-Гордон" при значении параметра $R = 0.5$ развит метод расчета частот дискретного спектра возбуждений системы кинк-антикинк. Учтено взаимное влияние уровней в потенциальных ямах,

соответствующих кинку и антикинку. При некоторых значениях параметра модели обнаружено одновременное появление как квазирезонансов, так и окон разлета.

2. При исследовании эволюции первоначально сформированного пузырька дезориентированного кирального конденсата выяснено, что при некоторых значениях параметров модели возможно образование долгоживущих источников пионных полей в центре первоначального пузырька. Для пузырька большой амплитуды обнаружено наличие продолжительной предраспадной стадии, что является следствием существования многосолитонных решений уравнения синус-Гордон.
3. В качестве динамической переменной при рассмотрении процесса столкновения двух параллельных доменных стенок в суперсимметричной модели с двумя действительными скалярными полями использован внутренний параметр BPS-насыщенной конфигурации, имеющий смысл расстояния между стенками.
4. В столкновениях доменных стенок, не являющихся BPS-насыщенными, обнаружено наличие критического значения v_{cr} начальной скорости. При начальных скоростях $v_i < v_{cr}$ наблюдается отражение, не сопровождающееся изменением вакуумного состояния между стенками. При значениях начальной скорости $v_i > v_{cr}$ вакуумное состояние между стенками в результате столкновения изменяется.
5. Найдено точное топологическое решение – $U(1)$ -заряженный солитон в модели с одним действительным и одним комплексным скалярными полями в $(1+1)$ -измерениях. Исследована его динамическая устойчивость в рамках линейной теории возмущений.

1.4. Результаты, выносимые на защиту

1. Для объяснения явления квазирезонансов в столкновениях кинка и антикинка в модели "двойной синус-Гордон" при значении параметра $R = 0.5$ развит метод расчета частот дискретного спектра возбуждений системы кинк-антикинк. Учтено взаимное влияние уровней в потенциальных ямах, соответствующих кинку и антикинку.
2. При исследовании эволюции первоначально сформированного пузырька дезориентированного кирального конденсата выяснено, что при некото-

рых значениях параметров модели возможно образование долгоживущих осциллирующих состояний в центре первоначального пузырька, что является следствием существования многосолитонных решений уравнения синус-Гордон.

3. При рассмотрении процесса столкновения двух параллельных доменных стенок в суперсимметричной модели с двумя действительными скалярными полями в качестве динамической переменной может быть использован внутренний параметр BPS-насыщенной конфигурации, имеющий смысл расстояния между стенками.
4. В столкновениях доменных стенок, не являющихся BPS-насыщенными, присутствует критическое значение v_{cr} начальной скорости. При начальных скоростях $v_i < v_{cr}$ наблюдается отражение, не сопровождающееся изменением вакуумного состояния между стенками. При значениях начальной скорости $v_i > v_{cr}$ вакуумное состояние между стенками в результате столкновения изменяется.
5. В модели с одним действительным и одним комплексным скалярными полями в $(1+1)$ -измерениях найдено точное топологическое решение – $U(1)$ -заряженный солитон. Исследована его динамическая устойчивость в рамках линейной теории возмущений.

1.5. Апробация работы и публикации

Основной материал диссертации опубликован в 6 статьях в журналах "Ядерная физика", "Журнал экспериментальной и теоретической физики", "Журнал вычислительной математики и математической физики", "Physical Review E", докладывался на конференции "Научная сессия МИФИ".

1.6. Структура и объем диссертации

Диссертация изложена на 125 страницах и состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения, списка иллюстраций, предметного указателя и списка цитируемой литературы. В тексте диссертации содержится 31 иллюстрация, список литературы состоит из 110 пунктов.

2. Краткое содержание диссертации

Во **введении** описывается объект исследования, обсуждаются цели и задачи диссертации, актуальность темы и научная новизна. Описана структура диссертации, практическая ценность полученных результатов, апробация результатов.

Глава 1 диссертации посвящена исследованию механизма резонансного обмена энергией в процессе столкновения кинка и антикинка модели "двойной синус-Гордон" (ДсГ). Явление резонансной передачи энергии в столкновениях конфигураций типа уединенных волн было обнаружено и исследовано применительно к модели $\lambda\phi^4$ и "двойной синус-Гордон" в $(1+1)$ измерениях. Однако при некоторых значениях параметра модели в столкновениях кинков уравнения ДсГ наблюдались так называемые квазирезонансы, механизм возникновения которых, как предполагалось, аналогичен механизму резонансного обмена энергией. Но при этом в спектре локализованных возбуждений кинка ДсГ не было найдено подходящей дискретной моды, в которую могла бы переходить часть кинетической энергии кинков. Предложен новый подход к проблеме резонансных частот. Показано, что спектр возбуждений следует рассматривать для системы кинк-антикинк в целом, что нельзя пренебречь взаимным влиянием уровней дискретного спектра кинка и антикинка, расположенных вблизи границы непрерывного спектра.

Пункт **1.1** знакомит читателя с понятием "кинк" на примере модели $\lambda\phi^4$ в $(1+1)$ измерениях. Показано, как выглядит дискретный спектр возбуждений кинка (уровни энергии, отвечающие им собственные функции).

Далее, в пункте **1.2** изложена история открытия и исследования механизма резонансного обмена энергией в кинк-антикинк столкновениях в модели $\lambda\phi^4$. Обсуждаются трудности определения критической начальной скорости v_{cr} сталкивающихся кинков, ниже которой кинки образовывали связанное состояние, а выше – испытывали отражение и расходились на бесконечности. В разных работах приводились разные экспериментальные значения для v_{cr} . Как оказалось, эти расхождения не связаны с ошибками в численных экспериментах, и привели к открытию нового интересного явления: в области начальных скоростей $0.1926 < v_i < v_{cr} \approx 0.2598$ наблюдались так называемые "окна разлета" – узкие промежутки значений начальной скорости, в которых наблюдался разлет кинков на бесконечность после двух соударений. Такое явление, имеющее характер резонанса, указывало на наличие нетривиального механизма захвата, отличающегося от первоначально предположенного захвата за счет

потери энергии на излучение.

В связи с предложенным механизмом было получено феноменологическое условие для возможности возвращения энергии в кинетическую энергию $K\bar{K}$ -системы

$$\omega_1 T_{12}(v_n) = \delta + 2\pi n, \quad (1)$$

где ω_1 – частота первой дискретной моды кинка, T_{12} – временной интервал между первым и вторым столкновениями кинков, n – целое число, а δ – некоторая постоянная фаза. Отметим также, что потери на излучение при столкновениях малы по сравнению с энергией, запасаемой в дискретной моде возбуждений кинка. Например, при скоростях $v_i \leq 0.4$ она на порядок превосходит энергию излучения.

Модель ”двойной синус-Гордон” вводится в рассмотрение в пункте **1.3**. Динамика действительного скалярного поля ϕ описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi) \quad (2)$$

с потенциалом

$$V(\phi) = -\frac{4}{1 + 4|\eta|} \left(\eta \cos \phi - \cos \frac{\phi}{2} \right). \quad (3)$$

Параметр η может принимать любые вещественные значения. В нашей работе рассматривалась область значений параметра $\eta > 0$. В этом случае удобно ввести новый параметр R , связанный с η соотношением

$$\eta = \frac{1}{4} \sinh^2 R.$$

Уравнение движения для поля ϕ имеет статическое топологическое решение в форме 4π -кинка (антикинка)

$$\phi_{K(\bar{K})}(x) = 4\pi n \pm 4 \arctan \left(\frac{\sinh x}{\cosh R} \right). \quad (4)$$

Знак ’+’ соответствует кинку, знак ’−’ – антикинку, n – произвольное целое число.

В более ранних работах изучалось $K\bar{K}$ -рассеяние при нескольких различных значениях параметра R . При $R = 1.2$ наблюдалась типичная картина окон разлета, похожая на случай модели $\lambda\phi_2^4$. Однако при малых R , а именно при $R = 0.5$, обнаружилось новое явление – так называемые квазирезонансы. Суть явления в следующем. При всех начальных скоростях $v_i < v_{cr}$ происходит захват и образование связанного состояния $K\bar{K}$, т.е. окон разлета не

наблюдается. Тем не менее, на графике зависимости времени между вторым и третьим столкновениями T_{23} от начальной скорости имеется серия четких максимумов (рис. 1). Такое поведение зависимости $T_{23}(v_i)$ указывает на то,

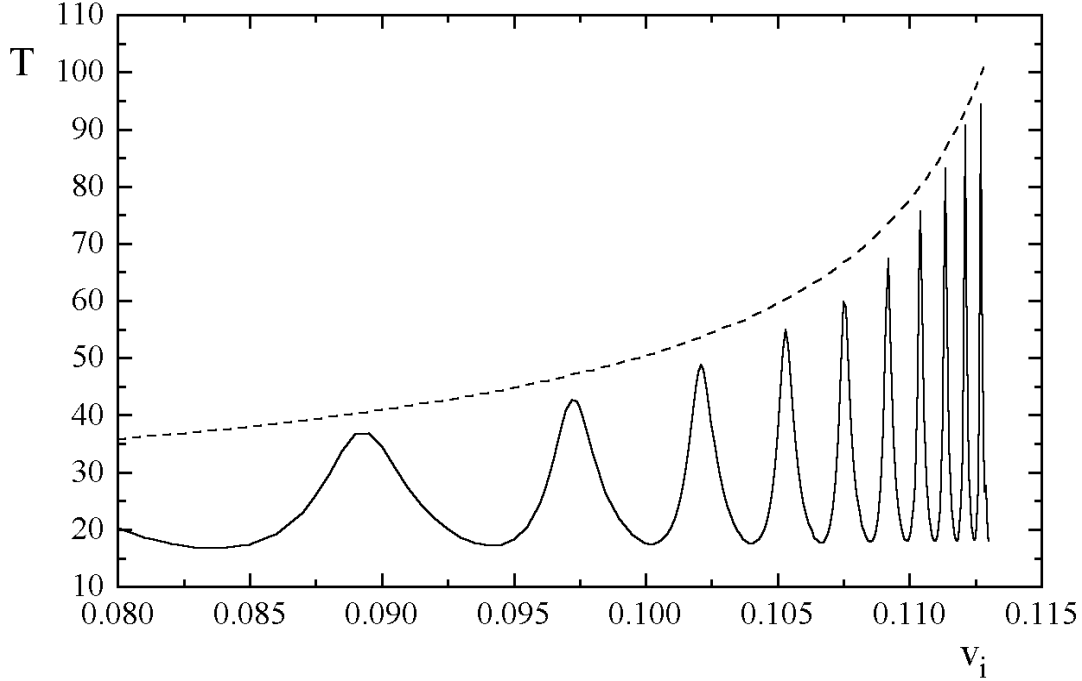


Рис. 1: зависимости времени T_{12} между первым и вторым столкновениями кинка и антикинка (штриховая кривая) и времени T_{23} между вторым и третьим столкновениями (сплошная кривая) от начальной скорости v_i при $R = 0.5$.

что в системе действует механизм резонансного обмена энергией, однако возвращенной в трансляционную моду энергии недостаточно для ухода кинков на бесконечности после второго соударения. Кроме того, оказывается, что частота колебаний, в которые передается часть кинетической энергии при первом соударении, т.е. ω_1 в резонансном соотношении (1), меньше частоты локализованных возбуждений ДсГ-кинка (его первой дискретной моды) при данном R .

В пункте 1.4 показано, что квазирезонансы имеет ту же природу, что и окна разлета, но при этом кинетическая энергия сталкивающихся кинка и антикинка частично переходит в возбуждение дискретной моды системы кинк-антикинк как целого, которая не совпадает с дискретной модой уединенного кинка (антикинка). Приведены результаты численного исследования поведения уровней дискретного спектра возбуждений в зависимости от расстояния

между кинком и антикинком. При этом наблюдается качественное и полуквантовое согласие с частотой, извлекаемой из численных экспериментов по столкновениям кинка и антикинка.

Для нахождения спектра возбуждений системы кинк-антикинк применялся следующий прием. В уравнение движения, следующее из лагранжиана (2), подставляем $\phi(x, t)$ в виде

$$\phi(x, t) = 2\pi + \phi_K(x - x_0) + \phi_{\bar{K}}(x + x_0) + \delta\phi(x, t).$$

Такая конфигурация соответствует кинку и антикинку, помещенным в точки $x = \pm x_0$ плюс некоторое малое возмущение $|\delta\phi| \ll 1$. Учитывая, что $\phi_K(x)$ и $\phi_{\bar{K}}(x)$ являются решениями уравнения движения, получим для $\delta\phi$ следующее линейризованное уравнение:

$$\delta\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + \delta\phi \cdot \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=2\pi+\phi_K+\phi_{\bar{K}}} = Q(x, x_0), \quad (5)$$

где

$$Q(x, x_0) = \left. \frac{\partial V}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_K} + \left. \frac{\partial V}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_{\bar{K}}} - \left. \frac{\partial V}{\partial \phi} \right|_{\phi=2\pi+\phi_K+\phi_{\bar{K}}}. \quad (6)$$

Неоднородность $Q(x, x_0)$ в уравнении (5) является следствием того факта, что конфигурация "кинк+антикинк" не является решением уравнения движения, и характеризует перекрытие кинка и антикинка. Далее, рассмотрим уравнение (5) с зануленной правой частью, в которое подставим $\delta\phi$ в виде

$$\delta\phi(x, t) = e^{i\omega t} \chi(x). \quad (7)$$

Тогда для функции $\chi(x)$ получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение (о.д.у.) типа стационарного уравнения Шредингера:

$$-\chi'' + U(x, x_0)\chi = \omega^2 \chi, \quad (8)$$

где

$$U(x, x_0) = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=2\pi+\phi_K+\phi_{\bar{K}}}. \quad (9)$$

Явное выражение для потенциала $U(x, x_0)$ достаточно громоздко и выписано в приложении, его форма сильно зависит от x_0 . Заметим, что, кроме того, форма потенциала (9) зависит от параметра модели (R или η) и $U(x, x_0) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \pm\infty$ и конечных x_0 . Следовательно, $\omega^2 < 1$ составляют дискретный спектр, а $\omega^2 > 1$ – непрерывный спектр возбуждений. При больших $x_0 \gg 1$

потенциал $U(x, x_0)$ как функция x выглядит как две одинаковые ямы, разделенные расстоянием порядка $2x_0$. Каждая потенциальная яма в отдельности содержит один или более дискретных уровней, соответствующих локализованным возбуждениям уединенного кинка (антикинка). В процессе столкновения ДсГ-кинки проходят друг через друга, т.е. x_0 уменьшается до нуля и затем начинает снова увеличиваться. При малых x_0 расстояние между ямами мало и дискретные уровни в них не являются независимыми. При движении кинков из бесконечностей навстречу друг другу уровни начинают расщепляться, и при $x_0 \lesssim 1$ совместный потенциал (9) системы $K\bar{K}$ сильно отличается от того, что было бы для уединенного кинка (антикинка).

Нами было выполнено численное моделирование процесса столкновения кинка и антикинка при $R = 0.5$. Полученная зависимость $T_{23}(v_i)$ аналогична приведенной в более ранней работе, с характерными максимумами – квазирезонансами. Кроме того, численное моделирование $K\bar{K}$ столкновений при $R = 0.4$ и $R = 0.6$ дает похожие результаты. При $R = 0.4$ наблюдается серия квазирезонансных пиков, похожая на случай $R = 0.5$. При $R = 0.6$ на кривой $T_{23}(v_i)$ на месте некоторых пиков появляются ”окна разлета” (рис. 2). Это подтверждает, что квазирезонансы и ”окна разлета” – явления одной природы и с увеличением параметра R квазирезонансные пики превращаются в ”окна разлета”. В некоторой промежуточной области значений R оба явления сосуществуют, а при дальнейшем увеличении параметра остаются лишь ”окна разлета”.

Для поиска дискретных уровней потенциала (9) использовался тот факт, что волновая функция состояния дискретного спектра экспоненциально падает с расстоянием. Стационарное уравнение Шредингера (8) решалось численно с граничным условием в виде $\chi \sim \exp(x\sqrt{1-\omega^2})$ при $x = -50$. В результате получалась зависимость χ при $x = +50$ от параметра ω . Если ω не соответствует дискретному уровню, χ экспоненциально растет при положительных x . Если же значение ω совпадает с положением дискретного уровня, то волновая функция χ экспоненциально мала при больших x . Реально в вычислениях наблюдалось изменение знака $\chi(x = 50)$ в момент, когда изменяющаяся величина ω проходила дискретный уровень. Отметим, что этот метод трудно применять для поиска очень мелких уровней. Дело в том, что в этом случае волновая функция спадает очень медленно и приходится брать очень далекие начальную и конечную точки в вычислении $\chi(x)$.

В пункте 1.5 кратко описаны методы численных расчетов и сформулированы заключительные замечания о проделанной работе.

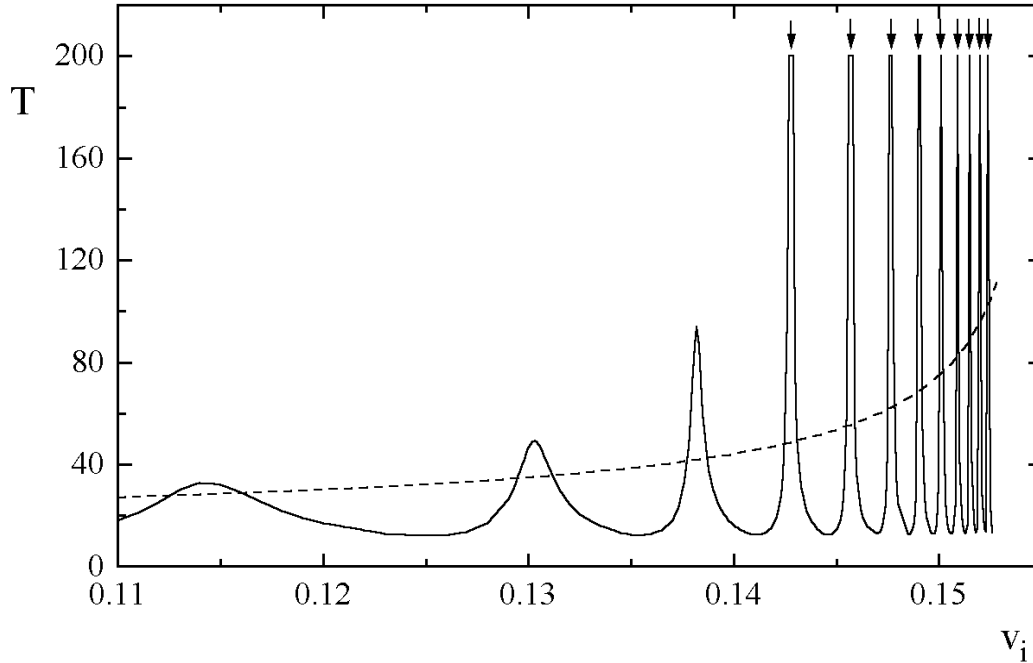


Рис. 2: зависимости времени T_{12} между первым и вторым столкновениями кинка и антикин-ка (штриховая кривая) и времени T_{23} между вторым и третьим столкновениями (сплошная кривая) от начальной скорости v_i при $R = 0.6$. Стрелками указаны положения "окон разлета".

Глава 2 диссертации посвящена исследованию эволюции первоначально сформированного пузырька дезориентированного кирального конденсата (ДКК) – области пространства, в которой вакуумное состояние повернуто в изотопическом пространстве полей $(\sigma, \vec{\pi})$ относительно вакуума в остальном пространстве. Предполагается, что распад высоковозбужденных состояний, образующихся в столкновениях при высоких энергиях, может происходить через образование ДКК, который, в свою очередь, будет распадаться в обычный вакуум с излучением π -мезонов. Отметим, что, в отличие от большого количества других работ по тематике ДКК, мы поставили и качественно и полуколичественно решили вопрос о пространственно-временной картине распада пузырька ДКК. Для упрощения рассмотрения использовалась упрощенная модель с парой полей σ и π . Существенным и новым результатом исследования является продемонстрированная возможность образования долгоживущих излучающих состояний.

В пункте **2.1** рассказывается о том, что такое ДКК, об истории его иссле-

дования, обсуждаются возможные наблюдаемые следствия рождения ДКК в эксперименте, приводятся некоторые основные формулы. Также сформулирована постановка задачи, которая в дальнейшем решается в (1+1) и (3+1) измерениях. Рассматривается упрощенная модель с парой полей σ и π , на которые наложено ограничение

$$\sigma^2 + \pi^2 = f_\pi^2. \quad (10)$$

В такой модели удобно ввести новую переменную $\phi \in [0, 2\pi]$, где

$$\pi = f_\pi \sin \phi, \quad \sigma = f_\pi \cos \phi. \quad (11)$$

Далее в терминах поля ϕ рассматривается эволюция первоначально сформированных пузырьков ДКК с различными начальными параметрами. Пункт **2.2** посвящен изучению эволюции пузырька ДКК в (1+1) измерениях. Рассмотрены следующие случаи: А) безмассового поля; Б) массивного поля; В) случай, когда динамика поля описывается нелинейным уравнением типа синус-Гордон. В пункте **2.3** рассмотрен трехмерный сферически симметричный случай. Показано, что полевое самодействие (нелинейность) приводит к образованию решения типа бризера, которое медленно распадается и сохраняет часть энергии в центре первоначального пузырька ДКК. Пункт **2.4** посвящен изучению процесса распада домена ДКК большой амплитуды. Динамика поля ϕ при этом определяется нелинейным уравнением

$$\phi_{tt} - \phi_{rr} - \frac{2}{r}\phi_r + \frac{m^2}{n} \sin(n\phi) = 0, \quad (12)$$

где n – целое число, отличное от нуля, m – массовый параметр. Начальные условия задавались в виде

$$\phi(r, 0) = \frac{2\pi}{1 + (r/r_0)^K}, \quad \phi_t(r, 0) \equiv 0, \quad (13)$$

где K – большое положительное число, которое в наших расчетах полагалось равным 20. В эволюции первоначально сформированного пузырька большой амплитуды можно выделить достаточно продолжительную предраспадную стадию с малым излучением. Эта первая стадия характеризуется расщеплением оболочки первоначального пузырька на несколько концентрических подболочек различных радиусов и меньших амплитуд. На следующем этапе происходит взаимодействие этих концентрических подболочек между собой. В конце мы наблюдаем излучение основной части энергии первоначального пузырька в виде волн малой амплитуды, сопровождающееся образованием локализованного квазистабильного бризера в центре. Этот достаточно сложный

процесс эволюции пузырька ДКК можно назвать запаздывающим распадом. Численные расчеты показали, что эволюция пузырька сильно зависит от безразмерного параметра $\xi = mr_0$. В случае малых $\xi < \xi_{cr} \sim 2$ в модели с $n = 2$ наблюдается быстрый распад пузырька ДКК, сопровождающийся образованием бризера. Однако при $\xi > \xi_{cr}$ наблюдается расщепление первоначальной 2π -оболочки на пару 1π -оболочек. Разделившиеся 1π -оболочки эволюционируют по-разному. Внутренний 1π -пузырек ведет себя как обычный пузырек ДКК большой амплитуды в случае $n = 1$: он схлопывается и снова расширяется, излучая при этом часть своей энергии. Внешняя 1π -оболочка расширяется, затем останавливается и начинает сжиматься. Максимальный радиус, который достигается в процессе расширения, может быть оценен из простых энергетических соображений.

В численных экспериментах мы наблюдали также расщепление 2π -оболочки первоначального пузырька ДКК (13) в модели с $n = 3$. В этом случае 2π -оболочка сначала расщепляется на две подоболочки амплитуд $2\pi/3$ и $4\pi/3$, а затем $4\pi/3$ -оболочка в свою очередь разделяется еще на две $2\pi/3$ -оболочки. В дальнейшем происходит взаимодействие образовавшихся $2\pi/3$ -оболочек между собой.

В пункте 2.5 сформулированы заключительные замечания, касающиеся процессов, исследованных во второй главе диссертации.

В **третьей главе** исследуется процесс столкновения доменных стенок в модели с двумя действительными скалярными полями в $(1+1)$ -мерном пространстве-времени. Такая модель обсуждалась в работах М. Шифмана, М. Волошина и С. Троицкого при исследовании статических конфигураций скалярных компонент суперполей. Рассматривается лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - U(\phi, \chi) \quad (14)$$

с потенциалом

$$U(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{\lambda} - \lambda \phi^2 - \alpha \chi^2 \right)^2 - 2\alpha^2 \phi^2 \chi^2. \quad (15)$$

Здесь m , λ и α – вещественные положительные постоянные. Поля ϕ и χ безразмерные, а константы имеют размерность массы: $[m] = [\lambda] = [\alpha] = M$. Потенциал (15) имеет четыре вырожденных минимума – точки $\left(\pm \frac{m}{\lambda}, 0 \right)$ и $\left(0, \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda\alpha}} \right)$ на плоскости (ϕ, χ) . Следовательно, в модели возможно шесть типов доменных стенок, разделяющих области пространства с различными ва-

куумами. Поставлена и решена задача о временной картине процесса столкновения двух плоских доменных стенок. При этом в случае BPS-насыщенных конфигураций в исследовании удалось продвинуться аналитически, а в случае не BPS-насыщенных – в основном численно.

Для удобства дальнейшего изложения будем пользоваться полевыми переменными f и h , связанными с ϕ и χ соотношениями

$$\phi = \frac{m}{\lambda} f, \quad \chi = \frac{m}{\sqrt{\lambda\alpha}} h. \quad (16)$$

В новых переменных (f, h) вакуумные состояния рассматриваемой модели – точки $(\pm 1, 0)$ и $(0, \pm 1)$.

При $\lambda/\alpha = 4$ и $m = 1$ имеются решения типа доменных стенок, соединяющих различные вакуумы модели (нумерация вакуумов введена на рис. 3):

$$\begin{aligned} f_{13}(x - x_0) = f_{14}(x - x_0) &= \frac{1}{2} \left(\tanh \frac{x - x_0}{2} - 1 \right), \\ h_{13}^2(x - x_0) = h_{14}^2(x - x_0) &= \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{x - x_0}{2} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь x_0 – постоянная интегрирования, определяющая положение стенки и не

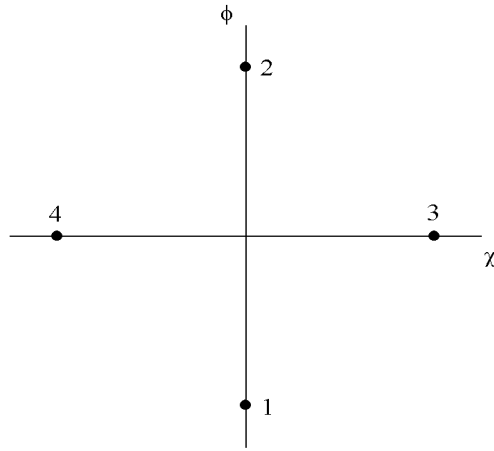


Рис. 3: расположение вакуумов рассматриваемой модели.

влияющая на энергию статической конфигурации. Решение (17) соответствует стенкам, соединяющим вакуумы 1 и 3 или 1 и 4, в зависимости от выбора знака при извлечении квадратного корня из h^2 . Аналогично для стенок $3 \rightarrow 2$ и $4 \rightarrow 2$:

$$\begin{aligned} f_{32}(x - x_0) = f_{42}(x - x_0) &= \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{x - x_0}{2} \right), \\ h_{32}^2(x - x_0) = h_{42}^2(x - x_0) &= \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \frac{x - x_0}{2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Кроме того, в модели имеются решения, соединяющие вакуумы 1 и 2:

$$\begin{aligned} f_{12}(x) &= \frac{1}{2} \left(\tanh \frac{x+s}{2} + \tanh \frac{x-s}{2} \right), \\ h_{12}^2(x) &= \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \frac{x+s}{2} \tanh \frac{x-s}{2} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что $f_{12}(x)$ представляет собой просто сумму $f_{13}(x+s) + f_{32}(x-s)$. Это справедливо при любых s . При больших $s \gg 1$ с экспоненциальной точностью выполняется также равенство

$$h_{12}(x) \approx h_{13}(x+s) + h_{32}(x-s).$$

(Для определенности выбран знак "+" при извлечении квадратного корня из $h_{12}^2(x)$.) Таким образом, при $s \gg 1$ конфигурация (19) имеет вид двух стенок, расположенных в точках $x = \pm s$. При $x = -s$ происходит переход между вакуумами 1 и 3, а при $x = +s$ – между вакуумами 3 и 2.

В пункте **3.1** разъясняется понятие BPS-насыщенных и не BPS-насыщенных конфигураций, вводится понятие топологического тока и топологического заряда, проясняются свойства модели, подлежащей дальнейшему исследованию. Также выписаны решения типа доменных стенок (17), (18), (19), имеющие различный топологический заряд. В следующих пунктах эти решения будут использованы для моделирования процесса столкновения плоских параллельных доменных стенок, разделяющих области пространства с различными вакуумными состояниями.

Далее, в **3.2** исследована временная зависимость для BPS-насыщенных конфигураций. Рассмотрена задача о развитии во времени процесса столкновения стенок $1 \rightarrow 3$ и $3 \rightarrow 2$. При этом применялся следующий подход. Подставим выражения (19), которые описывают конфигурацию типа стенок $1 \rightarrow 3$ и $3 \rightarrow 2$ в точках $x = -s$ и $x = +s$, в выражение для энергии, получающееся из лагранжиана с учетом определения полей f и h через поля ϕ и χ . Предполагая, что параметр s не является константой, а зависит от времени t (при этом приближенность процедуры состоит в том, что функции (19) при $s = s(t)$ не обязаны быть решениями уравнений движения для полей f и h), получаем, что $2s(t)$ имеет смысл зависимости расстояния между стенками от времени. Для зависимости $s(t)$ был выписан эффективный гамильтониан, из которого получено о.д.у., проинтегрированное численно. В результате численного интегрирования получена следующая картина столкновения стенок $1 \rightarrow 3$ и $3 \rightarrow 2$: при любых начальных скоростях стенки сталкиваются и расходятся, однако конечная конфигурация представляет собой две удаляющиеся параллельные стенки $1 \rightarrow 4$

и $4 \rightarrow 2$, т.е. происходит смена вакуумного состояния между стенками (см. рис. 4).

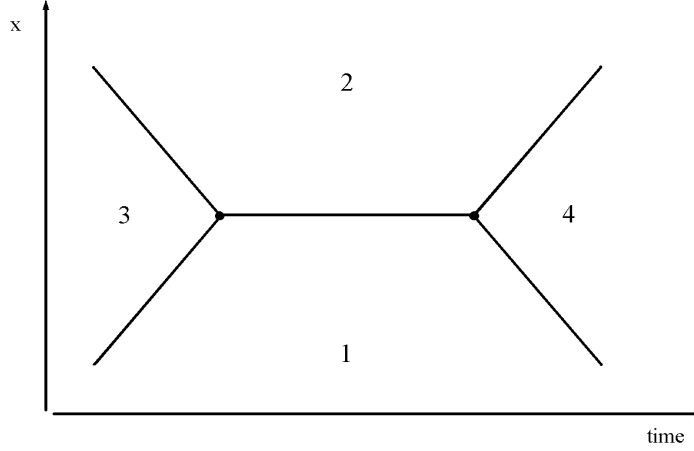


Рис. 4: схематическое изображение процесса столкновения доменных стенок $1 \rightarrow 3$ и $3 \rightarrow 2$. Цифрами обозначены вакуумные состояния в соответствии с их расположением на рис. 3.

Процесс столкновения доменных стенок $3 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 4$ (а также $3 \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow 4$) изучен в пункте **3.3**. В отличие от предыдущего случая, не существует точного решения, дающего конфигурацию типа двух последовательно расположенных стенок $3 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 4$ по аналогии с решением $1 \rightarrow 2$ (19). Это связано с отсутствием в рассматриваемой модели BPS-насыщенных конфигураций, соединяющих вакуумы 3 и 4. По этой причине мы вынуждены сконструировать "вариационную" конфигурацию типа $3 \rightarrow 2 \rightarrow 4$. Это можно сделать, например, взяв суперпозицию двух "элементарных" стенок $3 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 4$, расположенных в точках $x = -x_0$ и $x = +x_0$ соответственно:

$$\begin{aligned} f_{324}(x, x_0) &= f_{32}(x + x_0) + f_{24}(x - x_0) - 1, \\ h_{324}(x, x_0) &= h_{32}(x + x_0) + h_{24}(x - x_0), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} f_{32}(x) &= \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{x}{2} \right), & h_{32}(x) &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \tanh \frac{x}{2} \right)}, \\ f_{24}(x) &= \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \frac{x}{2} \right), & h_{24}(x) &= -\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{x}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Процесс столкновения стенок $3 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 4$ исследовался численно. При этом решалась система уравнений движения для полей f и h , следующих из лагранжиана модели (14). В качестве начальных условий бралась конфигурация (20), где стенки $3 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 4$ были расположены на некотором расстоянии $2x_0 \gg 1$

и двигались навстречу друг другу с некоторыми начальными скоростями v_i . В зависимости от начальной скорости наблюдались различные типы эволюции. Пока v_i была меньше некоторого критического значения v_{cr}^{num} , стенки $3 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 4$ сталкивались и затем расходились на бесконечности. В результате мы получали после столкновения снова конфигурацию типа $3 \rightarrow 2 \rightarrow 4$. При начальных скоростях $v_i > v_{cr}^{num}$ столкновение стенок происходило несколько иначе. Отличие в том, что после столкновения мы наблюдали конфигурацию типа $3 \rightarrow 1 \rightarrow 4$. Для критической скорости мы получили значение $v_{cr}^{num} \approx 0.9120$. Присутствие различных режимов в столкновениях является следствием того факта, что энергия конфигурации $3 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ не вырождена по параметру x_0 , т.е. имеется "потенциальное" взаимодействие (отталкивание) между доменными стенками $3 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 4$. Следует заметить, что в случае BPS-насыщенных стенок потенциальное взаимодействие отсутствует. В рамках потенциального подхода можно объяснить и наличие критической скорости. Нами было получено значение критической скорости $v_{cr}^* \approx 0.8874$, которое близко к "экспериментальному" численному значению v_{cr}^{num} .

В пункте **3.4** сформулированы заключительные замечания о проведенном аналитическом и численном исследовании процессов столкновения различных доменных стенок в обсуждаемой модели.

Глава 4 диссертации посвящена изучению свойств топологического солитона в системе двух взаимодействующих скалярных полей – действительного и комплексного.

В пункте **4.1** этой главы проводится краткий обзор вопроса, приводятся основные приложения рассматриваемой модели, обсуждаются заряженные топологические дефекты в различных теориях.

Пункт **4.2** содержит общие сведения о модели, а также рассмотрение вариационной конфигурации типа нетопологического и топологического Q-боллов в системе двух взаимодействующих скалярных полей в (1+1) измерениях с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi^* + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - h^2 \phi^2 \xi \xi^* - \frac{m^2}{2} (\phi^2 - v^2)^2. \quad (21)$$

Здесь ϕ – действительное скалярное поле, ξ – комплексное скалярное поле; h, m, v – вещественные константы; $\mu = 0, 1$. Лагранжиан (21) впервые рассматривался в работе Фридберга, Ли и Сирлина в 1976 году. Он обладает симметрией относительно глобальных U(1) преобразований $\xi \rightarrow \xi e^{i\alpha}$, а также относительно дискретных преобразований $\phi \rightarrow -\phi$. Инвариантности лагранжиана относительно U(1) преобразований соответствует сохраняющийся ток

$j^\mu = \frac{1}{i}(\xi^* \partial^\mu \xi - \xi \partial^\mu \xi^*)$ и заряд $Q = \int j^0 dx$. Симметрии $\phi \rightarrow -\phi$ соответствует сохраняющийся топологический ток $i^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi$ и топологический заряд $P = \int i^0 dx$.

Функционал энергии

$$H[\phi, \xi] = \int dx \left(\left| \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + h^2 \phi^2 \xi \xi^* + \frac{m^2}{2} (\phi^2 - v^2)^2 \right) \quad (22)$$

рассмотрен на классе пробных функций вида

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & |x| < l/2, \\ \pm v \left[1 - \exp\left(-\frac{x+l/2}{a}\right) \right], & x \leq -l/2, \\ v \left[1 - \exp\left(-\frac{x-l/2}{a}\right) \right], & x \geq l/2, \end{cases} \quad (23)$$

$$\xi(x, t) = \begin{cases} 0, & |x| > l/2, \\ A \cos(\Omega x) \exp(i\Omega t), & |x| \leq l/2, \end{cases} \quad (24)$$

где l и a – произвольные положительные константы, подлежащие варьированию. Знаки ”+” и ”–” в (23) берутся соответственно для нетопологических и для топологических пробных функций. Мы рассматриваем состояние с наименьшей энергией, для которого $|\xi(x)|$ не обращается в нуль на интервале $|x| < l/2$, поэтому $\Omega = \frac{\pi}{l}$. Минимальное значение энергии при фиксированном

U(1) заряде Q достигается при $l_0 = \frac{\sqrt{2\pi Q}}{mv^2}$, $a_0 = \frac{1}{mv} \sqrt{\frac{6}{11}}$ и равно

$$E_{min} = mv^2 \sqrt{2\pi Q} + mv^3 \sqrt{\frac{11}{6}}. \quad (25)$$

Выражение (25) можно сравнить с энергией конфигурации ”кинк + плоские волны”:

$$\phi = v \tanh(mvx), \quad \xi = \sqrt{\frac{Q}{2hvL}} e^{ihvt},$$

$$\tilde{E}^0 = hvQ + \frac{4}{3}mv^3. \quad (26)$$

Поскольку энергия плосковолновых конфигураций зависит от заряда линейно (26), то при больших зарядах энергетически выгодной оказывается локализованная конфигурация, энергия которой зависит от Q как \sqrt{Q} (25). Это означает, что при больших зарядах $Q > Q^{cr}$ в системе существование локализованного решения энергетически выгодно. Заметим, что вариационная оценка (25) одинаково применима как к нетопологической, так и к топологической конфигурациям. Отсюда получаются различные выражения для значений критического заряда Q^{cr} , поскольку энергию топологической конфигурации нужно сравнивать с (26), а нетопологической – с энергией плосковолнового решения, несущего заряд Q , т.е. с $h\nu Q$. Получены следующие значения Q^{cr} .

1. Нетопологический Q-болл:

$$Q^{cr} = \frac{m^2 v^2}{h^2} \left(\pi + \frac{h}{m} \sqrt{\frac{11}{6}} + \sqrt{\pi^2 + 2\pi \frac{h}{m} \sqrt{\frac{11}{6}}} \right). \quad (27)$$

2. Топологический Q-болл:

$$\tilde{Q}^{cr} = \frac{m^2 v^2}{h^2} \left(\pi + \frac{h}{m} \left(\sqrt{\frac{11}{6}} - \frac{4}{3} \right) + \sqrt{\pi^2 + 2\pi \frac{h}{m} \left(\sqrt{\frac{11}{6}} - \frac{4}{3} \right)} \right). \quad (28)$$

Смысл критических зарядов Q^{cr} и \tilde{Q}^{cr} поясняет рис. 5.

В пункте **4.3** получено точное нетривиальное решение уравнений движения в системе (21). Приведем его явное выражение:

$$\phi(x) = v \tanh \left(\frac{h\nu}{\sqrt{2}} x \right), \quad (29)$$

$$\xi(x, t) = v \sqrt{\frac{m^2}{h^2} - \frac{1}{2}} \frac{\exp \left(i \frac{h\nu}{\sqrt{2}} t \right)}{\cosh \left(\frac{h\nu}{\sqrt{2}} x \right)}. \quad (30)$$

В дальнейшем будем называть это решение топологическим Q-боллом. Оно существует при следующем ограничении на параметры лагранжиана:

$$\frac{h^2}{m^2} \equiv \kappa^2 \leq 2. \quad (31)$$

Для удобства дальнейших обозначений мы ввели $\kappa = \frac{h}{m}$. Энергия и заряд топологического Q-болла:

$$E = \frac{2\sqrt{2}}{3} h\nu^3 \left(\frac{4}{\kappa^2} - 1 \right), \quad (32)$$

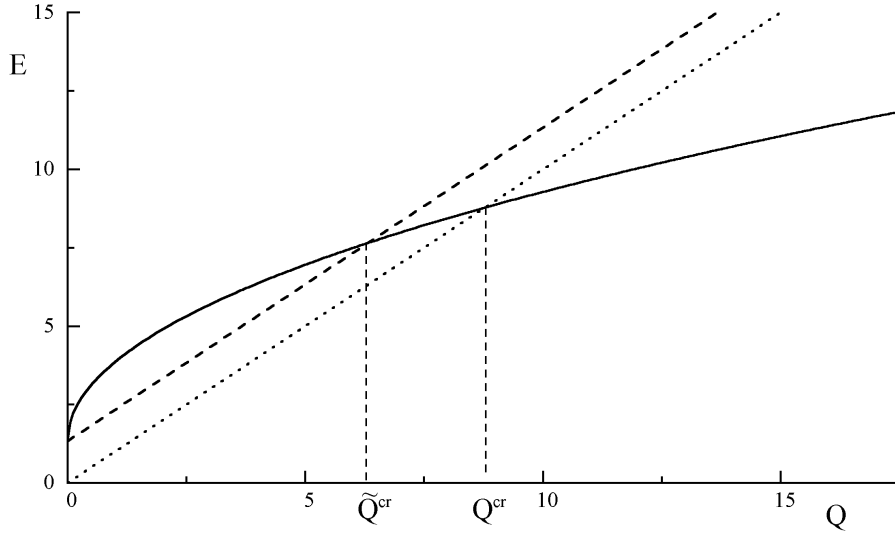


Рис. 5: графики зависимостей энергии от заряда для плосковолновой конфигурации (пунктирная кривая), конфигурации типа ”кинк+плоские волны” (штриховая кривая) и вариационной конфигурации (23), (24) (сплошная кривая). Q^{cr} – критическое значение заряда для нетопологической конфигурации; \tilde{Q}^{cr} – критическое значение заряда для топологической конфигурации. Графики построены при значениях констант $h = m = 1$; $v = 1$.

$$Q = 2v^2 \left(\frac{2}{\kappa^2} - 1 \right). \quad (33)$$

Отметим, что энергия (32) точного решения при любых значениях параметров лагранжиана оказывается меньше энергии как плосковолновой конфигурации, так и энергии вариационной конфигурации с соответствующим $U(1)$ зарядом (33).

В пункте 4.4 проведена ”улучшенная вариационная процедура”. Пробные функции взяты в виде

$$\phi(x) = v \tanh(\beta x), \quad (34)$$

$$\xi(x, t) = Av \frac{\exp(i\beta t)}{\cosh(\beta x)}, \quad (35)$$

где A и β – варьируемые параметры. Заметим, что такой выбор вариационной функции при $A = \sqrt{\frac{m^2}{h^2} - \frac{1}{2}}$ и $\beta = \frac{hv}{\sqrt{2}}$ воспроизводит точное решение (29), (30). Значение константы A однозначно фиксируется зарядом. Минимизируя энергию по β при данном заряде Q , получаем, что минимальное значение вы-

ражения для энергии равно

$$\tilde{E}_{min} = \frac{2}{3}v\sqrt{(Q + v^2)(h^2Q + 4m^2v^2)} \quad (36)$$

О поведении выражения (36) при произвольных зарядах можно сказать следующее:

– при $Q \rightarrow +\infty$ имеем $\tilde{E}_{min} = \frac{2}{3}hvQ + O(\sqrt{Q})$, следовательно, при зарядах, больших некоторого Q_1^{cr} (значение Q_1^{cr} может быть найдено в общем случае из условия равенства $\tilde{E}_{min}(Q_1^{cr})$ (36) и $E_{min}(Q_1^{cr})$ (25)), вариационная конфигурация (23), (24) становится энергетически выгоднее, чем (34), (35); таким образом, при больших зарядах системы обычная ”Q-больная” подстановка оказывается энергетически выгоднее;

– при $Q < Q_1^{cr}$ возможны в зависимости от отношения констант лагранжиана $\kappa = \frac{h}{m}$ два случая:

– – условие устойчивости конфигурации относительно распада на ”кинк+плоские волны” выполняется при любых $Q > 0$. Это имеет место при $3 - \sqrt{5} \leq \kappa \leq 3 + \sqrt{5}$;

– – равенство энергий вариационной и плосковолновой конфигураций $\tilde{E}_{min}(Q) = \tilde{E}^0(Q)$ имеет решение при $Q > 0$, что соответствует $\kappa > 3 + \sqrt{5}$ или $0 < \kappa < 3 - \sqrt{5}$. В этом случае конфигурация (34), (35) при зарядах Q , меньших $Q_2^{cr} = \frac{4}{5}v^2(4/\kappa^2 - 6/\kappa + 1)$, является менее энергетически выгодной, чем плосковолновая. Поэтому при $Q < Q_2^{cr}$ вывода о существовании устойчивых локализованных решений сделать нельзя.

В пункте 4.5 сформулированы заключительные замечания об описанных топологических дефектах, несущих U(1) заряд. Высказываются предположения о возможности существования найденных нами топологических решений с U(1) зарядом, по-видимому, и в некоторых более общих моделях. В частности, интерес представляет решение типа ”ежик” для триплета хиггсовских скалярных полей при учете его взаимодействия с комплексным полем с U(1) симметрией.

Пункт 4.6 посвящен постановке задачи о динамической устойчивости найденного ранее точного решения. Сформулированы основные необходимые в дальнейшем определения. Удобно перейти к безразмерным независимым переменным

$$\tilde{x} = (hv/\sqrt{2})x, \quad \tilde{t} = (hv/\sqrt{2})t$$

и ввести новые функции

$$\tilde{\phi} = \phi/v, \quad \tilde{\xi} = \xi/v.$$

В дальнейшем используем эти функции и переменные, опуская тильду над буквой. Точное решение (29), (30) в новых переменных запишется в виде

$$\phi_0(x) = \tanh(x), \quad (37)$$

$$\xi_0(t, x) = \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} - \frac{1}{2} \frac{\exp(it)}{\cosh(x)}}, \quad 0 < \kappa^2 < 2, \quad t, x \in \mathbf{R}. \quad (38)$$

Основная цель дальнейшего расчета – проведение математического исследования динамической устойчивости решения (37), (38) в рамках линейной теории возмущений. Положим $\phi = \phi_0 + \delta\phi$, $\xi = \xi_0 + \delta\xi$, где $\delta\phi$, $\delta\xi$ – малые отклонения от (37), (38); при этом $\delta\phi(t, x)$ – вещественнозначная функция, $\delta\xi(t, x)$ – комплекснозначная функция. Подставим в уравнения Эйлера-Лагранжа, следующие из лагранжиана модели (21). В линейном по отклонениям приближении получаем систему уравнений

$$\frac{\partial^2 \delta\xi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta\xi}{\partial x^2} + 2\phi_0^2 \delta\xi + 4\phi_0 \xi_0 \delta\phi = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 \delta\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta\phi}{\partial x^2} + 4\xi_0 \xi_0^* \delta\phi + 4\phi_0 (\xi_0 \delta\xi^* + \xi_0^* \delta\xi) + \frac{4}{\kappa^2} (3\phi_0^2 - 1) \delta\phi = 0. \quad (40)$$

Ищем решения уравнений (39), (40) в виде

$$\delta\xi = [\eta(x) \exp(-i\lambda t) + \chi^*(x) \exp(i\lambda^* t)] \exp(it), \quad (41)$$

$$\delta\phi = V(x) \exp(-i\lambda t) + V^*(x) \exp(i\lambda^* t). \quad (42)$$

Выбор решения в виде (41), (42) позволяет разделить переменные в (39), (40) и получить о.д.у. для амплитуд возмущений η , χ , V как величин, не зависящих от t . Действительно, подставляя (37), (38), (41), (42) в (39) и (40), получим относительно функций η , χ , V следующую систему о.д.у. со спектральным параметром λ :

$$\eta'' = \left(1 + 2\lambda - \lambda^2 - \frac{2}{\cosh^2 x}\right) \eta + 4 \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} - \frac{1}{2} \frac{\tanh x}{\cosh x}} V, \quad (43)$$

$$\chi'' = \left(1 - 2\lambda - \lambda^2 - \frac{2}{\cosh^2 x}\right) \chi + 4 \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} - \frac{1}{2} \frac{\tanh x}{\cosh x}} V, \quad (44)$$

$$V'' = \left(\frac{8}{\kappa^2} - \lambda^2 - \frac{8 + 2\kappa^2}{\kappa^2 \cosh^2 x}\right) V + 4 \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} - \frac{1}{2} \frac{\tanh x}{\cosh x}} (\eta + \chi), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (45)$$

Решения системы (43) – (45) ищем в классе функций, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \chi(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \chi'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} V'(x) = 0 \quad (46)$$

и интегрируемых с квадратом на всей действительной оси. Требуется найти собственные значения (с.з.) параметра λ , при которых сингулярная краевая задача (43) – (46) имеет нетривиальные решения – собственные функции (с.ф.), отвечающие этим с.з. В силу (41), (42), для любого не вещественного с.з. λ (т.е. с ненулевой мнимой частью) возмущения экспоненциально растут во времени. Тем самым для динамической устойчивости решения (37), (38) относительно малых возмущений вида (41), (42) дискретный спектр задачи (43) – (46) должен быть вещественным.

Некоторые аналитические свойства спектральной задачи, сформулированной в пункте 4.6, исследуются в пункте 4.7. В результате удается получить ограничения на возможные значения параметра λ :

$$|\lambda| \leq \sqrt{-\mu_{min}} \leq \sqrt{2 \left(1 + \sqrt{2/\kappa^2 - 1}\right)},$$

$$|\operatorname{Re} \lambda| \leq 1, \quad |\operatorname{Im} \lambda| \leq \sqrt{-\mu_{min}} \leq \sqrt{2 \left(1 + \sqrt{2/\kappa^2 - 1}\right)}.$$

Численное исследование полученной несингулярной спектральной задачи описано в пункте 4.8. Оно проводилось методом, основанным на обобщении принципа аргумента с использованием дифференциальной прогонки. Из проведенных оценок следует, что областью поиска неустойчивых λ является:

- при κ , мало отличающихся от $\sqrt{2}$, – круг с центром в нуле радиуса $\sqrt{-\mu_{min}}$;
- при дальнейшем приближении κ к нулю – такой же круг с разрезами по вещественной оси от $\sqrt{2} - 1$ вправо и от $-\sqrt{2} + 1$ влево.

Принципиальной сложностью задачи является то, что точки, лежащие на разрезах, принадлежат непрерывному спектру (при λ , слишком близких к разрезам, численный счет теряет устойчивость). Заметим только, что если бы с интервалов непрерывного спектра появлялись дискретные с.з., то они должны были бы как-то эволюционировать с изменением κ , но численно с изменением κ вблизи разрезов ничего не обнаруживается.

Из симметрии задачи следует, что ее с.з. с ненулевыми вещественной и мнимой частями располагаются в комплексной λ -плоскости "четверками" $(\lambda, -\lambda, \lambda^*, -\lambda^*)$, а с ненулевой только вещественной или только мнимой частью – парами по вещественной или мнимой оси соответственно.

Для исследования возмущения вырожденного с.з. $\lambda = 0$ и выявления наличия либо отсутствия не вещественных с.з. проводились расчеты по следующим контурам в области λ :

- кругам с центром в $\lambda = 0$ радиусов от ε до $\sqrt{2} - 1 - \varepsilon$, где ε – малое число;
- круговым секторам с углом раствора 90° , вершиной в $\lambda = i\varepsilon$, радиуса $\sqrt{-\mu_{min}}$, расположенным в первом квадранте (используется свойство симметрии с.з.);
- отрезкам вещественной и мнимой осей;
- отдельным контурам вне вещественной оси.

Расчеты показали, что в вырожденном случае $\kappa = \sqrt{2}$ с.з. $\lambda = 0$ имеет алгебраическую кратность 4 и геометрическую кратность 3. Несовпадение кратностей объясняется квадратичным вхождением спектрального параметра λ .

При изменении κ от $\sqrt{2}$ к 0 наблюдается следующая картина. С.з. $\lambda = 0$ по-прежнему имеет алгебраическую кратность 4. Тем самым можно утверждать, что от $\lambda = 0$ не отщепляется никаких (в том числе неустойчивых) с.з. Более того, при κ , мало отличающихся от $\sqrt{2}$, из полученных результатов строго следует, что у задачи нет никаких других с.з.

В качестве дополнительного контроля устойчивости с.з. $\lambda = 0$ использовалось следующее соображение. Из симметрии с.з. и существования с.ф. следует, что, как минимум, двукратность с.з. $\lambda = 0$ сохраняется. Следовательно, возмущение могло бы происходить только отщеплением двух симметричных с.з. по какой-то из осей. Отсутствие такого эффекта было численно проверено отдельно. Никаких других с.з. расчеты не обнаружили.

Окончательно можно утверждать, что сингулярная краевая задача имеет только одно с.з. $\lambda = 0$ геометрической кратности 2 и алгебраической кратности 4; никаких комплексных с.з. в допустимой области их существования нами не найдено.

Таким образом, проведенные аналитические и численные исследования позволяют сделать вывод о динамической устойчивости решения (37), (38) относительно малых возмущений вида (41), (42). Кроме того, решение (37), (38) в процессе эволюции не может распасться на малые нелокализованные колебания (по компоненте ξ) над кинком, так как это энергетически не выгодно.

В **заключении** сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

3. Основные результаты диссертации

1. В модели "двойной синус-Гордон" объяснено явление квазирезонансов в столкновениях кинка и антикинка при значении параметра $R = 0.5$. Дано

качественное и полуколичественное объяснение сдвига резонансной частоты в системе кинк-антикинк по сравнению с частотой уровня дискретного спектра в потенциальной яме уединенного кинка. Обнаружено также, что при некоторых значениях параметра модели явления квазирезонансов и окон разлета сосуществуют, что является прямым следствием их общей природы – механизма резонансного обмена энергией.

2. Численно и аналитически исследована временная эволюция первоначально сформированного пузырька дезориентированного кирального конденсата. Показано, что процесс распада существенно зависит от самодействия пионных полей. При некоторых значениях параметров модели возможно образование долгоживущих источников пионных полей в центре первоначального пузырька ДКК. В случае пузырька большой амплитуды обнаружено наличие продолжительной предраспадной стадии, что является следствием существования многосолитонных решений уравнения синус-Гордон.
3. Исследован процесс столкновения двух параллельных доменных стенок в суперсимметричной модели с двумя действительными скалярными полями. В случае BPS-насыщенных конфигураций получен эффективный лагранжиан, описывающий взаимодействие стенок. В качестве динамической переменной использован внутренний параметр конфигурации, состоящей из двух параллельных стенок, который при определенных ограничениях имеет смысл расстояния между стенками. Временная эволюция, полученная с помощью эффективного лагранжиана, подтверждена численным расчетом – непосредственным решением задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (уравнений Эйлера-Лагранжа). При небольших начальных скоростях процесс столкновения стенок выглядит как упругое отражение с некоторой задержкой по времени.
4. В случае конфигураций, не являющихся BPS-насыщенными, в столкновениях доменных стенок обнаружено наличие критического значения $v_{cr} \approx 0.9120$ начальной скорости. При $v_i < v_{cr}$ наблюдается (неупругое) отражение, не сопровождающееся изменением вакуумного состояния между стенками. При значениях начальной скорости $v_i > v_{cr}$ вакуумное состояние между стенками в результате столкновения изменяется. Процесс столкновения стенок исследовался численно. Результаты численных экспериментов находятся в качественном соответствии с предсказаниями

”потенциального” рассмотрения, основанного на энергетических соображениях.

5. В модели с одним действительным и одним комплексным скалярными полями в $(1+1)$ измерениях найдено точное топологическое решение – $U(1)$ -заряженный солитон. Исследована его устойчивость относительно распада в конфигурацию типа ”кинк + плоские волны” (из энергетических соображений), а также устойчивость найденного точного решения в рамках линейной теории возмущений.

Публикации соискателя по теме диссертации

- [1] V. A. Gani, A. E. Kudryavtsev, "Kink-antikink interactions in the double sine-Gordon equation and the problem of resonance frequencies", *Phys. Rev. E* 60, num. 3, p. 3305 (1999);
preprint ITEP-31 (1998); arXiv: cond-mat/9809015.
- [2] V. A. Gani, A. E. Kudryavtsev, T. I. Belova, "Decay of a bubble of disoriented chiral condensate", *ЯФ*, том 62, номер 5, стр. 956 (1999); *Phys. of Atom. Nucl.*, vol. 62, p. 895 (1999);
V. A. Gani, A. E. Kudryavtsev, T. I. Belova, B. L. Druzhinin, "On decay of bubble of disoriented chiral condensate", preprint ITEP-43 (1997), arXiv: hep-ph/9712526.
- [3] Т. И. Белова, В. А. Гани, А. Е. Кудрявцев, "О распаде пузырька дезориентированного кирального конденсата большой амплитуды", *ЯФ*, том 64, номер 1, стр. 143 (2001); *Phys. of Atom. Nucl.*, vol. 64, num. 1, p. 140 (2001);
Т. И. Белова, В. А. Гани, А. Е. Кудрявцев, "On decay of large amplitude bubble of disoriented chiral condensate", preprint ITEP-11 (2000), arXiv: hep-ph/0003308.
- [4] В. А. Гани, А. Е. Кудрявцев, "О столкновениях доменных стенок в одной суперсимметричной модели", *ЯФ*, том 64, номер 11, стр. 2130 (2001); *Phys. of Atom. Nucl.*, vol. 64, num. 11, p. 2043 (2001);
V. A. Gani, A. E. Kudryavtsev, "A remark on collisions of domain walls in a supersymmetric model", preprint ITEP-15 (1999); arXiv: hep-th/9904209;
V. A. Gani, A. E. Kudryavtsev, "Non-BPS domain wall configurations in a supersymmetric model", preprint ITEP-44 (1999); arXiv: hep-th/9912211.
- [5] В. А. Ленский, В. А. Гани, А. Е. Кудрявцев, "О доменных стенках, несущих $U(1)$ -заряд", *ЖЭТФ*, том 120, выпуск 4, стр. 778 (2001); *J. of Exp. and Theor. Phys.*, vol. 93, num. 4, pp. 677 (2001);
препринт ИТЭФ-5 (2001); arXiv: hep-th/0104266.
- [6] В. А. Гани, Н. Б. Коныхова, С. В. Курочкин, В. А. Ленский, "Исследование устойчивости заряженного топологического солитона в системе двух взаимодействующих скалярных полей", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, том 44, номер 11, стр. 2069 (2004); *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 44, num. 11, p. 1968 (2004);
V. A. Gani, N. B. Konyukhova, S. V. Kurochkin, V. A. Lensky, "Study of

Stability of a Charged Topological Soliton in the System of Two Interacting Scalar Fields”, arXiv: 0710.2975 [hep-th].

- [7] Гани В. А., Кудрявцев А. Е., Белова Т. И., ”Распад пузырька дезориентированного кирального конденсата”, тезисы конференции ”Научная сессия МИФИ-99”.
- [8] Гани В. А., Кудрявцев А. Е., ”Взаимодействия кинка и антикинка двойного синус-Гордон уравнения и проблема резонансных частот”, тезисы конференции ”Научная сессия МИФИ-99”.