Институт Теоретической и Экспериментальной Физики

На правах рукописи

Лосев
Андрей Семенович

Инстантоны и топологические теории

Специальность: 01.04.02 – теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва, 2007

Работа выполнена в Институте Теоретической и Экспериментальной Физики.

Официальные оппоненты:

доктор физико–математических наук, с.н.с. ИТФ им.Ландау А.А. Белавин

доктор физико–математических наук, с.н.с. ИТЭФ А.С. Горский

доктор физико–математических наук, с.н.с. ФИАН им Лебедева М.В. Тютин

Ведущая организация: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва

Защита диссертации состоится «____»____________ 2007 года в _____ часов на заседании специализированного совета в ИТЭФ, по адресу: г. Москва, Большая Черемушкинская, 25.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИТЭФ.

Автореферат разослан «_____» ____________2007 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук В.В.Васильев

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена исследованию квантово-полевых систем, обладающих нечетными (фермионными) симметриями Q, такими, что тензор энергии-импульса точен по отношению к этим симметриям (с точностью до полной производной). Такие системы называют суперсимметричными, а при переопределении их связи с гравитацией (исключающей полную производную) - топологическими. Типичными примерами таких систем являются суперсимметричная квантовая механика, двумерная суперсимметричная сигма-модель и четырехмерная суперсимметричная теория Янга-Миллса.

Основная цель диссертации – исследование общих свойств топологических теорий как в секторе Q - замкнутых величин, так и вне его. В диссертации топологическая теория рассматривается как полноценная квантовая теория поля, а не как тривиальная система, не имеющая динамических степеней свободы. К таким системам применяются общие принципы квантовых теорий поля, при этом удается наблюдать и количественно изучить такие вопросы как спектр состояний, массы и кратности вырождения солитонов, точное суммирование инстантонов в деформацию эффективной теории. Впервые получено доказательство зеркальной симметрии как эквивалентности квантовых теорий поля. Связь между низкоэнергетической теорией Зайберга-Виттена и теорией Дональдсона проинтерпретирована как проявление четырехмерного аналога зеркальной симметрии и вычислены первые члены в разложении специальных координат на пространстве деформаций низкоэнергетических теорий.

При исследовании квантовых теорий поля естественно возникали новые математические структуры и получали новую интерпретацию старые. Так, были введены и изучены большая операда, фреклы и специальные контактные члены в двумерных и четырехмерных теориях, обобщение теории Морса, Громова-Виттена и Дональдсона вне топологического сектора, новый индекс в минимальных суперсимметричных теориях. Была дана новая интерпретация теории примитивной формы Саито как предела Ходжевой суперсимметричной квантовой механики, определены уравнения антикоммутативности, коммутативности и ориентируемые уравнения ассоциативности, описана связь между ними.

Актуальность проблемы. Понятие квантовой теории поля является центральным как в современной физике, так и в математике. Как показывает эксперимент, стандартная модель является реально существующей калибровочной квантовой теорией поля, и ее теоретическое исследование требует углубления понимания этого понятия. В особенности это относится к проблеме квантовой гравитации, по-видимому, связанной с естественной ультрафиолетовой регуляризацией реально существующей теории.

С точки зрения математики квантовая теория поля является инспирированным физикой развитием таких областей как дифференциальная геометрия, алгебраическая геометрия, алгебраическая топология.

Поэтому тема диссертации является актуальной, а решение поставленных в ней задач представляет безусловный интерес как для специалистов по теории интегрируемых систем, так и для широкого круга физиков-теоретиков, которые, так или иначе, используют изложенные результаты в приложениях к квантовой теории поля, физики элементарных частиц и теории струн.

Цель работы. Целью диссертации является изучение топологических теорий в двух аспектах. С одной стороны, изучаются связанные с ними математические структуры, в том числе инстантоны в разных размерностях. С другой стороны, поскольку топологические теории можно рассматривать как твистованные суперсимметричные теории, их изучение позволяет получить информацию о свойствах последних, таких как массы и кратности вырождения солитонов или структура низкоэнергетического действия.

Все это указывает на высокую эффективность применения современной геометрии вообще и топологических теорий в частности для изучения общих свойств суперсимметричных теорий.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Показано, что в инстантонном пределе гамильтониан суперсимметричной квантовой механики стремится к оператору, имеющему жорданову форму, в котором недиагональные элементы отвечают инстантонам.

2. Введены новые (твисторные) переменные в двумерной сигма-модели, допускающие инстантонный предел (переход к системе первого порядка). Вычислена бета-функция в инстантонном пределе, показано, что она согласуется со стандартной.

3. В инстантонном пределе суперсимметричной сигма-модели явно описано зеркальное преобразование, понимаемое как эквивалентность конформных теорий.

4. Дана процедура (Ходжева струна) построения по специальной суперсимметричной квантовой механике решения уравнения ассоциативности. Показано, что теория Саито примитивной формы является переходом к голоморфной части ростков вакуумных волновых функций в этой квантовой механике.

5. Построен новый индекс, измеряющий (взвешенное со знаками) число солитонов в двумерной квантовой теории поля с минимальной суперсимметрией. Показано, что он отличен от нуля только для жестких траекторий.

6. Показано, что аномалия в центральном заряде в солитонном секторе в суперсимметричной теории выражает его через разность киральных конденсатов, что позволяет найти эту массу через инстантонные вычисления в топологических теориях.

7. Показано, что инстантонные вычисления в линейной и нелинейной сигма-моделях отличаются на вклад точечных дефектов-фреклов (веснушек), которые в ассимптотически свободных теориях проявляются в замене переменных на пространстве констант связи.

8. Показано, что сравнение решения Зайберга-Виттена с теорией Дональдсона задает специальные координаты на пространстве деформаций алгебраических интегрируемых систем. В простейшем случае $SU(2)$ калибровочных теорий для простейшей нетривиальной деформации эти координаты найдены двумя способами, дающими один и тот же результат.

Научная новизна и практическая значимость результатов. Все представленные на защиту результаты являются оригинальными разработками автора диссертации и новыми на момент их публикации. Результаты опубликованы в ведущих российских и зарубежных журналах, докладывались на международных конференциях и представлены в их публикациях, они широко известны в научном сообществе и цитируются в работах других авторов в близких областях теоретической и математической физики. Результаты, лежащие в основе диссертации, были опубликованы в 1993-2007 годах в работах [1]-[22].

Результаты о инстантонных теориях легли в основу инстантонного подхода к квантовой теории поля, развивающегося в цикле работ с Н.Некрасовым и Э.Френкелем.

Результаты о зеркальной симметрии представляют собой первое в мировой литературе описание зеркальной симметрии неквадратичных теорий как эквивалентности конформных теорий.

Переход к твисторным переменным и вычисление в них бета-функции является первым примером рассмотрения ее как препятствия для решения гомотопического уравнения Маурера-Картана, что открывает новый взгляд на связь квантовой теории поля и гомологической алгебры.

Задача о специальных координатах в деформации алгебраических интегрируемых системах впервые предлагает взгляд на решение Зайберга-Виттена как на четырехмерное обобщение зеркальной симметрии.

Апробация диссертации. Результаты, полученные в диссертации, неоднократно докладывались и обсуждались на семинарах ИТЭФ, ФИАН, МИАН, ПОМИ и ИТФ им. Л.Д.Ландау. Результаты диссертации были также представлены автором на научных семинарах в Университетах Бонна (Германия), Утрехта (Голландия), Уппсалы (Швеция), Киото, Токио (Япония), Рима (Италия), Политехнической школе в Париже, Институте высших научных исследований (Бюр-сюр-Иветт, Франция), Института Филдса (Канада). Результаты были представлены на различных международных конференциях по различным областям теоретической и математической физики, в частности, на конференциях цикла STRINGS (разные года).

По результатам работы автор стал участником Танигучи Симпозиума 1996 года.

Публикации. По материалам исследований, представленных в диссертации, опубликовано 22 работы, из них 14 в журналах из Списка ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, девяти глав, заключения и списка литературы из 72 наименований. Объем работы составляет 165 страниц текста.

Содержание диссертации

Во введении дан обзор современного состояния теории М-теории и теории струн, очерчены основные понятия и методы, используемые в диссертации, приведена общая характеристика работы, а также описана ее структура по главам.

В первой главе изучается инстантонный предел в квантовой механике. Он достигается в формализме первого порядка:

$$L \to ip_\mu \left(\dot{x}^\mu + V^\mu\right) - i\tau\dot{f} + \frac{1}{2\lambda} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu, \tag{1}$$

где V^μ градиентное векторное поле:

$$V^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu f. \tag{2}$$

При $\lambda \to \infty$, лагранжиан упрощается:

$$L \to L_\infty = ip_\mu \left(\dot{x}^\mu + V^\mu\right) - i\tau\dot{f} \tag{3}$$

и функциональный интеграл локализуется на конечномерное пространство модулей градиентных траекторий.

В суперсимметричной модели кроме бозонных полей $x^\mu(t), p_\mu(t)$ есть и фермионные $\psi^\mu(t), \pi_\mu(t)$. Фермионная часть лагранжиана равна:

$$L_{fermion} = i\pi_\mu \left(\dot{\psi}^\mu + \partial_\nu V^\mu \psi^\nu\right). \tag{4}$$

Простейшие наблюдаемые (называемые наблюдаемыми вычисления) отвечают функциям $O(x, \psi)$ на ΠTX, т.е. дифференциальным формам ϖ на X. Их корреляторы получаются проще всего как интегралы по пространству модулей $M_{a,b}$ градиентных траекторий:

$$_a\langle O_1(t_1)\dots O_k(t_k)\rangle_b = e^{-i\tau(f(a)-f(b))} \int_{M_{a,b}} ev_{t_1}^* \varpi_1 \wedge \dots \wedge ev_{t_k}^* \varpi_k. \tag{5}$$

Для гамильтоновой интерпретации инстантонного предела переопределим волновые функции:

$$\Psi \mapsto \Psi^{\text{in}} = \Psi e^{\lambda f}, \qquad \Psi \mapsto \Psi^{\text{out}} = \Psi^* e^{-\lambda f}. \tag{6}$$

При этом стандартное эрмитово спаривание перейдет в

$$\langle \Psi^{\text{out}} | \Psi^{\text{in}} \rangle = \int \Psi^{\text{out}} \wedge \Psi^{\text{in}}.$$

Явная унитарность теряется, $\Psi^{\text{out}} \neq \left(\Psi^{\text{in}}\right)^*$. Однако, для конечных λ, мы всегда можем обратить это преобразование.

Гамильтониан $-\frac{1}{\lambda}\Delta + \lambda\|df\|^2$ исходной квантовой механики переходит в

$$H = L_V - \frac{1}{\lambda}\Delta. \tag{7}$$

В пределе $\lambda \to \infty$ он становится равным $H_\infty = L_V$, т.е. производной Ли вдоль вектора V.

При отсутствии инстантонов спектр гамильтониана равен сумме спектров суперсимметричных осцилляторов с частотой 1, расположенных в нулях векторного поля (для изолированных нулей), однако из-за инстантонных эффектов он приобретает жорданову форму. Например, для векторного поля отвечающего стандартной функции высоты на двумерной сфере легко вычисляется коррелятор двух наблюдаемых вычисления для функции h и два-формы ψ:

$$
\begin{aligned}
&{}_{\infty}\langle CO_h(0)CO_\psi(t)\rangle_0 \\
&\qquad = e^{\frac{i\tau}{2}} \int_{C^\times} h\left(ze^{-t}, \overline{z}e^{-t}\right)\psi(z,\overline{z}).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Спектр можно восстановить, изучая зависимость коррелятора от t. Пусть, к примеру:

$$
h = \frac{1}{1+|z|^2}, \qquad \psi = \frac{dz\wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}. \tag{9}
$$

Тогда коррелятор (8) равняется:

$$
{}_{\infty}\langle O_h(0)O_\psi(t)\rangle_0 = e^{\frac{i\tau}{2}}\left(-\frac{1}{1-e^{-2t}} + \frac{2t}{(1-e^t)^2}\right). \tag{10}
$$

Наивно мы бы ожидали t-зависимость в виде:

$$
{}_{\infty}\langle O_h(0)O_\psi(t)\rangle_0 = \sum_\alpha e^{-tE_\alpha}\; h_{0,\alpha}\psi_{\infty,\alpha}, \tag{11}
$$

где $h_{0,\alpha}$ - формфактор, матричный элемент оператора h между вакуумом, отвечающим точке 0, и собственным состоянием гамильтониана с энергией E_α, при этом $\psi_{\infty,\alpha}$ – формфактор для ψ. Наличие множителя t в (11) указывает, что гамильтониан не диагонализуем. Он имеет жорданову форму:

$$
\exp\left(\; t\cdot\begin{pmatrix} E & e^{\frac{i\tau}{2}} \\ 0 & E\end{pmatrix}\;\right) = \begin{pmatrix} e^{tE} & te^{\frac{i\tau}{2}}e^{tE} \\ 0 & e^{tE}\end{pmatrix} \tag{12}
$$

Мы получили жорданову форму, а не матрицу с малым вне-диагональным элементом потому, что в нашей модели нет антиинстантонов. Если бы они были, они бы дали вклад в матричный элемент под диагональю.

Во второй главе мы рассмотрим $N=(2,2)$ суперсимметричную сигма-модель скэлеровым таргет-пространством M. Она конформна, если метрика Риччи-плоская, т.е. многообразие – Калаби-Яо. Но специальный предел (предел бесконечного обьема) определяет конформную сигма-модель для более широкого класса многообразий.

В простейшем случае теория голоморфных отображений в $\mathbb{CP}^1$, может быть представлена как деформация цилиндрической сигма-модели с таргетом $C^\times$ понимаемым как фактор $C/2\pi i\mathbb{Z}$. Это свободная конформная теория с киральными полями $X(z), p(z)$, $\psi(z), \pi(z)$, и их антикиральными партнерами

$$
\frac{i}{2\pi}\int_\Sigma d^2z\;\left(p\partial_{\overline{z}}X + \overline{p}\partial_z\overline{X} + \pi\partial_{\overline{z}}\psi + \overline{\pi}\partial_z\overline{\psi}\right). \tag{13}
$$

Поле $X(z)$ отвечает линейной координате на $C/2\pi i\mathbb{Z}$, и потому определено по модулю $2\pi i\mathbb{Z}$.

Корреляторы в этой теории должны даваться интегралами по пространству голоморфных отображений $\Sigma\to C^\times$. Для компактных Σ все такие отображения с неизбежностью константы. Поэтому коррелятор сводится к интегралу по нулевой моде (т.е. по образу постоянного отображения $\Phi : \Sigma \to C^\times$).

Голоморфные отображения $\Sigma \to \mathbb{CP}^1$ на языке этой свободной теории являются просто голоморфными отображениями $\Sigma \backslash \{w_i^\pm\} \to C/2\pi i \mathcal{Z}$ с логарифмическими особенностями в точках $w_1^\pm, \ldots, w_N^\pm$, где отображение ведет себя как $\pm \log(z - w_i^\pm)$. Эти сингулярные точки отвечают нулям и полюсам $\exp \Phi$, и в общем положении они различны. Мы можем создать эти особенности поля Φ, вставляя в корреляционную функцию цилиндрической модели специальные поля $\Psi_\pm(w_i^\pm)$.

Определяющим свойством полей $\Psi_\pm(w)$ является то, что их операторное разложение с $X(z)$ выглядит как

$$X(z)\Psi_\pm(w) = \pm \log(z - w)\Psi_\pm(w). \tag{14}$$

С помощью таких операторов в случае мирового листа Σ рода ноль мы получим

$$\Phi(z) = c + \sum_{i=1}^{n} \log(z - w_i^+) - \sum_{i=1}^{n} \log(z - w_i^-),$$

поскольку

$$\Phi(z) = \langle X(z) \prod_{i=1}^{n} \Psi_+(w_i^+) \prod_{i=1}^{n} \Psi_-(w_i^-) \delta^2(X(\infty) - c)\psi(\infty)\overline{\psi}(\infty).\rangle$$

Таким образом получаются все инстантоны $\mathbb{CP}^1$ сигма-модели.

Свойство (14) выполнено для следующих полей

$$\Psi_\pm(w, \overline{w}) = \exp\left(\mp i \int_{w_0}^{w} (p(z)dz + \overline{p}(\overline{z})d\overline{z})\right),$$

– они являются *голомортексами*. Вычисление корреляторов со вставками таких полей и интегрирование по положению точек вставки $w_i^\pm$ на мировом листе Σ эквивалентно деформации действия (13) возмущением

$$q^{1/2} \int_\Sigma \left(\Psi_+^{(2)} + \Psi_-^{(2)}\right),$$

где $\Psi_\pm^{(2)}$ – когомологические потомки

$$\Psi_\pm^{(2)} = \Psi_\pm(w, \overline{w})\pi(w)\overline{\pi}(\overline{w})dwd\overline{w}.$$

Оказывается, знаменитая зеркальная симметрия становится естественной при описании нелинейной сигма модели как компактификации свободной.

В случае $\mathbb{CP}^1$ до деформации у нас была свободная теория с таргет-пространством $C^\times$. Теория, Т-двойственная этой, оказывается сигма-моделью с цилиндрическим таргет-пространством $\mathcal{R} \times S^1$ с метрикой сигнатуры Минковского. Пусть R и U – координаты на R и $S^1 = \mathcal{R}/2\pi$, соответственно. При T-двойственности локальные поля p и X усложняются, но сложные(нелокальные) поля типа голомортексов становятся локальными. Мы делаем следующее преобразование:

$$pdz + \overline{p}d\overline{z} = dU,$$

и голомортексы $\Psi_\pm$ становятся просто экспоненциальными полями $e^{\mp iU}$. Поле R совпадает с полем $\frac{1}{2}(X+\overline{X})$ обычной теории. Поэтому e^R равно полю $|e^X|$, модулю голоморфной координаты на $\mathbb{CP}^1$, компактифицирующего таргет-пространство $C^\times$. Действие продеформированной дуальной теории принимает вид

$$\frac{i}{2\pi}\int_\Sigma d^2z\ \left(\partial_z U\partial_{\bar z}R+\partial_{\bar z}U\partial_z R+\pi\partial_{\bar z}\psi+\overline{\pi}\partial_z\overline{\psi}\right)+q^{1/2}\int_\Sigma(e^{iU}+e^{-iU})\pi\overline{\pi}d^2z \qquad (15)$$

и связано со стандартным зеркальным действием аналитическим продолжением.

В третьей главе мы рассмотрим двумерную конформную теорию с действием первого порядка:

$$S_0=\frac{1}{2\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2z(p_i\bar\partial X^i+p_{\bar i}\partial X^{\bar i}), \qquad (16)$$

где импульсы $p,\bar p$-поля, являющиеся $(1,0)$ и $(0,1)$ формами, соответственно, а координаты $X,\bar X$ скаляры, форма объема $d^2z=idz\wedge d\bar z$. Действие (16) отвечает $D/2$-ой тензорной степени $c=2$ конформной теории первого порядка, в которой сомножители нумеруются так же, как и координаты комплексного пространства $i,\bar i=1,\ldots,D/2$. Уравнения движения, вытекающие из (16) дают следующее операторное разложение:

$$X^i(z_1)p_j(z_2)\sim\frac{\alpha'\delta^i_j}{z_1-z_2}+\ldots,\quad X^{\bar i}(\bar z_1)p_{\bar j}(\bar z_2)\sim\frac{\alpha'\delta^{\bar i}_{\bar j}}{\bar z_1-\bar z_2}+\ldots \qquad (17)$$

(удобно сохранить явную зависимость от α'), и операторное разложение между самими полями X и p регулярно.

Начнем с того, что возмутим теорию (16) следующим оператором:

$$V_g=\frac{1}{2\pi\alpha'}g^{i\bar j}(X,\bar X)p_ip_{\bar j}, \qquad (18)$$

таким образом, действие будет равно:

$$S_g=\frac{1}{2\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2z(p_i\bar\partial X^i+p_{\bar i}\partial X^{\bar i}-g^{i\bar j}p_ip_{\bar j}). \qquad (19)$$

На классическом уровне, подставляя вместо $p,\bar p$ их экстремальные значения, получим, что теория с действием (19) эквивалентна:

$$\mathcal{S}=\frac{1}{2\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2z g_{i\bar j}\bar\partial X^i\partial X^{\bar j}=\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2z(G_{\mu\nu}+B_{\mu\nu})\partial X^\mu\bar\partial X^\nu, \qquad (20)$$

где μ,ν могут быть как голоморфными, так и антиголоморфными индексами, а G, и B являются симметричной Римановой метрикой и антисимметричным полем Калба-Рамона, соответственно. При этом в унитарной теории $G_{i\bar j}=-B_{i\bar j}$, или

$$G_{i\bar k}=g_{i\bar k},\quad B_{i\bar k}=-g_{i\bar k}. \qquad (21)$$

Заметим, что операторы (18) содержат обратную метрику $g^{i\bar j}$, являющуюся функцией голоморфных и антиголоморфных координат таргет-пространства, поэтому мы на самом деле рассматриваем теорию возмущений (16) вокруг *бесконечной* метрики (с бесконечным полем Калба-Рамона).

На квантовом уровне мы должны учесть меру интегрирования. Для систем первого порядка (19) она задается голоморфной формой старшей степени $\Omega = \Omega(X) = dX^1 \wedge \ldots \wedge dX^{D/2}$. После интегрирования по полям p:

$$\int [dp][d\bar{p}]e^{-S_g[X,\bar{X},p,\bar{p}]} \sim e^{-\mathcal{S}[X,\bar{X}]+\frac{1}{2\pi}\int_\Sigma d^2z\sqrt{h}R\log\sqrt{g}} \tag{22}$$

мы приходим к стандартной сигма-модели (20), в которой мера задается невырожденной метрикой на таргет-пространстве. Различие двух мер проявляется в появлении дилатонного члена $\frac{1}{2\pi}\int d^2z\sqrt{h}R\log\sqrt{g}$ в действии (22), возникающего из детерминанта ультралокального оператора.

Теперь возмутим свободное действие (16) всеми возможными операторами размерности (1,1), т.е. мы рассмотрим всевозможные эрмитовы метрики и эрмитовы два-формы b, а также произвольные деформации почти комплексной структуры, задаваемой дифференциалами Бельтрами-$\mu_{\bar{i}}^{j}$ и $\bar{\mu}_{i}^{\bar{j}}$. Полное продеформированное действие примет вид

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z(p_i\bar{\partial}X^i + p_{\bar{i}}\partial X^{\bar{i}} \\ -g^{i\bar{j}}p_ip_{\bar{j}} - \bar{\mu}_i^{\bar{j}}\partial X^i p_{\bar{j}} - \mu_{\bar{i}}^j\bar{\partial}X^{\bar{i}}p_j - b_{i\bar{j}}\partial X^i\bar{\partial}X^{\bar{j}}). \end{aligned} \tag{23}$$

Эти фоновые поля мы будем называть твисторными переменными.

Исключая импульсы, мы получим сигма-модель

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2z(G_{\mu\nu}+B_{\mu\nu})\partial X^\mu\bar{\partial}X^\nu + \frac{1}{2\pi}\int d^2z\sqrt{h}R\Phi, \tag{24}$$

при этом G, B и Φ теперь равны:

$$\begin{aligned} G_{s\bar{k}} &= g_{\bar{i}j}\bar{\mu}_s^{\bar{i}}\mu_{\bar{k}}^j + g_{s\bar{k}} - b_{s\bar{k}}, \quad B_{s\bar{k}} = g_{\bar{i}j}\bar{\mu}_s^{\bar{i}}\mu_{\bar{k}}^j - g_{s\bar{k}} - b_{s\bar{k}}, \\ G_{si} &= -g_{i\bar{j}}\bar{\mu}_s^{\bar{j}} - g_{s\bar{j}}\bar{\mu}_i^{\bar{j}}, \quad G_{\bar{s}\bar{i}} = -g_{\bar{s}j}\mu_{\bar{i}}^j - g_{\bar{i}j}\mu_{\bar{s}}^j, \\ B_{si} &= g_{s\bar{j}}\bar{\mu}_i^{\bar{j}} - g_{i\bar{j}}\bar{\mu}_s^{\bar{j}}, \quad B_{\bar{s}\bar{i}} = g_{\bar{i}j}\mu_{\bar{s}}^j - g_{\bar{s}j}\mu_{\bar{i}}^j, \\ \Phi &= \log\sqrt{g}. \end{aligned} \tag{25}$$

Конформная инвариантность теории первого порядка, возмущенной оператором $g^{i\bar{j}}p_ip_{\bar{j}}$, может нарушаться полюсом второго порядка в их операторном разложении. Условие его зануления приводит к квадратичному уравнению:

$$g^{i\bar{j}}\partial_i\partial_{\bar{j}}g^{k\bar{l}} - \partial_i g^{k\bar{j}}\partial_{\bar{j}}g^{i\bar{l}} = 0. \tag{26}$$

Непосредственным (но длинным) вычислением показано, что описанные выше условия конформной инвариантности имеют в качестве следствия уравнения Эйнштейна , связанные с дилатоном и полем Калба-Рамона, а именно:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} H_{\mu\lambda\rho} H_{\nu}^{\lambda\rho} + 2\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Phi, \tag{27}$$

$$\nabla_{\mu} H^{\mu\nu\rho} - 2(\nabla_{\lambda}\Phi) H^{\lambda\nu\rho} = 0, \tag{28}$$

$$4(\nabla_{\mu}\Phi)^2 - 4\nabla_{\mu}\nabla^{\mu}\Phi + R + \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} = 0, \tag{29}$$

в которых твисторные переменные $g_{i\bar{j}}$ связаны с физическими: метрикой, полем B и дилатоном (G, B, Φ) следующим образом:

$$G_{i\bar{k}} = g_{i\bar{k}}, \quad B_{i\bar{k}} = -g_{i\bar{k}}, \quad \Phi = \log\sqrt{g}. \tag{30}$$

В четвертой главе объясняется, как и почему некоторая разновидность теории Ходжа (гармонической теории) приводит к системе факторизуемых отображений векторного пространства в когомологии пространства модулей кривых рода ноль с отмеченными точками (компактифицированного по Делиню-Мамфорду). В физике такая система отображений называется "обобщенными амплитудами в теории топологических струн".

В качестве следствия показано как элементы теории Примитивной формы К.Саито (на основании которой можно строить решение для уравнений ассоциативности) естественным образом возникают в $N = 2$ суперсимметричной квантовой механике с суперпотенциалом (теория нулевых мод в двумерной теории поля Ландау-Гинзбурга), которая является одной из разновидностей теории Ходжа.

В разделе 2 пятой главы определяются "обобщенные амплитуды"топологической струны в роде ноль и показано, что они находятся во взаимнооднозначном соответствии с решениями уравнений ассоциативности, и поэтому на выходе предлагаемой конструкции (которая называется "Ходжевыми струнами") должны получаться решения этих уравнений.

В разделах 3 и 4 содержат мотивации конструкции приходящие из теории топологических струн, основанные на процедуре интегрирования по положению отмеченной точки и на соответствии между локальными наблюдаемыми и состояниями (эти разделы частично содержат ответ на вопрос "почему?"). Объясняется появление QG_--системы, состоящей из Z_2 градуированного векторного пространства H, нечетных операторов Q и G_-, четных коммутирующих Q-замкнутых операторов Φ_i (все операторы действуют в H) и билинейного спаривания $<>$ на H.

Раздел 5 - аксиоматический: в нем дается определение и свойства абстрактной QG_- системы. Затем предъявлена процедура, стартующая с QG_- -системы $(H, Q, G_-, \Phi_i, <>)$, имеющей ходжево свойство, спускающееся на когомологии спаривание и примитивный элемент, можно канонически построить решение уравнений ассоциативности.

Конструкция состоит из двух шагов. На первом шаге, сравнивая две плоские связности ("Ходжеву"связность и связность "Гаусса-Манина") в расслоении $Q(t) + zG_-$ когомологий, мы строим плоскую связность со спектральным параметром $(\nabla^H - z^{-1}C)$, известную в физике как t-часть $t - t^*$ уравнений.

На втором шаге, с помощью примитивного элемента, мы строим специальные координаты на базе расслоения когомологий (как их исходно строил К.Саито), и интерпретируем C как третью производную от решения ассоциативности.

Этот раздел отвечает на вопрос "почему"и формально независим от предыдущих разделов.

В разделе 6 мы описываем версию QG_- -системы, известную как $N = 2$ суперсимметричная квантовая механика типа Ландау-Гинзбурга.

Мы начинаем раздел 7 с изложения основ теории примитивной формы К.Саито в виде теории "хороших сечений"и на языке QG_- систем.

Оказывается, что голоморфные части ростков гармонических форм из квантовой механики Ландау-Гинзбурга удовлетворяют двум из трех условий К.Саито на хорошие сечения. Таким образом, получается удивительный и неожиданный результат: аксиомы Саито теории примитивной формы – это просто отражение ходжевой суперсимметричной квантовой механики в ростках сингулярности.

В пятой главе уравнения коммутативности:

$$\frac{\partial \tau(t)_a^b}{\partial t_i}\frac{\partial \tau(t)_b^c}{\partial t_j} = \frac{\partial \tau(t)_a^b}{\partial t_j}\frac{\partial \tau(t)_b^c}{\partial t_i} \tag{31}$$

исследуются в связи со специально приготовленным пространством таким же образом, как уравнения ассоциативности изучаются в связи с компактификацией Деліня--Мамфорда $\bar{M}_{0,N}$ пространства комплексных структур на сфере с N отмеченными точками.

Основным утверждением в теории уравнений ассоциативности является соответствие между решениями и факторизуемыми отображениями из V^N в когомологии $\bar{M}_{0,N}$. Первым нетривиальным следствием этого утверждения является существование тензорного произведения Концевича-Манина на решениях уравнениях ассоциативности, индуцированное умножением в когомологиях $\bar{M}_{0,N}$.

В физике решения уравнений ассоциативности возникают в топологических теориях струн, т.е. в двумерных конформных теориях с фермионной Q -симметрии и с Q -точным тензором энергии-импульса.

Пространство конформных топологических теорий обладает естественным тензорным произведением: лагранжиан произведения является суммой лагранжианов, а Q -симметрия - суммой Q -симметрий.

Можно показать, что теория-произведение приводит к решению уравнения ассоциативности, которое дает произведение Концевича-Манина решений, отвечающих отдельным теориям.

Пример 1. Сигма-модели типа А, которые приводят к инвариантам Громова-Виттена.

Теория-произведение двух теорий с таргет-пространствами - кэлеровыми многообразиями $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$ является сигма-моделью типа А с таргет-пространством $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$.

Пример 2. Теории Ландау-Гинзбурга, которые приводят к решениям уравнений ассоциативности, связанных с сингулярностями.

Произведение теорий Ландау-Гинзбурга – это теория, чей суперпотенциал равен сумме суперпотенциалов.

Очевидной проблемой в исследовании топологических теорий является их относительная сложность: необходимо уметь вычислять корреляторы и интегрировать ответ по пространству модулей, что можно сделать только в ряде специальных ситуаций с помощью разнообразных трюков.

Однако, для построения решения уравнений ассоциативности не понадобится знание всей теории – достаточно будет информации о ее подтеории(подсекторе).

В качестве такой подтеории рассмотривается суперсимметричная квантовая механика на пространстве петель. Причем в качестве гильбертова пространства мы ограничимся состояниями, инвариантными относительно постоянных вращений петли.

В нем действуют гамильтониан H, суперпартнер гамильтониана G_+, суперпартнер генератора постоянных сдвигов вдоль петли G_- и пространство вертексных операторов, проинтегрированных вдоль петли:

$$\Phi_i = \int \Phi_i(\sigma) d\sigma. \tag{32}$$

Так как эти операторы возникают из конформной топологической теории, они удовлетворяют уравнениям:

$$Q^2 = G_-^2 = \{Q, G_-\} = 0, \tag{33}$$

а также

$$[\Phi_i, \Phi_j] = [\Phi_i, [G_-, \Phi_j]] = 0, \tag{34}$$

Мы также ограничимся ходжевыми топологическими конформными теориями, в которых представление алгебры (33) распадается только на синглеты и квартеты.

В предыдущей главе было показано, что если существует билинейное спаривание совместное с Q и G_-, такое, что Φ симметрично, и существует примитивный элемент в пространстве Q-когомологий, то можно реконструировать решение уравнений ассоциативности, так что специальные суперсимметричные квантовые механики можно рассматривать как подтеории.

Но удивительно то, что такие квантовые механики можно рассматривать как самостоятельные когомологические теории, что они связаны с факторизуемыми отображениями в некоторое пространство модулей, и потому, в частности, обладают тензорным произведением типа Концевича-Манина.

Оказывается, суперсимметричные квантовые механики задают операторно-значные факторизуемые отображения из V^N (где V - пространство операторов Φ) в когомологии пространства L_N. Неформально говоря, пространство L_N является "сосисочной"компактификацией пространства N точек на цилиндре по модулю общих сдвигов и поворотов , т.е. C^{*N}/C^*. "Сосисочная"компактификация означает, что точки могут сталкиваться, но не могут уходить в ноль или бесконечность. Конфигурация, в которой k точек устремляются, скажем, в бесконечность, компактифицируется букетом из двух сфер, так что бесконечность первой сферы отождествляется с нулем второй сферы; при этом k точек размещаются на второй сфере, а $N-k$ - на первой. Повторение такой процедуры дает тело, напоминающее гирлянду сосисок, что объясняет название.

Пусть дано пространство W, и пусть отображения S в когомологии L_N принимают значения в $End(W)$. Факторизуемость означает, что, если сосиска является объединением двух сосисок и цикл C является произведением циклов C_1 и C_2 (где C_i – цикл на i-ой сосиске), то

$$S(C_1 \times C_2) = S(C_1) S(C_2), \tag{35}$$

где умножение в правой части (35) понимается как умножение в $End(W)$.

В разделе 2 вычислены гомологии L_N и показано, что для абстрактных векторных пространств V и W факторизуемые отображения из V^N в $H^*(L_N)\otimes End(W)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с решениями уравнений коммутативности.

Таким образом, на решениях уравнений коммутативности, возникающих из суперсимметричной квантовой механики возникает два тензорных произведения: гомологическое, то есть индуцированное произведением в когомологиях пространства L_N, и физическое, индуцированное произведением суперсимметричных квантовых механик. Показано, что они совпадают.

В шестой главе мы изучаем суперсимметричные солитоны.

Суперсимметрия объединяет бозоны и фермионы в мультиплеты состояний равной энергии. Казалось бы, минимальные суперсимметричные мультиплеты состоят по меньшей мере из двух состояний - бозонного и фермионного. Тем не менее, в случае БПС солитон в двумерных теориях является примером супермультиплета, состоящего ровно из одного состояния. Оказывается, что этот солитон не является ни бозоном, ни фермионом – фермионная четность не определена в солитонном секторе. Это явление во многом похоже на появление дробного заряда в теории двумерных солитонов.

Алгебра суперсимметрий в двумерных теориях (часто обозначаемая как $\mathcal{N}=\{1,1\}$) состоит из двух суперзарядов Q_α, ($\alpha=1,2$), тензора энергии-импульса P_μ, ($\mu=1,2$) и центрального заряда $\mathcal{Z}$,

$$\{Q_\alpha\,,\bar{Q}_\beta\}=2\left(\gamma^\mu P_\mu+\gamma^5\mathcal{Z}\right)_{\alpha\beta}\,,\qquad [Q_\alpha,P_\mu]=[Q_\alpha,\mathcal{Z}]=0\,. \tag{36}$$

где $\bar{Q}_\beta=Q_\alpha(\gamma^0)_{\alpha\beta}$ и $\gamma^0=\sigma_2$, $\gamma^1=i\sigma_3$, $\gamma^5=i\gamma^0\gamma^1=-i\sigma_1$ – чисто мнимые матрицы 2x2. Центральный заряд не равен нулю в солитонном секторе, и мы определим $\mathcal{Z}>0$ для солитона и $\mathcal{Z}<0$ для антисолитона.

В системе покоя солитона ($P_\mu=(M,0)$) алгебра (36) имеет вид:

$$Q_1^2=M+\mathcal{Z}\,,\qquad Q_2^2=M-\mathcal{Z}\,,\qquad \{Q_1\,,Q_2\}=0\,. \tag{37}$$

Для БПС солитонов $Q_2|\,\mathrm{sol}\rangle=0$, откуда вытекает, что их масса M равна центральному заряду $\mathcal{Z}$.

Отсюда немедленно вытекает, что если Q_1 равно $\sqrt{2\mathcal{Z}}$ (или $-\sqrt{2\mathcal{Z}}$), то неприводимое представление супералгебры *одномерно.*

Как было уже отмечено выше, в одномерном представлении оператор фермионной четности $(-1)^F$ не определен. Обычно подразумевается, что $(-1)^F$ существует. На самом деле, на микроскомическкрм уровне мы начинаем с локальных теорий поля, в которых есть явное разделение полей на бозонные и фермионные. Фермионная четность суперзарядов равна -1, что делает представление приводимым – состоящим из двух одномерных.

Каким образом $(-1)^F$ становится плохо определенным? Это происходит из-за граничных эффектов. Технически это проявляется в том, что на фоне БПС солитона имеется ровно одна нормируемая нулевая мода. Другая фермионная нулевая мода (сосредоточенная на границе) появится, если мы поместим солитон в ящик с соответствующими граничными условиями.

С точки зрения физических экспериментов, проводимых далеко от границы, фермионная четность $(-1)^F$ нарушена, и мы наблюдаем одномерный мультиплет. Это похоже на эффект появления дробного заряда: полный заряд, включающий границы, остается целым, но он не входит в локальные эксперименты, проводимые вдали от границ.

Разрушение бозон-фермионной классификации для солитонов влечет, естественно, странные явления в статистике солитонов.

Мы рассматриваем класс гибридных моделей, в которых наряду с суперпотенциалом $\mathcal{W}(\phi)$ есть еще и кривая метрика $g_{ab}(\phi)$ на таргет-пространстве (эти модели – гибриды между сигма-моделями и моделями Ландау-Гинзбурга). Мы определим подкласс гибридных моделей, в котором *не* происходит укорочение супермультиплета. Окажется, что явление укорочения мультиплета довольно редко встречается.

Предлагается новый индекс, считающий такие короткие мультиплеты. Напомним, что самый первый суперсимметричный индекс, $\mathrm{Tr}\,(-1)^F$, был введен Виттеном более двадцати пяти лет назад для подсчета числа суперсимметричных вакуумов.

Примерно пятнадцать лет назад Вафа, Интриллигатор, Чекотти и Фендли предложили другой индекс, $\mathrm{Tr}[F\,(-1)^F]$, вычисляющий число укороченных мультиплетов в двумерных теориях с четырьмя суперзарядами, но индекс, считающий синглеты в двумерных теориях с двумя суперзарядами, до сих пор не встречался в литературе.

Показано, что искомым индексом является выражение $\{\mathrm{Tr}\,Q_1\}^2/2\mathcal{Z}$ – оно зануляется на длинных мультиплетах и равно 1 на коротких.

Если значение этого индекса не равно нулю в теории с двумя суперзарядами, то укороченные мультиплеты с необходимостью существуют.

В седьмой главе мы продолжаем изучение солитонов в суперсимметричных теориях.

Суперсимметричные $\mathcal{N} = 2$ двумерные сигма модели с твистованной массой имеют несколько центральных зарядов и проявляют интересные свойства, похожие на свойства теории Зайберга-Виттена в четырех измерениях. В 1983 году было установлено, что в некоторых случаях такие модели могут быть деформированы с помощью введения суперпотенциала. В этой главе мы покажем, что такое введение суперпотенциала приводит к появлению центральных зарядов нового типа. В результате $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия *спонтанно* нарушается до $\mathcal{N} = 1$, в кажущемся противоречии с наивно понятой стандартной теоремой, якобы запрещающей такое поведение. Более того, индекс Виттена оказывается непригоден для вычисления числа вакуумных состояний, поскольку он тождественно зануляется. Индекс Вафы-Интриллигатора-Фендли-Чекотти (ВИФЧ), $I_{\mathrm{CFIV}} = \mathrm{Tr}\,F(-1)^F$, который мог бы пригодится при счете вакуумов (а не БПС солитонов), так же не работает, поскольку модель не сохраняет стандартные фермионные заряды(векторный и аксиальный).

Мы покажем, как новые индексы , $\mathcal{I}_{2,1/2}$ и $\mathcal{I}_{2,1/4}$, справляются с этой проблемой. Индекс $\mathcal{I}_{2,1/2}$ вычисляет число 1/2 БПС-насыщенных вакуумов, а $\mathcal{I}_{2,1/4}$ вычисляет число 1/4 BPS-насыщенных солитонов.

В простейшем примере, содержащем твистованную массу и суперпотенциал мы строим явные 1/4 БПС солитоны-кинки.

В этой же главе представлен вывод аномалии в центральном заряде, при котором

$$\{\bar{Q}_R\,,\,Q_L\} \;=\; \frac{1}{2\pi}\int dx\,\partial_x\left(R_{i\bar{j}}\,\bar{\Psi}^{\bar{j}}_R\Psi^i_L\right)\,,$$

$$\{\bar{Q}_L\,,\,Q_R\} \;=\; \frac{1}{2\pi}\int dx\,\partial_x\left(R_{i\bar{j}}\,\bar{\Psi}^{\bar{j}}_L\Psi^i_R\right)\,. \tag{38}$$

Хотя эти формулы получены для симметричных метрик, естественно высказать гипотезу, что они верны для общих кэлеровых многообразий.

Как хорошо известно, суперсимметричные модели на однородных кэлеровых многообразиях имеют дискретное множество вакуумов, которые различаются вакуумными средними параметров порядка $\langle R_{i\bar{j}}\,\bar{\Psi}^{\bar{j}}_R\Psi^i_L\rangle$ и $\langle R_{i\bar{j}}\,\bar{\Psi}^{\bar{j}}_L\Psi^i_R\rangle$.

Вакуумные средние параметров порядка могут быть вычислены в топологической теории через инстантонный счет. Таким образом, центральные заряды (38) с помощью топологической теории определяют БРС массы солитонов – частиц физической теории.

В восьмой главе сравниваются нелинейная и линейная сигма-моделм.

Сначала рассматривается $\mathcal{N}=2$ суперсимметричная сигма-модель (НЛСМ) с таргет-пространством $V=\mathcal{A}//G$ – кэлеровым фактором кэлерова векторного (аффинного) пространства $(\mathcal{A},\omega)$, на котором группа G действует сохраняя форму ω. Она имеет пространство модулей $\mathcal{M}$ БПС полевых конфигураций с конечным действием - инстантонов, представленных голоморфными отображениями Φ мирового листа of Σ в V.

Линейная калиброванную модель (ЛКСМ) состоит из киральных мультиплетов $\phi+\lambda+\ldots$, принимающих значение в афинном пространстве A, связанных с векторными мультиплетами $A+\psi+\ldots+\sigma$, принимающими значение в алгебре Ли группы G.Действие ЛКСМ содержит потенциальный член $\mathcal{V}=\langle\mu,\mu\rangle$, где $\mu:\mathcal{A}\to\mathrm{Lie}^*G$ отображение момента, а $\langle,\rangle$ - форма Киллинга (D-член).

При низких энергиях медленно меняющиеся полевые конфигурации локализованы вблизи нулей μ и поэтому описывают отображения в $V=\mu^{-1}(0)/G$.

Однако, можно рассмотреть БПС конфигурации - они удовлетворяют уравнениям:

$$F_A=-e^2\mu,\quad \bar{\partial}_A\phi=0, \tag{39}$$

где e - калибровочная константа связи.

Оказывается, что при стремлении калибровочной константы к нулю, инстантоны линейной модели существенно отличаются от инстантонов нелинейной. Оказывается, что при этом площадь области на мировом листе, в которой линейная сигма-модель отличается от нелинейной, (то есть не описывается как отображения в V) стремится к нулю, но различающие эти две модели БПС-конфигурации не исчезают. Они отличаются на газ дефектов, которые названы веснушками, и учет вкладов этого газа приводит к различиям в инстантонном счете.

В некоторые процессы, такие, как вычисление квантовых когомологий многообразий Фана, этот газ веснушек вклада не дает, но заведомо дает вклад в вычисление контактных членов наблюдаемых вычисления – и тем самым обьясняет возникновение так называемой зеркальной замены параметров при зеркальной симметрии.

В девятой главе сравниваются корреляторы в теориях Дональдсона и теории Зайберга-Виттена. На первый взгляд, можно было бы просто наложить периодические граничные условия и сравнивать теории на четырехмерном торе. К сожалению, корреляционные функции БПС наблюдаемых практически нечувствительны к геометрии пространства модулей вакуумов, если число самодуальных 2-форм (на четырехмерном пространстве X) больше единицы, т.е. если $b_2^+ > 1$. Требуются многообразия, на которых возможен инстантонный счет и при этом $b_2^+ = 1$. К таким многообразиям относятся поверхности Хирцербруха, из них простейшая $X = S^2 \times S^2$. Такие многообразия X не обладают ковариантно постоянными спинорами, и исходная суперсимметричная теория не имеет нечетных сохраняющихся зарядов - поэтому, следует изучить твистованную теорию. В ней у нас больше свободы выбора, чем в исходной, в частности, она допускает предел, в котором функциональный интеграл сводится к интегралу по пространству модулей инстантонов. Это пространство некомпактно, но оно может быть компактифицировано так, что на него естественно продолжаются физические наблюдаемые. При описании инфракрасного предела теории информация о компактификации перейдет в специальный выбор контактных членов, отвечающих деформации теории. Заметим, что вид этих контактных членов сильно ограничен соображениями электоромагнитной дуальности и величиной аномалии в духовом числе.

Теория $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная теория Янга-Миллса с группой G содержит самовзаимодействующий векторный мультиплет, состоящий из калибровочного поля A^a, комплексного скаляра ϕ^a и пары Вейлевских фермионов $\psi^a_\alpha, \lambda^{\dot\alpha,a}$ в присоединенном представлении калибровочной группы. В твистованной теории фермионы имеют разнообразные спины , но если мы интересуемся физическим вопросом в $\mathbb{R}^4$ (с эвклидовой сигнатурой), твистованная модель не отличается от нетвистованной. Отличие проявляется только в искривленном гравитационном фоне. Твистованная теория всегда содержит по крайней мере один сохраняющийся суперзаряд Q, квадрат которого - калибровочное преобразование с параметром ϕ. Оператор Q действует на Гильбертовом пространстве теории и его квадрат равен нулю на физическом подпространстве калибровочно инвариантных состояний.

Поля теории приведены в таблице

Field	$SU(2)_L \times SU(2)_R$	U заряд	статистика	Q действие
A	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	0	B	ψ
ψ	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1	F	$D_A\phi$
ϕ	$(0,0)$	2	B	0
χ	$(0,1)$	-1	F	H
H	$(0,1)$	0	B	$[\phi, \chi]$
η	$(0,0)$	-1	F	$[\phi, \bar\phi]$
$\bar\phi$	$(0,0)$	-2	B	η

Предлагается использовать простейшие представители классов когомологий, имеющие вид:
$\mathcal{O}^{(0)}_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(\phi)$, $\mathcal{O}^{(1)}_{\mathcal{P}} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \phi^a}\psi^a$, $\mathcal{O}^{(2)}_{\mathcal{P}} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \phi^a}F^a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \phi^a \partial \phi^b}\psi^a\psi^b$,

$$\mathcal{O}^{(3)}_{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \phi^a \partial \phi^b}\psi^a F^b + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 \mathcal{P}}{\partial \phi^a \partial \phi^b \partial \phi^c}\psi^a\psi^b\psi^c.$$

Наблюдаемые старшей степени равны:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{P}}^{(4)} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{P}}{\partial\phi^a\partial\phi^b}F^aF^b + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3\mathcal{P}}{\partial\phi^a\partial\phi^b\partial\phi^c}F^a\psi^b\psi^c + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4\mathcal{P}}{\partial\phi^a\partial\phi^b\partial\phi^c\partial\phi^d}\psi^a\psi^b\psi^c\psi^d \tag{40}$$

Они входят в эффективное действие Зайберга-Виттена, в котором все поля абелевы. Вообще говоря, все действие можно представить как сумму 4-наблюдаемой, построенной по препотенциалу $\mathcal{F}$ и Q-точного члена. Мы рассматриваем все наблюдаемые $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}^{(p)}$ для всех $\mathcal{P}$ и p как деформации теории, добавляя их к действию следующим образом:

$$S = \sum_{p=0}^{4} T^{p,\alpha}\int_X \left(\mathcal{O}_{\mathcal{F}_p}^{(p)} + \{Q, R^{(p)}\}\right)\wedge e_\alpha, \tag{41}$$

где e_α пробегает базис в группе когомологий $H^*(X;\mathbb{R})$. Оказывается, можно разложить $T^{p,\alpha}\mathcal{F}_p = \sum_k T^{k,\alpha}\mathcal{P}_k$, где $\mathcal{P}_k$ пробегает пространство всех инвариантных полиномов.

Инфракрасная теория также является твистованной суперсимметричной калибровочной теорией с абелевой калибровочной группой.

Наблюдаемые $\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathrm{UV}}^{(p)}$ ультрафиолетовой теории переходят в наблюдаемые $\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathrm{IR}}^{(p)}$ инфракрасной теории. Поскольку калибровочная группа инфракрасной теории является максимальным тором (расширенным вейлевской группой) ультрафиолетовой теории, имеется взаимно-однозначное соответствие калибровочно инвариантных функций $\mathcal{P}_{\mathrm{UV}}$ и $\mathcal{P}_{\mathrm{IR}}$.

Теперь предположим, что два цикла $C^p \in H_p(X)$ и $C^q \in H_q(X)$ пересекаются: $C_p \cap C_q = C_{p+q-4} \in H_{p+q-4}(X)$.

Сколь бы не была велика инфракрасная шкала, когда точки пересекаются, мы должны это рассматривать с точки зрения ультрафиолетовой теории. Вклад малых расстояний приводит к появлению контактного члена:

$$\int_{C^p}\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathrm{UV}}^{(p)}\int_{C^q}\mathcal{O}_{\mathcal{Q},\mathrm{UV}}^{(q)} \longrightarrow \int_{C^p}\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathrm{IR}}^{(p)}\int_{C^q}\mathcal{O}_{\mathcal{Q},\mathrm{IR}}^{(q)} + \int_{C^{p+q-4}}\mathcal{O}_{\mathbb{C}(\mathcal{P},\mathcal{Q}),\mathrm{IR}}^{(p+q-4)} \tag{42}$$

Главная проблема эффективного использования низкоэнергетической теории состоит в определении контактных членов $\mathbb{C}(\mathcal{P},\mathcal{Q})$.

Если в процесс входит 4-наблюдаемая, мы получаем счетное множество контактных функций $C(\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_k)$ которые удобно собрать в производящую функцию $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} T^1\ldots T^k\mathbb{C}(\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_k) \tag{43}$$

где T^k - параметры деформации, в дальнейшем называемые, временами. Члены первого порядка по временам в производящей функции $\mathcal{F}$ равны $T^k\mathbb{C}(\mathcal{P}_k)$. Одноконтактная функция $\mathbb{C}(\mathcal{P}_k)$ это сама функция $\mathcal{P}_k$.

Утверждается, что статсумма в теории с неабелевой калибровочной группой (41) равна статсумме низкоэнергетической теории с абелевой калибровочной группой с действием

$$S = \int_X \mathcal{F}(a+\psi+F, T^{k,\alpha}e_\alpha) \tag{44}$$

При этом функция $\mathcal{F}(T)$ описывает деформации Γ - инвариантного лагранжиана в комплексном векторном пространстве C^{2r}, где Γ - определенная дискретная подгруппа линейной симплектической группы, называемая группой электромагнитной дуальности низкоэнергетической теории.

Рассмотрим вычисление $\langle \exp \int_{C_a} \mathcal{O}^{(2)}_{\mathcal{P}_a} \rangle_X$, где C_a - два циклы на четырехмерном многообразии X, которые могут пересекаться. Раздутие точки пересечения циклов сводит эту задачу к задаче с непересекающимися циклами. При этом рождается новый цикл на пространстве-времени, и в статсумме следует учитывать поток абелевого поля через него.

Из этого рассуждения можно показать, что в теориях с $T_m < 2$ парный контактный член равен:

$$\mathbb{C}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial a^i} \frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial a^j} \frac{\partial}{\partial \tau_{ij}} \log\Theta(\tau). \tag{45}$$

Второй способ получить контактный член $\mathbb{C}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ состоит в рассмотрении столкновения 4 и 0-наблюдаемых. Рассмотрим ассимптотически свободную теорию с безмассовой материей. Пусть $\mathcal{P}_1 = u_1$ является наблюдаемой, чей четвертый когомологический потомок является зарядом инстантона (квадратичный казимир). Вставка под коррелятор $e^{t \int_X u_1^{(4)}}$ эквивалентна умножению коррелятора в секторе с инстантонным зарядом k на $e^{2\pi i t k}$. Можно показать, что эта операция эквивалентна рескалированию полей $u_k \to e^{\frac{2\pi i d_k}{\beta_1} t} u_k$ и $a^i \to e^{\frac{4\pi i t}{\beta_1}} a^i$, где d_k - веса однородных генераторов u_k кольца инвариантных полиномов. Это приводит:

$$\mathbb{C}(u_1, u_k) = \frac{4\pi i}{\beta_1} \left(a^i \frac{\partial u_k}{\partial a^i} - d_k u_k \right) \tag{46}$$

Сравнивая (46) и (45) в случаях, когда это возможно, мы получаем интересное тождество, выделяющее семейство кривых Зайберга-Виттена и их обобщений среди всех кривых. Для определенности рассмотрим $SU(N_c)$ теорию с фундаментальной безмассовой материей:

$$\frac{\partial u_1}{\partial a^i} \frac{\partial u_k}{\partial a^j} \frac{\partial}{\partial \tau_{ij}} \log\Theta(\tau) = \frac{1}{2N_c - N_f} \left(a^i \frac{\partial u_k}{\partial a^i} - (k+1) u_k \right) \tag{47}$$

где N_f - число гипермультиплетов материи, a^i - A-периоды дифференциала $x \frac{dz}{z}$ на кривой:

$$z + \frac{x^{N_f}}{z} = x^{N_c} - \sum_{k=1}^{N_c - 1} u_k x^{N_c - k - 1}$$

<u>В Заключении</u> сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.
1. Гамильтониан суперсимметричной квантовой механики стремится к оператору, имеющему жорданову форму, в котором недиагональные элементы отвечают инстантонам.
2. Вычислена бета-функция в инстантонном пределе в твисторных переменных, показано, что она согласуется со стандартной.
3. Описано зеркальное преобразование как эквивалентность конформных теорий.
4. Показано, что теория Саито примитивной формы является переходом к голоморфной части ростков вакуумных волновых функций в суперсимметричной квантовой механике. По суперсимметричной квантовой механике построено решение уравнений ассоциативности.
5. Построен новый индекс, измеряющий (взвешенное со знаками) число солитонов в двумерной квантовой теории поля с минимальной суперсимметрией. Показано, что он отличен от нуля только для жестких траекторий.
6. Аномалия в центральном заряде в солитонном секторе в суперсимметричной теории выражена через разность киральных конденсатов.
7. Показано, что вклад точечных дефектов-фреклов (веснушек) в инстантонные вычисления в ассимптотически свободных теориях проявляются в замене переменных на пространстве констант связи.
8. Найдены специальные координаты на пространстве деформаций алгебраических интегрируемых систем в простейшем случае $SU(2)$ калибровочных теорий.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

[1] Descendants constructed from matter field in topological Landau-Ginzburg theories coupled to topological gravity, ТМФ, 95 (1993) 307-316

[2] Gravitational descendants as generators of diffeomorphisms of the target space in topological Landau-Ginzburg gravity, Письма в ЖЭТФ, 58 (1993) 598-602 (with I.Polyubin)

[3] On structure and open problems in topological theories coupled to topological gravity, ТМФ, 100 (1994) 104-112

[4] On connection between topological Landau-Ginzburg gravity and integrable systems, Int.J.Mod.Phys., A10 (1995) 4161-4178 (with I.Polyubin)

[5] On "Hodge"toplogical strings at genus zero, Письма в ЖЭТФ, 65 (1997) 386-392

[6] Issues in topological gauge theory, Nucl.Phys., B534 (1998) 549-611 (with N.Nekrasov, S.Shatashvili)

[7] Testing Seiberg-Witten solution, Strings, branes and dualities. Proc. of NATO ASI Cargese Conference, 1997. Dordrecht, Boston, Kluwer Academic Publishers, 1999, 359-372 (with N.Nekrasov, S.Shatashvili)

[8] Hodge strings and elements of K.Saito's theory of primitive form, Topological Field Theory: Primitive Form and Related Topics, Progress in Mathematics, v.160, Boston, Birkhauser, 1998, 305-337

[9] New moduli spaces, commutativity equations and SQM, Quantization, Gauge Theory and Strings: Proceedings of the International Conference Dedicated to the Memory of Professor Efim Fradkin, Moscow, 2000, v.1, Sci.World Publishing, 2001, 529-535

[10] Freckled instantons in two-dimensions and four-dimensions, Class.Quant.Grav., 17 (2000) 1181-1187 (with N.Nekrasov, S.Shatashvili)

[11] On four dimensional mirror symmetry, Fortsch.Phys., 48 (2000) 163-166 (with N. Nekrasov, S. Shatashvili)

[12] BPS saturated solitons in N=2 two-dimensional theories on RxS (domain walls in theories with compactified dimensions), Phys.Rev., D61 (2000) 085005 (with Xinrui Hou, M.Shifman)

[13] New moduli spaces of pointed curves and pencils of flat connections, Michigan Math.J. 48 (2000) 443-472 (with Yu.Manin)

[14] On compatibility of tensor products on solitons to WDW Equation Письма в ЖЭТФ, 73 (2001) 59-63 (with I.Polyubin)

[15] Counting supershort supermultiplets, Phys.Lett., B522 (2001) 327-334 (with M.Shifman, A.Vainshtein)

[16] Single state supermultiplet in 1+1 Dimensions, New J.Phys. 4 (2002) 21 (with M.Shifman, A.Vainshtein)

[17] N=2 sigma model with twisted mass and superpotential: central charges and solitons, Phys.Rev., D68 (2003) 045006 (with M.Shifman)

[18] Commutativity equations and dressing transformation, Письма в ЖЭТФ, 77 (2003) 62-68 (with I. Polyubin)

[19] Extended modular operad, Proc. of the MPIM conference on Frobenius Manifolds. Vieweg, 2004, Frobenius manifolds, E36 (2004) 181-211 (with Yu.Manin)

[20] The Freckled Instantons, The many faces of the superworld: Yuri Golfand memorial volume, Singapore, World Scintific, 2000, 453-475 (with N.Nekrasov and S.Shatashvili)

[21] Topological quantum mechanics for physicists, Письма в ЖЭТФ, 82 (2005) 373-380 (with I.Polyubin)

[22] On first order formalism in string theory, Phys.Lett., B633 (2006) 375-381 (with A. Marshakov, A. Zeitlin)