Федеральное государственное унитарное предприятие
Государственный Научный Центр Российской Федерации
Институт Теоретической и Экспериментальной Физики

на правах рукописи

Шакиров Шамиль Ринатович

НОВЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В МАТРИЧНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Специальность: 01.04.02 - теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва 2011

УДК 530.12

Работа выполнена в ФГУП "ГНЦ РФ ИТЭФ", г.Москва.

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук Морозов А.Ю.
(ФГУП «ГНЦ РФ ИТЭФ», г.Москва)

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук Горский А.С.
(ФГУП «ГНЦ РФ ИТЭФ», г.Москва)

доктор физ.-мат. наук Чехов Л.О.
(МИАН, г.Москва)

Ведущая организация: ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН, г.Москва

Защита диссертации состоится "21"июня 2011 г. в "14"часов на заседании диссертационного совета Д 201.002.01 в конференц-зале «ГНЦ РФ ИТЭФ» по адресу: г.Москва, ул. Б.Черемушкинская, д.25.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИТЭФ. Также диссертация и автореферат доступны по запросу через электронную почту shakirov@itep.ru

Автореферат разослан "23"мая 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук Васильев В.В.

1. Общая характеристика работы

1. 1. Актуальность темы

Диссертация посвящена построению новых точных решений в хорошо известных многочастичных моделях статистической физики. Объектом изучения в рамках данной диссертации являются системы (статистические ансамбли) из N частиц, которые взаимодействуют друг с другом с заданной потенциальной энергией взаимодействия $U(x_1, \ldots, x_N)$, где $x_1, \ldots, x_N$ – координаты частиц. Физически интересными величинами в таких моделях являются статистические средние: среднее положение частиц $\Big\langle x \Big\rangle$, дисперсия $\Big\langle x^2 \Big\rangle - \Big\langle x \Big\rangle^2$, средняя энергия $\Big\langle U \Big\rangle$ и другие аналогичные величины.

Точное вычисление средних величин (также называемых корреляторами) является сложной задачей. Для ее решения, вообще говоря, не известно универсальных математических методов, за исключением тех простейших случаев, когда потенциал $U(x_1, \ldots, x_N)$ квадратичен (Гауссов). По этой причине для изучения статистических средних применяются различные приближения: например, термодинамический предел (предел больших N) или квазиклассическое приближение (предел малых $\hbar$ для $U \mapsto U/\hbar$).

В некоторых случаях, используя специфические для конкретной модели методики и приемы, удается вычислить точно некоторый коррелятор или целое семейство корреляторов. Такие точные решения, естественно, позволяют получить о модели больше информации, нежели любые приближенные; и в этом состоит их ценность. Кроме этого, точные вычисления статистических интегралов могут содержать в себе новые математические идеи и поэтому представляют интерес также и с точки зрения чистой математики.

В настоящей диссертации с использованием оригинальных методик получен ряд точных решений в нескольких статистических моделях, в основном относящихся к классу так называемых *матричных моделей.* В таких моделях координаты частиц интерпретируются как собственные значения некоторой матрицы, а потенциал взаимодействия следует из естественной меры интегрирования на пространстве матриц и, как правило, является попарным логарифмическим отталкиванием.

Простейшим и в то же время репрезентативным примером таких моделей является Эрмитова матричная модель, в которой основной динамической величиной является $N \times N$ Эрмитова матрица ϕ, а наблюдаемые величины представляют из себя $SU(N)$–инвариантные статистические средние от следов степеней этой матрицы

$$\left\langle \mathrm{tr}\ \phi^{i_1} \ldots \mathrm{tr}\ \phi^{i_m} \right\rangle = \frac{1}{C_N} \int\limits_{N\times N} \mathrm{tr}\ \phi^{i_1} \ldots \mathrm{tr}\ \phi^{i_m}\ e^{-\mathrm{tr}\ V(\phi)}\ d\phi, \tag{1}$$

где V – произвольный потенциал. Как легко показать, при переходе от матричной переменной ϕ к ее собственным значениям $x_1, \ldots, x_N$ эта модель принимает вид статистической системы из N частиц на прямой с координатами $x_1, \ldots, x_N$, которые помещены в общий потенциал $V(x)$ и попарно отталкиваются друг от друга по логарифмическому закону

$$U(x_1, \ldots, x_N) = -\sum_i V(x_i) + \sum_{i<j} \log |x_i - x_j|^2. \tag{2}$$

Впервые модели такого типа изучались еще в работах Е.Вигнера и Ф.Дайсона, которых интересовало применение таких моделей к вычислению распределения уровней энергии атомных ядер. Впоследствии выяснилось, что матричные модели обладают целым рядом других приложений, подчас весьма далеких от исходной задачи о спектрах ядер: квантовый эффект Холла, проблемы лапласовского роста [1], квантовая гравитация [2], теория струн [3] и интегрируемые системы в физике [4, 5], теория чисел и комбинаторика графов [6] на двумерных поверхностях в математике – вот лишь некоторые из этих приложений.

Далеко не во всех из этих приложений достаточно использования стандартных приближенных методов; часто оказывается, что необходимая детальная информация о свойствах конкретной модели не может быть получена в рамках известных приближений. Прогресс в точном (не приближенном) вычислении корреляторов в матричных и статистических моделях, таким образом, может стимулировать продвижение в целом ряде областей современной физики и математики. Это является одним из факторов, обосновывающих актуальность выбора темы диссертации и полученных в ходе исследования результатов.

Наконец, построение и изучение точных решений актуально еще и потому, что они позволяют вычислить физически интересные асимптотики, которые трудно или вообще невозможно вычислить приближенными методами. Иллюстрацией этого феномена является статистическая модель двумерного Дайсоновского газа [7–9], которая представляет из себя систему из N частиц на плоскости с координатами $x_1, \ldots, x_N; y_1, \ldots, y_N$ и потенциальной энергией

$$U(x_1, y_1, \ldots, x_N, y_N) = -\sum_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) + \sum_{i<j} \log\left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\right]. \quad (3)$$

Одной из физически интересных величин в данной модели является средняя энергия кулоновского взаимодействия частиц системы

$$E_N = \left\langle \sum_{i<j} \log\left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\right] \right\rangle. \quad (4)$$

Используя стандартные термодинамические методы, несложно получить лидирующую асимптотику при числе частиц стремящемся к бесконечности

$$E_N \sim \frac{1}{2}N^2 \ln N - \frac{N^2}{4} + \ldots, \tag{5}$$

однако последовательное вычисление $1/N$ поправок к данному термодинамическому результату представляет существенные трудности. В настоящей диссертации мы строим E_N как точное решение конечно-разностного уравнения в гипергеометрических функциях. Полученное точное решение позволяет вычислить поправки до любого порядка малости по $1/N$, подтверждая таким образом ценность данного подхода в конкретных приложениях и общую актуальность выбора темы диссертации.

1. 2. Цель диссертационной работы

Целью данной диссертации является получение точных решений для корреляторов (средних) в статистических и матричных моделях. В частности,

1.2.1. Вычисление точных корреляционных функций в Эрмитовой модели в Гауссовом потенциале $V(\phi) = \phi^2/2$, то есть, производящих функций для $SU(N)$-инвариантных корреляторов вне всевозможных приближений (т.е. при произвольном конечном N)

$$\left\langle \mathrm{tr}\ \phi^{i_1} \ldots \mathrm{tr}\ \phi^{i_m} \right\rangle = \frac{1}{C_N} \int\limits_{N\times N} \mathrm{tr}\ \phi^{i_1} \ldots \mathrm{tr}\ \phi^{i_m}\ \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \phi^2\right)\ d\phi. \tag{6}$$

Рассматриваются следующие три типа производящих функций, отличающихся выбором веса суммирования: стандартные (также известные в теории матричных моделей как резольвенты)

$$\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_m=0}^{\infty}\Big\langle \mathrm{tr}\ \phi^{i_1}\ldots \mathrm{tr}\ \phi^{i_m}\Big\rangle x_1^{i_1}\ldots x_m^{i_m} = \Big\langle \mathrm{tr}\ \frac{1}{1-x_1\phi}\ldots \mathrm{tr}\ \frac{1}{1-x_m\phi}\Big\rangle, \quad (7)$$

экспоненциальные производящие функции

$$\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_m=0}^{\infty}\Big\langle \mathrm{tr}\ \phi^{i_1}\ldots \mathrm{tr}\ \phi^{i_m}\Big\rangle \frac{x_1^{i_1}}{i_1!}\ldots \frac{x_m^{i_m}}{i_m!} = \Big\langle \mathrm{tr}\ e^{x_1\phi}\ldots \mathrm{tr}\ e^{x_m\phi}\Big\rangle \quad (8)$$

и Харер-Цагировские производящие функции

$$\Big\langle \mathrm{tr}\ \mathrm{Erf}\big(x_1\phi\big)\ldots \mathrm{tr}\ \mathrm{Erf}\big(x_m\phi\big)\Big\rangle, \quad (9)$$

где $\mathrm{Erf}(x)=\sum_k x^{2k}/(2k-1)!!$ – модифицированная функция ошибок. Целью данной диссертации является вычисление вышеописанных m-точечных корреляционных функций и идентификация математических структур, которые адекватно отражают их свойства.

1.2.2. Вычисление средней Кулоновской энергии

$$E_N = \left\langle \sum_{i<j}\log|z_i-z_j|^2 \right\rangle, \quad (10)$$

которая представляет собой энергию отталкивания частиц двумерного Дайсоновского газа – статистической системы из N частиц на плоскости с комплексными координатами $z_1,\ldots,z_N$ и потенциальной энергией взаимодействия

$$U(z_1,\ldots,z_N) = -\sum_i |z_i|^2 + \beta\sum_{i<j}\log|z_i-z_j|^2 \quad (11)$$

при специальном значении параметра β (заряда частиц) равном единице.

Получение точной формулы для E_N при конечном и произвольном N, а также исследование термодинамического предела $N\to\infty$. В термодинамическом пределе целью диссертации является установить, входят ли полуцелые степени $1/N$ в асимптотическое разложение E_N при больших N, а также вычислить нескольких первых членов асимптотического $1/N$-разложения величины E_N и показать принципиальную возможность вычисления этого разложения до произвольного порядка.

1.2.3. Нахождение интегрального представления для статсуммы Z_{HK} модели Гурвица, которая определяется как

$$Z_{HK} = \exp\left(\frac{t}{2}\hat{H}\right) e^{x_1+\ldots+x_N}, \tag{12}$$

где дифференциальный оператор

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i\neq j} \frac{x_i x_j}{x_i - x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \tag{13}$$

иногда называется гамильтонианом Калоджеро.

Вышеописанное определение статистической системы имеет глубокие корни в современной теории струн [3]. Коэффициенты разложения вышеопределенной статсуммы Z_{HK} в ряд по переменным $x_1, \ldots, x_N$ называются числами Гурвица [10] и отвечают на вопрос о числе накрытий сферы произвольной римановой поверхностью, с одной сложной и фиксированным числом простых точек ветвления. Целью диссертации является дать более физическое представление для этой статсуммы в виде матричного интеграла по Эрмитовой матрице ϕ (или, что то же самое, в виде статистического интеграла по ее собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$). Такое интегральное представление, с одной стороны, предоставляет возможность по изучению теории накрытий сферы физическими методами, и наоборот, открывает новые перспективы применения теории римановых поверхностей в статистической физике.

1. 3. Результаты и положения, выносимые на защиту

1.3.1. Получены явно формулы для 1,2,3-точечных функций $\left\langle \mathrm{tr}\,\mathrm{Erf}\big(x_1\phi\big) \right\rangle$, $\left\langle \mathrm{tr}\,\mathrm{Erf}\big(x_1\phi\big)\mathrm{tr}\,\mathrm{Erf}\big(x_2\phi\big) \right\rangle$, $\left\langle \mathrm{tr}\,\mathrm{Erf}\big(x_1\phi\big)\mathrm{tr}\,\mathrm{Erf}\big(x_2\phi\big)\mathrm{tr}\,\mathrm{Erf}\big(x_3\phi\big) \right\rangle$ в Эрмитовой модели, вне рамок всевозможных приближений. Эти корреляционные функции выражены явно через элементарные функции (арктангенс), и сформулирована гипотеза о том, что весь этот класс корреляционных функций для произвольного числа вставок выражается через элементарные функции.

1.3.2. Для других типов корреляционных функций (экспоненциальные функции, резольвенты) получены явные интегральные выражения, изучена структура этих выражений с точки зрения теории ортогональных полиномов.

1.3.3. Показана возможность применения вышеописанных точных решений к вычислению физически интересных асимптотик в нашей модели, в частности, широко известной полукруговой асимптотики Вигнера [11].

1.3.4. Средняя Кулоновская энергия отталкивания E_N в двумерном Дайсоновском газе при $\beta = 1$ представлена как решение конечно-разностного уравнения. Используя методы комбинаторного анализа, получено точное решение этого уравнения в терминах гипергеометрической функции типа ${}_3F_2$.

1.3.5. Вычислено асимптотическое разложение данного точного решения E_N при больших N вплоть до порядка $1/N^2$, а также продемонстрирована принципиальная возможность вычисления этого разложения до произвольного порядка. Установлено, что разложение идет по полуцелым степеням $1/N$.

1.3.6. Получена явная формула для потенциала в модели Гурвица, как в терминах матричной переменной ϕ, так и в терминах статистических переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ (собственных значений). Потенциал представлен в виде ряда, общий член которого выражен через числа Бернулли. Найдена точная сумма ряда в терминах тригонометрического детерминанта Вандермонда.

1. 4. Научная новизна и практическая ценность

1.4.1. Полученные точные формулы для 1,2,3-точечных корреляционных функций в Гауссовой Эрмитовой модели являются первым известным примером точных производящих функций для матричных корреляторов, которые являются элементарными.

1.4.2. Полученная точная формула для средней Кулоновской энергии E_N в двумерном Дайсоновском газе при $\beta = 1$ позволила вычислить термодинамическую асимптотику (предел больших N) до порядка $1/N^2$, что не удавалось сделать иными методами.

1.4.3. Полученная точная формула для потенциала в модели Гурвица предоставляет новую возможность исследовать математические объекты (числа Гурвица и римановы поверхности) физическими методами. Прогресс в направлении расширения связей между теоретической физикой и математикой, достигнутый в последние десятилетия исследовательскими группами по всему миру, показывает что такая возможность обычно является плодотворной и для физической, и для математической наук.

1. 5. Апробация диссертации

Апробация диссертации и публикации. Результаты диссертации докладывались на международных конференциях: XVI международная летняя школа-семинар по современным проблемам теоретической и математической физики "Петровские чтения" (Казань, 2004 г.); IV,V,VI,VII международные школы ИТФ–ИТЭФ по теоретической и математической физике для одаренной молодежи (Киев, 2004, 2005, 2007,2008 гг.); 4th International Workshop "Quantum Particles and Fields" (Baku, September 19 – 24, 2005); 43rd

International School of Subnuclear Physics (Erice, Italy, 29 August – 7 September 2005) Workshop on Geometric Methods in Theoretical Physics (Trieste, Italy, July 2008); 46rd International School of Subnuclear Physics (Erice, Italy 29 August – 7 September 2008); Second International Conference on String Field Theory and Related Aspects(Moscow, April 2009); 2nd Workshop on Geometric Methods in Theoretical Physics (Trieste, Italy, July 2009). По материалам диссертации опубликовано 5 научных работ.

1. 6. Структура и объем диссертации

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Список литературы содержит около 55 наименований. Общий объем диссертации составляет 98 страниц.

2. Содержание работы

Данная диссертация объединяет решение трех различных научных задач, связанных общей концепцией вычисления точного решения и его дальнейшего применения к различным прикладным аспектам рассматриваемой задачи. В соответствии с этим, основная часть диссертации состоит из трех глав. Изложим вкратце содержание каждой из них.

Глава 1 посвящена решению задачи о вычислении точных корреляционных функций в Гауссовой Эрмитовой матричной модели, корреляторы в которой представляют из себя $SU(N)$-инвариантные статистические средние

$$\left\langle \mathrm{tr}\ \phi^{i_1} \ldots \mathrm{tr}\ \phi^{i_m} \right\rangle = \frac{1}{C_N} \int\limits_{N\times N} \mathrm{tr}\ \phi^{i_1} \ldots \mathrm{tr}\ \phi^{i_m}\ \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \phi^2\right)\ d\phi. \qquad (14)$$

Глава начинается с введения в теорию Эрмитовой модели [12, 13] и описания основных ее свойств, таких как соотношения между полными и связными корреляторами, тождеств Вирасоро [15], интегрируемости и уравнения Тоды [16]. После изложения этого известного математического аппарата, вводятся три типа производящих функций (7),(8), (9) и ставится задача о точном (вне всяких приближений) вычислении этих функций. Несмотря на то, что Эрмитова матричная модель без всякого сомнения является одним из наиболее изученных примеров матричных и статистических моделей, основное внимание исследователей длительное время было сосредоточено на исследовании структур и свойств, которые присущи системе в "термодинамическом"пределе больших N. Свойства системы при конечных N изучались не столь тщательно, и по этой причине решение поставленной задачи не содержится в литературе. Результаты диссертации являются новыми и представляют из себя существенное продвижение в решении этой задачи.

Единственный известный ранее частный случай данной задачи был разобран Харером и Цагиром [17, 18]. Ими было найдено точное решение для семейства одноточечных корреляторов

$$\left\langle \mathrm{tr}\ \phi^2 \right\rangle = N^2,$$

$$\left\langle \mathrm{tr}\ \phi^4 \right\rangle = 2N^3 + N,$$

$$\left\langle \mathrm{tr}\ \phi^6 \right\rangle = 5N^4 + 10N^2,$$

$$\left\langle \mathrm{tr}\ \phi^8 \right\rangle = 14N^5 + 70N^3 + 21N,$$

$$\left\langle \mathrm{tr}\ \phi^{10} \right\rangle = 42N^6 + 420N^4 + 483N^2,$$

$$\left\langle \mathrm{tr}\ \phi^{12} \right\rangle = 132N^7 + 2310N^5 + 6468N^3 + 1485N,$$

$$\left\langle \mathrm{tr}\ \phi^{14} \right\rangle = 429N^8 + 12012N^6 + 66066N^4 + 56628N^2.$$

Точное решение Харера-Цагира имеет вид

$$\frac{\left\langle \mathrm{tr}\ \phi^{2k} \right\rangle}{(2k-1)!!} = \text{ коэффициент при } x^{2k}\lambda^N \text{ в функции } \frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{1}{(1-\lambda)-(1+\lambda)x^2}.$$

Первая глава диссертации посвящена обобщению этого результата на случай многоточечных корреляционных функций. Используя аппарат интегрируемых уравнений Тоды и тождества Вирасоро, в главе выводится аналогичная формула для семейства 2-точечных корреляторов (здесь приводится только семейство нечетных корреляторов, для семейства четных корреляторов решение аналогично и приводится в тексте главы)

$$\left\langle \mathrm{tr}\ \phi\ \mathrm{tr}\ \phi \right\rangle = N \quad \left\langle \mathrm{tr}\ \phi\ \mathrm{tr}\ \phi^3 \right\rangle = 3N^2 \quad \left\langle \mathrm{tr}\ \phi\ \mathrm{tr}\ \phi^5 \right\rangle = 10N^3 + 5N,$$

$$\left\langle \mathrm{tr}\ \phi \mathrm{tr}\ \phi^7 \right\rangle = 35N^4 + 70N^2,$$

$$\left\langle \mathrm{tr}\ \phi^3\ \mathrm{tr}\ \phi^3 \right\rangle = 12N^3 + 3N, \quad \left\langle \mathrm{tr}\ \phi^3\ \mathrm{tr}\ \phi^5 \right\rangle = 45N^4 + 60N^2,$$

$$\left\langle \mathrm{tr}\ \phi^3\ \mathrm{tr}\ \phi^7 \right\rangle = 168N^5 + 630N^3 + 147N,$$

$$\left\langle \mathrm{tr}\ \phi^5\ \mathrm{tr}\ \phi^5 \right\rangle = 180N^5 + 600N^3 + 165N,$$

$$\left\langle \mathrm{tr}\ \phi^5\ \mathrm{tr}\ \phi^7 \right\rangle = 700N^6 + 4900N^4 + 4795N^2,$$

которая имеет вид

$$\frac{\left\langle \mathrm{tr}\ \phi^{2i+1} \mathrm{tr}\ \phi^{2j+1} \right\rangle}{(2i+1)!!(2j+1)!!} = \text{ коэффициент при } x^{2k+1} y^{2m+1} \lambda^N$$

$$\text{в функции } \frac{\lambda}{(\lambda-1)^{3/2}} \frac{\arctan\left(\dfrac{xy\sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda - 1 + (\lambda+1)(x^2+y^2)}} \right)}{\sqrt{\lambda - 1 + (\lambda+1)(x^2+y^2)}}.$$

Следует подчеркнуть, что существование решения в элементарных функциях не являлось а-приори ожидаемым свойством модели, напротив, ожидалось что с увеличением числа аргументов точная корреляционная функция (вне разложения по родам!) перестает принадлежать классу элементарных. Данное явное решение представляет из себя контрпример и показывает, что свойство элементарности сохраняется при увеличении числа аргументов.

Далее, приводится (ввиду некоторой громоздкости, без подробного решения соответствующих дифференциальных уравнений) выражение для 3-

точечной корреляционной функции. Эта функция также принадлежит к классу элементарных, что позволяет выдвинуть гипотезу, что все семейство корреляционных функций Харера-Цагира в Эрмитовой модели являются элементарными и выражаются как линейные комбинации определенного вида арктангенсов. Это совершенно новое свойство модели, не известное ранее.

Затем от этих формул, описывающих корреляционные функции типа (9), производится переход к корреляционным функциям типа (8), для которых выводится интересная система ортогональных полиномов с локальной мерой и контурно-интегральные представления, также вплоть до 3-точечных функций. Наконец, функции типа (9) применяются к вычислению стандартных корреляционных функций типа (7) в рамках разложения по роду (петлевого разложения), что показывает применимость в данном случае техники точных корреляционных функций к решению стандартных задач в этой области.

Глава 2 посвящена решению задачи о вычислении средней энергии Кулоновского отталкивания в двумерном Дайсоновском газе – системе N частиц на плоскости с комплексными координатами $z_1, \ldots, z_N$ и потенциальной энергией (11). Средняя Кулоновская энергия дается коррелятором в этой модели

$$E_N = \left\langle \sum_{i<j} \log |z_i - z_j|^2 \right\rangle, \tag{15}$$

который представляет из себя 2N-кратный интеграл, содержащий логарифмы. Непосредственное вычисление такого интеграла для произвольного конечного N непросто. Для решения этой проблемы нами применен известный и хорошо зарекомендовавший себя в статистической физике метод реплик:

$$E_N = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{e_N(\epsilon) - 1}{\epsilon}, \qquad e_N(\epsilon) = \left\langle \sum_{i<j} |z_i - z_j|^{2\epsilon} \right\rangle. \tag{16}$$

Это преобразование позволяет избавиться от логарифмов под знаком интеграла и свести задачу к усреднению полиномов в экспоненциальном фоне, то есть, по сути, свести ее к Гауссовым интегралам. Дальнейшее упрощение состоит в выборе специального значения параметра $\beta = 1$, после чего устанавливается, что коррелятор $e_N(\epsilon)$ удовлетворяет рекурсионному соотношению

$$(N+1)(\epsilon+2N+3)(\epsilon+2N+4)e_N(\epsilon) -$$

$$-2(12+34N+26N^2+6N^3+5\epsilon+10N\epsilon+4N^2\epsilon+\epsilon^2+N\epsilon^2)e_{N+1}(\epsilon)+$$

$$+(N+1)(12N^2+38N+4N\epsilon+\epsilon^2+5\epsilon+24)e_{N+2}(\epsilon)-$$

$$-4(N+2)(N+1)^2 e_{N+3}(\epsilon) = 0. \tag{17}$$

Используя это соотношение и метод реплик

$$e_N(\epsilon) = \frac{N(N-1)}{2} + \epsilon E_N + \ldots \tag{18}$$

восстанавливается уравнение, которому удовлетворяет сама средняя Кулоновская энергия:

$$2(2N+3)(N+2)(N+1)E_N -$$

$$-4(N+2)(3N^2+7N+3)E_{N+1}+$$

$$+2(N+1)(6N^2+19N+12)E_{N+2}-$$

$$-4(N+2)(N+1)^2 E_{N+3} + (3N+5)(N+1) = 0. \tag{19}$$

Затем выводится точное решение этого уравнения

$$E_N = \frac{N^2\Psi(N)}{2} - \frac{N^2}{4} + \frac{3N}{4} + \frac{1}{4} + \frac{N\gamma}{2} -$$

$$-\frac{\Gamma(N+3/2)}{\Gamma(N+2)\,\Gamma(3/2)}\;{}_3F_2\left(\begin{array}{c} 1, N-1, N+3/2 \\ N+2, N+1 \end{array}\middle|\; 1\right),$$

вычисляется его термодинамическое разложение при больших N

$$E_N = \frac{1}{2}N^2\ln N - \frac{N^2}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\gamma\right)N + \frac{5}{24} - \frac{4N^{1/2}}{3\sqrt{\pi}} +$$

$$+\frac{N^{-1/2}}{30\sqrt{\pi}} - \frac{107N^{-3/2}}{3360\sqrt{\pi}} + \frac{N^{-2}}{240} + \dots$$

и делается вывод, что в термодинамическом пределе разложение идет по полуцелым степеням $1/N$. Это неочевидное свойство модели, которое прежде не удавалось вывести приближенными методами, непосредственно следует из полученного точного решения.

Глава 3 посвящена решению задачи об интегральном (статистическом) представлении для статсуммы модели Гурвица, определяющейся выражением

$$Z_{HK} = \exp\left(\frac{t}{2}\hat{H}\right)e^{x_1+\ldots+x_N}, \tag{20}$$

где дифференциальный оператор

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i\neq j}\frac{x_i x_j}{x_i - x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \tag{21}$$

по существу совпадает с гамильтонианом хорошо известной системы Калоджеро. Ключевым шагом в решении этой задачи является переход от переменных $x_1, \ldots, x_N$ к матричной переменной ψ, собственными значениями которой они являются.

При этом дифференциальный оператор $\hat{H}$ принимает простой вид

$$\hat{H} = \psi_{kj}\psi_{il}\frac{\partial^2}{\partial\psi_{ij}\partial\psi_{kl}} = \mathrm{tr}\,\left(\psi\frac{\partial}{\partial\psi^T}\right)^2 - N\mathrm{tr}\,\left(\psi\frac{\partial}{\partial\psi^T}\right) \qquad (22)$$

и может быть представлен как матричный интеграл с помощью тождества

$$\int d\phi\, \exp\left(-\frac{1}{2t}\mathrm{tr}\,\phi^2 + V(\phi,t) + \mathrm{tr}\,\phi\hat{A}\right) \;=\; \exp\left(\frac{t}{2}\,\mathrm{tr}\,\hat{A}^2\right), \qquad (23)$$

где матричный оператор $\hat{A} = \psi\dfrac{\partial}{\partial\psi^T}$, а $V(\phi,t)$ – неизвестный искомый потенциал модели Гурвица, который возникает в силу некоммутативности элементов матрицы $\hat{A}$ (для матрицы с числовыми элементами это тождество было бы верно при $V(\phi,t) = 0$ в силу Гауссова интегрирования).

Стартовой точкой в решении задачи являются, как это часто бывает в теоретической физике, симметрийные соображения. В данной модели наиболее общий вид потенциала $V(\phi)$, которого можно ожидать в силу $SU(N)$-инвариантности, имеет вид ряда по инвариантным величинам – следам степеней матрицы, $\mathrm{tr}\,\phi^i$:

$$V\big(\phi,t\big) = \alpha(t) + \alpha_i(t)\,\mathrm{tr}\,\phi^i + \alpha_{ij}(t)\,\mathrm{tr}\,\phi^i\,\mathrm{tr}\,\phi^j + \alpha_{ijk}(t)\,\mathrm{tr}\,\phi^i\,\mathrm{tr}\,\phi^j\,\mathrm{tr}\,\phi^k + \ldots,$$

несколько (вообще говоря, любое наперед заданное количество) первых членов в котором можно вычислить непосредственно, используя разложение матричного интеграла (23) в ряд по степеням t и учитывая в каждом порядке эффекты некоммутативности элементов матрицы $\hat{A}$. Это вычисление дает

$$V(\phi,t)=-\frac{t}{24}N(N^2-1)+\frac{1}{24}\mathrm{tr}\ \phi^2\mathrm{tr}\ \phi^0-\frac{1}{24}\mathrm{tr}\ \phi^1\mathrm{tr}\ \phi^1-\frac{1}{2880}\mathrm{tr}\ \phi^4\mathrm{tr}\ \phi^0+$$

$$+\frac{1}{720}\mathrm{tr}\ \phi^3\mathrm{tr}\ \phi^1-\frac{1}{960}\mathrm{tr}\ \phi^2\mathrm{tr}\ \phi^2+\frac{1}{181440}\mathrm{tr}\ \phi^6\mathrm{tr}\ \phi^0-\frac{1}{30240}\mathrm{tr}\ \phi^5\mathrm{tr}\ \phi^1+\ldots.$$

Все вычисленные таким образом коэффициенты описываются формулой

$$V\big(\phi,t\big)=-\frac{t}{24}N(N^2-1)+\sum_{(i,j)>(0,0)}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2(i+j)}\frac{B_{i+j}}{i!j!}\ \mathrm{tr}\ \phi^i\ \mathrm{tr}\ \phi^j,$$

где B_k – это числа Бернулли,

$$B_2=\frac{1}{6},\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\ B_8=-\frac{1}{30},\ B_{10}=\frac{5}{66},\ B_{12}=-\frac{691}{2730},\ldots,$$

определяющиеся своей производящей функцией

$$\sum_{k=2}^{\infty}B_kz^k/k!=z/2\coth(z/2)-1.$$

Таким образом найден (пока без доказательства) точный потенциал модели Гурвица. Используя тождество (23), для самой статсуммы модели Гурвица имеем интегральное представление

$$Z_{HK}=\int\limits_{N\times N}d\phi\ \exp\left(-\frac{1}{2t}\mathrm{tr}\ \phi^2+V(\phi,t)+\mathrm{tr}\ \left(e^{\phi-Nt/2}\psi\right)\right). \qquad (24)$$

Этот интеграл допускает еще несколько упрощений. Во-первых, можно точно просуммировать ряд чисел Бернулли в тригонометрических функциях:

$$\sum_{\substack{i,j=0\\ i+j\geq 2}}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2(i+j)}\frac{B_{i+j}}{i!j!}\ \mathrm{tr}\ \phi^i\ \mathrm{tr}\ \phi^j=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{B_m}{2m\cdot m!}\mathrm{tr}\ \big(\phi\otimes I-I\otimes\phi\big)^m=$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \log\left(\frac{\sinh\left(\frac{\phi\otimes I - I\otimes\phi}{2}\right)}{\left(\frac{\phi\otimes I - I\otimes\phi}{2}\right)}\right),$$

так что интеграл примет вид

$$\int\limits_{N\times N}\sqrt{\det\left(\frac{\sinh\left(\frac{\phi\otimes I - I\otimes\phi}{2}\right)}{\left(\frac{\phi\otimes I - I\otimes\phi}{2}\right)}\right)}\ d\phi\ \exp\left(-\frac{1}{2t}\mathrm{tr}\ \phi^2 + \mathrm{tr}\ \left(e^{\phi - Nt/2}\psi\right)\right). \qquad (25)$$

Во-вторых, можно перейти от интеграла по матричной переменной ϕ к интегралу по собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. При этом интеграл примет вид

$$\int d^N\lambda\ \prod_{i<j}\frac{\lambda_i - \lambda_j}{x_i - x_j}\ \exp\left(-\frac{1}{2t}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^2 - \frac{2N-1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i - t\frac{N^3}{6} + t\frac{N}{24} + \sum_{i=1}^{N}e^{\lambda_i}x_i\right).$$

Таким образом, поставленная задача о нахождении интегрального представления для статсуммы Гурвица (изначально известной лишь в форме (20)) полностью решена. Полученное интегральное представление может быть полезно при дальнейшем исследовании теории Гурвица и связаных областей.

Публикации автора по теме диссертации

1. Sh.Shakirov, *Exact solution for mean energy of 2d Dyson gas at* $\beta = 1$, Phys.Lett.**A375** (2011) 984-989, arXiv: 0912.5520

2. A.Morozov and Sh.Shakirov, *Exact 2-point function in Hermitian matrix model*, JHEP **0912** (2009) 003, arXiv: 0906.0036

3. E.Akhmedov and Sh.Shakirov, *Gluings of Surfaces with Polygonal Boundaries*, Funkts. Anal. Prilozh. **43:4** (2009) 3–13, arXiv:0712.2448

4. A.Morozov and Sh.Shakirov, *Generation of Matrix Models by* $\hat{W}$*-operators*, JHEP, **0904** (2009) 064, arXiv: 0902.2627

5. A.Morozov and Sh.Shakirov, *On equivalence of two Hurwitz matrix models*, Mod.Phys.Lett.**A24**:2659-2666,2009, arXiv:0906.2573

Литература

[1] A.Zabrodin, *Random matrices and Laplacian growth*, arXiv:0907.4929

[2] V.Kazakov, *The appearance of matter fields from quantum fluctuations of 2D-gravity*, Mod.Phys.Lett. **A4** (1989) 2125;
E.Brezin and V.Kazakov, *Exactly Solvable Field Theories Of Closed Strings*, Phys. Lett. **B236** (1990) 144;
D.Gross and A.Migdal, *A Nonperturbative Treatment Of Two-Dimensional Quantum Gravity*, Nucl.Phys. **B340** (1990) 333;
A.Levin and A.Morozov, *On the Foundations of the Random Approach to Quantum Gravity*, Phys.Lett. **243B** (1990) 207-214;
J. Ambjorn, J. Jurkiewicz, and Yu. M. Makeenko, *Multiloop correlators for two-dimensional quantum gravity*, Physics Letters B., **251** (1990), 517-524;
P.Ginsparg, *Matrix Models of 2d Gravity*, hep-th/9112013;
A.Marshakov, A.Mironov and A.Morozov, *Generalized matrix models as conformal field theories: Discrete case*, Phys.Lett. **B 265** (1991) 99-107;
J. Ambjorn and C.F. Kristjansen, *Non-perturbative 2d quantum gravity and hamiltonians unbounded from below*, Int.J.Mod.Phys. **A8** (1993) 1259-1282, hep-th/9205073;
P.Di Francesco, P. Ginsparg and J. Zinn-Justin, *2D Gravity and Random Matrices*, Phys. Rep. **254** (1995) 1-133, hep-th/9306153;

C.F. Kristjansen, *Random Geometries in Quantum Gravity*, Doctoral Thesis, The Niels Bohr Institute, University of Copenhagen, 1993, hep-th/9310020;
P.Di Francesco, *2D Quantum Gravity, Matrix Models and Graph Combinatorics*, math-ph/0406013

[3] A.Morozov, *String Theory, What is it?*, Sov. Phys. Usp. **35** (1992) 671-714

[4] A.Morozov, *Integrability and Matrix Models*, Phys.Usp. **37** (1994) 1-55, arXiv:hep-th/9303139;
A.Morozov, *Matrix Models as Integrable Systems*, arXiv:hep-th/9502091

[5] A.Morozov, *Integrability and Matrix Models*, Phys.Usp. **37**(1994) 1-55, hep-th/9303139;
Matrix Models as Integrable Systems, hep-th/9502091;
A.Mironov, *Matrix Models vs. Matrix Integrals*, Theor.Math.Phys. **146** (2006) 63-72, hep-th/0506158

[6] F.David, *A Model of Random Surfaces with Nontrivial Critical Behavior*, Nucl. Phys. **B257** [FS14] (1985) 45, 543;
J. Ambjorn, B. Durhuus and J. Frohlich, *Diseases of Triangulated Random Surface Models, and Possible Cures*, Nucl. Phys. **B257** [FS14] (1985) 433;
V. A. Kazakov, I. K. Kostov and A. A. Migdal, *Critical Properties of Randomly Triangulated Planar Random Surfaces*, Phys. Lett. **157B** (1985) 295;
D.Boulatov, V. A. Kazakov, I. K. Kostov and A. A. Migdal, *Possible Types Of Critical Behavior And The Mean Size Of Dynamically Triangulated Random Surfaces*, Phys. Lett. **B174** (1986) 87;
Analytical and Numerical Study of the Model of Dynamically Triangulated Random Surfaces, Nucl. Phys. **B275** [FS17] (1986) 641;

L. Alvarez-Gaume, *Random surfaces, statistical mechanics, and string theory*, Lausanne lectures, 1990;

P. Di Francesco and C. Itzykson, *A Generating Function for Fatgraphs*, Annales Poincare Phys.Theor. **59** (1993) 117-140, hep-th/9212108

[7] A.Zabrodin and P. Wiegmann, *Large N expansion for the 2D Dyson gas*, J.Phys.**A39** (2006) 8933-8964, arXiv:hep-th/0601009

[8] P. Di Francesco, M. Gaudin, C. Itzykson and F. Lesage, *Laughlin's wave functions, Coulomb gases and expansions of the discriminant*, Int.J.Mod.Phys. **A9** (1994) 4257-4352, arXiv:hep-th/9401163

[9] J.M. Caillol, D. Levesque, J.J.Weis, J.P. Hansen, J.Stat. Phys. **28** (1982) 325;

S.W. de Leeuw, J.W. Perram, Physica **A113** (1982) 546;

P. Choquard, J. Clerouin, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 2086;

A. Alastuey, B. Jancovici, J. Physique **42** (1981) 1;

B. Jancovici, Phys. Rev. Lett. **46** (1981) 386;

A. Alastuey, Annales de Physique **11** (1986) 653

[10] A.Hurwitz, *Uber Riemann'sche Flachen mit gegebenen Verzweigungpunkten*, Math.Ann. **39** (1891) 1-61; *Uber die Anzal der Riemann'sche Flachen mit gegebenen Verzweigungpunkten*, Math.Ann. bf 55 (1902) 51-60;

R. Vakil, *Enumerative geometry of curves via degeneration methods*, Harvard Ph.D. thesis (1997);

I. Goulden and D. Jackson, *Transitive factorisations into transpositions and holomorphic mappings on the sphere*, Proc.Amer.Math.Soc. **125** (1997) 51–60, math/9903094;

S.Lando and D.Zvonkine, *On multiplicitites of the Lyashko-Looijenga mapping on the discriminant strata*, Funk.Anal.Appl. **33** 3 (1999) 178-188;

Counting ramified coverings and intersection theory on spaces of rational functions. I, math.AG/0303218;
S.Natanzon and V.Turaev, *A compactification of Hurwitz space*, Topology, **38** (1999) 889-914;
A.Okounkov, *Toda equations for Hurwitz numbers*, Math.Res.Lett. **7** (2000) 447-453;
A.Givental, *Gromov-Witten invariants and quantization of quadratic hamiltonians*, math/0108100;
S.Lando, *Ramified coverings of the two-dimensional sphere and intersection theory in spaces of meromorphic functions on algebraic curves*, Russ.Math.Surv., **57** (2002) 463-533;
A.Okounkov and R.Pandharipande, *Gromov-Witten theory, Hurwitz theory, and completed cycles*, Ann. of Math. **163** (2006) 517, math.AG/0204305;
T.Graber and R.Vakil, *Hodge integrals and Hirwitz numbers via virtual localization*, Compositio Math., **135** (2003) 25-36;
M.Kazarian and S.Lando, *Towards the intersection theory of Hurwitz spaces*, math.AG/0410388; *An algebro-geometric proof of Witten's conjecture*, math/0601760;
M.Kazarian, *KP hierarchy for Hodge integrals*, based on the talk at the Moscow Workshop on Combinatorics of moduli spaces, Hurwitz numbers and cluster algebras (June 2008), http://www.mi.ras.ru/~kazarian/papers/newwit0703.pdf;
A.Mironov and A.Morozov, *Virasoro constraints for Kontsevich-Hurwitz partition function*, JHEP **0902** (2009) 024, arXiv:0807.2843

[11] E.Wigner, *Characteristic Vectors of Bordered Matrices with Infinite Dimensions*, Ann.Math. **62** (1955) 548; *On the Distribution of the Roots*

of Certain Symmetric Matrices, Ann. of Math. **67** (1958) 325-328;
F.Dyson, J.Math.Phys. **3** (1962) 140, 157,166, 1191, 1199;
F.Dyson and M. Mehta, J. Math. Phys. 4, 701 (1963)

[12] A.Alexandrov, A.Mironov and A.Morozov, *Partition functions of matrix models as the first special functions of string theory. I: Finite size Hermitean 1-matrix model*, Int.J.Mod.Phys. **A19** (2004) 4127, hep-th/0310113;

[13] E.Brezin, C.Itzykson, G.Parisi and J.-B.Zuber, Comm. Math. Phys. **59** (1978) 35;
D.Bessis, C.Itzykson and J.-B.Zuber, Adv. Appl. Math. **1** (1980) 109 ;
M.-L. Mehta, *A method of integration over matrix variables*, Comm. Math. Phys. **79** (1981) 327; *Random Matrices*, 2nd edition, Acad. Press., N.Y., 1991;
J.Ambjorn, L.Chekhov, C.F.Kristjansen and Yu.Makeenko, *Matrix Model Calculations beyond the Spherical Limit*, Nucl.Phys. **B404**(1993) 127-172, Erratum **B449** (1995) 681, hep-th/9302014;
B.Eynard, *Large Random Matrices: Eigenvalue Distribution*, hep-th/9401165;
L. Chekhov and C. Kristjansen, *Hermitian Matrix Model with Plaquette Interaction*, Nucl.Phys. **B479** (1996) 683-696, hep-th/9605013;
A. Zvonkin, *Matrix integrals and map enumeration: an accessible introduction*, Combinatorics and Physics (Marseilles 1995), Math. Comput. Model. **26** (1997) 281-304;
T.Guhr, A.Mueller-Groeling and H.A.Weidenmueller, *Random Matrix Theories in Quantum Physics: Common Concepts*, Phys. Rep. **299** (1998) 189–425, cond-mat/9707301;
I. Kostov, *Conformal Field Theory Techniques in Random Matrix models*,

Les Houches 2004, 459-487, hep-th/9907060;

P. Forrester, N. Snaith and J. Verbaarschot, *Developments in Random Matrix Theory*, J. Phys. **A36** 2859–3645, cond-mat/0303207;

A.Morozov, *Challenges of matrix models*, hep-th/0502010;

[14] D.Bessis, *A new method in the combinatorics of the topological expansion*, Comm.Math.Phys. **69** (1979) 147;

A.Migdal, *Loop equations and 1/N expansion*, Phys.Rep. **102** (1983) 199;

Yu.Makeenko, A.Marshakov, A.Mironov and A.Morozov, *Continuum versus discrete Virasoro in one-matrix models*, Nucl.Phys. **B356** (1991) 574;

J. Ambjorn and C.F. Kristjansen, From 1-matrix model to Kontsevich model, Mod.Phys.Lett. **A8** (1993) 2875-2890, hep-th/9307063;

B.Eynard, *Master loop equations, free energy and correlations for the chain of matrices*, JHEP **0311** (2003) 018, hep-th/0309036; *Large N expansion of the 2-matrix model*, JHEP **0301** (2003) 051, hep-th/0210047; *All genus correlation functions for the hermitian 1-matrix model*, JHEP **0411** (2004) 031, hep-th/0407261;

B.Eynard and N.Orantin, *Topological expansion of the 2-matrix model correlation functions: diagrammatic rules for a residue formula*, JHEP **0612** (2006) 026, math-ph/0504058;

L.Chekhov and B.Eynard, *Hermitean matrix model free energy: Feynman graph technique for all genera*, JHEP **0603** (2006) 014, hep-th/0504116; *Matrix eigenvalue model: Feynman graph technique for all genera*, JHEP **0612** (2006) 026, math-ph/0604014

[15] M.Fukuma, H.Kawai and R.Nakayama, Int.J.Mod.Phys. **A6** (1991) 1385;

R.Digkgraaf, E.Verlinde and H.Verlinde, Nucl.Phys. **B348** (1991) 565;

A.Mironov and A.Morozov, Phys.Lett. **B252**(1990) 47-52;

F.David, *Loop Equations and Nonperturbative Effects in Two-Dimensional Quantum Gravity*, Mod.Phys.Lett. **A5** (1990) 1019;
J.Ambjorn and Yu.Makeenko, Mod.Phys.Lett. **A5** (1990) 1753;
H.Itoyama and Y.Matsuo, Phys.Lett. **B255** (1991) 202;
A.Marshakov, A.Mironov and A.Morozov, *From Virasoro Constraints in Kontsevich's Model to $\mathcal{W}$-constraints in 2-matrix Models*, Mod. Phys. Lett. A7 (1992) 1345-1360, hep-th/9201010;
A.Mironov and A.Morozov, *Virasoro constraints for Kontsevich-Hurwitz partition function*, JHEP **0902** (2009) 024, arXiv:0807.2843

[16] A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, and A. Orlov, *Matrix Models of Two-Dimensional Gravity and Toda Theory*, Nucl. Phys. **B357** (1991) 565-618

[17] J. Harer, D. Zagier, *The Euler Characteristic of the Moduli Space of Curves*, Inv. Math. **85** (1986) 457-485

[18] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Matrix integration and combinatorics of modular groups*, Comm. Math. Phys. **134** (1990) 197-207;
B. Lass, *Demonstration combinatoire de la formule de Harer-Zagier*, C. R. Acad. Sci. Paris, Se'rie, **I**, **333**, **No.3** (2001), 155-160;
S.K. Lando, A.K. Zvonkine, *Graphs on Surfaces and Their Applications*, Springer (2003);
I. P. Goulden and A. Nica, *A direct bijection for the Harer-Zagier formula*, J. Comb. Theory, **A**, **111**, **No. 2** (2005), 224-238;
E.Akhmedov and Sh.Shakirov, *Gluing of Surfaces with Polygonal Boundaries*, to appear in Funkts. Anal. Prilozh., arXiv:0712.2448