

И. Я. ПОМЕРАНЧУК

Собрание научных трудов

в трех томах



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1972

И. Я. ПОМЕРАНЧУК

Собрание научных трудов

III

ФИЗИКА
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ
СИЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1972

Физика элементарных частиц. Сильные взаимодействия. Т. III. Померанчук И. Я. Собрание научных трудов в трех томах. Изд-во «Наука», 1972.

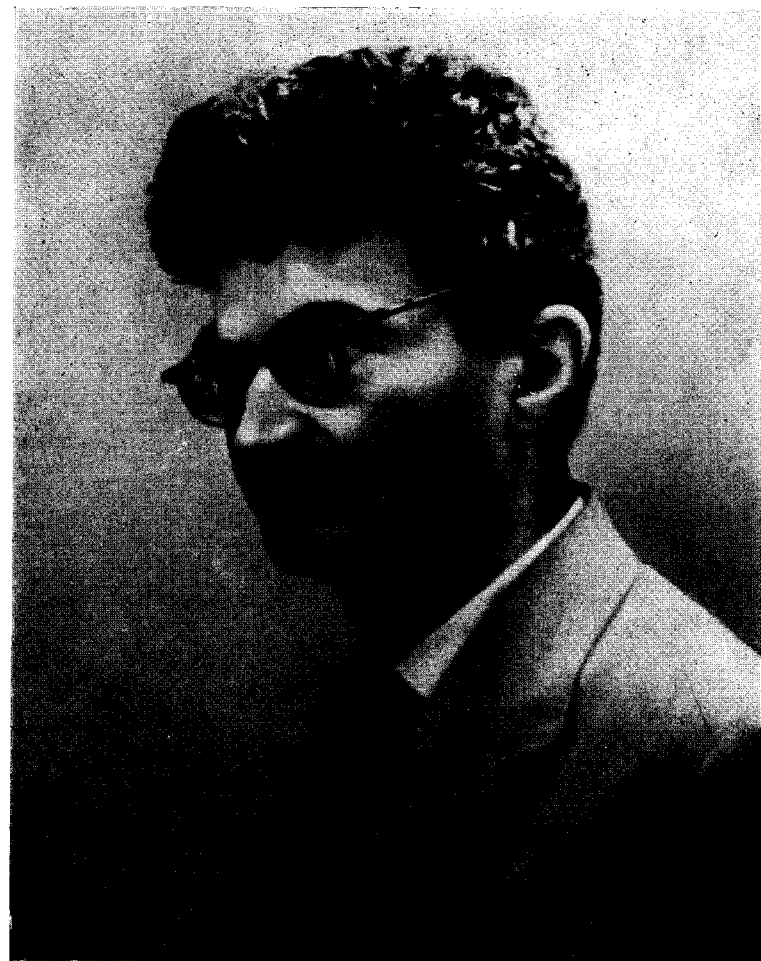
В собрание трудов выдающегося советского физика-теоретика академика И. Я. Померанчука вошли почти все его научные статьи, опубликованные в различное время в отечественных и зарубежных периодических изданиях. Работы И. Я. Померанчука охватывают широкий круг физических вопросов, они содержат важные результаты в таких разделах современной физики, как физика элементарных частиц и ядерная физика, теория ядерных реакторов и теория твердых тел и жидкостей.

В III том вошли статьи по теории сильных взаимодействий элементарных частиц.

Издание представляет значительный интерес для научных работников в области физики, инженеров-физиков, а также преподавателей, студентов и аспирантов физических специальностей вузов.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

В. Б. БЕРЕСТЕЦКИЙ (ответственный редактор),
Б. Л. ИОФФЕ, И. Ю. КОБЗАРЕВ, Л. А. КОНДРАТЮК,
Л. Б. ОКУНЬ



ИСААК ЯКОВЛЕВИЧ
ПОМЕРАНЧУК

ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ БЫСТРЫХ НЕЙТРОНОВ С ПРОТОНАМИ¹

Совместно с И. М. Шмушкевичем

Характер углового распределения рассеянных нейтронов при упругих столкновениях их с протонами в случае большой скорости относительного движения существенно зависит от того, являются ли силы, действующие между этими частицами, обычными силами или обменными [1]. В самом деле, в системе координат, связанной с центром инерции, дифференциальное поперечное сечение рассеяния имеет вид:

$$d\sigma_e = \frac{M^2}{16\pi^2\hbar^4} \left| \int e^{-ik_0 r} V e^{ik_1 r} d\tau \right|^2 d\Omega_{k_1} \quad (1)$$

где k_0 и k_1 — начальный и конечный волновой вектор относительного движения частиц. В случае обычных сил интеграл, входящий в это выражение, заметно отличается от нуля при условии

$$|k_1 - k_0| \lesssim \frac{1}{a} \ll k_0 \quad (2)$$

где a — величина порядка радиуса действия сил. Последняя часть неравенства (2), являющегося условием применимости борновского приближения, означает, что рассеяние происходит, в основном, на очень малые углы, не превышающие величины

$$\Delta\theta \sim \frac{1}{ak_0} \ll 1. \quad (3)$$

¹ ДАН СССР, 1949, 64, 499. (Представлено академиком А. Ф. Иоффе 6 декабря 1948 г.).

В случае же обменных сил, характеризующихся потенциальной энергией вида ¹

$$V = U(r)I, \quad (4)$$

где I — оператор перестановки местами протона и нейтрона (т. е. замены \mathbf{r} на $-\mathbf{r}$), рассеяние, как легко убедиться, будет происходить в основном на углы, близкие к 180° , в небольшом интервале, также определяемом соотношением (3). При этом вместо (2) мы получим

$$|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_0| \sim \frac{1}{a}. \quad (5)$$

Изменение же волнового вектора в результате столкновения

$$|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_0| \approx 2k_0. \quad (6)$$

Таким образом, при обменном взаимодействии изменение волнового вектора, а следовательно, и скорости сталкивающихся частиц гораздо больше, чем при обычных силах. Но большее изменение скорости протона в результате столкновения означает большее изменение производной от дипольного момента за время столкновения и, следовательно, большую интенсивность излучения. Мы можем поэтому ожидать, что поперечное сечение рассеяния с излучением при обменном взаимодействии (существование которого можно, по-видимому, считать экспериментально установленным [2]) будет значительно больше, чем при обычных силах. Подтвердим это расчетом, принимая для потенциальной энергии выражение, даваемое уравнением (4).

Рассматривая взаимодействие между частицами при большой скорости их относительного движения как малое возмущение, для матричного элемента перехода с излучением имеем

$$H_{01} = \sum_n \frac{H_{0n} H_{n1}}{E_0 - E_n}. \quad (7)$$

Здесь в каждом члене суммы один из множителей в числителе есть матричный элемент взаимодействия протона с полем излучения, а второй — энергии взаимодействия между протоном и нейтроном. Производя вычисления в системе координат, связанной с центром инерции, и пренебрегая всюду импульсом кванта $\hbar\mathbf{k}$, для

единственных не равных нулю матричных элементов получаем:

$$H_{0I} = -\frac{e}{M} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}} e \int e^{-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}} p e^{i\frac{\mathbf{x}\mathbf{r}}{2}} e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}} d\tau = -\frac{e\hbar}{M} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}} e \mathbf{k}_0;$$

$$H_{II} = \int e^{-i(\mathbf{k}_0 - \frac{\mathbf{x}}{2})\mathbf{r}} V e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}} d\tau \cong \int U(r) e^{-i(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1)\mathbf{r}} d\tau = U_{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1};$$

$$\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_0 - \frac{\mathbf{x}}{2}; \quad (8)$$

$$H_{0II} = \int e^{-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}} V e^{i(\mathbf{k}_1 + \frac{\mathbf{x}}{2})\mathbf{r}} d\tau \cong \int U(r) e^{-i(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1)\mathbf{r}} d\tau = U_{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1};$$

$$\mathbf{k}_{II} = \mathbf{k}_1 + \frac{\mathbf{x}}{2};$$

$$H_{III} = -\frac{e}{M} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}} e \int e^{-i(\mathbf{k}_1 + \frac{\mathbf{x}}{2})\mathbf{r}} p e^{i\frac{\mathbf{x}\mathbf{r}}{2}} e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}} d\tau =$$

$$= -\frac{e\hbar}{M} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}} e \mathbf{k}_1.$$

Кроме того,

$$E_0 - E_I = \frac{\hbar^2 k_0^2}{M} - \left(\frac{\hbar^2 k_I^2}{M} + \hbar\omega \right) \cong -\hbar\omega, \quad (9)$$

$$E_0 - E_{II} = E_I - E_{II} = \left(\frac{\hbar^2 k_I^2}{M} + \hbar\omega \right) - \frac{\hbar^2 k_{II}^2}{M} \cong +\hbar\omega.$$

Подставляя (8) и (9) в выражение для дифференциального поперечного сечения

$$d\sigma = \frac{2\pi}{\hbar\nu} |H_{01}|^2 \frac{k_1^2 d\Omega_{\mathbf{k}_1} \kappa^2 d\kappa d\Omega_{\mathbf{x}}}{(2\pi)^6 \frac{\partial E_1}{\partial k_1}} \quad (10)$$

и производя в нем суммирование по обеим поляризациям и интегрирование по всем углам вылета кванта, имеем

$$d\sigma = \frac{1}{24\pi^3} \frac{d\omega}{\omega} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_0)^2}{\hbar^2 c^2} |U_{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1}|^2 \frac{k_1}{k_0} d\Omega_{\mathbf{k}_1}. \quad (11)$$

На основании (5) можно считать $k_1 \cong k_0$. Принимая далее во внимание (1) и (4), мы получаем следующую связь между сечениями упругого рассеяния и рассеяния с излучением

$$d\sigma = \frac{2}{3\pi} \frac{d\omega}{\omega} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)^2}{M^2 c^2} d\sigma_e. \quad (12)$$

Из различия в угловом распределении упругого рассеяния при обменном и обычном взаимодействии и из сравнения (2) и (6) мы видим, что сечение рассеяния с излучением в случае обменных сил больше, чем при обычных силах в отношении

$$\frac{p^2}{\hbar^2/a^2} \sim \frac{E}{V_0}, \quad (13)$$

¹ Для дальнейших выводов несущественен выбор такого сравнительно простого вида потенциальной энергии, не учитывающего, в частности, зависимости V от спинов частиц.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОБМЕННЫХ СИЛ¹

Совместно с И. М. Шмушкевичем

которое при больших скоростях может быть значительно больше единицы. Через V_0 в (13) обозначена энергия $\frac{\hbar^2}{Ma^2} \sim 20 \text{ Мэв}$.

Полное поперечное сечение рассеяния с излучением можно оценить, взяв из опыта величину полного поперечника для упругого рассеяния. При этом заметим, что испускаемые при столкновении кванты будут, в основном, обладать энергией, не превосходящей величины

$$\hbar\omega \sim \frac{p\Delta p}{M} \sim \frac{p}{M} \frac{\hbar}{a} \sim \sqrt{V_0 E}. \quad (14)$$

Следовательно, для полного сечения с излучением квантов всех энергий, больших некоторой $\hbar\omega_1$, по порядку величины имеем

$$\sigma \sim \frac{4}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \lg \sqrt{\frac{V_0 E}{\hbar\omega_1}} \frac{E}{Mc^2} \sigma_e. \quad (15)$$

Согласно экспериментальным данным [3], при энергии нейтронов $E = 90 \text{ Мэв}$ $\sigma_e = 0,083 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$. Принимая $\hbar\omega_1 = 1 \text{ Мэв}$, получаем

$$\sigma \sim 10^{-28} \text{ см}^2. \quad (16)$$

При рассеянии быстрых нейтронов ядрами сечение будет больше еще в Z раз. При энергии нейтронов $E = 90 \text{ Мэв}$, согласно данным тех же авторов [3], поперечное сечение упругого рассеяния нейтронов в свинце $\sigma_e = 4,53 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$. Следовательно,

$$\sigma \sim 0,5 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2. \quad (17)$$

В азоте и кислороде σ_e равно $0,656 \cdot 10^{-24}$ и $0,765 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$. Соответственно этому σ порядка 10^{-27} см^2 .

Сечение рассеяния с излучением, по-видимому, возрастает с ростом энергии. Тяжелые частицы, а именно протоны с очень большой энергией, порядка нескольких миллиардов электрон-вольт, имеются в составе космических лучей, приходящих из мирового пространства. Если при столкновениях таких релятивистских протонов с ядрами азота и кислорода, находящихся в верхних слоях атмосферы, имеет место обменное взаимодействие, то это должно сопровождаться рождением аномально большого количества фотонов и, следовательно, рассмотренные процессы могут играть существенную роль в образовании мягкой компоненты космических лучей. Расчет в этом случае, однако, становится невозможным из-за отсутствия релятивистского уравнения для тяжелых частиц.

Ленинградский
физико-технический институт
Академии наук СССР

Получено 28 ноября 1948 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. C. Wick. Z. Physik, 1933, 84, 799;
2. J. Hadley, C. Leith, H. Jork E. Kelly, C. Wiegand. Bull. Amer. Phys. Soc., 1948, 23, 15.
3. L. J. Cook, E. M. McMillan, J. M. Peterson, D. C. Sewell. Phys. Rev., 1947, 72, 1264.

Как было указано в нашей работе [1], наличие обменных сил между нейтроном и протоном должно приводить к значительному возрастанию интенсивности излучения фотонов при столкновениях между этими частицами. Для соответствующего поперечного сечения σ была установлена следующая связь с сечением упругого рассеяния:

$$\sigma \approx \frac{3}{4\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \lg \sqrt{\frac{V_0 E}{\hbar\omega_1}} \frac{E}{Mc^2} \sigma_e. \quad (1)$$

Оценка этого сечения для рассеяния быстрых нейтронов на ядрах различных элементов производилась с помощью экспериментальных данных для σ_e .

Мы хотим указать, что, строго говоря, соотношение (1) справедливо, как это следует из самого вывода, лишь для столкновений между нейтроном и протоном. При столкновениях же с тяжелыми ядрами налетающая частица (нейтрон или протон) может испытать несколько столкновений с отдельными нуклонами перед тем как выйти из ядра. Это число столкновений $\sim R/l$, где R — радиус ядра, а l — длина свободного пробега налетающей частицы в ядре. По порядку величины $R = r_0 A^{1/3}$ [2] и $l \sim \frac{1}{n\sigma_1} = \frac{4\pi}{3} \frac{r_0^3}{\sigma_1}$.

Следовательно, $\frac{R}{l} \sim \frac{\sigma_1}{r_0^2} A^{1/3}$, $r_0 \approx 1,5 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, а σ_1 для оценки мы можем заменить на сечение упругого рассеяния нейтронов протонами², которое при энергии нейтронов $E = 90 \text{ Мэв}$ равно $0,083 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ [3]. Поэтому частица с энергией в несколько сот мегаэлектронвольт может испытать несколько столкновений в тяжелом ядре.

Имея в виду, что дебройлевская длина волны частицы, при соответствующей энергии, мала по сравнению с расстоянием между

¹ ДАН СССР, 1950, 70, 33. (Представлено академиком А. Ф. Иоффе 25 октября 1949 г.).

² Здесь, так же как в (1) и во всех формулах для сечения в [1], следует брать примерно половину этого упругого сечения, учитывая, что обменные силы составляют приблизительно половину всех сил, действующих между протоном и нейтроном. Для порядковых расчетов это не очень существенно.

частицами в ядре, мы оценим интенсивность излучения, рассматривая классически движущиеся налетающей частицы [4].

Для нейтрона, влетающего с большой скоростью V в ядро, имеется значительная вероятность (примерно $1/2$) при первом же столкновении с ядерным протоном передать благодаря обменным силам, почти весь свой импульс протону. Интенсивность возникающего при этом излучения в интервале частот $d\omega$ получится из работы [1, формула (12)] умножением на $\hbar\omega$ и делением на $d\sigma_e$:

$$dI = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{c^3} (v_1 - v_0)^2 d\omega \approx \frac{2}{3\pi} \frac{e^2 V^2}{c^3} d\omega. \quad (2)$$

Получившийся быстрый протон, аналогичным образом, благодаря обменному эффекту, может при последующем столкновении с нейтроном передать последнему свой импульс. При этом также произойдет излучение с повышенной интенсивностью (по сравнению с излучением, имеющим место при обычном взаимодействии). Пренебрегая эффектами, связанными с образованием вторичных медленных протонов (их импульс порядка $\hbar/a \ll M\alpha v$) можно считать, что в каждый момент времени имеется только один быстро движущийся заряд или ни одного.

Фурье-компонента векторного потенциала возникающего при этом излучения [5]

$$A_\omega = - \frac{e^{i\mathbf{x}R_0}}{2\pi c R_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e v(t) e^{i[\omega t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}(t)]} dt. \quad (3)$$

Рассматривая излучение в наиболее эффективной части спектра, т. е. фотоны с энергией не большей, чем $\sqrt{V_0 E}$ (или, что то же, с частотами, удовлетворяющими неравенству $\omega\tau \ll 1$, где τ — время столкновения), мы можем при вычислении этого интеграла пренебречь той его долей, которая приходится на время столкновений. Тогда получим

$$A_\omega = - \frac{e^{i\mathbf{x}R_0}}{2\pi c R_0} \sum_m \frac{e}{i\omega} \Delta v_m e^{i(\omega t_m - \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}_m)}. \quad (4)$$

Здесь сумма берется по всем столкновениям, при которых происходит изменение скорости заряда, т. е. протона. Это изменение обозначено через Δv_m . Столкновения нейтрона с нейтроном и протона с протоном в (7) не учитываются; последнее — в силу квадрупольности соответствующего излучения, интенсивность которого в рассматриваемой нерелятивистской области значительно меньше дипольного. В (4) в знаменателе под знаком суммы пренебрежено также членом $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}$ по сравнению с ω ($v \ll c$). Для интенсивности излучения в интервале частот $d\omega$ и элементе телесного угла $d\Omega_{\mathbf{x}}$ получаем

$$dI = \frac{e^2}{4\pi^2 c^3} \left| \left[\mathbf{n}, \sum_m \Delta v_m e^{i(\omega t_m - \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}_m)} \right] \right|^2, \quad (5)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении \mathbf{x} .

Пренебрегая диссипацией энергии быстрой частицы, будем считать скорость ее v постоянной. Тогда $\Delta v_m = \pm V$ и $t_m = x_m/V$, где x_m — путь, проходимый быстрой частицей до m -го столкновения.

Рассмотрим сначала излучение длинных волн, частота которых удовлетворяет условию

$$\frac{\omega R}{V} \ll 1. \quad (6)$$

В этом случае во всех членах суммы (4) $e^{i(\omega t_m - \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}_m)} \approx 1$ и

$$\sum_m \Delta v_m \cong v_{\text{кон}} - v_{\text{нач}}. \quad (7)$$

Таким образом, если первоначально в ядро попадает быстрый нейтрон и вылетает также нейтрон, то никакого излучения фотонов с энергией

$$\hbar\omega \ll \sqrt{\frac{E}{Mc^2}} \frac{\hbar c}{R} \quad (8)$$

происходить не будет. Если же вылетает протон, то $v_{\text{нач}} = 0$, а $v_{\text{кон}} = V$. Подставляя это в (7) и затем в (5), деля последнее на $\hbar\omega$ и умножая на поперечное сечение попадания нейтрона в ядро, которое по порядку величины совпадает с сечением упругого рассеяния нейтрона σ_e , мы, после интегрирования по всем направлениям вылета фотона, снова возвращаемся для длинноволновой части излучения к результатам, полученным в [1]

$$d\sigma = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{E}{Mc^2} \sigma_e \frac{d\omega}{\omega}. \quad (9)$$

Усреднение по различным возможностям вылета нейтрона или протона дает еще дополнительный фактор порядка $1/2$, который, впрочем, согласно сделанному ранее примечанию, должен быть введен и в (1). Такой же результат, конечно, получается и для столкновений протонов с ядрами.

Для фотонов же с энергией

$$\hbar\omega \gg \sqrt{\frac{E}{Mc^2}} \frac{\hbar c}{R} \quad (10)$$

при усреднении квадрата модуля суммы в (5) по различным возможным столкновениям в ядре возникает дополнительный множитель, равный примерно среднему числу столкновений, испытываемых быстрой частицей в ядре¹. Последнее, как уже было указано, невелико и потому, по порядку величины, формулу (1) можно счи-

¹ Так как R только в 2—3 раза больше, чем l , то мы не уточняем вопроса о том, что именно должно стоять в знаменателе правой части неравенства (10), R или l , для справедливости последнего утверждения.

тать верной и для столкновений быстрых нейтронов или протонов с ядрами.

Недавно сообщалось о наблюдении интенсивного излучения фотонов при столкновениях с ядрами быстрых протонов, полученных в циклотроне [6]. Рассматриваемый нами механизм образования фотонов, хотя и приводит к эффективным сечениям, по-видимому, меньшим, чем наблюдаемые, тем не менее должен, возможно, учитываться при анализе соответствующих экспериментов.

Интересно еще сравнить потери энергии быстрой частицы при столкновениях с излучением и при упругих столкновениях. Энергия, теряемая в среднем при одном столкновении на излучение:

$$\frac{1}{\sigma_e} \int \hbar \omega d\omega \sim \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{E}{Mc^2} \sqrt{V_0 E}; \quad (11)$$

потеря же энергии при упругом столкновении порядка $V_0 = \hbar^2/Ma^2$. Отношение этих потерь

$$\sim \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{E}{Mc^2} \sqrt{\frac{E}{V_0}}. \quad (12)$$

Хотя эта величина даже при энергии $E = Mc^2$ много меньше единицы (порядка 3%), но важно, что с ростом энергии она растет и при ультрарелятивистских скоростях потери энергии на излучение могут стать существенными.

В заключение отметим одно свойство рассматриваемого излучения. Вектор изменения скорости заряда при всех столкновениях, обусловленных обменными силами, имеет всегда почти одно и то же направление, совпадающее с направлением скорости быстрой частицы¹.

Поэтому излучение, сопровождающее такие столкновения, будет иметь в каждом направлении вполне определенную поляризацию, совпадающую с поляризацией излучения диполя, колеблющегося в направлении движения частицы. При этом угловое распределение интенсивности излучения при столкновениях нейтронов с протонами, а для малых частот также при столкновениях нейтронов или протонов с ядрами будет иметь вид:

$$dI = \frac{e^2 V^2}{4\pi^2 c^3} \sin^2 \theta d\Omega_x d\omega. \quad (13)$$

¹ Следовательно, можно сделать следующее заключение об интенсивности длинноволнового излучения, возникающего благодаря обменным силам при кратковременном облучении какой-либо мишени пучком нейтронов. Именно, если обозначить через L длину, которую нейтроны проходят прежде чем затормозиться, то интенсивность излучения с длиной волны большей, чем Lc/v (см. [6]; при этом предполагается, что L/v много больше времени облучения), будет пропорциональна квадрату общего количества нейтронов, попавших на мишень за время облучения. Однако существующие интенсивности нейтронных пучков, по-видимому, недостаточны для того, чтобы этот эффект был наблюдаем.

Для частот же, определяемых неравенством (10), в случае столкновений нейтронов или протонов с ядрами для получения интенсивности излучения нужно выражение (13) помножить еще на величину порядка R/l .

Академия наук СССР

Получено 19 октября 1949 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Померанчук, И. Шмушкевич. ДАН СССР, 1949, 64, 499. (Собр. трудов, № 80.)
2. Г. Бете. Лекции по теории ядра, 1949, стр. 19.
3. L. J. Cook, E. M. McMillan, J. M. Peterson, D. C. Sewell. Phys. Rev., 1947, 72, 1264.
4. R. Serber. Phys. Rev., 1947, 72, 1114.
5. Л. Ландау, Е. Лифшиц. Теория поля, 1949, гл. IX, § 66.
6. B. J. Mayer, H. F. York, R. Bjorklung. Bull. Amer. Phys. Soc., 1949, 24, 2, 19; 1949, 24, 4, 36.

ОБМЕННЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ БЫСТРЫХ НУКЛОНОВ С ДЕЙТРОНАМИ. I¹

Рассматриваются эффективные сечения обменных столкновений быстрых нуклонов с дейтронами. При рассмотрении используются экспериментальные данные о столкновениях свободных нуклонов. Показывается, что влияние связи частиц в дейтроне и применение принципа Паули дают возможность экспериментально установить спиновую зависимость обменных сил при сопоставлении сечений обменных столкновений нуклонов с дейтронами и со свободными нуклонами.

§ 1. Введение

Полученные в последнее время экспериментальные данные относительно рассеяния быстрых нейтронов (n) протонами (p) доказывают существование обменных сил [1, 2], действующих между нейтроном и протоном, причем в интервале энергий 100—300 $Mэв$ эти силы составляют заметную долю всех сил, примерно равную половине для энергии 90 $Mэв$. Из опытов по рассеянию $n - p$ в области больших энергий, проведенных до сих пор, нельзя, однако, установить спиновую зависимость обменных сил, так как эффективное сечение рассеяния неполяризованного пучка нейтронов неполяризованной водородной мишенью определяется суммой сечений рассеяния, вызываемых силами, зависящими от спина и не зависящими от него. Раздельное определение этих сечений возможно в случае рассеяния нуклонов под действием обменных сил на дейтроне. В этом случае параллельность спинов нейтрона и протона в дейтроне в известных условиях сильно уменьшает вероятность рассеяния, сопровождающегося обменом спинов.

Комбинируя данные по рассеянию быстрых нуклонов на протонах и на дейтронах, можно установить зависимость от спина обменных сил. Рассмотрение рассеяния быстрых нуклонов на дейтроне может быть проведено на основании данных по обменному рассеянию $n - p$. При этом не нужно пользоваться теорией возмущения, которая, по-видимому, не может быть применена даже при энергиях порядка 100—300 $Mэв$ [3, 4].

Не пользуясь теорией возмущения, можно вычислить рассеяние нуклонов на дейтроне, если учесть, что расстояния частиц в дейтроне велики по сравнению с теми расстояниями от дейтронной

частицы, на которые должна сблизиться быстрая падающая частица, для того чтобы произошло рассеяние. Это же обстоятельство можно сформулировать и так: полное сечение $n - d$ столкновения, которое равно $12 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2$ при 90 $Mэв$ [5] и примерно равно $5,5 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2$ при 260 $Mэв$ [6, 7], мало по сравнению с «площадью дейтрона», равной примерно $\pi (\hbar^2/m\varepsilon) = 6 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$ (ε — энергия связи дейтрона). Если считать, что полное сечение $p - d$ столкновений при тех же энергиях имеет тот же порядок величины, что и полное сечение $n - d$, то сходное условие имеет место и при столкновениях $p - d$. В этих условиях динамическое взаимодействие падающей быстрой частицы с нуклонами, входящими в состав дейтрона, не может сильно отличаться от взаимодействия со свободной частицей. Вычисление рассеяния нуклонов в дейтроне сводится к определению интерференции рассеянных волн от разных нуклонов в дейтроне, с учетом при этом связи частиц в дейтроне и принципа Паули в применении к одинаковым частицам. Так как скорость налетающего нуклона велика по сравнению со скоростью частиц в дейтроне, то продолжительность столкновения значительно меньше времени, в течение которого заметно меняется расстояние между частицами в дейтроне. Амплитуда рассеяния каждой дейтронной частицей берется из опытных данных по столкновениям нуклонов. Недавно (после окончания этой работы) такая программа была применена к анализу неупругих $n - d$ столкновений [8], имея своей целью выяснение $n - n$ рассеяния. Однако особенно простые результаты получаются, если рассматривать спиновую зависимость обменных столкновений, приводящих к реакциям:

$$n + d = p + (n + n), \quad (\text{I})$$

$$p + d = n + (p + p), \quad (\text{II})$$

и отбирать случаи, когда импульс, передаваемый дейтронным частицам, не очень велик.

В первой реакции быстрый нейтрон превращается в быстрый протон и возникают два нейтрона, имеющие энергии порядка 1—10 $Mэв$. Во второй реакции быстрый протон превращается в быстрый нейтрон, и образуются два протона с энергиями того же порядка. Для этих случаев малой передачи импульса эффективное сечение обменного столкновения свободных нуклонов не зависит от угла [1, 2], и поэтому интерференция рассеянных волн в дейтроне может быть легко описана, если мы введем псевдопотенциал (аналогично тому, как это делается при рассеянии медленных нейтронов протонами [9, 10]).

$$V = -\frac{4\pi\hbar^2}{m} a_0 \delta(r_1 - r_2) P, \quad (1)$$

где P — оператор обмена пространственных координат и a_0 — амплитуда обменного рассеяния свободных нуклонов при углах (в системе центра инерции), близких к 180° . Если импульсы, передаваемые от быстрого нуклона к дейтронным частицам, не малы

¹ ЖЭТФ, 1951, 21, 1113.

(ниже будет дана количественная оценка малости передаваемых импульсов), то a_0 должно быть функцией от этого изменения импульса, причем вид этой функции может быть получен из рассмотрения сечений свободных обменных столкновений. Амплитуда рассеяния a_0 зависит от спинов сталкивающихся частиц.

Если мы ограничиваемся малыми углами рассеяния быстрой частицы, то вклад сил, пропорциональных $(s_1 n) (s_2 n)$ (n — единичный вектор по направлению линии, соединяющей два нуклона), будет пропорционален $s_1 s_2$. Такой результат мгновенно получился бы при применении теории возмущения к потенциалу

$$V(r) (s_1 n) (s_2 n). \quad (2)$$

Малым передаваемым импульсам соответствуют в этом случае фурье-компоненты потенциала (2)

$$\int V(r) (s_1 n) (s_2 n) e^{-iqr} d^3r, \quad (3)$$

в которых можно пренебречь qr в показателе. Но тогда (3) сводится к

$$1/3 s_1 s_2 \int V(r) d^3r. \quad (4)$$

Не пользуясь теорией возмущений, можно прийти к такому же выводу, если мы напишем в системе центра инерции общий вид зависимости амплитуды рассеяния от спиновых матриц при $k \rightarrow k'$ (см., например, [11]¹)

$$a_0 = a' + b' s_1 s_2 + c (s_1, k - k') (s_2, k - k') + d (s_1 [kk']) (s_2 [kk']) + f ([s_1 [kk']] [s_2 [kk']]) + g ([s_1, [k - k']] [s_2, [k - k']]), \quad (5)$$

где a, b, c, d, f, g — функции от импульса сталкивающихся нуклонов до $(\hbar k)$ и после $(\hbar k')$ столкновения. В том случае, когда k' близко к k , (5) переходит в следующее выражение:

$$a_0 = a' + b' s_1 s_2. \quad (6)$$

Это есть общий вид амплитуды обменного столкновения при малых углах рассеяния падающего нуклона.

При обменном рассеянии $n - p$ дифференциальное сечение равно [12]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{16\pi^2 \hbar^4} S \left| \frac{4\pi \hbar^2}{m} (a' + b' s_1 s_2) \right|^2. \quad (7)$$

Усреднение производится по начальным, суммирование по конечным спином:

$$d\sigma/d\Omega = |a'|^2 + 3|b'|^2. \quad (8)$$

¹ Здесь не написаны члены типа: $(s_1 k) (s_1 k') (s_2 k) (s_2 k')$. Они при $k' \rightarrow k$ могут быть записаны в виде (5).

Только сумма $|a'|^2 + 3|b'|^2$ определяется из сечения обменного рассеяния свободных нуклонов. Раздельное определение a' и b' , по крайней мере, для малых передаваемых импульсов может быть получено из рассеяния нуклонов на дейтроне. Если связать $s_1 s_2$ с оператором перестановки спинов $(s_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix})$ и так далее):

$$s_1 s_2 = 2P_s(1, 2) - 1, \quad (9)$$

то (1) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{4\pi \hbar^2}{m} \delta(r_1 - r_2) [a' - b' + 2b' P_s(1, 2)] = \\ &= -\frac{4\pi \hbar^2}{m} \delta(r_1 - r_2) [a + b P_s(1, 2)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, часть обменных сил, не связанная с обменом спинами, представлена a , а часть, сопровождающаяся обменом спинами, пропорциональна b . Раздельное определение a и b дает возможность установить спиновую зависимость обменных сил. Бете [13] указал на спиновую зависимость интерференционных членов в $n - d$ столкновениях, однако при рассмотрении сечения $n - d$ столкновения, происходящего не только под действием обменных сил и не только на углы, близкие к π , соотношения получаются значительно более сложными, чем встречающиеся в нашем случае и, кроме того, требуют знания дейтронной Ψ -функции внутри области действия ядерных сил, о чем сейчас мало что известно.

§ 2. Общее выражение для сечения

Определим эффективное сечение для обменного столкновения, при котором быстрый нуклон изменил свой импульс от $\hbar k$ до $\hbar k'$, а вместо дейтрона возникли два одинаковых нуклона с импульсами $\hbar q_1$ и $\hbar q_2$. Волновая функция до столкновения имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \{ e^{ikr_A} \Phi_0(r_2 - r_A) \chi(1, 2, A) - e^{ikr_2} \Phi_0(r_1 - r_A) \chi(2, 1, A) \},$$

где Φ_0 — координатная волновая функция основного состояния дейтрона, χ — спиновая функция; 1, 2 относятся к двум одинаковым частицам. $\chi(2, 1, A)$ описывает состояние, в котором 1 и A находятся в дейтроне.

Конечная волновая функция

$$\frac{1}{\Omega^{3/2}} e^{ikr_A} e^{i(k-k', r_1-r_2)/2} \Phi_g(r_1 - r_2) \chi_F,$$

где Φ_g , нормированная согласно условию:

$$\int |\Phi_g|^2 d^3r = 1,$$

есть координатная функция, описывающая относительное движение двух частиц с импульсом относительного движения g . Возмущением является взаимодействие типа (1) между падающей частицей и A :

$$\begin{aligned} & - \frac{2^{3/2}\pi\hbar^2}{m\Omega^{3/2}} \int d^3r_1 d^3r_2 \Phi_g^*(r_1 - r_2) \chi_F^* \{ [a + bP_s(A1)] \times \\ & \times e^{ik-k', r_1} \Phi_0(r_1 - r_2) \chi(1, 2A) - \\ & - e^{ik-k', r_2} [a + bP_s(A2)] \Phi_0(r_1 - r_2) \chi(2, 1A) \} e^{-i(k-k', r_1+r_2)/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что (11) представляет собой амплитуду рассеяния, получаемую без учета принципа Паули и затем должным образом антисимметризованную. Производим интегрирование по координатам r_1 , r и r_2 , r в соответствующих частях (11)

$$\begin{aligned} k - k' = 2f, \quad r_1 - r_2 = r, \quad d^3r_1 d^3r_2 = d^3r_1 d^3r, \\ \int e^{-if, r_1+r_2} e^{2if, r} d^3r_1 = e^{if, r} \Omega, \quad \int e^{-if, r_1+r_2} e^{2if, r} d^3r_2 = e^{-if, r} \Omega. \end{aligned}$$

Вместо (11) имеем

$$\begin{aligned} & - \frac{2^{3/2}\pi\hbar^2}{m\Omega^{3/2}} \int d^3r \Phi_g^* \chi_F^* \{ e^{if, r} [a + bP_s(A1)] \chi(1, 2A) - \\ & - e^{-if, r} [a + bP_s(A2)] \chi(2, 1A) \} \Phi_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Возводя (12) в квадрат, получаем эффективное сечение

$$2 d\sigma' \frac{k'}{k} \frac{d^3q_1}{8\pi^3} |S|^2, \quad (13)$$

означает модуль интеграла, входящего в (12).

Законы сохранения дают

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} + \frac{\hbar^2 q_1^2}{2m} + \frac{\hbar^2 (k - k' - q_1)^2}{2m} + \varepsilon. \quad (14)$$

S в (13) обозначает суммирование по конечным спиновым состояниям, усреднение происходит по начальным состояниям. Связь между g и q_1 и q_2

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2 (q_1^2 + q_2^2)}{2m} = \frac{\hbar^2 (q_1 + q_2)^2}{4m} + \frac{\hbar^2 g^2}{m}, \\ g = 1/2 (q_1 - q_2). \end{aligned} \quad (15)$$

Если конечное состояние двух одинаковых нуклонов имеет полный спин единица (триплет), то Φ_g — нечетная функция относительных координат. Она не содержит s -волны и поэтому представляет собой функцию свободного движения, так как нуклоны

с энергиями порядка 1—10 $M\text{эв}$ взаимодействуют только в s -состоянии

$$\Phi_g^t = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{igr} - e^{-igr}). \quad (16)$$

В конечном синглетном состоянии двух нуклонов содержится s -волна, для которой нельзя пренебрегать взаимодействием частиц. Так как в рассматриваемых условиях длина волны $1/g$ больше радиуса действия ядерных сил r_0 , то s -волну можно взять для двух нейтронов в следующем виде [14]:

$$e^{-in} \frac{\sin(gr + \eta)}{gr}, \quad \text{ctg } \eta = -\frac{\alpha_0}{g} \quad (17)$$

(плоская и сходящаяся волны [15]), α_0 — постоянная, характеризующая взаимодействие двух одинаковых нуклонов, аналогично тому, как $\alpha = \sqrt{m\varepsilon/\hbar}$ характеризует систему $n - p$ в триплетном состоянии при малых энергиях. В случае $p - p$ необходимо брать Φ_g^Σ с учетом также кулоновского поля. Синглетная волновая функция является четной функцией координат. Так как синглетные и триплетные конечные состояния нуклонов 1,2 не интерферируют друг с другом, то

$$|S|^2 = N_t \left| \int \Phi_g^{t*} \dots \right|^2 + N_\Sigma \left| \int \Phi_g^{\Sigma*} \dots \right|^2. \quad (18)$$

Вместо интегрирования по q_1 можно интегрировать по g (при заданном k')

$$\begin{aligned} g = \frac{q_1 - q_2}{2} = \frac{q_1}{2} - \frac{1}{2} (k - k' - q_1) = q_1 - \frac{k - k'}{2}, \\ d^3q_1 = d^3g. \end{aligned} \quad (19)$$

Определим теперь соотношение синглетных и триплетных состояний. Прежде всего ясно, что $P_s(A1)$ и $P_s(A2)$ всегда приводят к триплетному состоянию, так как нуклон 1 (2) при таком обмене попадает в спиновое состояние нуклона A , которое относилось к триплетному состоянию (2A, 1A) нуклонов. Поэтому $P_s(A, 1)\chi(1, 2A)$ есть триплетная функция 1, 2 нуклонов. Этот результат легко видеть и непосредственным образом. Пусть у нуклона 1 спиновое состояние было α ($\mu_z = 1/2$), тогда до столкновения спиновые состояния $\chi(1, 2 A)$ были

$$\begin{aligned} (M_z)_d = 1; \quad \chi = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_A; \quad (M_z)_d = 0, \quad \chi = \alpha_1 (\alpha_2 \beta_A + \alpha_A \beta_2) / \sqrt{2}; \\ (M_z)_d = -1, \quad \chi = \alpha_1 \beta_2 \beta_A. \end{aligned}$$

Действие $P_s(A1)$ дает соответственно

$$\begin{aligned} \chi = \alpha_A \alpha_2 \alpha_1 = \alpha_A \chi_1^t, \quad \chi = \alpha_A (\alpha_2 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2) / \sqrt{2} = \alpha_A \chi_0^t, \\ \chi = \alpha_A \beta_2 \beta_1 = \alpha_A \chi_{-1}^t. \end{aligned} \quad (20)$$

Мы получили триплетные спиновые функции по отношению к нуклонам 1,2. Поэтому член, пропорциональный b , в (12) записывается так:

$$-\frac{2\sqrt{2}\pi\hbar^2 b}{m\Omega^{3/2}} \int d^3r \Phi_g^{t*} (e^{i\mathbf{r}} - e^{-i\mathbf{r}}) \Phi_0 = -\frac{4\sqrt{2}\pi\hbar^2 b}{m\Omega^{3/2}} \int d^3r \Phi_g^{t*} e^{i\mathbf{r}} \Phi_0. \quad (21)$$

При этом мы использовали нечетность Φ_g^t и в качестве χ_F взяли соответствующую спиновую функцию (20).

Член, пропорциональный a , дает переходы в триплет и синглет, так как $\chi(1, A2)$, $\chi(2, A1)$ являются триплетными функциями нуклонов $(A, 2)$ и $(A, 1)$, и будучи разложенными по функциям нуклонов 1,2, содержат и триплетное, и синглетное состояния 1,2. Если $\Phi_g = \Phi_g^\Sigma$, то используя четность Φ_g^Σ , имеем

$$-\frac{2\sqrt{2}\pi\hbar^2 a}{m\Omega^{3/2}} \int \Phi_g^{\Sigma*} d^3r e^{-i\mathbf{r}} \Phi_0 [\chi(1, 2A) - \chi(2, 1A)]. \quad (22)$$

Соответственно для Φ_g^t

$$\frac{2\sqrt{2}\pi\hbar^2 a}{m\Omega^{3/2}} \int \Phi_g^{t*} d^3r e^{-i\mathbf{r}} \Phi_0 [\chi(1, 2A) + \chi(2, 1A)]. \quad (23)$$

Разность χ , стоящая в (22), для трех дейтронных спиновых состояний равна:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_A - \alpha_2 \alpha_1 \alpha_A &= 0, & M_z &= 1; \\ \alpha_1 (\alpha_2 \beta_A + \beta_2 \alpha_A) \frac{1}{\sqrt{2}} - \alpha_2 (\alpha_1 \beta_A + \beta_1 \alpha_A) \frac{1}{\sqrt{2}} &= \alpha_A \frac{\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2}{\sqrt{2}} = \\ &= \alpha_A \chi^\Sigma, & M_z &= 0; \\ \alpha_1 \beta_2 \beta_A - \alpha_2 \beta_1 \beta_A &= \sqrt{2} \beta_A \chi^\Sigma, & M_z &= -1. \end{aligned}$$

Поэтому полная сумма переходов в Σ , усредненная по M (дейтрон), согласно (13) и (18) записывается следующим образом:

$$2d\sigma' \frac{k'}{k} \frac{d^3 q_1}{8\pi^3} \frac{1}{3} (1+2) |a|^2 \left| \int \Phi_g^{\Sigma*} e^{-i\mathbf{r}} \Phi_0 d^3 r \right|^2. \quad (24)$$

При рассмотрении переходов в триплетное состояние необходимо сложить вклады от a и b . Сумма χ , стоящая в (23), равна:

$$M_z = 1, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_A + \alpha_2 \alpha_1 \alpha_A = 2\alpha_A \chi_1^t; \quad (25)$$

$$\begin{aligned} M_z = 0, \alpha_1 \frac{\alpha_2 \beta_A + \beta_2 \alpha_A}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha_2 (\alpha_1 \beta_A + \beta_1 \alpha_A)}{\sqrt{2}} &= \\ = \alpha_A \frac{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \beta_A \alpha_1 \alpha_2 &= \alpha_A \chi_0^t + \sqrt{2} \beta_A \chi_1^t, \end{aligned} \quad (26)$$

$$M_z = -1, \alpha_1 \beta_2 \beta_A + \alpha_2 \beta_1 \beta_A = \sqrt{2} \beta_A \chi_0^t. \quad (27)$$

При сложении (24) и (27), используя (20) и деля на 3, получаем

$$\begin{aligned} \frac{8\pi^2 \hbar^4}{m^2 \Omega^3} \left| \int \Phi_g^{t*} e^{-i\mathbf{r}} \Phi_0 d^3 r \right|^2 \frac{1}{3} \{4|a+b|^2 + |2b+a|^2 + 2|a|^2 + \\ + 4|b|^2 + 2|a|^2\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Сумма (24) и (28) дает сечение

$$\begin{aligned} 2d\sigma' \frac{k'}{k} \frac{d^3 q_1}{8\pi^3} \left\{ |a|^2 \left| \int \Phi_g^{\Sigma*} e^{-i\mathbf{r}} \Phi_0 d^3 r \right|^2 + \frac{4}{3} \left[|a+b|^2 + \frac{1}{4} |2b+ \right. \right. \\ \left. \left. + a|^2 + |a|^2 + |b|^2 \right] \left| \int \Phi_g^{t*} e^{-i\mathbf{r}} \Phi_0 d^3 r \right|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Отметим, что при $b=0$ (силы, не связанные с обменом спинами) переходы в триплет имеют вес, в три раза больший, чем переходы в синглет, в согласии со статистическим весом триплетных (3) и синглетных (1) состояний.

§ 3. Вероятность рассеяния на заданный угол

Определим теперь дифференциальное сечение, при котором не задается состояние относительного движения двух медленных нуклонов, а фиксируется только изменение импульса быстрого нуклона, т. е. задается только угол рассеяния быстрого нуклона. [Такое сечение могло бы представить особый интерес в случае реакции $n+d=p+(n+n)$, так как здесь легко можно фиксировать направление вылета быстрых протонов.]

Интегрирование по \mathbf{g} может быть легко проведено следующим образом. В интеграле по \mathbf{g} главную роль играют энергии относительного движения, малые по сравнению с $E_0 = \hbar^2 k^2 / 2m$, если мы рассматриваем малые $f = |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|/2$, это непосредственно следует из быстрого убывания $\int \Phi_g^* e^{-i\mathbf{r}} \Phi_0 d^3 r$ с возрастанием \mathbf{g} .

Для доказательства этого утверждения рассмотрим, как меняется f при изменении \mathbf{g}

$$k^2 = (\mathbf{k} - 2\mathbf{f})^2 + 2f^2 + 2g^2 + 2\alpha^2, \quad 2\mathbf{f}\mathbf{k} = 3f^2 + g^2 + \alpha^2, \quad \mathbf{f}\mathbf{k} = f_z k.$$

Так как k очень велико, то f_z мало

$$f^2 = f_z^2 + f_1^2 \approx f_1^2, \quad -2f_z k + 3f_1^2 + g^2 + \alpha^2 = 0.$$

При изменении g от нуля до g_0 , f_z меняется на величину (при постоянном f_1), равную

$$g_0^2 / 2k.$$

Для определения эффективного значения $g_{\text{макс}}$ вычислим среднее значение энергии относительного движения в случае, напри-

мер, синглетных состояний, считая f постоянным

$$\begin{aligned} \bar{E}_g &= \frac{\sum_g E_g \left| \int \Phi_g^{\Sigma^*} e^{-ifr} \Phi_0 d^3r \right|^2}{\sum_g \left| \int \Phi_g^{\Sigma^*} e^{-ifr} \Phi_0 d^3r \right|^2} = \frac{\sum_g E_g \left| \int \Phi_g^{\Sigma^*} \cos fr \Phi_0 d^3r \right|^2}{\sum_g \left| \int \Phi_g^{\Sigma^*} \cos fr \Phi_0 d^3r \right|^2} = \\ &= \frac{\int \Phi_0^* \cos fr H \cos fr \Phi_0 d^3r}{\int |\Phi_0|^2 \cos^2 fr d^3r}. \end{aligned}$$

Здесь H — оператор Гамильтона двух одинаковых нуклонов. Если $fr_d \ll 1$, то E_g равно $\varepsilon + \Delta u$, где Δu — разность потенциальных энергий $p-p$ и $n-p$ систем, усредненная по волновой функции дейтрона, Δu — порядка 3–5 Мэв.

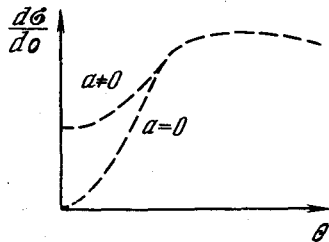
$$\bar{E}_g \sim g_{\text{макс}}^2 \hbar^2/m \sim \varepsilon + \Delta u \sim 5 - 7 \text{ Мэв.}$$

Δf_z оказывается порядка

$$\Delta f_z \sim \frac{m(\varepsilon + \Delta u)}{2k\hbar^2} = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon + \Delta u}{\varepsilon} \frac{\varepsilon + \Delta u}{2E_0}} \ll \alpha$$

(считая энергии E_0 могущими удовлетворить этому условию; это достигается при $E_0 \gtrsim 100 \text{ Мэв}$).

В этих условиях Δf_z мало по сравнению с f_1 , равным $\frac{k\theta}{2}$, если $\theta > \frac{\alpha}{k}$. При еще меньших θ , $\exp(ifr)$ вообще можно заменить на единицу (весь эффект обменных столкновений происходит в силу ортогональности Φ_0 и Φ_g^{Σ}). Поэтому $|k'|$ можно положить равным k , если мало отклонение быстрого нуклона после



столкновения от направления падающего нуклона. Если же f велико, k' можно заменить на его значение, получающееся в случае столкновения свободных нуклонов.

Рассмотрим $\int \frac{1}{8\pi^3} d^3g \left| \int \Phi_g^{i*} e^{-ifr} \Phi_0 d^3r \right|^2$. Учитывая нечетность Φ_g^i , этот интеграл равен

$$\frac{1}{2} \int \frac{d^3g}{8\pi^3} \left| \int \Phi_g^{i*} \sin fr \Phi_0 d^3r \right|^2. \quad (30)$$

$1/2$ появляется из-за тождественности двух нуклонов, имеющих относительный импульс g . Воспользуемся теперь полнотой функций Φ_g^i по отношению к нечетной функции $\sin fr \Phi_0$

$$\frac{1}{2} \int \frac{d^3g}{8\pi^3} \left| \int \Phi_g^{i*} \sin fr \Phi_0 d^3r \right|^2 = \int |\Phi_0|^2 \sin^2 fr d^3r. \quad (31)$$

Производим аналогичное преобразование с Φ_g^{Σ} и приходим к выражению:

$$\begin{aligned} do' F &= 2do' \left\{ |a|^2 \int |\Phi_0|^2 \cos^2 fr d^3r + [3|a|^2 + 4|b|^2 + \right. \\ &\left. + 2(ab^* + a^*b)] \int |\Phi_0|^2 \sin^2 fr d^3r \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Если угол рассеяния θ очень мал, так что выполнено условие

$$fr_d \ll 1, \quad r_d = \hbar/\sqrt{m\varepsilon}, \quad \theta \ll \sqrt{2\varepsilon/E_0}, \quad (33)$$

(32) переходит в следующее выражение:

$$Fdo' = 2|a|^2 do'. \quad (34)$$

В этих условиях обменные столкновения происходят только под действием той части обменных сил, которая не сопровождается обменом спинами. Если $a = 0$, то при углах $\theta \rightarrow 0$ сечение стремится к нулю.

Пусть условие (33) не выполнено, но f еще не так велико, чтобы в (32) использовалась Ψ -функция дейтрона внутри области действия ядерных сил, где она неизвестна. Тогда интегралы, входящие в (32), могут быть вычислены, и сечение оказывается равным

$$\begin{aligned} Fdo' &= \left\{ |a|^2 \left(1 + \frac{\alpha}{f} \arctg \frac{f}{\alpha} \right) + [3|a|^2 + 4|b|^2 + \right. \\ &\left. + 2ab^* + 2a^*b] \left(1 - \frac{\alpha}{f} \arctg \frac{f}{\alpha} \right) \right\} do'. \end{aligned} \quad (35)$$

Эта формула применима при выполнении условия

$$fr_0 \ll 1, \quad \theta \ll \sqrt{40/E_0}, \quad (36)$$

где E_0 — энергия падающего нуклона в Мэв.

Экспериментальное исследование сечений в области применимости (35) или (34) могло бы выяснить спиновую зависимость обменных сил, сопровождающихся малой передачей импульса (углы в системе центра инерции $n-p$, близкие к π). Величина сечения (34), проинтегрированного по углам, удовлетворяющим условию (33), равна $2 \cdot 10^{-27} \text{ см}^2$, если $E_0 \approx 270 \text{ Мэв}$ [2] и $b = 0$:

$$2|a|^2 2\pi(\varepsilon/E_0). \quad (37)$$

При интегрировании (35) по углам в пределах (36) получаем при этой же энергии величину порядка $2 \cdot 10^{-26}$ см²:

$$\int (35) d\sigma' \approx |a|^2 4\pi (40/E_0). \quad (38)$$

Сечение (38) необходимо измерить с точностью порядка 5%, так как в этих условиях оно менее чувствительно к спиновой зависимости, чем в условиях (33). С уменьшением энергии (37) и (38) меняются приблизительно как $1/E_0$.

Когда $fr_d \gg 1$, можно заменить в первом приближении $\cos^2 fr$ и $\sin^2 fr$ на $1/2$. (32) переходит при этом в эффективное сечение для обменного столкновения двух свободных нуклонов

$$\begin{aligned} d\sigma'(4|a|^2 + 4|b|^2 + 2ab^* + 2a^*b) &= 4d\sigma_0 [3/4|a+b|^2 + 1/4|a-b|^2] = \\ &= d\sigma_0 [3/4|a+b|^2 + 1/4|a-b|^2], \end{aligned} \quad (39)$$

$d\sigma_0$ — телесный угол в системе центра инерции ¹ $n - p$.

Найдя a и b из опытов с самым малым углом рассеяния быстро нуклона (превращающегося из n в p , или наоборот) можно использовать (32) для вычисления форм-фактора основного состояния дейтрона:

$$\begin{aligned} Fd\sigma' &= d\sigma' \{ 3|a+b|^2 + |a-b|^2 - [2|a|^2 + 4|b|^2 + 2ab^* + \\ &+ 2a^*b] \int |\Phi_0|^2 \cos 2fr d^3r \}. \end{aligned} \quad (40)$$

В заключение я хочу поблагодарить проф. Л. Ландау, А. Мигдала и И. Шмушкевича за интересные дискуссии по поводу этой работы.

Академия наук СССР

Получено 29 декабря 1950 г.

Примечание при корректуре. После сдачи в печать настоящей статьи, появилось краткое сообщение о том, что при обменном столкновении $n + d \rightarrow p + (n + n)$, происходящем под действием нейтронов с энергией 270 Мэв, выход быстрых протонов в направлении падающих нейтронов значительно меньше, чем в случае обменных пр столкновений (J. B. Cladis, J. W. Hadley, B. J. Meyer. Bull. Am. Phys. Soc., 1950, 25, 6). Это, по-видимому, означает, что a мало по сравнению с b . В таких условиях всякое обменное столкновение сопровождается обменом спинами.

Недавно столкновение быстрых нейтронов с дейтронами было рассмотрено Бете и Глюкштерном (R. L. Gluckstern, H. A. Bethe, Phys. Rev., 1951, 81, 761) при помощи некоторого конкретного потенциала взаимодействия. Полученные ими результаты не обладают той общностью, которая достигнута в нашем сообщении.

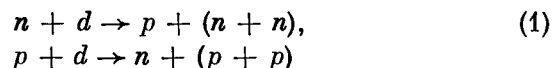
¹ $a + b$ — амплитуда обменного рассеяния в том случае, когда спины n и p параллельны, $a - b$ — когда они антипараллельны.

1. J. Hadley, E. Kelly, C. Leith, E. Segré, C. Wiegand, H. York. Phys. Rev., 1949, 75, 351.
2. E. Kelly, C. Leith, E. Segré, C. Wiegand. Phys. Rev., 1950, 79, 96.
3. R. S. Christian, E. W. Hart. Phys. Rev., 1950, 77, 441.
4. R. S. Christian, H. P. Noyes. Phys. Rev., 1950, 79, 85.
5. L. Cook, E. McMillan, J. Peterson, D. Sewell. Phys. Rev., 1949, 75, 7.
6. R. Fox, C. Leith, L. Wouters, K. R. MacKenzie. Phys. Rev., 1950, 80, 23.
7. J. De Juren. Phys. Rev., 1950, 80, 30.
8. G. F. Chew. Phys. Rev., 1950, 80, 196.
9. Г. Бете. Физика ядра, ч. 2, ГТТИ, 1948, стр. 112.
10. E. Fermi. Ricerca scient., 1936, VII—II, 13.
11. L. Wolfenstein. Phys. Rev., 1949, 76, 541.
12. Л. Ландау, Е. Лифшиц. Квантовая механика. ГТТИ, 1948, стр. 468.
13. F. De Hoffman. Phys. Rev., 1950, 78, 216.
14. Г. Бете, Р. Бечер. Физика ядра, ч. 1. ОНТИ, 1938, стр. 53.
15. Л. Ландау, Е. Лифшиц. Квантовая механика. ГТТИ, 1948, стр. 481.

ОБМЕННЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ БЫСТРЫХ НУКЛОНОВ С ДЕЙТРОНАМИ¹

При экспериментальном исследовании обменных столкновений быстрых нуклонов с дейтронами появляется возможность выяснения зависимости обменных сил от спина.

Рассмотрим реакции



в том случае, когда направление быстрого нуклона после столкновения совпадает с направлением быстрого нуклона до столкновения. Нуклоны в скобках являются медленными частицами, с энергиями порядка нескольких *Мэв*. Быстрые нуклоны предполагаются имеющими энергии порядка 100 *Мэв* и выше. Если направления движения быстрых нуклонов до и после столкновения мало отличаются, то медленные нуклоны имеют полный импульс почти равный нулю. При этом оказывается запрещенным переход в триплетное состояние (*nn*) или (*pp*), так как оно является нечетным, а исходное состояние дейтрона четное. Возможны только переходы в синглетное состояние одинаковых медленных нуклонов, в котором сумма спинов равна нулю. В дейтроне сумма спинов равна единице, поэтому переход в синглетное состояние может произойти только тогда, когда при обмене координатами не происходит обмен спинами. В самом деле, при обмене спинами медленный нуклон, который получился при обменном столкновении, всегда будет иметь спиновое состояние медленного нуклона до столкновения.

Для реакций (1) это означает всегда триплетное состояние для (*nn*) или (*pp*).

Если записать амплитуду обменного (*n, p*) рассеяния в виде

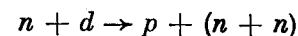
$$(a' + b's_1s_2)P = (a + bP_s(1, 2))P \quad (2)$$

($P_s(1, 2)$ — оператор обмена спинами, под оператором обмена P понимается обмен координатами), то к синглетному состоянию может привести только член, пропорциональный a . В этом выводе не используется теория возмущения, так как можно сопоставить ве-

роятности реакций (1) с вероятностью обменного (*n, p*) столкновения, не опираясь на теорию возмущений.

Таким образом, экспериментальное исследование эффективных сечений реакций (1) при указанных выше условиях дает особенно простую возможность установить соотношение между a и b в (2).

Согласно¹ в реакции



при энергии нейтронов, равной 270 *Мэв*, выход быстрых протонов в направлении падающих нейтронов был значительно меньше, чем в случае обменных (*n, p*) столкновений. Это, по-видимому, означает, что в (2) a мало по сравнению с b или вовсе отсутствует, т. е. при всяком обменном столкновении в этих условиях происходит обмен спинами.

Академия наук СССР

Получено 6 февраля 1951 г.

¹ ДАН СССР, 1951, 78, 249. (Представлено академиком А. И. Алихановым 7 февраля 1951 г.).

¹ J. B. Cladis, J. W. Hadley and B. J. Moyer. Bull. Am. Phys. Soc., 1950, 25, No. 6, 6.

О ПРЕВРАЩЕНИИ ЗАРЯЖЕННОГО π -МЕЗОНА В НЕЙТРАЛЬНЫЙ МЕЗОН ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ С ПРОТОНОМ И ДЕЙТРОНОМ¹

Совместно с В. Б. Берестецким

Произведен расчет эффективных сечений превращения заряженного π -мезона в нейтральный при столкновениях с водородом и дейтерием. Показано, что зависимость сечений от энергии существенно различна при разных типах взаимодействия мезонов с нуклонами. Сравнение теоретической формулы для углового распределения с опытом позволит проверить правильность представления об одинаковой четности нейтрального и заряженного π -мезонов.

1. Ввиду того, что как заряженные π -мезоны, так и нейтральные мезоны (мы будем называть их π^0 -мезоны) сильно взаимодействуют с нуклонами, должны иметь место заметные эффекты некулоновского рассеяния π -мезонов на нуклонах и рассеяния с превращением заряженных π -мезонов в нейтральные по схеме:

$$\pi^- + p \rightarrow n + \pi^0 \quad \text{или} \quad \pi^+ + n \rightarrow p + \pi^0.$$

Такие процессы, по-видимому, экспериментально уже обнаружены в недавно опубликованной работе [1], в которой наблюдались внезапно обрывающиеся пути быстрых π -мезонов.

В настоящей работе произведен расчет эффективного сечения превращения π -мезона в нейтральный при столкновении со свободным нуклоном и дейтроном на основе мезонной теории. Этот расчет относится к процессам, происходящим с π -мезонами, кинетическая энергия которых не превышает их энергии покоя. Выводы, относящиеся к π -мезонам таких энергий, можно уже в настоящее время сравнивать с опытными данными. Некоторые результаты, относящиеся к сравнению эффективных сечений в водород и дейтерии, носят более общий характер, не связанный с применением мезонной теории и теории возмущений.

Для формулировки теории необходимы сведения о спине и внутренней четности мезонов. Мы примем, что спин как π -мезона, так и π^0 -мезона равен нулю. Для нейтрального мезона спин единица исключается фактом распада его на два фотона [2]. Дальнейшие сведения можно получить из анализа данных по захвату π^- -мезонов в дейтерии и водороде. Они сводятся к следующему [3]. а) Наблюдается захват медленного π -мезона дейтроном без вылета других частиц ($\pi^- + d \rightarrow 2n$). б) Вероятность захвата медленного π -мезона

дейтроном с вылетом π^0 -мезона весьма мала (хотя она не мала в водороде). Из а) однозначно следует, что если спин заряженного π -мезона есть нуль, то его внутренняя четность противоположна четности нуклона¹; б) дает основание заключить [4], что внутренние четности π^0 - и π -мезона совпадают, а также, что спин π -мезона не может быть отличен от нуля.

2. Таким образом мы будем считать мезонное поле псевдоскалярным и можем записать оператор взаимодействия его с нуклоном в виде

$$V = \rho_2 G + \frac{\hbar}{\mu c} \left(\sigma \nabla F + \rho_1 \frac{\partial F}{\partial t} \right) \quad (\rho_2 = i\beta\gamma_5; \quad \rho_1 = -\gamma_5), \quad (1)$$

где

$$G = g(\tau\Phi + \tau^+\Phi^+) + \frac{1}{2}(g^0 + g'\tau_z)\Phi_0,$$

$$F = f(\tau\Phi + \tau^+\Phi^+) + \frac{1}{2}(f^0 + f'\tau_z)\Phi_0.$$

Здесь g и f — постоянные, определяющие взаимодействие нуклона с заряженным π -мезоном, а g^0, g', f^0, f' — с нейтральным мезоном [взаимодействие нейтрона с π^0 -мезоном определяется постоянной $(g^0 + g')/2$ или $(f^0 + f')/2$, а протона $(g^0 - g')/2$ или $(f^0 - f')/2$]; τ — оператор превращения нейтрона в протон, а τ^+ — протона в нейтрон; $\tau_z = +1$ для нейтрона и -1 для протона ($\tau_z = \tau^+\tau - \tau\tau^+$). Φ — поле заряженных π -мезонов, а Φ_0 — π^0 -мезонов:

$$\Phi = \sum_k \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2 c^2}{E_k}} (a_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + b_k^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}),$$

$$\Phi_0 = \sum_{k'} \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2 c^2}{E_{k'}}} (c_k e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} + c_k^+ e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}),$$

где a_k, b_k, c_k — операторы поглощения, а a_k^+, b_k^+, c_k^+ — испускания, соответственно, положительных, отрицательных и нейтральных мезонов, $\hbar\mathbf{k}$ — импульс, E_k — энергия.

Мы ограничимся такими энергиями мезонов, когда нуклоны можно считать нерелятивистскими. Тогда, переходя от уравнения Дирака для нуклонов к уравнению типа Паули, мы из (1) получим следующий оператор взаимодействия:

$$V = \frac{\hbar}{\mu c} \sigma \nabla \left(F + \frac{\mu}{2M} G \right) + \frac{1}{2Mc^2} \left(G^2 + \left(\frac{\hbar}{\mu c^2} \dot{F} \right)^2 \right) + \frac{1}{2Mc^2} \frac{\hbar}{\mu c^2} i(\dot{F}G - G\dot{F}) \equiv V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)} \quad (\dot{F} \equiv \partial F / \partial t). \quad (2)$$

¹ Мы здесь условно считаем внутренние четности протона и нейтрона одинаковыми. Тогда мезонное поле должно описываться псевдоскалярном. Если внутренние четности нейтрона и протона различны, то мезонное поле скалярно. В обоих случаях взаимодействие имеет одинаковый вид (1). Абсолютная внутренняя четность π -мезона, а следовательно, и четность нейтрона относительно протона может быть установлена по поляризации фотонов, на которые распадается нейтральный мезон.

¹ ЖЭТФ, 1951, 21, 1313. Краткое изложение результатов этой работы было опубликовано в ДАН СССР (1951, 77, 803).

Здесь M — масса нуклона, μ — масса π -мезона. В (2) отброшены также члены порядка μ/M относительно выписанных. Учет их вряд ли имеет смысл в первом приближении теории возмущений, так как поправки того же порядка дадут следующие члены разложения по постоянным g и f .

3. Первый член в (2) $V^{(1)}$ линеен относительно F и G , и поэтому по отношению к нему превращение π в π^0 есть процесс второго порядка, проходящий через промежуточные состояния. Вторым и третьим членами $V^{(2)}$ и $V^{(3)}$ квадратичны — они вызывают прямые переходы в первом приближении теории возмущений. Рассмотрим превращение π^- -мезона в π^0 -мезон на водороде в различных вариантах взаимодействия.

а) Псевдоскалярная связь¹ ($F = 0$). При этом достаточно учесть второй член в (2). Первый дает результат более высокого порядка относительно μ/M . Ввиду малости отдачи на протоне, мы будем пренебрегать изменением энергии мезона при превращении (E содержит и энергию покоя). Матричный элемент превращения π^- -мезона с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ в π^0 -мезон с импульсом $\hbar\mathbf{k}'$

$$V_{kk'} = \frac{1}{2Mc^2} gg^0 \frac{2\pi\hbar^2 c^2}{E} \tau^+ \quad (3)$$

(Так как $\tau^+ \tau_z + \tau_z \tau^+ = 0$, то сюда не входит g' ; под τ^+ здесь подразумевается соответствующий матричный элемент, равный единице для перехода $p \rightarrow n$).

Дифференциальное сечение

$$d\sigma = (gg^0/\mu c^2)^2 (\mu/2M)^2 d\Omega \quad (4)$$

и полное сечение

$$\sigma = 4\pi (gg^0/\mu c^2)^2 (\mu/2M)^2 \quad (4')$$

б) Псевдовекторная связь ($G = 0$). Здесь мы учтем как $V^{(1)}$, так и $V^{(2)}$. Хотя $V^{(2)}$ содержит в знаменателе M , он может дать эффект, сравнимый с $V^{(1)}$ при малых энергиях мезона $E - \mu c^2 \sim \mu c^2$ ($\mu/4M$) $\sim 5 M\epsilon e$; $V^{(2)}$ дает матричный элемент, подобный (3):

$$V_{kk'}^{(2)} = \frac{1}{2Mc^2} ff^0 \frac{2\pi\hbar^2 c^2}{E} \left(\frac{E}{\mu c^2}\right)^2 \tau^+ \quad (5)$$

Для $V^{(1)}$ мы должны рассматривать два промежуточных состояния: 1) $\pi^- + p \rightarrow n$; 2) $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p + \pi^0$. Если пренебречь энергией отдачи в сравнении с энергией мезона, то разность энергий начального и промежуточного состояний равна в первом случае E и во втором $-E$. Получаем

$$V_{kk'}^{(1)} = (\hbar/\mu c)^2 f \frac{2\pi\hbar^2 c^2}{E^2} (f' \mathbf{k} \mathbf{k}' + if^0 [\mathbf{k}' \mathbf{k}] \sigma) \tau^+, \quad (6)$$

где σ — матричный элемент оператора Паули (в (6) использовано, что $\tau_z \tau^+ - \tau^+ \tau_z = \tau^+$ и $(\mathbf{k}\sigma)(\mathbf{k}'\sigma) = \mathbf{k}\mathbf{k}' + i[\mathbf{k}\mathbf{k}'\sigma]$). Из (5), (6) получаем для дифференциального сечения

$$d\sigma = \left(\frac{f}{\mu c^2}\right)^2 \left\{ \left(\frac{E^2}{2M\mu c^4} f^0 + \frac{\hbar^2 \mathbf{k} \mathbf{k}'}{E\mu} f'\right)^2 + \frac{\hbar^4 [\mathbf{k} \mathbf{k}']^2}{E^2 \mu^2} f'^2 \right\} d\Omega \quad (7)$$

и для полного сечения

$$\sigma = 4\pi \left(\frac{f}{\mu c^2}\right)^2 \left\{ f'^2 \left(\frac{\mu}{2M}\right)^2 \left(\frac{E}{\mu c^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} f'^2 + \frac{1}{3} f'^2\right) \frac{\hbar^4 k^2 k'^2}{E^2 \mu^2} \right\}. \quad (7')$$

в) Смешанная связь ($f = g^0 = g' = 0$). В этом случае следует учесть $V^{(1)}$ и $V^{(3)}$ из (2). Первый дает выражение, подобное (6):

$$V_{kk'}^{(1)} = \frac{g\mu}{2M} \left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)^2 \frac{2\pi\hbar^2 c^2}{E^2} (f' \mathbf{k} \mathbf{k}' + if^0 [\mathbf{k}' \mathbf{k}] \sigma) \tau^+, \quad (8)$$

а

$$V_{kk'}^{(3)} = -\frac{gf'}{2Mc^2} \frac{2\pi\hbar^2 c^2}{E} \frac{E}{\mu c^2} \tau^+. \quad (9)$$

Из (8) и (9)

$$d\sigma = \left(\frac{g}{\mu c^2}\right)^2 \left(\frac{\mu}{2M}\right)^2 \left\{ \left(\frac{E}{\mu c^2}\right)^2 \left(1 - \frac{\hbar^2 c^2 \mathbf{k} \mathbf{k}'}{E^2}\right)^2 f'^2 + f'^2 \frac{\hbar^4 [\mathbf{k} \mathbf{k}']^2}{E^2 \mu^2} \right\} d\Omega \quad (10)$$

и

$$\sigma = 4\pi \left(\frac{g}{\mu c^2}\right)^2 \left(\frac{\mu}{2M}\right)^2 \left\{ f'^2 \left(\frac{E}{\mu c^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} f'^2 + \frac{1}{3} f'^2\right) \frac{\hbar^4 k^2 k'^2}{E^2 \mu^2} \right\}. \quad (10')$$

В случае $g = f^0 = f' = 0$ результаты (8) — (10) сохраняются с заменой $g \rightarrow f$; $f^0 \rightarrow g^0$; $g' \rightarrow f'$.

Сравнение этих результатов с экспериментальными данными могло бы помочь установить тип взаимодействия. Уже полные сечения различно зависят от энергии в различных вариантах связи. Угловые распределения также существенно различны. В случае а) [формула (4)] имеет место сферическая симметрия. Для случая б) [формула (7)] характерно отсутствие симметрии относительно плоскости $\phi = \pi/2$. В случае б) [формула (7)] при малых энергиях распределение зависит от знака f' по отношению к f^0 (это не противоречит симметрии теории относительно нейтронов и протонов; для процесса $\pi^+ + n \rightarrow p + \pi^0$ соответствующая формула будет отличаться заменой f' на $-f'$).

Величину сечения можно оценить, используя данные об образовании нейтральных и заряженных π -мезонов γ -лучами в водороде. Она дает значение $f^2/\hbar c$ в случае псевдовекторной связи и $\frac{g^2}{\hbar c} \left(\frac{\mu}{2M}\right)^2 \sim \frac{1}{6}$ в случае псевдоскалярной связи (и такого же порядка значения для f^0 , f' или g^0 , g'). Тогда, в случае псевдовекторной связи (при импульсах $\sim \mu c$)

$$\sigma \sim 4\pi \left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)^2 \frac{1}{36} \approx 0,6 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2;$$

¹ Этот случай рассмотрен в работе [5].

в случае же псевдоскалярной связи

$$\sigma \sim 4\pi \left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)^2 \frac{1}{36} \left(\frac{2M}{\mu}\right)^2 \sim 10^{-24} \text{ см}^2.$$

Большая величина последнего сечения ($\sigma > \pi (\hbar/\mu c)^2$) указывает на невозможность применения теории при псевдоскалярной связи.

4. Перейдем к рассмотрению превращений при столкновении с дейтроном. При этом оператором взаимодействия будет сумма выражений (2), взятых для первого и второго нуклонов.

а) Псевдоскалярная связь. Аналогично (3), получим

$$V_{kk'} = \frac{1}{2Mc^2} g g^0 \frac{2\pi\hbar^2 c^2}{E} (\tau_1^+ e^{i(k-k')r_1} + \tau_2^+ e^{i(k-k')r_2})_{0q}, \quad (11)$$

где индексы у скобки означают матричный элемент этого оператора, соответствующий переходу из начального (0) в конечное (q) состояние. Так как начальное состояние нуклонов (дейтрон) является антисимметричным относительно зарядовых координат, а в конечном состоянии оба нуклона нейтроны, то

$$\tau_1^+ = 1/\sqrt{2}; \quad \tau_2^+ = -1/\sqrt{2}. \quad (12)$$

Введя еще относительные координаты нуклонов $\rho = r_1 - r_2$ и обозначив

$$k - k' = 2\kappa, \quad (13)$$

получим

$$V_{kk'} = \frac{1}{2Mc^2} g g^0 \frac{2\pi\hbar^2 c^2}{E} I^-. \quad (14)$$

Здесь введено обозначение

$$I^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \psi_q^*(\rho) (e^{i\kappa\rho} \pm e^{-i\kappa\rho}) \psi_0(\rho) (d\rho), \quad (15)$$

где ψ_0 — волновая функция дейтрона, а ψ_q — двух нейтронов в конечном состоянии.

б) Псевдовекторная связь. Аналогично (5) и (11), для матричного элемента $V^{(2)}$ получим

$$V_{kk'}^{(2)} = \frac{1}{2Mc^2} f f^0 \frac{2\pi\hbar^2 c^2}{E} \left(\frac{E}{\mu c^2}\right)^2 I^-. \quad (16)$$

Для вычисления матричного элемента $V^{(1)}$ во втором приближении необходимо провести суммирование по промежуточным состояниям относительного движения нуклонов. Существенный вклад будут давать состояния с относительным импульсом порядка $\hbar k/2$ при $k \gg \alpha$, либо $\sim \alpha$ при малых k , где $1/\alpha$ — радиус дейтрона. Поэтому разность энергий начального и промежуточного состояний будет отличаться от E (в случае промежуточного состояния $2n$) или от $-E$ (в случае $2p + \pi^- + \pi^0$) на величину, не большую, чем $\hbar^2 k^2/4M$ или $\hbar^2 \alpha^2/M$. Мы пренебрежем этой величиной по сравнению с E . Тогда сумма по промежуточным состояниям све-

дется к разности матричных элементов, связывающих начальное и конечное состояния, от произведения операторов, написанных в различном порядке¹. Иначе говоря, сумма будет иметь вид матричного элемента типа (индексы относятся к нуклонам):

$$(M_1 + M_2)(L_1 + L_2) - (L_1 + L_2)(M_1 + M_2).$$

Поскольку оператор M_1 коммутирует с L_2 и т. д., то это выражение сводится к

$$(M_1 L_1 - L_1 M_1) + (M_2 L_2 - L_2 M_2),$$

т. е. в этом приближении каждый нуклон независимо производит поглощение и испускание (как и в случае операторов $V^{(2)}$ и $V^{(3)}$). Таким образом мы получим

$$V_{kk'}^{(1)} = \left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)^2 f \frac{2\pi\hbar^2 c^2}{E^2} \{f' k k' (\tau_1^+ e^{i(k-k')r_1} + \tau_2^+ e^{i(k-k')r_2}) + i f^0 [k' k] (\sigma_1 \tau_1^+ e^{i(k-k')r_1} + \sigma_2 \tau_2^+ e^{i(k-k')r_2})\}_{0q}. \quad (17)$$

Здесь первый член дает переходы без изменения спинового состояния двух нуклонов, второй при $m_s = \pm 1$ (m_s — проекция спина дейтрона на направление $[k' k]$) также не меняет спинового состояния, а при $m_s = 0$ приводит к переходу из триплетного в синглетное состояние. (17) можно переписать в следующем виде:

$$V_{kk'}^{(1)} = \left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)^2 \frac{2\pi\hbar^2 c^2}{E^2} f \{f' k k' I^- + i f^0 c^2 \hbar^2 | [k' k] | (I_{m_s}^- + I^+ \delta_{m_s, 0})\}. \quad (18)$$

в) Смешанная связь. В тех же приближениях, аналогично (8), (9) и (16) — (18)

$$V_{kk'}^{(1)} = \left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)^2 \frac{g \mu}{2M} \frac{2\pi\hbar^2 c^2}{E^2} \{f' k k' I^- + i f^0 | [k' k] | (I_{m_s}^- + I^+ \delta_{m_s, 0})\} \quad (19)$$

и

$$V_{kk'}^{(3)} = -\frac{g f'}{2M c^2} \frac{2\pi\hbar^2 c^2}{E} \frac{E}{\mu c^2} I^- \quad (20)$$

(и аналогичные выражения с заменой g на f).

5. На основании выписанных выше матричных элементов мы можем дать выражения для дифференциальных сечений превращения π^- -мезона с импульсом $\hbar k$ в π^0 -мезон с импульсом $\hbar k'$ и с превращением дейтрона в два нейтрона с относительным импульсом $\hbar q$, причем величина q определяется сохранением энергии:

$$\frac{\hbar^2 q^2}{M} = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2\mu} - \frac{\hbar^2 (k' - k)^2}{4M} + \varepsilon + (\mu_0 - \mu) c^2 + (M_n - M_p) c^2, \quad (21)$$

где μ_0 — масса π^0 -мезона, M_n — нейтрона, M_p — протона, ε — энергия связи дейтрона.

¹ Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в отдельной статье.

а) Псевдоскалярная связь:

$$d\sigma_q = \left(\frac{gg^0}{\mu c^2}\right)^2 \left(\frac{\mu}{2M}\right)^2 |I^-|^2 dO \frac{(dq)}{(2\pi)^3}. \quad (22)$$

б) Псевдовекторная связь:

$$d\sigma_q = \left(\frac{f}{\mu c^2}\right)^2 \left\{ \left(f^0 \frac{E^2}{2M\mu c^4} + f' \frac{\hbar^2 \mathbf{k}\mathbf{k}'}{E\mu} \right)^2 |I^-|^2 + \right. \\ \left. + \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}\mathbf{k}'|^2}{E^2 \mu^2} \left(\frac{2}{3} f^{02} |I^-|^2 + \frac{1}{3} f^{02} |I^+|^2 \right) \right\} dO \frac{(dq)}{(2\pi)^3}. \quad (23)$$

в) Смешанная связь:

$$d\sigma_q = \left(\frac{g}{\mu c^2}\right)^2 \left(\frac{\mu}{2M}\right)^2 \left\{ f'^2 \left(\frac{E}{\mu c^2}\right)^2 \left(1 - \frac{\hbar^2 c^2 \mathbf{k}\mathbf{k}'}{E^2}\right)^2 |I^-|^2 + \right. \\ \left. + f^{02} \left(\frac{2}{3} |I^-|^2 + \frac{1}{3} |I^+|^2\right) \frac{\hbar^4 |\mathbf{k}\mathbf{k}'|^2}{E^2 \mu^2} \right\}. \quad (24)$$

Входящие сюда интегралы I^\pm могут быть вычислены при $|\mathbf{x} - \mathbf{q}| \leq 1/r_0$, где r_0 — радиус действия ядерных сил. В этом случае существенна область, где нам известна волновая функция дейтрона

$$\psi_0 = \sqrt{\alpha/2\pi} e^{-\alpha\rho}. \quad (25)$$

Волновая функция двух нейтронов, входящая в I^- , должна быть антисимметрична (триплетное состояние), а в I^+ симметрична (синглетное состояние). Так как нуклоны при небольших энергиях взаимодействуют только в s -состоянии, то в первом случае

$$\psi_q^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{iq\rho} - e^{-iq\rho}) \quad (26)$$

и во втором случае

$$\psi_q^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{iq\rho} + e^{-iq\rho}) - \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-2i\delta} - 1) \frac{e^{-iq\rho}}{iq\rho}, \quad (27)$$

где δ — фаза рассеяния нейтрона на нейтроне. Стакими волновыми функциями:

$$I^- = 2\sqrt{2\pi\alpha} \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\kappa + \mathbf{q})^2} - \frac{1}{\alpha^2 + (\kappa - \mathbf{q})^2} \right], \quad (28)$$

$$I^+ = 2\sqrt{2\pi\alpha} \left(\frac{1}{\alpha^2 + (\kappa + \mathbf{q})^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\kappa - \mathbf{q})^2} \right) + \\ + \frac{\sqrt{2\pi\alpha}}{q\kappa} \left\{ \sin 2\delta \left(\arctg \frac{\kappa + q}{\alpha} + \arctg \frac{\kappa - q}{\alpha} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1 - \cos 2\delta}{2} \ln \frac{1 + (\kappa + q)^2/\alpha^2}{1 + (\kappa - q)^2/\alpha^2} + i \left[\frac{\sin 2\delta}{2} \ln \frac{1 + (\kappa + q)^2/\alpha^2}{1 + (\kappa - q)^2/\alpha^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - (1 - \cos 2\delta) \left(\arctg \frac{\kappa + q}{\alpha} + \arctg \frac{\kappa - q}{\alpha} \right) \right] \right\}. \quad (29)$$

Изучение характера распределения нейтронов по энергиям и углам могло бы дать сведения о взаимодействии двух нейтронов (постоянная δ).

Все полученные результаты сохраняют силу и для процесса $\pi^+ + d \rightarrow 2p + \pi^0$ (с заменой f' на $-f'$ и g' на $-g'$). Лишь в формулах (26) — (29) следует учесть кулоновское взаимодействие двух протонов. Мы не будем, однако, останавливаться на этом.

6. Дифференциальное сечение превращения при произвольном конечном состоянии нуклонов получится из формул (22) — (24) интегрированием по (dq)

$$d\sigma = \int \frac{d\sigma}{(dq)} (dq). \quad (30)$$

Это интегрирование нетрудно провести в том случае, когда I^\pm заметно отлично от нуля только для области значений q , малой по сравнению с допускаемой (21). Если разность импульсов π^- и π^0 -мезонов $\hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ мала по сравнению со средним импульсом частиц в дейтроне $\hbar|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| \ll \hbar\alpha$, то в I^\pm можно произвести разложение по степеням $\kappa\rho$, и получившиеся интегралы быстро уменьшаются, как только $\hbar^2 q^2/M$ оказывается заметно больше, чем ε . Если кинетическая энергия мезонов много больше ε , то из допускаемого (21) интервала значений q фактически используется только малая часть. Те же соотношения имеют место и при $\hbar|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| \gg \alpha$. В этом случае главную роль при интегрировании по (dq) играют q , лежащие вблизи $q_0 = \hbar\kappa$, причем ширина эффективной области q около q_0 — порядка α . Этому соответствует энергетическая ширина порядка $\sqrt{\hbar^2 \kappa^2 \alpha^2/M}$, опять-таки малая по сравнению с кинетической энергией мезонов. В этих условиях можно интегрирование по (dq) проводить, не учитывая (21), и считать \mathbf{k}' постоянным.

Тогда, воспользовавшись условием полноты системы функций ψ_q , получаем

$$\int |I^\pm|^2 \frac{(dq)}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2} \int |\psi_0|^2 |e^{i\kappa\rho} \pm e^{-i\kappa\rho}|^2 (d\rho). \quad (31)$$

При значениях $\kappa \lesssim 1/r_0$ можно воспользоваться (25), тогда

$$\int |I^\pm|^2 \frac{(dq)}{(2\pi)^3} = 1 \pm \frac{\alpha}{\kappa} \arctg \frac{\kappa}{\alpha}. \quad (32)$$

Заметим, что в тех случаях, когда в интегралах I^\pm и $\int |I^\pm|^2 (dq)$ играют роль только большие расстояния (это имеет место при малых углах, когда можно разложить $e^{i\kappa\rho}$ в ряд), следует применять исправленную нормировку волновой функции [6], отличающуюся от (25) множителем $\sqrt{3/2}$.

$$а) d\sigma = \left(\frac{gg^0}{\mu c^2}\right)^2 \left(\frac{\mu}{2M}\right)^2 \left(1 - \frac{\alpha}{\kappa} \arctg \frac{\kappa}{\alpha}\right), \quad (33)$$

$$б) d\sigma = \left(\frac{f}{\mu c^2}\right)^2 \left\{ \left(\frac{E^2}{2M\mu c^4} f^0 + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}\mathbf{k}'}{E\mu} f'\right)^2 + \frac{\hbar^4 [\mathbf{k}\mathbf{k}']^2}{E^2 \mu^2} f^{02} - \left[\left(\frac{E^2}{2M\mu c^4} f^0 + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}\mathbf{k}'}{E\mu} f'\right)^2 - \frac{1}{3} \frac{\hbar^4 [\mathbf{k}\mathbf{k}']^2}{E^2 \mu^2} f^{02}\right] \frac{\alpha}{\kappa} \arctg \frac{\kappa}{\alpha} \right\}; \quad (34)$$

$$в) d\sigma = \frac{g^2}{(\mu c^2)^2} \left(\frac{\mu}{2M}\right)^2 \left\{ f'^2 \left(\frac{E^2}{\mu^2 c^4} - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}\mathbf{k}'}{\mu E}\right)^2 + f^{02} \frac{\hbar^4 [\mathbf{k}\mathbf{k}']^2}{E^2 \mu^2} - \left[f'^2 \left(\frac{E^2}{\mu^2 c^4} - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}\mathbf{k}'}{\mu E}\right)^2 - \frac{1}{3} f^{02} \frac{\hbar^4 [\mathbf{k}\mathbf{k}']^2}{E^2 \mu^2} \right] \frac{\alpha}{\kappa} \arctg \frac{\kappa}{\alpha} \right\}. \quad (35)$$

Во всех трех вариантах связи сечения обращаются в нуль (точнее, уменьшаются в $\epsilon/\mu c^2$ раз) для случая вылета π^0 -мезона в направлении первичного π -мезона. Это свойство связано с одинаковой четностью обеих частиц и может служить для проверки этого предположения.

Академия наук СССР

Получено 27 февраля 1951 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Bradner, B. Rankin. Phys. Rev., 1950, 80, 916.
2. Л. Д. Ландау, ДАН СССР, 1948, 60, 207.
3. L. Aamodt, J. Hadley, W. Panofsky. Phys. Rev., 1950, 80, 282.
4. В. Л. Иоффе, А. П. Рудик, И. М. Шмушкевич, ДАН СССР, 1951, 77, 90.
5. R. E. Marshak, A. S. Wightman. Phys., Rev., 1949, 76, 114.
6. Я. А. Сморodinский. ДАН СССР, 1948, 60, 217.

К ТЕОРИИ ЗАХВАТА π -ЧАСТИЦ В ДЕЙТРОНЕ¹

Установлено отношение вероятностей процессов: $p + \pi^- \rightarrow n + \pi^0$ и $d + \pi^- \rightarrow n + n + \pi^0$ без использования мезонной теории. То же самое проделано для отношения вероятностей радиационного захвата: $p + \pi^- \rightarrow n + \pi + \gamma$, $d + \pi^- \rightarrow n + n + \pi + \gamma$.

Показано, что точное измерение отношения количества π^0 в p и в d может дать возможность определить четность и спин π и π^0 . Указана общая связь между процессами с участием медленных мезонов в водороде и дейтроне.

Недавно проведенные опыты по захвату π -частиц в водороде и дейтроне [1] дают возможность установить спин и четность π - и π^0 -частиц [2–7], сравнивая вероятности реакций, происходящих в водороде и дейтроне. Количественное сопоставление этих реакций производилось в [5–7]. Такое сравнение не может быть достаточно обоснованно проведено на основании мезонной теории с использованием теории возмущений [5, 6], так как π -частицы сильно взаимодействуют с нуклонами, и поэтому методы обычной теории возмущений, по-видимому, не могут быть полностью применены. Однако для целей относительного сравнения эффектов в водороде и дейтроне можно использовать полуфеноменологические методы, излагаемые ниже. Для процесса (4) такое рассмотрение было частично проведено в [7].

При захвате π^- в водороде происходят процессы:

$$\pi^- + p \rightarrow n + \gamma, \quad (1)$$

$$\pi^- + p \rightarrow n + \pi^0, \quad (2)$$

в дейтроне имеют место реакции:

$$\pi^- + d \rightarrow n + n, \quad (3)$$

$$\pi^- + d \rightarrow n + n + \gamma, \quad (4)$$

$$\pi^- + d \rightarrow n + n + \pi^0. \quad (5)$$

Последние данные о массах π - и π^0 -частиц [1] делают реакцию (5) энергетически возможной. Согласно экспериментальным данным [1] реакции (1) и (2) имеют одинаковую вероятность, а в дейтроне

¹ ЖЭТФ, 1952, 22, 129.

реакция (3) вдвое более вероятна, чем (4). Реакция (5) не наблюдалась. Можно показать, что в D_2 , H_2 частица успевает сначала попасть на свою K -оболочку, а потом уже захватиться протоном или дейтроном [7, 8]. Поэтому мы в дальнейшем будем рассматривать захват π -частицы только с ее K -оболочки. Существование реакции (3) в этих условиях исключает скалярную частицу [2—4]. Малая вероятность реакции (5) легко объясняется, если π -частица псевдоскалярная [1] и имеет спин, равный нулю. В дальнейшем мы будем считать, что π и π^0 имеют спин нуль (для π^0 на это указывает распад на два фотона [9]).

Рассмотрим захват π -частиц с вылетом нейтрального мезона. Пусть π и π^0 имеют одинаковую четность, т. е. обе скалярные или обе псевдоскалярные. В случае водорода речь идет о захвате покоящейся относительно нуклона π -частицы, так как скорость ее на K -оболочке мала. Учитывая одинаковую четность, мы можем феноменологически описать захват в водороде, используя псевдопотенциал [10] U взаимодействия между π -частицей и нуклоном, взятый в виде

$$U = a\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}), \quad (6)$$

где постоянная a связана с вероятностью реакции (2):

$$W_p(\pi^0) = \frac{|a|^2}{\pi\hbar^4} |\psi(0)|^2 \mu p_n, \quad (7)$$

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\mu e^2}{\hbar^2} \right)^3. \quad (8)$$

(6) справедливо только для достаточно медленных частиц. Одинаковая четность π и π^0 означает, что обе частицы взаимодействуют с нуклоном, находясь в s -состоянии (при малых энергиях). Так как S -функция стремится к постоянному пределу, не равному нулю, когда импульс стремится к нулю, можно считать a не зависящей от импульса нейтрального мезона p . В дейтроне π -частица захватывается движущимся нуклоном, поэтому псевдопотенциал (6) может быть неприменим. Так как скорость нуклонов в дейтроне мала, то можно разложить U в ряд по степеням p/Mc , где p — импульс нуклона. Вместо (6) мы будем иметь

$$U = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) \left\{ a + a_1 \frac{p p}{M\mu c^2} + a_2 \frac{p^2}{M^2 c^4} + b \frac{p^2}{\mu^2 c^4} \dots \right\}, p = \hbar k. \quad (9)$$

Полагая a_1 , a_2 и b того же порядка, что и a , можно ограничиться только первым членом. В дальнейшем можно будет убедиться в том, что отброшенные члены не вносят с собой ничего существенно нового в смысле правил отбора, запрещающих реакцию (5). Сопоставляя мезонные процессы в дейтроне и водороде, происходящие под действием медленных мезонов, надо иметь в виду упрощающее обстоятельство, которое можно разъяснить на примере захвата с испусканием π^0 . Захват π^- и испускание π^0 в водороде

осуществляется одним и тем же нуклоном. В дейтроне возможен захват π^- протоном, а испускание π^0 нейтроном. Однако эта возможность мало меняет вероятность захвата, учитывающую захват и испускание одним протоном. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим вклад в амплитуду вероятности захвата смешанных переходов с участием протона и нейтрона. Выражение для амплитуды вероятности можно взять, пользуясь теорией возмущений, но не ограничиваясь только первым исчезающим приближением. Начнем со второго приближения (первого исчезающего). Сператоры взаимодействия нуклонов с π - и π^0 -мезонами записываем в следующем виде:

$$A = M(1) \tau^+(1) + M(2) \tau^+(2), \quad (10)$$

$$B = L(1) + L(2) + T(1) \tau_3(1) + T(2) \tau_3(2).$$

Амплитуда вероятности равна

$$\sum_{t_1} \frac{A_{it_1} B_{t_1 f}}{E_i - E_{t_1}} + \sum_{t_2} \frac{B_{it_2} A_{t_2 f}}{E_i - E_{t_2}},$$

где

$$E_i - E_{t_1} = \mu_\pi c^2 - \varepsilon - \varepsilon_{t_1},$$

$$E_i - E_{t_2} = -\mu_\pi c^2 - \left(\frac{p^2}{2\mu} \right) - \varepsilon - \varepsilon_{t_2}. \quad (11)$$

При суммировании по t_1 и t_2 главную роль играют состояния двух нуклонов с энергиями ε_{t_1} и ε_{t_2} , малыми по сравнению с μc^2 . Состояния, не удовлетворяющие этому условию, имеют быстро осциллирующую ψ -функцию, которая делает малыми матричные элементы. При этом существенна малая энергия связи дейтрона $\varepsilon = 2,17$ Мэв, благодаря чему в его основном состоянии ψ -функция не содержит заметного числа фурье-компонент с большими импульсами. Пренебрегая ε_{t_1} , ε_{t_2} и ε , а также $p^2/2\mu$ [1], производя суммирование по промежуточным состояниям и исключая зарядовую координату, приходим к выражению

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \psi_f^* [L(1) - L(2)] \psi_0 = \sqrt{2} \int \psi_f^* L(1) \psi_0, \quad (12)$$

где

$$L = \frac{ML - LM}{\mu c^2} - \frac{TM + MT}{\mu c^2}, \quad (13)$$

где ψ_f , ψ_0 — конечная и начальная волновые функции двух нуклонов (включая и спиновые функции): $\psi_f(1,2) = -\psi_f(2,1)$, $\psi_0(1,2) = \psi_0(2,1)$. Смешанные переходы не вошли ввиду коммутирования операторов, относящихся к различным частицам.

Аналогичные вычисления дают L в водороде. Таким образом, в этом приближении переход от H к D происходит согласно пра-

вилу: протонный оператор L без изменения переносится на случай D , согласно (12); $\sqrt{2}$ связан с нормировкой.

В следующих приближениях теории возмущений приходится иметь дело с испусканием виртуальных мезонов, которые затем снова поглощаются. В дейтроне добавочно к протону появляются переходы, в которых мезон испускается одним нуклоном, а поглощается другим. Однако в дейтроне расстояние между частицами больше комптоновской длины волны π -мезона. Поэтому смешанные цепочки могут происходить только с нерелятивистскими мезонами. Можно думать, что в интегралах по импульсам виртуальных мезонов в несмешанных цепочках главную роль играют импульсы, большие чем μc , аналогично тому, как это имеет место при вычислении магнитных моментов нуклонов. Вследствие этого магнитный момент дейтрона с хорошей степенью точности равен сумме моментов n и p . Поэтому смешанные цепочки в дейтроне должны дать малый вклад в амплитуду вероятности. В дальнейшем мы будем пользоваться (12) вместе с (9). Эффективный матричный элемент захвата согласно (9) и (12) равен

$$\sqrt{2}a \int \psi_j^* e^{ikr/2} \psi_0. \quad (14)$$

Здесь \mathbf{r} есть $\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n$, движение центра тяжести отделено. \mathbf{k} — волновой вектор нейтрального мезона. k определяется из соотношения

$$M_n c^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} + \frac{\hbar^2 q^2}{M} + \frac{\hbar^2 k^2}{4M} = (\mu_\pi - \mu_{\pi^0}) c^2 + M_p c^2. \quad (15)$$

\mathbf{q} — волновой вектор относительного движения нейтронов. Согласно [1] $(\mu_\pi - \mu_{\pi^0}) c^2 = 5,3 M_e e$, поэтому волновой вектор нейтрального мезона мал. $e^{ikr/2}$ можно разложить в ряд по степеням $kr_{эф}/2$:

$$\frac{kr_{эф}}{2} \sim \frac{k}{2\alpha} \sim \sqrt{\frac{E_{\pi^0} \mu}{2\varepsilon M}} \sim \sqrt{\frac{\mu}{4M}} \sim \frac{1}{5},$$

так как в соответствии с (15) $E_{\pi^0} \sim 1 M_e e$.

В нулевом приближении (14) равно нулю, так как спиновые функции ψ_j и ψ_0 совпадают, поэтому ψ_j — нечетная триплетная функция [2—4]. Переход является запрещенным. В следующем приближении (14) оказывается равным

$$\sqrt{2} \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} a \int \frac{e^{-\alpha r}}{r} \frac{\mathbf{k} \mathbf{r}}{2} \frac{e^{i\mathbf{q} \mathbf{r}} - e^{-i\mathbf{q} \mathbf{r}}}{\sqrt{2i}} d\mathbf{r} = \frac{4\sqrt{2} \mathbf{k} \mathbf{q} \sqrt{\pi \alpha}}{(\alpha^2 + q^2)^2} a. \quad (16)$$

В качестве триплетной функции можно взять плоскую волну, так как в ней не содержится s -состояния, для которого только и существенно взаимодействие двух нейтронов. Отсюда находим вероятность захвата с испусканием нейтрального мезона данной энергии

$$dW_D = \frac{8\mu}{3\pi^2} |\psi(0)|^2 \frac{|a|^2 \alpha}{\hbar^2 c^2} \frac{k^3 q^4 dq}{(\alpha^2 + q^2)^4}. \quad (17)$$

Отношение N полных вероятностей испускания нейтрального мезона в дейтроне и водороде равно

$$N = \frac{8}{3\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{E_H}} \frac{2\mu}{M} J(\chi), \chi = \frac{\Delta}{\varepsilon}, \quad (18)$$

$$\Delta = (\mu_\pi - \mu_{\pi^0}) c^2 - \varepsilon - (M_n - M_p) c^2;$$

$$J(\chi) = \int_0^{\sqrt{\chi}} \frac{(\chi - x^2)^{3/2} x^4 dx}{(1 + x^2)^4}, \quad (19)$$

где $E_H = p_H^2/2\mu$. Численно $N \approx 10^{-3}$ при $\chi = 1$. Величина N мало изменится, если вместо a рассмотреть весь ряд (9), так как каждый член этого ряда не содержит спина нуклонов. Поэтому переход остается запрещенным под действием a_2 , b и всех остальных членов ряда, содержащих четные степени P . Так как a_2 , b и остальные коэффициенты того же порядка, что и a , то вклад членов ряда типа a_2 , b оказывается малым ввиду малости P/Mc и $p/\mu c$. Под действием a_1 происходит испускание нейтрального мезона в p -состоянии. В этом случае запрет снимается. Однако отношение эффектов, вызванных a и a_1 , по порядку величины равно

$$\frac{a}{a_1} \frac{k}{2\alpha} \frac{Mc}{P} \frac{\mu c}{p} = \frac{a}{a_1} \frac{M\mu c^2}{2\hbar\alpha P} \sim \frac{a}{a_1} \frac{\mu c^2}{2\varepsilon} \sim 35 \frac{a}{a_1}, \quad P \sim \hbar a = \sqrt{M\varepsilon}. \quad (20)$$

Даже если $a/a_1 \sim \mu/M$, а не порядка единицы (других безразмерных параметров нет), (20) велико по сравнению с единицей. Поэтому (19) справедливо с точностью порядка 5—10% и основано только на предположении об одинаковой четности π и π^0 и спине у них, равном нулю. В этом случае реакция (5) оказывается очень резко запрещенной. Отметим, что расчеты, основанные на мезонной теории (в первом исчезающем приближении), дают для N значение, точно совпадающее с (18) [6].

Рассмотрим теперь случай, когда π и π^0 имеют спин нуль, но противоположную четность. Псевдопотенциал обязан теперь включать спин нуклонов. В первом приближении по отношению к скоростям нуклонов и мезонов можно написать

$$U = [aks + bPs] e^{i\mathbf{k} \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p), \quad (21)$$

где s — спиновый вектор Паули.

Необходимость рассматривать одновременно a и b в (21) вызвана тем, что в случае разных четностей π и π^0 орбитальные моменты π и π^0 различны. Если π^- имеет момент нуль, то π^0 должно быть в p -состоянии (f и более высокие моменты не имеют практического значения). В этом случае испускание π^0 пропорционально относительной скорости π^0 и нуклона в конце процесса, т. е. P/Mc — $\hbar k/\mu \sim \hbar k/\mu$. Если π^0 испускается в s -состоянии, то поглощение π^- происходит из p -состояния. π^- находится в s -состоянии от-

носительно дейтрона, но относительно движущегося нуклона в конце процесса π^- может находиться в p -состоянии, причем относительная скорость π и нуклона будет равна $(P + \hbar k)/Mc \sim P/Mc$. Необходимость учета обоих случаев приводит к выражению (21).

В применении к дейтрону удобно преобразовать (21) так:

$$U \rightarrow \{1/2 (a\mathbf{k} + b\mathbf{P}, s_1 + s_2) + 1/2 (a\mathbf{k} + b\mathbf{P}, s_1 - s_2)\} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}/2}. \quad (22)$$

$s_1 + s_2$ дает переходы в триплетное состояние двух нейтронов, $s_1 - s_2$ — в синглетное. Отсюда получаем матричные элементы перехода в триплетное и синглетное состояния:

$$\begin{aligned} \int \Phi_i^* P \Phi_0 &= \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2i}} \int (e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} - e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}) \frac{\hbar}{i} \nabla \frac{e^{-\alpha r}}{r} d\mathbf{r} = i \frac{4}{\alpha^2 + q^2} \sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}} \hbar \mathbf{q}, \\ \mathbf{k} \int \Phi_{\Sigma}^* \Phi_0 d\mathbf{r} &= \mathbf{k} \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \sqrt{2} 4\pi \int_0^{\infty} \frac{\sin(qr - \eta)}{qr} \frac{e^{-\alpha r}}{r} r^2 dr e^{-i\eta} = \\ &= 4\mathbf{k} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{\alpha - \alpha_0}{q} \frac{\sin \eta}{\alpha^2 + q^2} e^{-i\eta}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $\text{ctg} \eta = -\alpha_0/q$, α_0 — постоянная системы двух нейтронов в s -состоянии, аналогичная α в дейтроне, $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}/2)$ заменяется на единицу в отличие от (14). Отношение вероятности захвата в дейтроне к вероятности захвата в водороде вместо (18) имеет вид:

$$N = \frac{16}{3\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{E_{\text{H}}}} \left\{ \frac{|b|^2}{|a|^2} \frac{M\varepsilon\hbar^2}{2\mu E_{\text{H}}} J_1(\chi) + \frac{(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon_0})^2}{2E_{\text{H}}} J_2(\chi) \right\}, \quad (24)$$

$$\varepsilon_0 = \hbar^2 \alpha_0^2 / M;$$

$$J_1 = \int_0^{\chi} \frac{\sqrt{\chi^2 - x^2} x^2 dx}{(x^2 + 1)^2}, \quad J_2 = \int_0^{\chi} \frac{(\chi^2 - x^2)^{3/2} x^2 dx}{(x^2 + 1)^2 \left(x^2 + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)}. \quad (25)$$

χ — то же, что и в (18).

Полагая $\varepsilon_0 = \varepsilon$, находим

$$N > 10^{-1}. \quad (26)$$

Таким образом, в случае различных четностей вылет π^0 в дейтроне, хотя имеет меньшую абсолютную вероятность, чем в водороде, тем не менее оказывается в 100 раз более вероятным, чем в случае одинаковых четностей¹. Этот вывод находится в согласии с расчетами [6] на основе мезонной теории. В (21) не учитываются члены, пропорциональные более высоким степеням P/Mc и $p/\mu c$. Их действие мало по тем же причинам, какие имели место в случае одинаковых четностей.

¹ Можно сказать, что такой переход является запрещенным уже в водороде. В дейтроне не возникает существенно нового запрещения.

Сравним теперь захват с вылетом квантов в Н и D. Вводим соответствующую функцию U :

$$U_{\gamma} = (a + b \mathbf{n}) e^{i\mathbf{f}\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p), \quad (17)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, могущий быть построенным при помощи единичного вектора поляризации γ -кванта \mathbf{j} и волнового вектора кванта \mathbf{f} . Если бы π -частица была скалярная, то $b = 0$. Для псевдоскалярной же частицы $a = 0$. Как будет видно из дальнейшего, почти все γ -лучи в дейтроне имеют энергию, близкую к максимально возможной. Поэтому величину f можно считать постоянной. Учитывая малость скоростей частиц в дейтроне по сравнению со скоростью света, приходим к (27). Вероятность γ -захвата в Н:

$$W_p = \frac{2}{\pi} \frac{\mu^2 c}{\hbar^4} [|a|^2 + |b|^2] |\Psi(0)|^2. \quad (28)$$

Преобразуем U аналогично (22)

$$U = \left[a + b \frac{s_1 + s_2}{2} + b \frac{s_1 - s_2}{2} \right] e^{i\mathbf{f}\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p). \quad (29)$$

Последний член дает переход в синглетное состояние. Вероятность захвата в дейтроне с испусканием γ -квантов, имеющих частоту, лежащую в интервале $d\omega$, равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2 \hbar^4} \left[|a|^2 + \frac{2}{3} |b|^2 \right] \left| \int \Phi_i^* e^{i\mathbf{f}\mathbf{r}/2} \Phi_0 \right|^2 + \\ + \frac{1}{3} |b|^2 \left| \int \Phi_{\Sigma}^* e^{i\mathbf{f}\mathbf{r}/2} \Phi_0 \right|^2 \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{f^2 d\Omega_f}{(2\pi)^3 \hbar c}. \end{aligned}$$

Получающийся спектр γ -лучей идентичен полученному в [6]. Полная вероятность радиационного захвата может быть получена следующим образом. dW_{γ} очень быстро падает, когда $\hbar\omega_{\text{макс}} - \hbar\omega$ становится больше, чем ε . Поэтому при интегрировании по всем волновым векторам относительного движения нейтронов главную роль играют такие q , которым отвечают малые отличия f от $f_{\text{макс}} = f_0$. Поэтому можно заменить всюду f на f_0 . Так как вероятность больших $f_0 - f$ ничтожно мала, то ограничения, накладываемые законом сохранения энергии, не существенны, и поэтому можно интегрировать по q , ничем себя не ограничивая. В таком случае полнота функций Φ_i , Φ_{Σ} непосредственно дает

$$\begin{aligned} \frac{W_D}{W_p} = \frac{2}{|a|^2 + |b|^2} \left\{ \left[|a|^2 + \frac{2}{3} |b|^2 \right] \int |\Phi_0|^2 \sin^2 \frac{\mathbf{f}_0 \mathbf{r}}{2} + \right. \\ \left. + \frac{|b|^2}{3} \int |\Phi_0|^2 \cos^2 \frac{\mathbf{f}_0 \mathbf{r}}{2} \right\} = 1 - \frac{|b|^2 + 3|a|^2}{3(|a|^2 + |b|^2)} \int |\Phi_0|^2 \cos \mathbf{f}_0 \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя $\Phi_0 = \sqrt{\alpha/2\pi} e^{-\alpha r}$, находим

$$\frac{W_D}{W_p} = 1 - \frac{|b|^2 + 3|a|^2}{3(|a|^2 + |b|^2)} \frac{2\alpha}{f_0} \text{arccotg} \frac{2\alpha}{f_0}. \quad (31)$$

$$N_\gamma = W_D/W_p \text{ всегда меньше единицы и заключено в пределах} \\ 0,4 < N_\gamma < 0,8, \quad (32)$$

(32) также согласуется с результатами расчетов [5,6] на основе мезонной теории.

Сопоставляя (18), (26) и (32) с известным [1] отношением γ -квантов к π^0 -мезонам в водороде $(W_\gamma/W_{\pi^0})_p \approx 1$, обнаруживаем большой запрет вылета π^0 в дейтроне в случае одинаковых четностей π и π^0 и спина нуль у них. Только в этом случае интенсивность π^0 падает в 10^3 раз. Если спин у π равен единице (или больше), то сложение этого спина с моментом дейтрона всегда может дать разрешенный переход, приводящий к вылету π^0 . Отсутствие π^0 в дейтроне [1] является весьма существенным показателем того, что π^- и π^0 -мезоны имеют спин нуль и обладают одинаковой четностью. Спин два у π^- и π^0 исключается по тем же причинам, что и единица. Полученный вывод о спинах и четностях не основан на мезонной теории с использованием теории возмущений и может быть изменен только в том случае, если окажется, что количество π^0 -мезонов в D соответствует (26), а не (18). Чрезвычайно желательное экспериментальное выяснение этого числа.

В заключение благодарю Б. Иоффе, А. Рудика и И. Шмушкевича за интересные дискуссии при проведении этой работы.

Академия наук СССР

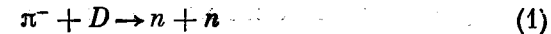
Получено 3 мая 1951 г.

ЛИТЕРАТУРА

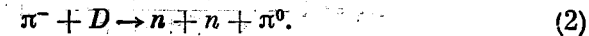
1. W. K. H. Panofsky, R. L. Aamodt, J. Hadley. Phys. Rev., 1951, 81, 565.
2. E. L. Feinberg. J. Phys., 1941 5, 177.
3. B. Ferretti. Report on Intern. Conf. Low Temperatures and Fundamental Particles. Cambridge, 1946, стр. 75.
4. S. Tamor. Phys. Rev., 1950, 79, 221 (A).
5. S. Tamor, R. E. Marshak. Phys. Rev., 1950, 80, 766.
6. Б. Иоффе, А. Рудик, И. Шмушкевич. ДАН СССР, 1951, 77, 403.
7. K. Brueckner, R. Serber, K. Watson. Phys. Rev., 1951, 81, 575.
8. A. S. Wightman. Phys. Rev., 77, 521 (1950).
9. Л. Ландау. ДАН СССР, 60, 207, 1948.
10. Г. Бете. Физика ядра, ч. 2, ГТИ, 1948, стр. 112.

Захват π -частиц в водороде [1] и дейтроне дает указания относительно спина π^- и π^0 -частиц и их взаимной четности. Важность этого обстоятельства делает желательным сопоставление дейтронных и водородных реакций, не использующее теории возмущений в применении к мезонной теории [2, 3]. Такое сопоставление оказывается возможным благодаря малости отношения энергии связи дейтрона ϵ к покоящейся энергии $\mu_\pi c^2$ частиц.

Малость скорости нуклонов в дейтроне по сравнению со скоростью света также существенна при феноменологическом рассмотрении реакций в дейтроне. Так как имеет место процесс



(π^- из K-оболочки [4, 5]), исключающий скалярную π^- -частицу [6, 7], то в дальнейшем предполагается, что π^- , π^0 имеют спин 0, причем π^- — псевдоскалярная. Отбрасывание высших спинов основано на малой вероятности реакции



Отношение вероятности испускания π^0 в дейтроне к аналогичной вероятности в водороде равно в случае одинаковых четностей π , π^0 :

$$N = \frac{8}{3\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{E_H}} \frac{2\mu}{M} \int_0^{\sqrt{\chi}} \frac{(\chi^2 - x^2)^{3/2} x^4 dx}{(1+x^2)^4}, \quad (3)$$

$$\left(1 + \frac{\mu}{M}\right) E_H = (\mu_\pi - \mu_{\pi^0}) c^2 - M_n c^2 + M_p c^2,$$

$$\chi = \frac{1}{\epsilon} (\mu_\pi c^2 - \mu_{\pi^0} c^2 - \epsilon - M_n c^2 + M_p c^2).$$

При $\chi = 1$ $N \approx 10^{-3}$.

¹ ДАН СССР, 1951, 80, 47. (Представлено академиком Л. Д. Ландау 10 июля 1951 г.).

ОБМЕННЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ БЫСТРЫХ НУКЛОНОВ С ДЕЙТРОНАМИ. II¹

Если четности π^- и π^0 различны, то (3) заменяется на следующее выражение:

$$N = \frac{16}{3\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{E_H}} \left\{ \frac{|b|^2}{|a|^2} \frac{M\varepsilon\hbar^2}{2\mu E_H} I_1(\chi) + \frac{(V\varepsilon + V\varepsilon_0)^2}{2E_H} I_2(\chi) \right\}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\hbar^2 \alpha_0^2}{M}, \quad I_1 = \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{\chi^2 - x^2} \frac{x^4 dx}{(1+x^2)^2},$$

$$I_2 = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{(\chi^2 - x^2)^{1/2} x^2 dx}{(x^2 + 1)^2 \left(x^2 + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)};$$

α_0 — постоянная nn -системы в синглетном состоянии, аналогичная постоянной α в np -системе (ψ -функция nn -системы удовлетворяет условию $\psi'/\psi = -\alpha_0$ при r , равном радиусу действия nn -ядерных сил).

Согласно (4), $N > 10^{-1}$, если $\varepsilon_0 = \varepsilon$ и $\chi = 1$. Таким образом, разница между (3) и (4) дает возможность установить взаимную четность π^- , π^0 -мезонов. Существование у π^- , π^0 высших спинов сделало бы непонятным появление запрета для испускания π^0 , который следует из [1].

Применение того же метода к испусканию γ -квантов

$$\pi^- + D \rightarrow n + n + \gamma$$

приводит к следующему значению для отношения вероятности испускания γ -квантов в дейтроне и водороде:

$$N_\gamma = 1 - \frac{|b|^2 + 3|a|^2}{3|a|^2 + 3|b|^2} \frac{2\alpha}{f_0} \operatorname{arccotg} \frac{2\alpha}{f_0}, \quad (5)$$

$$f_0 = \frac{\mu c}{\hbar}, \quad 0,4 < N < 0,8.$$

Главную роль играют γ -кванты с энергиями, близкими к верхнему энергетическому краю спектра. (3), (4) и (5) согласуются с результатами, полученными согласно мезонной теории в [2, 3].

Академия наук СССР

Получено 15 мая 1951 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. K. H. Panofsky, R. L. Aamodt, J. Hadley. Phys. Rev., 1951, 81, 565.
2. S. Tamor, R. E. Marshak. Phys. Rev., 1950, 80, 766.
3. Б. Иоффе, А. Рудик, И. Шмушкевич. ДАН, 1951, 77, 403.
4. A. S. Wightman, Phys. Rev., 1950, 77, 521.
5. K. Brueckner, R. Serber, K. Watson. Phys. Rev., 1951, 81, 575.
6. E. L. Feinberg. J. Phys., USSR, 1944, 5, 177.
7. S. Tamor. Phys. Rev., 1950, 79, 221 (A).

Получено эффективное сечение для обменных столкновений быстрых нуклонов с дейтронами, при которых заданы импульсы медленных нуклонов. Показана возможность анализа спиновой зависимости обменных сил при экспериментальном изучении таких столкновений.

В работе [1] (далее цитируется как I) было получено общее выражение для эффективного сечения обменного столкновения быстрого нуклона с дейтроном [формула (29), I]. Там же было получено эффективное сечение для рассеяния быстрой частицы на заданный угол. Сохраняя те же обозначения, что и в I, определим эффективное сечение для переходов в состоянии с заданными значениями импульсов медленных нуклонов $\hbar\mathbf{q}_1$ и $\hbar\mathbf{q}_2$. Для этого переходим от $d^3k' d^3g$ к $d^3q_1 d^3q_2$ и вместо Φ^2 подставляем [(16), I], а вместо Φ^2 функцию [ср. I, (17)]:

$$\sqrt{2} \left[e^{-in} \frac{\sin(gr + \eta)}{gr} - \frac{\sin gr}{gr} + \cos gr \right]. \quad (1)$$

Интегралы, входящие в [(29), I], оказываются равными

$$I_1 = \left(\int \Phi_g^i e^{-ifr} \Phi_0 d^3r \right)^* = 2\sqrt{\pi\alpha} \left(\frac{1}{\alpha^2 + q_1^2} - \frac{1}{\alpha^2 + q_2^2} \right); \quad (2)$$

$$I_2 = \int \Phi_g^z e^{-ifr} \Phi_0 d^3r = \sqrt{\pi\alpha} \left\{ 2 \frac{2\alpha^2 + q_1^2 + q_2^2}{(\alpha^2 + q_1^2)(\alpha^2 + q_2^2)} + \frac{1}{fgi} (1 - e^{-2in}) \left[\operatorname{arctg} \frac{g+f}{\alpha} - \operatorname{arctg} \frac{g-f}{\alpha} - \frac{i}{2} \ln \frac{\alpha^2 + (g+f)^2}{\alpha^2 + (g-f)^2} \right] \right\}. \quad (3)$$

Уничтожая энергетическую δ -функцию интегрированием по углу между \mathbf{q}_2 и \mathbf{k} , получаем эффективное сечение

$$d\sigma(q_1, q_2) = \frac{d^3q_1}{4\pi^3} \frac{q_2 dq_2}{k^2} d\varphi_2 \left\{ |a|^2 |\pi\alpha I_2|^2 + \frac{4}{3} \left[|a+b|^2 + \frac{1}{4} |2b+a|^2 + |a|^2 + |b|^2 \right] \frac{4\pi\alpha (q_1^2 - q_2^2)^2}{(\alpha^2 + q_1^2)^2 (\alpha^2 + q_2^2)^2} \right\}. \quad (4)$$

¹ ЖЭТФ, 1952, 22, 624.

Если энергии двух медленных нуклонов одинаковы, то согласно (2) переходы в триплетное состояние отсутствуют. Этот результат получен при пользовании дейтронной функцией вида $\sqrt{a/2\pi}(1/r)e^{-ar}$, что является законным при не слишком больших энергиях E_1, E_2 (меньших, чем примерно 15–20 Мэв). Отсутствием одинаковых энергий при переходе в триплетное состояние также можно воспользоваться для экспериментального установления спиновой зависимости обменных сил. Если на опыте обнаруживаются расщепления, при которых $q_1 = q_2$, то это означает, что $a \neq 0$. Отметим увеличение сечения, когда $q \rightarrow 0$. Это вызвано взаимодействием медленных нуклонов в конечном состоянии, проявляющемся в членах с фазой. (2) и (3) не учитывают кулоновского отталкивания в случае двух медленных протонов. Оно, однако, не очень существенно при энергиях относительного движения, больших чем 4–5 Мэв. Таким образом, в случае обменной реакции: $n + d = p + (n_1 + n_2)$, (4) применимо, когда $E(n_1), E(n_2) < 15-20$ Мэв. Когда падающая частица — протон $p + d = n + (p_1 + p_2)$, область применимости (4) суживается со стороны малых энергий относительного движения, точное рассмотрение которых требует введения кулоновских ψ -функций [2].

В общем случае простой анализ (4) затруднителен ввиду сложности распределения, получающегося при переходах в синглетное состояние. Формулы, однако, сильно упрощаются в некоторых предельных случаях.

Пусть $E_1 \gg E_2$ и $E_1 \gg \varepsilon$. При выполнении этих неравенств следует ожидать в первом приближении перехода от (4) к рассеянию свободным нуклоном. В следующем приближении возникнет эффект связи частиц в дейтроне.

Разложим (4) в ряд по степеням q_2^2/q_1^2 , пользуясь¹ [(3) и (17) I],

$$d\sigma(q_1 q_2) = \frac{d^3 q_1}{\pi^2} \frac{q_2 d q_2}{k^2} d q_2 \alpha \left\{ |a|^2 \frac{1}{(\alpha^2 + q_2^2)^2} + \frac{2 \left[1 - 2 \ln \frac{q_1^2}{\alpha^2 + (g-f)^2} \right]}{q_1^2 (\alpha^2 + q_2^2)} + \frac{4}{3} \left[|a+b|^2 + \frac{1}{4} |2b+a|^2 + |a|^2 + |b|^2 \right] \left[\frac{1}{(\alpha^2 + q_2^2)^2} - \frac{2}{q_1^2 (\alpha^2 + q_2^2)} \right] \right\} \quad (5)$$

$$\left(\operatorname{ctg} \eta = -\frac{\alpha_0}{g} = -\frac{2\alpha_0}{q_1} \rightarrow 0, \eta \rightarrow \frac{\pi}{2} \right).$$

В силу законов сохранения

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (k - q_1 - q_2)^2}{2m} + \frac{\hbar^2 (q_1^2 + q_2^2)}{2m} + \varepsilon, \quad (6)$$

$$(k, q_1 + q_2) = k(q_1 \mu_1 + q_2 \mu_2) = q_1^2 + q_2^2 + q_1 q_2 + \alpha^2.$$

¹ При этом мы считаем, что $|\alpha_0|$ — порядка или меньше α .

Сумма векторов $q_1 + q_2$ оказывается почти перпендикулярной вектору k , так как q_1 и q_2 малы по сравнению с k ; откуда

$$\mu_2 \approx -q_1 \mu_1 / q_2. \quad (7)$$

При интегрировании по μ_1 , в членах первого приближения по $1/q_1^2$ в (5), в соответствии с (7), следует положить

$$\int_{-1}^1 d\mu_1 = 2, \quad q_1 < q_2, \quad \int_{-q_2/q_1}^{q_2/q_1} d\mu_1 = 2 \frac{q_2}{q_1}, \quad q_2 > q_1.$$

Производя интегрирование по обоим азимутальным углам и по μ_1 , получаем дифференциальное сечение для образования двух нуклонов с энергиями E_1 и E_2 :

$$d\sigma^{(1)}(E_1 E_2) = 8a \frac{q_2^2 d q_2}{(\alpha^2 + q_2^2)^2} [3|a+b|^2 + |a-b|^2] \frac{dE_1}{2E_0} = 4 \frac{\sqrt{2\varepsilon E_2} dE_2}{(\varepsilon + 2E_2)^2} [3|a+b|^2 + |a-b|^2] \frac{dE_1}{E_0}, \quad (9)$$

$$E_1 \gg E_2, \quad E_1 \gg \varepsilon.$$

Интегрируем это выражение по E_2 для определения интегрального сечения образования второго нуклона с любыми энергиями, считая E_1 заданным (в интеграле по E_2 главную роль играют E_2 порядка ε):

$$d\sigma^{(1)}(E_1) = \pi [3|a+b|^2 + |a-b|^2] dE_1 / E_0. \quad (10)$$

Это есть, в соответствии с [(39), I], эффективное сечение для обменного столкновения двух свободных нуклонов, при котором передается энергия E_1 .

В следующем приближении по отношению к $1/q_1^2$, $d\sigma$ [согласно (5)] отличается от $d\sigma^{(1)}$ на следующую величину (в качестве полярной оси при интегрировании по μ выбираем k):

$$d\sigma^{(2)}(E_1) = -32 \frac{\alpha}{k^2} \frac{d q_1}{q_1} \frac{q_2^2 d q_2}{\alpha^2 + q_2^2} \left\{ |a|^2 \left[\ln \frac{q_1^2}{\alpha^2 + q_2^2} + 3 - \frac{2\alpha^2}{q_2^2} \arcsin \frac{q_2}{\sqrt{\alpha^2 + q_2^2}} \right] + 2|b|^2 + ab^* + a^*b \right\}. \quad (11)$$

Интегрированием (11) по E_2 от 0 до $E_2 \gg \varepsilon$ определяем дополнительное по отношению к $d\sigma^{(1)}(E_1)$ сечение, при котором E_1 задано, а E_2 меняется от 0 до E_2 :

$$d\sigma^{(2)}(E_1) = -8\sqrt{2} \frac{dE_1}{E_1} \frac{\sqrt{\varepsilon E_2}}{E_0} \left\{ |a|^2 \left(\ln \frac{E_1}{E_2} + 5 \right) + 2|b|^2 + ab^* + a^*b \right\}.$$

Вычитая $d\sigma^{(1)}$ из $d\sigma = d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)}$, можно, пользуясь (10) и (12), найти a и b ; поэтому опыты по определению энергии

О СТОЛКНОВЕНИЯХ π -МЕЗОНОВ С ДЕЙТРОНОМ¹

Совместно с В. В. Берестецким

тического и углового распределения двух медленных нейтронов в реакции $n + d = p + (n + n)$ или двух медленных протонов в реакции $p + d = n + (p + p)$ могут также быть использованы для спинового анализа обменных сил. Отметим, что $d\sigma^{(2)}$ по порядку величины равна 10^{-27} см^2 [1, 2] и меняется примерно как $1/E_0$.

Согласно (11) в $\int_{E_2} d\sigma^{(2)}(q_1, q_2)$ главную роль играют E_2 , близкие к верхнему пределу. Это вызвано конкретным видом функции Φ_0 . Поэтому полный интеграл по E_2 в пределах от 0 до очень больших E_2 не может быть вычислен, так как он требует знания фурье-компонент Φ_0 в области больших волновых векторов, т. е. внутри области ядерных взаимодействий.

Отметим, что формула (9) имеет очень простой смысл. Распределение по E_2 соответствует распределению кинетических энергий внутри дейтрона при $\Phi_0 \sim r^{-1} e^{-\alpha r}$. Если при обменном столкновении первая частица получила энергию $E_1 \gg \epsilon$, то обе сталкивающиеся частицы после столкновения имеют скорости, большие по сравнению со скоростью второй «дейтронной» частицы. Естественно, что в этих условиях после столкновения вторая частица движется с теми же скоростями, что и в дейтроне.

В общем случае, когда $E_1 \sim E_2 \sim \epsilon$, приходится пользоваться громоздкой формулой (4). Следует, однако, иметь в виду, что изучение столкновений $n + d$ в этих условиях представляет дополнительный интерес, так как дает возможность определить постоянную α_0 у системы $n - n$.

Академия наук СССР

Получено 8 сентября 1951 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 1951, 21, 1413. (Собр. трудов, № 82.)
2. J. D. Jackson, J. M. Blatt. Rev. Mod. Phys., 1950, 22, 77.

При столкновении π -мезонов с дейтроном может происходить рассеяние их, а также превращение их в нейтральные мезоны. Сечения рассеяния и превращения в нейтральный мезон вычислялись [1] при помощи теории возмущений при различных возможных типах связи π -мезонов с нуклонами. Ряд данных о характере взаимодействия мезонов с нуклонами, в особенности зависимость от спина, может быть проанализирован путем сравнения данных рассеяния (и превращения в нейтральный мезон) в водороде и дейтерии. Теоретическое рассмотрение при этом не требует предположений о малости взаимодействия.

Мы применим полуфеноменологический метод, применявшийся ранее [2] к задаче о рассеянии быстрых нейтронов дейтронами и захвате π -мезонов дейтроном. Пусть π -мезон сталкивается с протоном. Будем считать известной амплитуду рассеянного мезона (заряженного или нейтрального) при заданном угле рассеяния. Если мезон имеет спин 0, то амплитуда рассеяния должна быть скаляром; амплитуда же, соответствующая вылету нейтрального мезона, должна быть скаляром, если внутренние четности заряженного и нейтрального мезонов одинаковы, и псевдоскаляром, если они противоположны.

Из этого требования мы можем определить характер возможной зависимости амплитуды от спина нуклона. Именно:

1) амплитуда рассеяния

$$u_{\pi} = a + b\sigma, \quad (1)$$

где a — скаляр (являющийся, вообще, функцией углов), σ — оператор спина, b — псевдовектор, причем

$$b = b_0 k \times k', \quad (1a)$$

где b_0 — скалярная функция углов, k и k' — начальный и конечный импульсы мезона.

Такую же структуру имеет выражение для амплитуд превращения π -мезона в нейтральный u_{π^0} при одинаковой четности

$$u_{\pi^0} = A + B\sigma. \quad (16)$$

¹ ДАН СССР, 1951, 81, 1049. (Представлено академиком Л. Д. Ландау 25 октября 1951 г.)

¹ Если $|a| \sim |b|$.

В случае же различной четности

$$u_{\pi^0}^{(-)} = c\sigma, \quad (2)$$

где c — вектор (также зависящий от углов).

Соответствующие сечения для столкновений с водородом, усредненные по ориентациям спина нуклона, равны:

$$\sigma_{\pi} = |a|^2 + |b|^2 = \sigma_a + \sigma_b, \quad \sigma_{\pi^0} = |A|^2 + |B|^2 = \sigma_A + \sigma_B, \quad (3)$$

$$\sigma_{\pi^0} = |c|^2.$$

Рассмотрим теперь столкновение отрицательного π -мезона с дейтроном, приводящее к превращению его в нейтральный мезон. Поскольку процесс происходит только за счет взаимодействия с протоном, то амплитудой рассеяния будет

$$u_{\pi^0}^D = \int \psi^*(\rho) e^{i(k-k')\frac{\rho}{2}} u_{\pi^0} \psi_D(\rho) (d\rho), \quad (4)$$

где $\rho/2$ — радиус-вектор протона (в системе центра инерции дейтона); $\psi_D(\rho)$ — волновая функция дейтрона; $\psi(\rho)$ — волновая функция двух нейтронов, образовавшихся в результате столкновения.

Приведем выражение для сечения, усредненного по спиновым состояниям нуклонов и суммированного по состояниям двух нейтронов (последнее выполняется тем же методом, как в [1]):

$$\sigma_{\pi^0}^D = \frac{1}{2} \left(\sigma_A + \frac{2}{3} \sigma_B \right) F_+ + \frac{1}{2} \left(\sigma_A - \frac{1}{3} \sigma_B \right) F_-, \quad (5)$$

где

$$F_{\pm} = \frac{1}{2} \int \psi_D^*(\rho) \left(e^{i(k-k')\frac{\rho}{2}} \pm e^{-i(k-k')\frac{\rho}{2}} \right) \psi_D(\rho) (d\rho).$$

Если воспользоваться для ψ_D выражением

$$\psi_D = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} e^{-\alpha\rho/\rho},$$

где $\frac{\hbar^2\alpha^2}{M}$ — энергия связи дейтрона, то

$$\sigma_{\pi^0}^D = \sigma_A + \sigma_B - \left(\sigma_A + \frac{1}{3} \sigma_B \right) \frac{2\alpha}{|k-k'|} \arctg \frac{|k-k'|}{2\alpha}. \quad (6)$$

Аналогично в случае различных четностей мезонов

$$\sigma_{\pi^0}^D = \sigma_{\pi^0} \left(\frac{2}{3} F_+ + \frac{1}{3} F_- \right) \quad (7)$$

или

$$\sigma_{\pi^0}^D = \sigma_{\pi^0} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{2\alpha}{|k-k'|} \arctg \frac{|k-k'|}{2\alpha} \right). \quad (8)$$

Отметим существенное отличие случаев одинаковой и различной четности π и π^0 -мезонов. При k' , близком к k , $\sigma_{\pi^0}^D$ (6) стре-

мится к 0, ибо (1а) $B = B_0 k \times k'$, а $\left(\frac{\arctg x}{x} \right)_{x=0} = 1$, в то время как $\sigma_{\pi^0}^D = \frac{2}{3} \sigma_{\pi^0}$.

Если существует связанное состояние системы двух нейтронов (динейтрон), то возможно образование его в результате столкновения. При этом система нуклонов должна перейти из триплетного в синглетное состояние для того, чтобы, в соответствии с принципом Паули, два нейтрона могли находиться в S -состоянии.

Соответствующее сечение

$$\sigma_{\pi^0}^{D \rightarrow 2n} = \frac{1}{3} \sigma_{\pi^0} \frac{16\alpha\beta}{|k-k'|^2} \left(\arctg \frac{|k-k'|}{2(\alpha+\beta)} \right)^2, \quad (9)$$

где σ_{π^0} есть σ_B или σ_{π^0} , а $\frac{\hbar^2\beta^2}{M}$ — энергия связи динейтрона.

Рассеяние π -мезона происходит как на нейтроне, так и на протоне. Поэтому амплитуда рассеяния:

$$u_{\pi}^D = \int \psi^*(\rho) \left(u_{\pi} e^{i(k-k')\frac{\rho}{2}} + u'_{\pi} e^{-i(k-k')\frac{\rho}{2}} \right) \psi_D(\rho) (d\rho). \quad (10)$$

Здесь u'_{π} — амплитуда рассеяния на нейтроне, $\psi(\rho)$ — конечное состояние нейтрона и протона. Просуммированное по состояниям движения нейтрона и протона сечение рассеяния имеет следующий вид:

$$\sigma_{\pi}^D = \sigma_a + \sigma_b + \sigma'_a + \sigma'_b + \frac{4\alpha}{|k-k'|} \arctg \frac{|k-k'|}{2\alpha} \times$$

$$\times \left(\sqrt{\sigma_a \sigma'_a} \cos \delta_a + \frac{1}{3} \sqrt{\sigma_b \sigma'_b} \cos \delta_b \right), \quad (11)$$

где $\sigma'_a + \sigma'_b$ — сечение рассеяния на нейтроне, δ_a — разность фаз величин a и a' , аналогично δ_b .

В работе [3], посвященной аналогичному разбору рассеяния π -мезона на дейтроне, не учтено наличие двух типов рассеяния нуклонами (отвечающих амплитудам a и b).

Для упругого рассеяния:

$$\sigma_{\pi}^{D \rightarrow D} = \frac{16\alpha^2}{|k-k'|^2} \left(\arctg \frac{|k-k'|}{4\alpha} \right)^2 \left[\sigma_a + \sigma'_a + \right.$$

$$\left. + 2\sqrt{\sigma_a \sigma'_a} \cos \delta_a + \frac{2}{3} (\sigma_b + \sigma'_b + 2\sqrt{\sigma_b \sigma'_b} \cos \delta_b) \right]. \quad (12)$$

Академия наук СССР

Получено 25 октября 1951 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Берестецкий И. Померанчук. ДАН, 1951, 77, 803; (Собр. трудов, № 84). В. Берестецкий, И. Шмушкевич. ЖЭТФ, 1951, 21, 1321.
2. И. Померанчук. ДАН, 1951, 78, 249 (Собр. трудов, № 83); ЖЭТФ, 1951, 21, 1113 (Собр. трудов, № 82); G. F. Chew. Phys. Rev., 80, 196 (1950).
3. S. Fernbach, T. A. Green and K. M. Watson. Phys. Rev., 1951, 82, 980.

ОБ ИСПУСКАНИИ γ -КВАНТОВ БОЛЬШОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ БЫСТРЫХ НЕЙТРОНОВ С ПРОТОНАМИ¹

Совместно с И. М. Шмушкевичем

Фоторасщепление дейтрона хорошо исследовано как теоретически [1], так и экспериментально [2] при энергии γ -квантов до 20 Мэв. Полное поперечное сечение этого процесса с учетом поправок на нормировку волновой функции дейтрона [3] дается следующей формулой [4]

$$\sigma = 1,78 \cdot 10^{-26} \frac{(\gamma - 1)^{3/2}}{\gamma^3} \text{ см}^2, \quad (1)$$

где γ — отношение энергии кванта $\hbar\omega$ к энергии связи дейтрона ϵ . Так как при выводе этой формулы используется волновая функция дейтрона $\psi_d = N \frac{e^{-ar}}{r}$ (N — нормировочная постоянная), верная лишь вне радиуса действия ядерных сил, то (1) справедливо только при энергии γ -квантов, не превосходящей 10—15 Мэв. С ростом энергии γ -квантов в матричном элементе перехода становятся существенными малые расстояния между частицами в дейтроне, для которых приближенная ψ -функция дает явно завышенные значения ($\frac{e^{-ar}}{r} = \infty$, а точная ψ -функция должна оставаться конечной). Поэтому можно было бы ожидать, что при большой энергии γ -кванта сечение фоторасщепления дейтрона будет меньше того, которое следует из (1).

Однако опубликованные данные [5], касающиеся фоторасщепления дейтрона при энергии γ -квантов 200 и 250 Мэв, противоречат этому заключению. Измеренное при этих энергиях полное сечение реакции



оказалось в 5—6 раз больше того, которое получается из формулы (1), и скорее даже растет с энергией, а не падает (при энергии γ -кванта 200 Мэв сечение равно $(9,5 \pm 30\%) 10^{-26} \text{ см}^2$, а при энергии 250 Мэв $\sigma = (13 \pm 40\%) 10^{-26} \text{ см}^2$). Интересно поэтому оценить поперечное сечение обратного процесса, т. е. сечение испускания γ -квантов большой энергии при столкновениях нейтро-

на с протоном¹. Спектр этого излучения, кроме линии, отвечающей образованию дейтрона, будет иметь еще непрерывную часть, верхняя граница которой должна отстать от упомянутой линии на величину энергии связи дейтрона.

При помощи принципа детального равновесия нетрудно получить следующее соотношение между сечением образования дейтрона с испусканием γ -кванта и сечением фоторасщепления дейтрона:

$$\sigma(p + n \rightarrow \gamma + d) \cong \frac{3}{2} \frac{E}{Mc^2} \sigma(\gamma + d \rightarrow p + n), \quad (3)$$

где E — энергия относительного движения сталкивающихся нуклонов. Ограничиваясь только такими столкновениями, в результате которых нуклоны переходят в триплетные состояния², мы можем также определить спектр γ -квантов, испускаемых при столкновениях нейтронов с протонами, вблизи верхней границы, этого спектра. Это можно сделать при помощи тех же рассуждений, которые позволяют найти энергетическое распределение π^+ -мезонов, образующихся при столкновениях протонов с протонами [7] (при энергии π^+ -мезонов, близкой к максимально возможной).

Действительно, при испускании γ -квантов с энергией, близкой к максимально возможной, в матричном элементе перехода будет играть роль только S -волна нуклонов конечного состояния. Это обуславливается тем, что волновая функция исходного состояния нуклонов с высокой энергией очень сильно осциллирует, и поэтому в матричном элементе перехода существенно область очень малых расстояний, в которую вносит вклад только S -волна конечного состояния. Поэтому, чтобы получить сечение $d\sigma(p + n \rightarrow p' + n' + \gamma)$, отвечающее испусканию γ -кванта с энергией, близкой к максимально возможной, нужно сечение образования дейтрона $\sigma(p + n \rightarrow \gamma + d)$ умножить на элемент фазового пространства, отвечающего относительному движению нуклонов в конечном состоянии, и на отношение $|\psi_f(0)|^2 / |\psi_d(0)|^2$

$$d\sigma(p + n \rightarrow p' + n' + \gamma) \cong \frac{|\psi_f(0)|^2}{|\psi_d(0)|^2} \frac{3}{2} \frac{E}{Mc^2} \sigma(\gamma + d \rightarrow p + n) \frac{4\pi f^2 df}{(2\pi)^3}. \quad (4)$$

Здесь f — волновой вектор относительного движения нуклонов в конечном состоянии, $\psi_f(0)$ — волновая функция этого состояния при $r = 0$ и $\psi_d(0)$ — волновая функция дейтрона при $r = 0$. Вблизи верхней границы спектра зависимость сечения $d\sigma(p + n \rightarrow p' + n' + \gamma)$ от энергии испускаемого γ -кванта определяется, в основном, множителем $|\psi_f(0)|^2 / |\psi_d(0)|^2$.

¹ Поперечное сечение для испускания γ -квантов малой энергии при столкновениях быстрых нейтронов с протонами получено в (6).

² Последнее необходимо для того, чтобы можно было связать сечение процесса $p + n \rightarrow p' + n' + \gamma$ с сечением $p + n \rightarrow d + \gamma$.

¹ ДАН СССР, 1952, 87, 385. (Представлено академиком Л. Д. Ландау 25 сентября 1952 г.)

Обозначая через δ_0 фазу S -волны конечного состояния и учитывая, что $\operatorname{ctg} \delta_0 = -\alpha/f$, имеем

$$\frac{|\psi_f(0)|^2}{|\psi_d(0)|^2} = \frac{2\pi}{\alpha} \frac{\sin^2 \delta_0}{f^2} = \frac{2\pi}{\alpha(\alpha^2 + f^2)}. \quad (5)$$

Поэтому полное сечение испускания γ -квантов большой энергии, связанного с образованием дейтрона и с той частью непрерывного спектра, которая примыкает к верхней границе и отвечает переходам нуклонов в триплетные состояния, определится следующим выражением:

$$\sigma = \frac{3}{2} \frac{E}{Mc^2} \sigma(\gamma + d \rightarrow p + n) \left\{ 1 + \int \frac{|\psi_f(0)|^2}{|\psi_d(0)|^2} \frac{4\pi f^2 df}{(2\pi)^3} \right\}. \quad (6)$$

Учитывая (5) и производя интегрирование по f от нуля до такого его значения, которое соответствует энергии относительного движения $\hbar^2 f^2 / M$, равной $\sim 30 \text{ Мэв}$, найдем, что интеграл, стоящий в фигурных скобках (6), равен приблизительно единице. Используя экспериментальные данные для сечения фоторасщепления [5] (относящиеся к энергии γ -кванта, равной 200 Мэв), получим, что

$$\sigma \sim 6 \cdot 10^{-29} \text{ см}^2. \quad (7)$$

Это сечение составляет заметную долю ($\sim 10\%$) от сечения реакции $p + p \rightarrow n + p + \pi^+$. При сопоставлении этих сечений нужно, конечно, учесть, что энергия относительного движения E , равная 200 Мэв , соответствует энергии нейтронов в лабораторной системе (в которой протоны до столкновения покоятся), приблизительно равной 400 Мэв . При такой энергии протонов (точнее, при энергии 380 Мэв) сечение реакции $p + p \rightarrow p + n + \pi^+$ равно приблизительно $7 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2$ [8]. Если принять во внимание столкновения между n и p , сопровождающиеся излучением γ -квантов большой энергии с переходом нуклонов в синглетное состояние, то это еще несколько увеличит полное сечение рассматриваемого процесса.

Отметим, что, согласно [5], кривая распределения испускаемых γ -квантов должна падать с уменьшением энергии γ -квантов (так как f при этом растет). Однако при дальнейшем уменьшении энергии γ -квантов это спадание должно при некоторой энергии смениться возрастанием, так как при малой энергии γ -квантов соответствующее сечение растет с уменьшением энергии как $1/\hbar\omega$. В этом отношении спектр γ -квантов при столкновениях n с p должен отличаться от спектра π -мезонов, образующихся при столкновениях двух нуклонов.

Далее, так как даже при энергии 200 Мэв нуклоны остаются нерелятивистскими ($v/c < 1$), то основную роль как при фоторасщеплении дейтрона, так и при рассматриваемом испускании γ -квантов играют дипольные переходы. Но при испускании γ -квантов с

энергией, близкой к максимально возможной, изменение дипольного момента системы всегда имеет направление, приблизительно совпадающее с направлением первоначальной скорости сталкивающихся частиц. Поэтому интенсивность излучения вблизи границы спектра (так же как и при малых частотах [6]) под заданным углом ϑ к направлению начальной скорости должна быть пропорциональна $\sin^2 \vartheta$. При этом излучение должно быть поляризовано так же, как излучение, испускаемое линейным осциллятором, колеблющимся вдоль оси, имеющей направление начальной скорости сталкивающихся частиц.

Академия наук СССР

Получено 2 августа 1952 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. A. Bethe, R. Peterls. Proc. Roy. Soc., 1935, A 149, 176.
2. G. R. Bishop, C. H. Collie et al. Phys. Rev., 1950, 80, 211; в этой работе имеются ссылки на предыдущие экспериментальные работы по фоторасщеплению дейтрона.
3. Я. А. Смородинский. ДАН, 1948, 60, 217.
4. А. И. Ахиезер, И. Я. Померанчук. Некоторые вопросы теории ядра, 1950.
5. W. S. Gilbert, J. W. Rose. Bull. Amer. Phys. Soc., 1951, 26, N 8, 18.
6. И. Я. Померанчук, И. М. Шмушкевич. ДАН, 1949, 64, 499 (Собр. трудов, № 80).
7. K. Brueckner. Phys. Rev., 1951, 82, 598; K. M. Watson, K. A. Brueckner. Phys. Rev., 1951, 83, 1.
8. S. Passman, M. M. Block, W. W. Havens. Phys. Rev., 1951, 83, 167.

ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РАССЕЯНИЯ π-МЕЗОНОВ НА ДЕЙТРОНАХ¹

Совместно с Б. Л. Иоффе и А. П. Рудиком

Рассмотрим упругое рассеяние π-мезонов на дейтронах на угол 0. Соответствующие этому процессу дисперсионные соотношения существенным образом отличаются от дисперсионных соотношений для рассеяния π-мезонов на свободных нуклонах: во-первых, дисперсионные соотношения зависят от поляризации дейтронов; во-вторых, в случае пренебрежения кулоновским взаимодействием имеется лишь одно дисперсионное соотношение для суммы амплитуд рассеяния положительных и отрицательных π-мезонов.

Обозначим через $D_m(\omega)$ и $A_m(\omega)$ действительную и мнимую часть амплитуды рассеяния π-мезонов с энергией ω на дейтронах, имеющих проекцию спина на направление движения π-мезонов, равную m . Воспользовавшись связью мнимой части амплитуды рассеяния на угол нуль с полным сечением $A_m(\omega) = (k/4\pi) \sigma_m(\omega)$ (где $k^2 = \omega^2 - \mu^2$, μ — масса мезона) и применяя обычную методику получения дисперсионных соотношений [1, 2], имеем

$$D_m(\omega) - D_m(\mu) = \frac{2k^2}{\pi} \int_0^\mu \frac{\omega' A_m(\omega') d\omega'}{k'^2(\omega'^2 - \omega^2)} + \frac{k^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\omega' \sigma_m(\omega') d\omega'}{(\omega'^2 - \omega^2) k'}. \quad (1)$$

Для определения вклада от области $0 \leq \omega' \leq \mu$ используем следующее выражение для $A_m(\omega')$, легко получающееся из [1]:

$$A_m(\omega') = \pi \sum_f |M_m(\omega', \mathbf{f})|^2 \delta \left[\omega' - \varepsilon_0 - \frac{k'^2}{4M} - \frac{f^2}{M} \right], \quad (2)$$

где $M_m(\omega', \mathbf{f})$ — матричный элемент, соответствующий захвату π-мезона дейтроном в состоянии m с образованием двух тождественных нуклонов с импульсом относительного движения, равным \mathbf{f}

$$M_m(\omega', \mathbf{f}) = (\sqrt{2} g/M) \langle \Phi_m^* \sigma_1 \mathbf{k}' F_i(\mathbf{k}', \rho) \Psi_f \rangle. \quad (2')$$

Здесь Φ_m — волновая функция дейтрона, Ψ_f — волновая функция двух тождественных нуклонов в конечном состоянии, g — константа связи π-мезонов с нуклонами, M — масса нуклона, ε_0 — энергия связи дейтрона.

Функция $F_i(\mathbf{k}', \rho)$ равна $\sin(\mathbf{k}'\rho/2)$ в случае триплетного состояния двух образующихся нуклонов и $\cos(\mathbf{k}'\rho/2)$ — в случае синглетного состояния. Проводя интегрирование по ω' , имеем

$$\frac{2k^2}{\pi} \int_0^\mu \frac{\omega' A_m(\omega') d\omega'}{k'^2(\omega'^2 - \omega^2)} = 2k^2 \sum_f \frac{\mu^2/4M - (f^2/M + \varepsilon_0)}{k^2(\omega^2 - \omega^2)} |M_m|^2. \quad (3)$$

Вообще говоря, $\tilde{\omega}$ есть функция от \mathbf{f} , определяемая законами сохранения. Однако, учитывая то, что матричный элемент существенно отличается от нуля лишь в области $f \sim k/2$, мы будем в дальнейшем считать $\tilde{\omega} \approx \mu^2/2M - \varepsilon_0$. Далее, так как малым изменениям ω' соответствуют большие изменения f , распространим суммирование по \mathbf{f} до бесконечности. Воспользовавшись полнотой системы функций Ψ_f , имеем

$$\sum_f |M_m|^2 = \frac{2g^2}{M^2} \tilde{k}^2 \left\{ \delta_{m_1} \int \varphi_0^2 F_i^2 d\rho + \delta_{m_0} \int \varphi_0^2 F_s^2 d\rho \right\}, \quad (4)$$

где $\varphi_0(\rho)$ — координатная часть волновой функции дейтрона.

Вычисление второго члена в выражении (3) проводится следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_f (f^2/M + \varepsilon_0) |M_m|^2 &= \frac{2g^2}{M^2} \sum_f \langle \Phi_m^* \sigma_1 \mathbf{k} F_i \Psi_f \rangle \times \\ &\times \langle \Psi_f^* (H \sigma_1 \mathbf{k} F_i - \sigma_1 \mathbf{k} F_i H) \Phi_m \rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

где H — гамильтониан взаимодействия двух нуклонов. Общий его вид (без учета тензорных сил) следующий:

$$\begin{aligned} H &= f^2/M + {}^1/4 U_t(\rho) (\sigma_1 \sigma_2 + 3) - {}^1/4 U_s(\rho) (\sigma_1 \sigma_2 - 1) + \\ &+ \{ {}^1/4 \tilde{U}_t(\rho) (\sigma_1 \sigma_2 + 3) - {}^1/4 \tilde{U}_s(\rho) (\sigma_1 \sigma_2 - 1) \} P_{12}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь f^2/M — оператор кинетической энергии, U_t и U_s — потенциальные энергии в триплетном и синглетном состояниях, \tilde{U}_t и \tilde{U}_s — обменные энергии, P_{12} — оператор перестановки частиц. Вычисление с гамильтонианом (6) суммы (5) и подстановка результатов в (1) приводит к следующим дисперсионным соотношениям¹:

для дейтронов, поляризованных параллельно (антипараллельно) падающему пучку

$$\begin{aligned} D_{\pm 1}(\omega) - D_{\pm 1}(\mu) &= g^2 \left(\frac{\mu}{2M} \right)^2 \frac{2}{M} \frac{k^2}{\omega^2 - \tilde{\omega}^2} \times \\ &\times \left[1 + \frac{8M}{\mu^2} \int \varphi_0^2 \sin^2 \frac{\tilde{k}\rho}{2} \tilde{U}_t d\rho \right] + \frac{k^2}{2\pi^2} \int_\mu^\infty \frac{\omega' \sigma_{\pm 1}(\omega') d\omega'}{k'(\omega'^2 - \omega^2)}, \end{aligned} \quad (7')$$

¹ Обратим внимание на то, что при получении (7') и (7'') нами не был использован конкретный вид координатной части волновой функции дейтрона.

О ПЕРИФЕРИЙНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ¹

Совместно с Л. В. Окунем

для дейтронов, поляризованных перпендикулярно к падающему пучку

$$D_0(\omega) - D_0(\mu) = g^2 \left(\frac{\mu}{2M} \right)^2 \frac{2}{M} \frac{k^2}{\omega^2 - \tilde{\omega}^2} \left[1 + \frac{4M}{\mu^2} \times \right. \\ \left. \times \int \varphi_0^2 \cos^2 \frac{\tilde{k}\rho}{2} \{U_s - U_s + U_t + U_t\} d\rho \right] + \frac{k^2}{2\pi^2} \int_{\mu}^{\infty} \frac{\omega' \sigma_0(\omega') d\omega'}{k'(\omega'^2 - \omega^2)}. \quad (7'')$$

Полученные дисперсионные соотношения для рассеяния π -мезонов на дейтронах, помимо константы g , содержат некоторые эффективные значения потенциальной энергии взаимодействия двух нуклонов в различных состояниях и от этих значений существенно зависит величина полюсного члена для дейтронов, поляризованных перпендикулярно к падающему пучку.

Авторы выражают признательность акад. Л. Д. Ландау за ценные обсуждения.

Академия наук СССР

Получено 26 июня 1956 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Л. Goldberger. Phys. Rev., 1955, 99, 979.
2. В. Л. Иоффе. ЖЭТФ, 1956, 31, 853.

Периферийное взаимодействие сильно взаимодействующих элементарных частиц феноменологически адекватным образом описывается современной мезонной теорией. Для выделения вклада периферийного взаимодействия предлагается определять из экспериментальных данных амплитуды тех или иных процессов, соответствующие большим орбитальным моментам, так как большие орбитальные моменты отвечают большим прицельным параметрам столкновения. Сравнение этих найденных из опыта амплитуд с теоретически вычисленными амплитудами позволяет найти ряд важных величин, характеризующих сильные взаимодействия элементарных частиц; к этим величинам относятся перенормированные константы взаимодействия π -мезонов с нуклонами и гиперонами, перенормированные константы взаимодействия двух π -мезонов, π -мезона и K -мезона и др.

1. Введение

Исследование существующих мезонных теорий показало, что «наивное» распространение этих теорий на очень малые области пространства ($r \ll 10^{-13}$ см) приводит к серьезным противоречиям [1]. Возможно, что для разрешения этих противоречий понадобится пересмотр основ квантовой механики и (или) теории относительности. Тем не менее, есть все основания думать, что существующие теоретические представления вполне достаточны для описания физических явлений, происходящих на больших расстояниях ($r > 10^{-13}$ см). Анализу сильных взаимодействий, происходящих на таких больших расстояниях, и посвящена данная работа.

При столкновении двух частиц (например двух нуклонов), разделенных расстоянием $r > 1/\mu$, где μ — масса π -мезона (мы пользуемся системой единиц, в которой $\hbar = c = 1$), взаимодействие между ними определяется свойствами мезонных облаков, окружающих эти частицы, и практически не зависит от свойств внутренних областей, которые окружены этими облаками. Нуклоны как бы касаются друг друга своими периферийными областями. Большое число физиков-теоретиков понимало (см., например, [2]), что современная мезонная теория в состоянии феномено-

¹ ЖЭТФ, 1959, 36, 300; Nucl. Phys., 1959, 10, 492.

логически описать это периферийное взаимодействие. Однако для того чтобы воспользоваться этим обстоятельством, необходимо уметь выделить вклад периферийного взаимодействия. Полученные до сих пор экспериментальные данные о взаимодействиях элементарных частиц лишь в слабой степени определяются подающимся расчету периферийным взаимодействием. Исследованные до сих пор явления существенным образом зависели от характера взаимодействия на малых расстояниях, которое в настоящее время не может быть рассчитано.

Недавно рядом авторов (Чу, Моравчик, Тейлор, Урецкий, Цифра и др. [3]) был предложен метод, позволяющий выделить вклад, обусловленный обменом одним виртуальным мезоном. По существу метод Чу заключается в том, что функция, описывающая угловое распределение исследуемого процесса, экстраполируется в нефизическую область значений $|\cos \theta| > 1$. Можно показать (и это будет видно из дальнейшего), что при некотором значении $|\cos \theta| > 1$ экстраполированное угловое распределение определяется одномезонной амплитудой, пропорциональной g^2 , где g — перенормированная константа взаимодействия π -мезона с нуклоном. Сравнивая значения, полученные путем экстраполяции экспериментальных данных по $n-p$ -рассеянию и фоторождению π -мезонов, с соответствующими теоретическими величинами, Чу и др. смогли определить величину g .

Ниже предлагается другой метод, который также позволяет анализировать экспериментальные данные, выделить вклад периферийного взаимодействия. Этот метод основан на том хорошо известном факте, что две частицы, имеющие большой относительный орбитальный момент l , эффективно взаимодействуют между собой на расстоянии $\sim l\lambda$, где λ — длина волны частицы, так как проникновению на меньшие расстояния препятствует центробежный барьер. Отсюда следует, что для исследования периферийного взаимодействия нужно выделить из экспериментальных данных, относящихся к тому или иному процессу, ту часть, которая определяет амплитуду процесса при достаточно больших значениях l .

Возможность выделить и теоретически описать периферийное взаимодействие основана на том, что две частицы или системы частиц, разделенные достаточно большими расстояниями, эффективно обмениваются между собой минимально возможным числом мезонов. Так, рассеяние π -мезона нуклоном на больших расстояниях определяется обменом двумя π -мезонами, рассеяние нуклона на нуклоне определяется обменом одним π -мезоном и т. д. Это позволяет, рассматривая, например, рассеяние нуклона на нуклоне, описывать его при достаточно больших l в рамках одномезонного приближения, пренебрегая обменом двумя, тремя и большим числом π -мезонов, а также вкладом других мезонов и барионных пар, учитывая его в перенормированной константе взаимодействия. Подчеркнем, что ограничиться в этом случае одномезонным членом можно, несмотря на то, что константа взаимодействия значи-

тельно больше единицы ($g^2/4\pi \sim 15$). Параметром разложения, как будет видно ниже, служит величина, пропорциональная $(g^2/4\pi) e^{-\mu l}$, которая при достаточно больших l значительно меньше единицы. В некотором весьма академическом смысле одномезонное приближение при больших l является даже более точным, чем однофотонное приближение в электродинамике, так как $e^2/4\pi = \text{const}$, а $(g^2/4\pi) e^{-\mu l} \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$.

Предлагаемый нами метод анализа по орбитальным моментам позволяет не только находить величину константы g или ей подобных констант, но устанавливать соотношения между различными физическими величинами (например, фазами рассеяния), характеризующими тот или иной процесс.

В разделе 2 с помощью простой модели дано обоснование предлагаемого метода. Разделы 3—6 посвящены рассмотрению тех экспериментов, в которых могло бы быть изучено периферийное взаимодействие элементарных частиц. В разделе 3 рассмотрены опыты с участием нуклонов и π -мезонов. В разделе 4 рассмотрены опыты с участием странных частиц. Раздел 5 посвящен взаимодействию фотонов с сильно взаимодействующими частицами. В разделе 6 кратко рассмотрены опыты с участием лептонов. Раздел 7 посвящен сопоставлению тех данных, которые могли бы быть получены из различных опытов.

2. Модельное рассмотрение

Для пояснения предлагаемого нами метода рассмотрим взаимодействие двух одинаковых скалярных частиц, обменивающихся между собой нейтральными скалярными мезонами. Мы не будем учитывать очевидную симметрию амплитуды, обусловленную тождественностью частиц. Такой весьма далекий от реальности пример позволит нам не рассматривать детали, связанные со спиновой и изотопической зависимостью амплитуды.

Выясним, как ведет себя при больших l вклад одномезонного приближения по сравнению с двухмезонным. Выясним также, насколько существенным в одномезонном приближении является учет зависимости вершинных частей и гриновой функции виртуального мезона от q^2 .

Амплитуда, соответствующая обмену одним виртуальным мезоном (диаграмма 1), равна

$$a^{(1)} = \mu f^{(1)}(k^2) \frac{d(q^2) \alpha^2(q^2)}{q^2 - \mu^2}.$$

Здесь \mathbf{k} — импульс одной из сталкивающихся частиц в системе центра инерции; $q^2 = -|\mathbf{q}|^2 = -2k^2(1 - \cos \theta)$, θ — угол рассеяния; μ — масса виртуального мезона. Безразмерная функция $f^{(1)}$, пропорциональная квадрату перенормированной константы взаимодействия, зависит от k^2 и не зависит от q .

Ограничиваясь одним виртуальным мезоном, которым обмениваются две частицы, мы вместе с тем учитываем все виртуальные цепочки, дающие вклад в гринову функцию виртуального мезона и в каждую из вершинных частей. Это обстоятельство отражено в выражении для $a^{(1)}$ множителями $d(q^2)$ и $\alpha(q^2)$, соответственно. Заметим, что $\alpha(\mu^2) = d(\mu^2) = 1$. На диаграмме 1 и на последующих диаграммах блоки, содержащие все возможные виртуальные процессы, обозначены кружками. В дальнейшем мы будем называть такие блоки узлами.

Вклад одномезонной диаграммы 1 в амплитуду рассеяния в состоянии с орбитальным моментом, равным l , легко получить, если воспользоваться хорошо известным разложением в ряд по полиномам Лежандра

$$a^{(1)} = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \eta_l^{(1)} P_l(\cos \theta),$$

$$\eta_l^{(1)} = \exp(2i\delta_l^{(1)}) - 1,$$

из которого следует

$$\eta_l^{(1)} = \frac{i\mu f^{(1)}(k^2)}{2k} \int_0^\pi \frac{P_l(\cos \theta) d(\cos \theta)}{1 + \mu^2/2k^2 - \cos \theta} = \frac{i\mu f^{(1)}(k^2)}{k} Q_l \left(1 + \frac{\mu^2}{2k^2} \right),$$

где Q_l — хорошо известные полиномы Лежандра второго рода. (Аналитическое выражение Q_l см. [4]. Таблицы Q_l см. [5].) Заметим, что при $l \gg k/\mu \gg 1$

$$Q_l \left(1 + \frac{\mu^2}{2k^2} \right) \sim \sqrt{\pi k/2\mu l} e^{-\mu l/k}.$$

При $k/\mu \ll 1$ вместо экспоненциальной зависимости имеет место степенная

$$Q_l \left(1 + \frac{\mu^2}{2k^2} \right) \sim \frac{l! 2^{l+1}}{(2l+1)!} \left(\frac{k}{\mu} \right)^{2l+2}.$$

Оценим теперь вклад при больших l двухмезонной амплитуды, соответствующей диаграмме 2. Считая, что при больших l основную роль играют особенности, связанные с мезонными функциями Грина, пренебрежем зависимостью остальных членов от p и q и вынесем эти члены за знак интеграла. В результате имеем

$$a^{(2)} = \frac{f^{(2)}(k^2)}{\mu} \int \frac{d^4 p}{[(p-q/2)^2 - \mu^2][(p+q/2)^2 - \mu^2]},$$

где $f^{(2)}$ — безразмерная функция от k^2 . Объединяя знаменатели и производя замену переменной интегрирования, получаем

$$a^{(2)} = \frac{f^{(2)}(k^2)}{\mu} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p}{[p^2 + q^2(1-x)x - \mu^2]^2}.$$

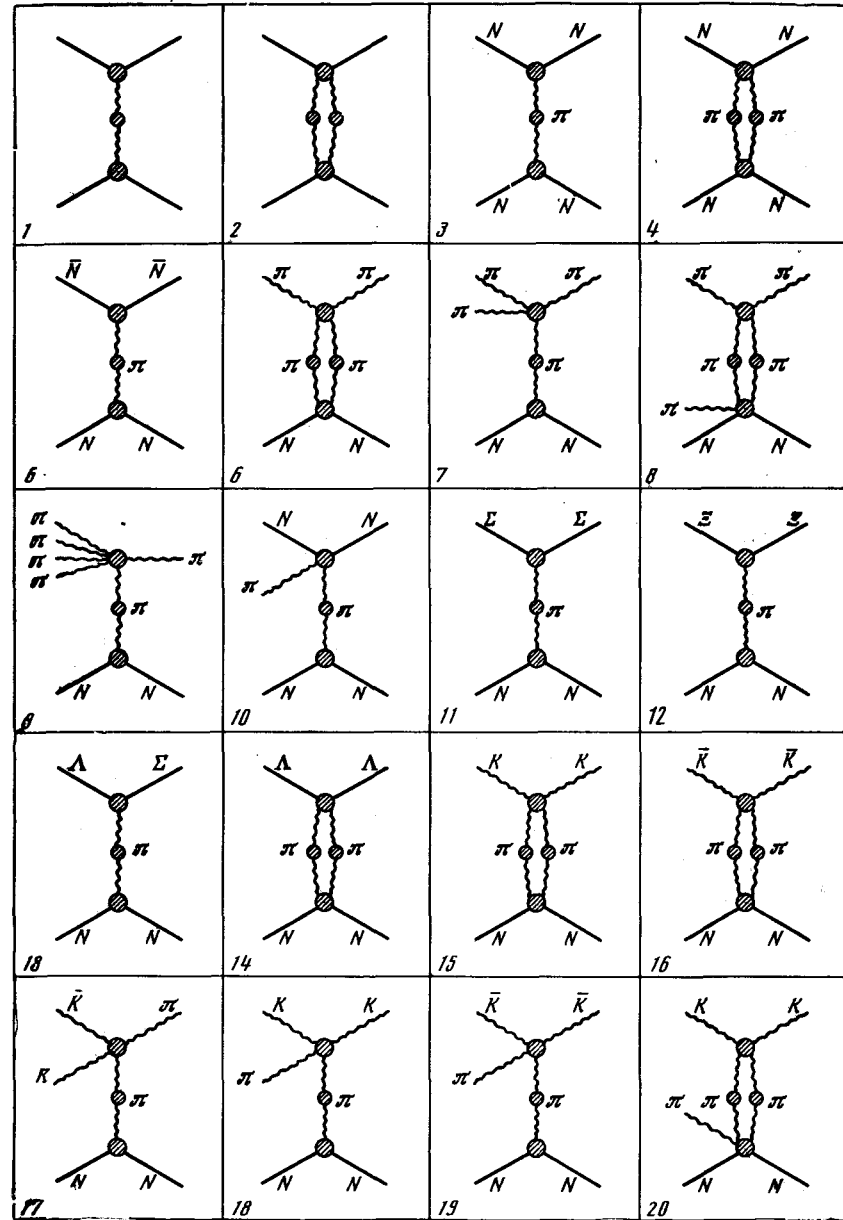


Рис. 1—20

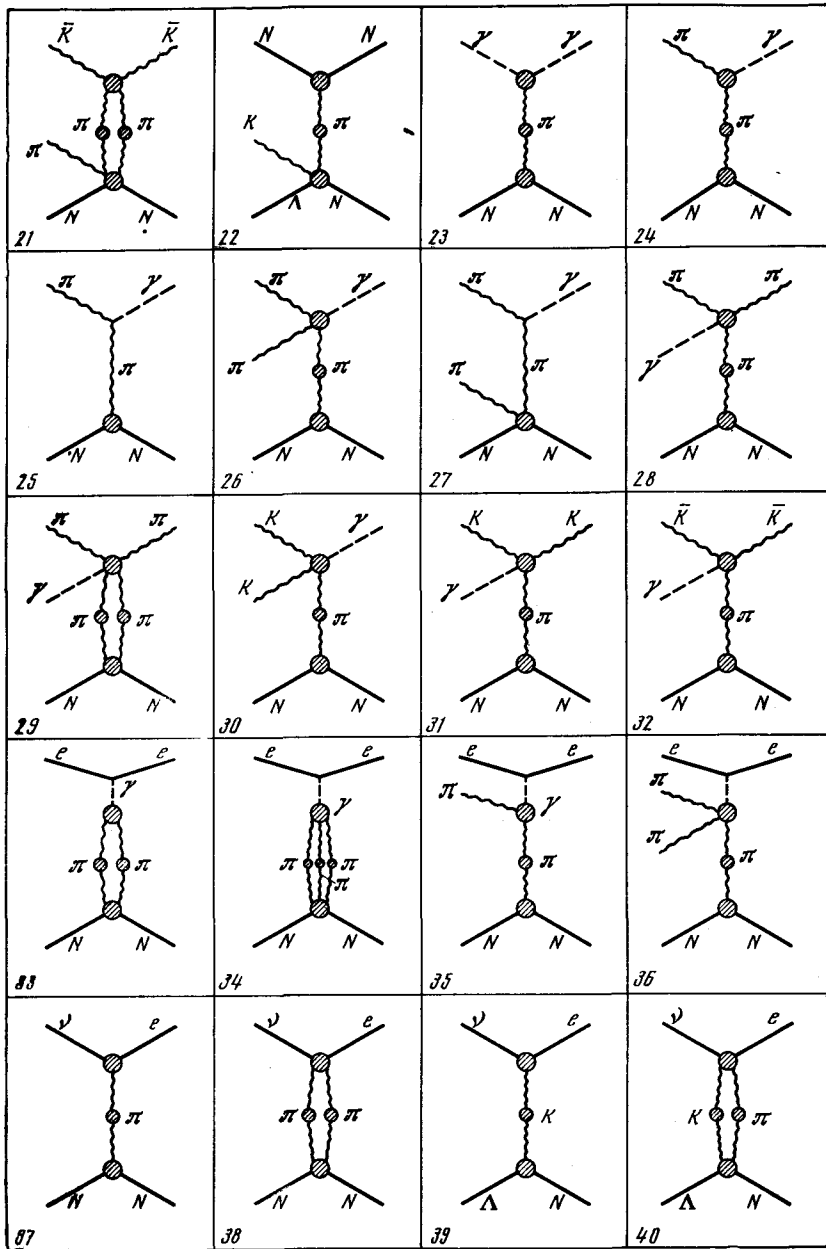


Рис. 21—40

Заменим теперь в интеграле по d^4p интегрирование по действительной оси p^0 интегрированием по мнимой оси (см. по этому поводу [6, 7]). В этом случае знаменатель становится знакопостоянным, и мы имеем

$$\eta_l^{(2)} = -\frac{j^{(2)}(k^2)}{8\mu^2 k} \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)x} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \mu} Q_l \left(1 + \frac{\mu^2 + t^2}{2k^2(1-x)x} \right) t^2 dt^2,$$

где $t^2 = |\mathbf{p}|^2 + p_0^2$.

При $l \gg k/\mu \gg 1$ воспользуемся асимптотическим видом функции Q_l и, выполнив интегрирование, получим

$$\eta_l^{(2)} \approx -(\pi k j^{(2)}(k^2) / 4\mu l^2) e^{-2\mu l/k}.$$

Таким образом, мы видим, что двухмезонная амплитуда при больших l экспоненциально мала по сравнению с одномезонной амплитудой. Более подробный анализ двухмезонной амплитуды при больших l будет дан в другой работе. Здесь же мы хотели бы только отметить, что при вычислении вклада при больших l сходимость интегралов по импульсам виртуальных частиц всегда гарантируется наличием в подынтегральном выражении $P_l(\cos \theta)$. Так, в рассмотренных выше интегралах $t_{\text{эф}}^2 \sim \mu k/l$.

Очевидно, что вклад трехмезонной амплитуды при больших l ($l \gg k/\mu \gg 1$) должен убывать, как $\exp\{-3\mu l/k\}$. В случае $k/\mu < 1$ вместо экспоненциальной малости возникает малость типа 2^{-2l-2} для двухмезонной амплитуды и 3^{-2l-2} — для трехмезонной.

Вернемся теперь к одномезонной амплитуде. При выводе формулы для одномезонной амплитуды мы считали $a(q^2) = 1$ и $d(q^2) = 1$, пользуясь тем, что в интеграле существенны значения $q^2 \sim \mu^2$. Покажем теперь законность этого приближения. Воспользовавшись спектральным разложением гриновой функции [8] и вершинных частей [9], имеем

$$\frac{\alpha^2(q^2) d(q^2)}{q^2 - \mu^2} = \frac{1}{q^2 - \mu^2} (1 + S_1(q^2))(1 + S_2(q^2))^2,$$

где

$$S_i = (q^2 - \mu^2) \int_m^\infty \frac{\rho_i(x^2) dx^2}{q^2 - x^2}.$$

Ограничиваясь членами, линейными по S_i , получим

$$\eta_l^{(1)} \approx \frac{i\mu j^{(1)}(k^2)}{k} \left\{ Q_l \left(1 + \frac{\mu^2}{2k^2} \right) + \int_m^\infty Q_l \left(1 + \frac{x^2}{2k^2} \right) (\rho_1(x^2) + 2\rho_2(x^2)) dx^2 + \dots \right\}.$$

Величина m равна минимальной сумме масс частиц, в которые может перейти мезон. Для π -мезона, например, $m = 3m_\pi$, для K -

мезона $m = 2m_\pi + m_K$. Для скалярного мезона мы имели бы $m = 2\mu$. Поэтому при $l \gg k/\mu \gg 1$ поправочные члены, пропорциональные $e^{-2\mu l/k}$, экспоненциально малы по сравнению с $Q_l(1 + \mu^2/2k^2) \sim e^{-\mu l/k}$. Вклад, обусловленный множителями $\alpha^2(q^2)$ и $d(q^2)$, оказывается того же порядка, что и вклад, обусловленный обменом двумя и большим числом мезонов. В случае виртуальных π -мезонов этот вклад того же порядка, что и вклад, обусловленный обменом тремя π -мезонами. Легко убедиться, что учет членов второго и третьего порядка по S_i не изменит этого заключения.

Учет изотопических и спиновых переменных, существенных при рассмотрении конкретных процессов, несколько модифицирует, но не изменит по существу полученных выше результатов.

3. Взаимодействие π -мезонов и нуклонов

Рассеяние нуклонов нуклонами. Подробное рассмотрение этого вопроса будет изложено в другом месте¹. Поэтому ниже мы остановимся только на основных вопросах.

Периферическое взаимодействие нуклонов, как ясно из предыдущего, описывается одномезонной амплитудой

$$M = 4\pi g^2 \left\{ (\bar{u}_1' \gamma_5 \tau_\alpha u_1) (\bar{u}_2' \gamma_5 \tau_\alpha u_2) \frac{\alpha^2(q^2) d(q^2)}{q^2 - \mu^2} - (\bar{u}_2' \gamma_5 \tau_\alpha u_1) (\bar{u}_1' \gamma_5 \tau_\alpha u_2) \frac{\alpha^2(p^2) d(p^2)}{p^2 - \mu^2} \right\},$$

соответствующей диаграмме 3. Здесь g — перенормированная константа взаимодействия π -мезона с нуклоном, $q = k - k'$, $p = k + k'$; k и k' — 4-импульсы одной из частиц соответственно до и после рассеяния. Множители α и d характеризуют отличие вершинной части и мезонной функции Грина при $q^2 < 0$ и $p^2 < 0$ от их значений при $q^2 = p^2 = \mu^2$.

С помощью написанного выше выражения для M мы можем вычислить амплитуды рассеяния с данным значением полного момента, аналогично тому, как это было сделано выше для рассеяния скалярных частиц. Оценки, проведенные с помощью различных моделей, показывают, что при энергии в несколько десятков $M\text{эв}$ F -фаза рассеяния нуклона нуклоном должна хорошо описываться полученной таким образом формулой.

Как известно [11], в нерелятивистском приближении амплитуда рассеяния нуклона нуклоном может быть представлена в виде

$$\alpha + \beta(\sigma_1 + \sigma_2) \cdot n + \gamma(\sigma_1 n)(\sigma_2 n) + \delta(\sigma_1 m)(\sigma_2 m) + \varepsilon(\sigma_1 l)(\sigma_2 l),$$

где $\alpha, \dots, \varepsilon$ — скалярные функции угла рассеяния, а n, l, m — орты, направленные соответственно по $[kk']$, $k - k'$, $k + k'$.

¹ Вычисление фаз нуклон-нуклонного рассеяния с помощью одномезонного потенциала см. также в работе [10].

Амплитуда M содержит все члены этого выражения, кроме второго: в одномезонном приближении $\beta = 0$. Это означает, что спин-орбитальное взаимодействие не содержится в одномезонном приближении и в эффективном потенциале [12] нуклон-нуклонного взаимодействия должно спадать с расстоянием по крайней мере как $\exp(-2\mu r)$.

Если экспериментально выделить член, пропорциональный β , и определить его вклад в амплитуды при больших l , то это позволит найти величину двухмезонной диаграммы 4. Заметим, что в одномезонном приближении спиновая зависимость амплитуды рассеяния нуклона нуклоном сложнее, чем спиновая зависимость рассеяния антинуклона нуклоном или гиперона нуклоном, так как в последних случаях отсутствуют обменные силы и связанная с ними антисимметризация амплитуды.

Рассеяние нуклонов нуклонами позволяет установить величину g ; при этом, имея возможность вычислить различные фазы и сравнивая их с данными опыта, можно установить надежность результатов. Таким образом, в предлагаемом методе имеется критерий, позволяющий в каждом конкретном случае оценивать точность результатов, не прибегая к дополнительным оценкам.

Рассеяние антинуклонов нуклонами. Несмотря на различие в величине сечений и характере взаимодействия нуклона с нуклоном и антинуклона с нуклоном фазы рассеяния антинуклонов нуклонами при больших l также должны описываться одномезонной диаграммой (диаграмма 5). При этом фазы рассеяния $\bar{p} + n \rightarrow \bar{p} + n$ и $\bar{n} + p \rightarrow \bar{n} + p$ должны равняться с обратным знаком фазам рассеяния $p + p \rightarrow p + p$ (или $n + n \rightarrow n + n$) в тех состояниях, в которых эти последние процессы могут иметь место. Фазы взаимодействий $\bar{p} - p$ и $\bar{n} - n$ должны равняться с обратным знаком фазам $p - n$ взаимодействия, причем вновь должна быть принята во внимание дополнительная симметрия системы двух нуклонов, отсутствующая в системе нуклон — антинуклон. Отметим, что одномезонная амплитуда рассеяния антинуклона имеет только один член типа $\tau_1 \tau_2 (\sigma_1 l)(\sigma_2 l)$. Отсюда, в частности, следует, что между амплитудами с $T = 0$ и $T = 1$ при больших l существует соотношение

$$a_{T=0} = -3a_{T=1}.$$

Дифракционное рассеяние, обусловленное неупругими процессами при взаимодействии нуклона с антинуклоном, может сильно затруднить выделение вклада одномезонной амплитуды.

Рассеяние π -мезонов нуклонами. Рассеяние π -мезонов нуклонами при больших l будет определяться двухмезонной диаграммой 6, так как соответствующая одномезонная диаграмма запрещена (в силу псевдоскалярности π -мезона невозможен переход $\pi \rightarrow 2\pi$).

Как показали Ли и Янг [13], переход в вакууме любого четного числа π -мезонов в любое нечетное число π -мезонов запрещен в силу инвариантности лагранжиана сильных взаимодействий относительно комбинированного преобразования: вращения в пространстве изотопического спина и зарядового сопряжения. Поэтому в рассеяние π -мезонов нуклонами могут дать вклад только диаграммы, описывающие обмен четным числом π -мезонов.

Как видно из диаграммы 6, фазы πN -рассеяния при больших l определяются вкладом двух узлов: узлом рассеяния π -мезона на π -мезоне и узлом рассеяния π -мезона на нуклоне, связанных двумя виртуальными π -мезонами.

Образование π -мезонов при столкновении π -мезонов и нуклонов с нуклонами. В процессе рождения мезонов мезонами ($\pi + N \rightarrow N + 2\pi$) узел рассеяния π -мезона π -мезоном, упомянутый выше, входит в одномезонную диаграмму 7. В этом случае анализ по угловым моментам сложнее, так как в конечном состоянии имеется три частицы. Каждому данному моменту j_0 сталкивающихся π -мезона и нуклона отвечает набор моментов j_1 и j_2 , характеризующих относительное движение π -мезонов и движение нуклона, соответственно. Диаграмма 7, как легко видеть, определяет амплитуды перехода, соответствующие большим значениям j_2 . Поэтому экспериментальное определение этих амплитуд позволило бы найти величину рассеяния π -мезона π -мезоном. Изучая при этом зависимость амплитуды от j_1 — относительного момента двух π -мезонов, можно установить, в каком орбитальном состоянии эти π -мезоны взаимодействуют сильнее всего. Выполнение такой программы потребует, однако, накопления большого числа экспериментальных точек. Возможно, что более простым явится анализ по моментам j_2 тех случаев, когда два π -мезона вылетают с примерно равными импульсами.

В зависимости от того, какое значение j_1 является преобладающим, вылетающие π -мезоны будут находиться в изотопическом состоянии $T = 1$ (нечетные j_1) или $T = 0,2$ (четные j_1). Другой диаграммой, вклад которой при больших l мал по сравнению с вкладом диаграммы 7, но велик по сравнению с остальными диаграммами, является двухмезонная диаграмма 8. Для этой диаграммы большим моментом, по которому следует проводить анализ, является, как легко видеть, момент одного из π -мезонов (рассеянного) относительно системы нуклон + второй π -мезон (рожденный).

Аналогичным образом могут быть проанализированы процессы рождения большого числа π -мезонов. Так например, процесс $\pi + N \rightarrow 4\pi + N$ (диаграмма 9) может дать сведения об узле, содержащем 6 мезонных концов.

Амплитуда образования при столкновении нуклонов $N + N \rightarrow N + N + \pi$ при больших моментах относительного движения двух нуклонов в конечном состоянии определяется одно-

мезонной диаграммой 10, содержащей кроме вершины $NN\pi$ также вершину рассеяния π -мезона нуклоном.

Заметим, что при исследовании того или иного неупругого процесса анализ по орбитальным моментам следует делать достаточно далеко от порога этого процесса, так как вблизи порога импульс, передаваемый нуклону, не может быть малым.

4. Взаимодействие странных частиц с π -мезонами и нуклонами

Переходя к процессам с участием странных частиц, следует подчеркнуть, что предлагаемый нами анализ сильно затрудняется для таких процессов, в которых существен обмен K -мезонами. Это, в основном, связано с тем, что масса K -мезона более чем в три раза превышает массу π -мезона. Это обстоятельство затрудняет отделение вклада K -мезонов от вклада таких диаграмм, в которых параллельно виртуальной K -мезонной линии идут одна или две π -мезонных линии. Поэтому ниже мы будем рассматривать только такие процессы, для которых амплитуды, отвечающие большим l , обусловлены обменом только π -мезонами.

Рассеяние гиперонов нуклонами. Диаграммы 11 и 12 отвечают рассеянию на нуклонах при больших моментах Σ - и Ξ -гиперонов, соответственно. Диаграмма 13 отвечает процессу $\Sigma + N \rightarrow \Lambda + N$, а диаграмма 14 — процессу рассеяния на нуклонах Λ -гиперонов. В последнем случае одномезонная диаграмма запрещена, так как вершина $\Lambda\Lambda\pi$ изотопически неинвариантна. Для всех этих процессов можно установить соотношения, аналогичные тем, которые получаются для рассеяния нуклонов и антинуклонов. Амплитуды рассеяния антигиперонов на нуклонах при больших l просто связаны с амплитудами рассеяния гиперонов. Отметим, что вид амплитуды процесса $\Sigma + N \rightarrow \Lambda + N$ определяется относительной четностью Σ - и Λ -гиперонов.

Рассеяние K -мезонов нуклонами. В рассеянии K -мезонов, как и в случае рассеяния π -мезонов, одномезонная диаграмма оказывается запрещенной в силу псевдоскалярности π -мезонов, и при больших моментах определяющей является двухмезонная диаграмма 15. Эта диаграмма аналогична диаграмме 6 и отличается от последней тем, что в ней вместо узла π — π -рассеяния имеется узел рассеяния K -мезона на π -мезоне. Поэтому представляет большой интерес прямое сравнение фаз при больших l процессов $\pi + N \rightarrow \pi + N$ и $K + N \rightarrow K + N$. Заметим, что при больших l фазы рассеяния K -мезона на нуклоне (диаграмма 16) также определяются узлом πKK .

Образование K -мезонов и образование π -мезонов K -мезонами. Узел взаимодействия πKK , имеющийся в диаграмме рассеяния K -мезонов нуклонами, входит также в ряд других диаграмм. В частности, он имеется, хотя и при

других значениях импульсов входящих частиц, в диаграмме 17, описывающей процесс $\pi + N \rightarrow K + \bar{K} + N$. Анализ этого последнего процесса следует проводить аналогично анализу реакции $\pi + N \rightarrow \pi + \pi + N$, рассматривая относительное движение K -мезонов, с одной стороны, и движение их центра тяжести относительно нуклона, с другой. Большие моменты этого последнего движения обусловлены диаграммой 17. Тот же узел $\pi\pi KK$ содержится в одномезонных диаграммах 18 и 19, описывающих рождение π -мезонов K -мезонами и \bar{K} -мезонами: $K + N \rightarrow K + \pi + N$ и $\bar{K} + N \rightarrow \bar{K} + \pi + N$. Соответствующие двухмезонные диаграммы 20 и 21 аналогичны диаграмме 5 и отличаются от нее верхним узлом ($\pi\pi KK$ вместо $\pi\pi\pi\pi$). Рождение K -мезонов при столкновении нуклонов $N + N \rightarrow N + \Lambda (\Sigma) + K$ описывается при больших l диаграммой 22, аналогичной диаграмме 10, описывающей рождение π -мезонов.

5. Взаимодействие фотонов с мезонами и барионами

Рассеяние фотонов нуклонами. Фазы комптоновского рассеяния $\gamma + N \rightarrow \gamma + N$ при больших l определяются диаграммой 23. На существование этой диаграммы указал Лоу [14]. Узел $\pi\gamma\gamma$, входящий в эту диаграмму, описывает, как легко видеть, распад π^0 -мезона на два γ -кванта. Таким образом, измерение фаз комптоновского рассеяния фотонов нуклонами при больших l было бы эквивалентно измерению времени жизни π^0 -мезона. Заметим, что фазы рассеяния, определяемые диаграммой 23, равны по величине для протона и нейтрона и имеют противоположные знаки.

Фоторождение π -мезонов. Периферийное рождение заряженных π -мезонов описывается диаграммой 24. В этом случае, в силу обобщенной теоремы Уорда для взаимодействия бозонов с реальными фотонами [15] диаграмма 24 тождественно равна диаграмме 25, в которой вершина $\pi\pi\gamma$ и функция Грина виртуального мезона неперенормированы. Таким образом, измерение амплитуд процессов $\gamma + N \rightarrow \pi + N$ при больших l позволяет найти в чистом виде узел πNN .

Отметим, что вклад диаграммы 25 отличается для протона и нейтрона только знаком. Процесс, обратный фоторождению, — излучение фотонов при захвате π -мезонов нуклонами — также описывается диаграммой 25, если рассматривать ее справа налево.

Фоторождение пары π -мезонов ($\gamma + N \rightarrow 2\pi + N$) при больших моментах движения этой пары относительно нуклона описывается диаграммой 26, содержащей узел $\pi\pi\pi\pi$. Другой диаграммой, которая будет давать вклад при больших моментах одного из мезонов относительно пары нуклон + второй мезон, является диаграмма 27. Узел $\pi\pi\pi\pi$, содержащийся в диаграмме 26, входит в одномезонную диаграмму 28, описывающую испускание тормозного излучения π -мезоном при рассеянии его на нуклоне. При

тормозном излучении на больших прицельных параметрах (большие l) основной вклад дает именно диаграмма 28, так как обычное «сопровождающее» тормозное излучение в силу псевдоскалярности π -мезона описывается двухмезонной диаграммой 29, и его вкладом при больших l можно пренебречь. Отметим, что испускание тормозного излучения может сопровождаться перезарядкой π -мезонов.

Фоторождение K -мезонов. Диаграмма 30, описывающая фоторождение пары $K + \bar{K}$, содержит узел $\pi\pi KK$, который может быть определен, если изучать процесс $\gamma + N \rightarrow K + \bar{K} + N$. Тот же узел входит в диаграммы 31 и 32, описывающие тормозное излучение при рассеянии K -мезонов и \bar{K} -мезонов нуклонами. Отметим, что испускание тормозного излучения может сопровождаться перезарядкой K -мезонов.

Рассеяние электронов нуклонами и образование электронами π -мезонов и K -мезонов. Рассмотренные выше узлы при иных значениях 4-импульсов соответствующих частиц входят в диаграммы, описывающие взаимодействие электронов с нуклонами. Как известно, амплитуда рассеяния электронов нуклонами содержит два слагаемых, одно из которых пропорционально τ_3 , а другое — изотопический скаляр. Как указал Гольдбергер [16], первому из этих слагаемых соответствует диаграмма 33, и второму диаграмма 34. Узлы $\pi\pi\pi$ и $\pi\pi\pi\pi$, входящие в эти диаграммы и отвечающие виртуальным фотонам с $k^2 \neq 0$, входят также в диаграммы, описывающие процессы образования π -мезонов электронами: $e + N \rightarrow e + \pi + N$ и $e + N \rightarrow e + 2\pi + N$ (диаграммы 35 и 36).

Диаграмма процесса $e + N \rightarrow e + N + K + \bar{K}$ аналогична диаграмме 36 и отличается от нее тем, что узел $\pi\pi\pi\pi$ заменен на узел $\pi\pi KK$.

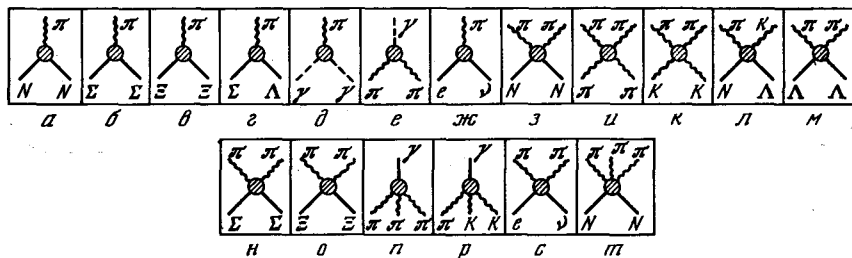
Взаимодействия с участием нейтрино. При столкновении электронов с протонами возможен процесс $e^- + p \rightarrow n + \nu$, обусловленный слабым β -распадным взаимодействием. Если анализировать угловое распределение нейтронов в этом процессе по угловым моментам, то оказывается, что при больших моментах основную роль играют амплитуды, обусловленные диаграммами 37 и 38. В эти диаграммы входят узлы $\pi e\nu$ [17] и $\pi e\nu$ [18], первый из которых обусловлен аксиально-векторным взаимодействием, а второй — векторным. При столкновении энергичных электронов с протонами возможно также образование гиперонов, например $e^- + p \rightarrow \Lambda + \nu$. Диаграммы 39 и 40, описывающие этот процесс, содержат узлы $K e\nu$ и $K e\nu$. Как узлы $\pi e\nu$ и $\pi e\nu$, так и узлы $K e\nu$ и $K e\nu$ могут быть измерены независимым образом путем измерения распадов $\pi \rightarrow e + \nu$, $\pi \rightarrow \pi + e + \nu$, $K \rightarrow e + \nu$, $K \rightarrow \pi + e + \nu$. Все сказанное в этом разделе относится и к столкновениям μ -мезонов с нуклонами.

6. Сопоставление различных процессов

В табл. 1 перечислены рассмотренные выше процессы и узлы сильных взаимодействий, которые могут быть определены при исследовании этих процессов. Цифры 1, 2, 3 указывают число виртуальных мезонов, связывающих между собой узлы в соответствующих

Таблица 1

Процессы	Узлы																	
	a	б	в	г	д	е	ж	з	и	к	л	м	н	о	п	р	с	т
$N + N \rightarrow N + N$	1,1							2,2										3,3
$\bar{N} + N \rightarrow \bar{N} + N$	1,1							2,2										3,3
$\pi + N \rightarrow \pi + N$								2	2									
$\pi + N \rightarrow 2\pi + N$	1								1,2									2
$N + N \rightarrow N + N + \pi$	1							1,2										2
$\Sigma + N \rightarrow \Sigma + N$	1	1						2				2						
$\Xi + N \rightarrow \Xi + N$	1		1					2										
$\Sigma + N \rightarrow \Lambda + N$	1			1										2				
$\Lambda + N \rightarrow \Lambda + N$								2			2							
$\bar{\Sigma} + N \rightarrow \bar{\Sigma} + N$	1	1						2				2						
$\bar{\Sigma} + N \rightarrow \bar{\Lambda} + N$	1			1									2					
$K + N \rightarrow K + N$								2		2								
$\bar{K} + N \rightarrow \bar{K} + N$								2		2								
$\pi + N \rightarrow K + \bar{K} + N$	1									1								
$K + N \rightarrow K + \pi + N$	1									1								
$\bar{K} + N \rightarrow \bar{K} + \pi + N$	1									1								
$N + N \rightarrow N + \Lambda + K$	1										1							
$\gamma + N \rightarrow \gamma + N$	1				1													
$\gamma + N \rightarrow \pi + N$	1					1												
$\gamma + N \rightarrow 2\pi + N$	1					1		1								1		
$\gamma + N \rightarrow K + \bar{K} + N$	1																1	
$\pi + N \rightarrow \pi + \gamma + N$	1																1	
$K + N \rightarrow K + \gamma + N$	1																1	
$e + N \rightarrow e + N$						2		2								3		
$e + N \rightarrow \nu + N$	1						1	2										2,3



ющих диаграммах. Так, например, в строке, соответствующей процессу $\pi + N \rightarrow 2\pi + N$, цифра 1 стоит на пересечениях со столбцами, соответствующими блокам $NN\pi$ и $\pi\pi\pi$, и отвечает диаграмме 7, в которой эти два узла связаны одним виртуальным π -мезоном. Для этого же процесса цифра 2 отвечает диаграмме, в которой узлы $\pi\pi\pi$ и $\pi\pi\pi NN$ связаны двумя мезонами. Покажем на примере одномезонных диаграмм, каким образом могут быть сопоставлены между собой узлы, определенные из различных процессов.

Узел $NN\pi$ (перенормированная константа) может быть независимым образом определен из процессов $N + N \rightarrow N + N$, $\bar{N} + N \rightarrow \bar{N} + N$, $\gamma + N \rightarrow \pi + N$, поскольку эти процессы не содержат других неизвестных узлов. Зная узел $NN\pi$, можно определить и другие узлы:

Таблица 2

Узел	Можно определить из процесса	Примечание
$\pi\pi\pi$	$\pi + N \rightarrow 2\pi + N$	
$NN\pi\pi$	$N + N \rightarrow N + N + \pi$	
$\Sigma\Sigma\pi$	$\Sigma + N \rightarrow \Sigma + N$	
$\Sigma\Lambda\pi$	$\Sigma + N \rightarrow \Lambda + N$	
$\Xi\Xi\pi$	$\Xi + N \rightarrow \Xi + N$	
$\pi\pi KK$	$\pi + N \rightarrow K + \bar{K} + N$ $K + N \rightarrow K + \pi + K$	Независимо из трех различных процессов
πNKA	$\bar{K} + N \rightarrow \bar{K} + \pi + N$ $N + N \rightarrow N + \Lambda + K$	
$\pi\gamma\gamma$	$\gamma + N \rightarrow \gamma + N$	
$\gamma\pi\pi\pi$	$\gamma + N \rightarrow 2\pi + N$	
$\gamma\pi KK$	$\pi + N \rightarrow \pi + N + \gamma$ $\gamma + N \rightarrow \bar{K} + K + N$ $K + N \rightarrow \gamma + K + N$ $\bar{K} + N \rightarrow \gamma + \bar{K} + N$	

При определении узла из одномезонной диаграммы мы, как легко видеть, получаем его значения для того частного случая, когда один из концов узла соответствует виртуальному π -мезону.

Аналогичным образом (см. табл. 1) из двухмезонных диаграмм могут быть определены узлы, имеющие два виртуальных π -мезонных конца. В ряде случаев один и тот же узел может быть найден как из одномезонной диаграммы, так и из двухмезонной (или трехмезонной) диаграммы (например узел $\gamma\pi\pi\pi$). Это позволяет установить величину узла при таких значениях импульсов входящих в него мезонов, которые соответствуют нефизической области. В свя-

зи с этим уместно еще раз подчеркнуть, что одни и те же узлы, полученные из одномезонных и двумезонных диаграмм, имеют различные численные значения импульсов входящих в них частиц.

Выше мы рассматривали амплитуды различных процессов при орбитальных моментах $l \gg 1$. Разумеется, экспериментальное определение амплитуд с очень большими l практически невозможно. Однако в случае нуклон-нуклонного рассеяния оказывается, что при малых энергиях уже при $l = 3$ экспериментальную амплитуду можно описать периферийным одномезонным взаимодействием. Характеристики экспериментального углового распределения нуклонов в процессе $\pi + N \rightarrow 2\pi + N$ указывают на то, что периферийное одномезонное взаимодействие может быть в этом случае также весьма большим и явится определяющим уже при не очень больших l . Таким образом, экспериментальное исследование перечисленных выше процессов и получение необходимых для предлагаемого анализа данных может в ряде случаев оказаться возможным уже в сравнительно близком будущем.

Заметим, что соотношения, аналогичные тем, которые существуют между различными процессами с участием нуклонов, будут иметь место и для процессов, в которых нуклон заменен дейтроном или более сложным ядром. В частности, сравнивая рассеяние на ядрах нуклонов и гиперонов, можно найти отношение констант взаимодействий π -мезонов с нуклонами и гиперонами.

В заключение уместно подчеркнуть, что все сделанные выше заключения о периферийном взаимодействии не зависят от характера взаимодействия сильновзаимодействующих частиц на малых расстояниях. Они не зависят, в частности, от того, является ли π -мезон элементарной или составной частицей.

Авторы благодарны за обсуждение и полезные замечания В. Б. Берестецкому, Н. Н. Боголюбову, А. Ф. Грашину, Б. Л. Иоффе, Л. Д. Ландау, А. П. Рудику, К. А. Тер-Мартirosяну, И. М. Шмушкевичу.

Авторы признательны проф. Чу, приславшему препринт своей работы.

Академия наук СССР

Получено 20 сентября 1958 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук. ДАН СССР, 1955, 102, 489 (Собр. трудов, № 60); И. Померанчук. Nuovo Cim., 3, 1186, 1956 (Собр. трудов, № 65); И. Я. Померанчук, В. В. Судаков, К. А. Тер-Мартirosян. Phys. Rev., 1956, 103, 784 (Собр. трудов, № 66); Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 1955, 28, 750; G. Källén, W. Pauli. Kgl. Dansk. Vid. Selskab. Mat.-Fys. Medd., 1955, 30, 7.
2. Taketani et al. Suppl. Progr. Theoret. Phys., 1956; 3. G. Chew. Proc. Rochester Conf., 1957 (см. также В. Т. Хозяинов. ЖЭТФ, 1954, 27, 445).

3. G. Chew. Preprint; G. Chew. Proc. Geneva Conf., 1958.
4. М. М. Рыжик, И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Гостехиздат, 1951.
5. Tables of Associated Legendre Function. N. Y., Columbia, Univ. Press, 1945.
6. F. Dyson. Phys. Rev., 1949, 75, 1736.
7. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, 1954, 95, 497.
8. H. Lehmann. Nuovo cimento, 1954, 11, 342.
9. R. Karplus, C. Sommerfeld, E. Wichmann. Phys. Rev., 1959, 114, 376.
10. S. Otsuki, R. Tamagaki, W. Watari. Доклад на Второй Женевской конференции по мирному использованию атомной энергии, 1958.
11. R. Oehme. Phys. Rev., 1955, 98, 216; Wolfenstein. Annual Rev. Nucl. Sci., 1956, 6; перев. УФН, 1957, 62, 71; Л. Пузиков, Р. Рындин, Я. Смородинский. ЖЭТФ, 1957, 32, 592.
12. S. Okubo, R. Marshak. Ann. Phys., 1958, 4, 166.
13. T. D. Lee, C. N. Yang. Nuovo Cimento, 1956, 3, 749.
14. F. Low. Proc. Geneva Conf., 1958.
15. И. Я. Померанчук. ДАН СССР, 1955, 100, 41 (Собр. трудов, № 59).
16. M. Goldberger. Rev. Mod. Phys., 1958, 30, 465.
17. M. Goldberger, S. Tretman. Phys. Rev., 1958, 110, 1178.
18. R. Feynman, M. Gell-Mann. Phys. Rev., 1958, 109, 193.

О СТОЛКНОВЕНИИ НУКЛОНОВ С БОЛЬШИМИ ОРБИТАЛЬНЫМИ МОМЕНТАМИ¹

Совместно с А. Д. Галанциным, А. Ф. Грашиним и Б. Л. Иоффе

Вычисляется часть амплитуды рассеяния нуклона на нуклоне при больших орбитальных моментах $l \gg 1$, которая обусловлена обменом двумя мезонами. С помощью дисперсионных соотношений устанавливается связь такой амплитуды с рассеянием реальных мезонов нуклонами. Применяемый метод справедлив, когда кроме условия $l \gg 1$ выполняется также неравенство $l\mu/p \gg 1$ (μ — масса мезона, p — импульс нуклона в системе центра инерции).

1. Введение

В работе Окуня и Померанчука [1] было показано, что при столкновении нуклонов с большими орбитальными моментами играют роль только такие взаимодействия, которые осуществляются обменом одним мезоном и, следовательно, фазы соответствующих амплитуд рассеяния можно вычислить теоретически². В такой общей форме это утверждение бесспорно, поскольку оно основано только на общефизических соображениях о том, что по мере повышения орбитального момента играют роль все большие и большие прицельные параметры. Однако для того чтобы это утверждение перестало быть чисто академическим и приобрело практическую ценность, нужно показать, что, уже начиная со сравнительно небольших значений моментов, фазы рассеяния с хорошей точностью могут быть получены из одномезонного приближения.

Оценка точности одномезонного приближения может быть получена путем вычисления следующего приближения по «степени периферийности столкновения» — двухмезонного приближения, когда сталкивающиеся нуклоны обмениваются двумя мезонами. В настоящей работе такие вычисления проводятся в следующих предположениях.

1. Значения орбитальных моментов, для которых вычисляются фазы, велики: $l \gg 1$.

2. Для заданного l энергии нуклонов ограничены сверху неравенством $l\xi \gg 1$, где $\xi = \mu/p$, μ — масса π -мезона, p — импульс нуклона в системе центра инерции.

Второе предположение имеет простой физический смысл — квазиклассический прицельный параметр $r_0 = l\xi/\mu \gg 1/\mu$, т. е. это предположение является условием периферийности столкновения. Другими словами, только при выполнении этого условия имеет смысл классификация взаимодействий по «степени периферийности» с малым параметром разложения.

Излагаемая методика позволяет получить для двухмезонных фаз главную часть асимптотического разложения по малому параметру $1/L$ ($l\xi$), который при малых энергиях ($\xi^2 \gg 1$) равен $1/l$, а с увеличением энергии возрастает до $1/l\xi$ (при $\xi^2 \ll 1$). Идея вычислений состоит в том, что при указанных предположениях среди виртуальных мезонов, которыми обмениваются нуклоны, основную роль играют мезоны с физическим соотношением между энергией и импульсом $\omega^2 - k^2 = \mu^2$, но не физической энергией $\omega = 0$ и передаваемым импульсом $q^2 = 4\mu^2$.

Амплитуда рассеяния нуклона на нуклоне выражается через амплитуду рассеяния таких π -мезонов на нуклонах, а последняя может быть точно вычислена с помощью дисперсионных соотношений для рассеяния π -мезона на нуклонах при фиксированной передаче импульса. Кроме этой амплитуды отдельно учитываются члены, соответствующие первому приближению теории возмущений (с перенормированной константой g^2) в рассеянии мезона на нуклоне. Хотя эти члены обращаются в нуль при $\omega = 0$, вклад их из-за наличия полюса при малых значениях $\omega = \mu^2/2m$ оказывается сравнимым по величине и противоположен по знаку с вкладом от членов, вычисляемых из дисперсионных соотношений.

2. Фазы рассеяния при больших орбитальных моментах

Матрицу рассеяния и фазы рассеяния нуклона на нуклоне можно выразить через интегралы от амплитуд $M(E, \cos \theta)$, соответствующих различным спиновым состояниям ($E = \sqrt{m^2 + p^2}$ — полная энергия, θ — угол рассеяния в системе центра инерции, спиновые и зарядовые индексы не выписываются):

$$I_{l,m}(E) = \int_{-1}^{+1} P_l^{(m)}(\cos \theta) M(E, \cos \theta) d \cos \theta, \quad (2.1)$$

где $P_l^{(m)}$ — присоединенные полиномы Лежандра. Ограничимся рассмотрением интеграла (2.1) с $m = 0$ (для $m = 1$ и $m = 2$ рассуждения проводятся аналогично).

Вычисляя интеграл (2.1) при больших l , удобно использовать аналитические свойства амплитуды рассеяния по $\cos \theta$ (или, что то же самое, по квадрату передаваемого импульса) при фиксированной энергии в системе центра инерции. Дисперсионные соотношения по квадрату передаваемого импульса могут быть получены методом, полностью аналогичным тому, который был исполь-

¹ ЖЭТФ, 1959, 37, 1663; Nucl. Phys., 1960, 17, 181.

² Литературные ссылки на предшествующие работы приведены в [1].

зван Мандельштамом [2] для случая рассеяния π -мезонов на нуклонах. Для рассеяния нуклон — нуклон этот метод менее обоснован, чем для рассеяния π -мезон — нуклон и подкрепляется, помимо интуитивных соображений, лишь анализом первых приближений теории возмущений. Нужно отметить, однако, что (как будет ясно из дальнейшего) для наших выводов не нужна полная дисперсионная формула, а важно лишь расположение первой (ближайшей) особенности, относительно которой вряд ли могут быть сомнения.

Действуя аналогично [2], запишем амплитуду рассеяния нуклон — нуклон в виде (см. [3]).

$$(2\pi)^4 T(p_1, p_1'; p_2, p_2') \delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') = \\ = i \frac{m^2}{4\pi E} \int d^4x d^4y e^{i(p_1 x + p_2 y)} \bar{u}_\mu(p_1') \bar{u}_\nu(p_2') \langle -p_1 | T(\eta_\mu(x), \eta_\nu(y)) | p_2 \rangle$$

или

$$T(p_1, p_1'; p_2, p_2') = i \frac{m^2}{4\pi E} \int d^4x e^{i(p_1' - p_2') x/2} \bar{u}_\mu(p_1') \bar{u}_\nu(p_2') \times \\ \times \langle -p_1 | T\left(\eta_\mu\left(\frac{x}{2}\right), \eta_\nu\left(-\frac{x}{2}\right)\right) | p_2 \rangle. \quad (2.2)$$

Здесь p_1, p_2, p_1', p_2' — 4-импульсы нуклонов до и после столкновения, $u(p_1), u(p_2)$ — спиноры для конечного состояния, $\eta(x)$ — правая часть уравнения Дирака для нуклонов (метрика $+1, -1, -1, -1$).

Как обычно [4, 5], вместо амплитуды рассеяния введем функцию $M(p_1, p_1'; p_2, p_2')$, определяемую запаздывающим антикоммутиратором

$$M(p_1, p_1'; p_2, p_2') = i \frac{m^2}{4\pi E} \int d^4x e^{i(p_1' - p_2') x/2} \theta(x_0) \times \\ \times \bar{u}_\mu(p_1') \bar{u}_\nu(p_2') \langle -p_1 | \left\{ \eta_\mu\left(\frac{x}{2}\right), \eta_\nu\left(-\frac{x}{2}\right) \right\} | p_2 \rangle. \quad (2.3)$$

Функция $M(p_1, p_1'; p_2, p_2')$ разбивается на дисперсионную $D(p_1, p_1'; p_2, p_2')$ и абсорбционную $A(p_1, p_1'; p_2, p_2')$ части

$$M(p_1, p_1'; p_2, p_2') = D(p_1, p_1'; p_2, p_2') + iA(p_1, p_1'; p_2, p_2'), \quad (2.4)$$

возникающие при подстановке в (2.3) $\theta(x_0)$ в виде $\theta(x_0) = \epsilon(x_0) + 1$. Абсорбционная часть выражается как

$$A(p_1, p_1'; p_2, p_2') = A_1(p_1, p_1'; p_2, p_2') + A_2(p_1, p_1'; p_2, p_2'); \quad (2.5)$$

$$A_1(p_1, p_1'; p_2, p_2') = 2\pi^3 (m^2/E) \sum_n \bar{u}_\mu(p_1') \bar{u}_\nu(p_2') \times \\ \times \langle -p_1 | \eta_\mu(0) | n \rangle \langle n | \eta_\nu(0) | p_2 \rangle \delta(p_n - p_1' + p_1), \quad (2.6)$$

$$A_2(p_1, p_1'; p_2, p_2') = 2\pi^3 (m^2/E) \sum_n \bar{u}_\mu(p_1') \bar{u}_\nu(p_2') \times$$

$$\times \langle -p_1 | \eta_\nu(0) | n \rangle \langle n | \eta_\mu(0) | p_2 \rangle \delta(p_n - p_2' + p_1),$$

где $|n\rangle$ — физическое состояние с 4-импульсом p_n и суммирование ведется по полной системе состояний с заданным 4-импульсом и числом тяжелых частиц (равным нулю).

Выражение для амплитуды рассеяния $T(p_1, p_1'; p_2, p_2')$ через дисперсионную и абсорбционную части имеет тот же вид (2.4) с той лишь разницей, что величина A_2 входит с противоположным знаком. Для реального рассеяния нуклон — нуклон в системе центра инерции $E_1' - E_1 = 0; E_2' - E_2 = 0$, тогда как $E_n > 0$. Отсюда следует, что для реального процесса абсорбционная часть равна нулю и функция $M(p_1, p_1'; p_2, p_2')$ совпадает с амплитудой рассеяния. Заметим, что A_2 отличается от A_1 перестановкой переменных 1-го и 2-го нуклонов после рассеяния. $M(p_1, p_1'; p_2, p_2')$ является, кроме спиновых и зарядовых переменных, функцией двух инвариантов $(p_1 + p_2)^2 = 4E^2$ и $q^2 = (p_1' - p_2')^2 = -2p^2(1 - \cos \theta)$.

Дисперсионные соотношения по q^2 при постоянном E^2 можно получить, действуя методом Гольдбергера [4] и интегрируя по q^2 выражение для абсорбционной части, следующее из (2.3). Это дает¹

$$M(E, q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(E, q'^2)}{q'^2 - q^2 - i\epsilon} dq'^2, \quad (2.7)$$

если $\text{Im } q^2 \geq 0$. Соотношение (2.7) записано в символической форме: в действительности (2.7) должно иметь место для каждой независимой спиновой (зарядовой) амплитуды.

В сумме по промежуточным состояниям (2.6) удобно выделить одномезонное состояние. Тогда оставшиеся члены суммы будут начинаться с двухмезонного состояния, так что для них $p_n^2 \geq 4\mu^2$. С учетом этого (2.7) переписется в виде

$$M(E, q^2) = -\frac{g^2}{4E} v_1^* v_2^* \left[\frac{q^2}{q^2 - \mu^2} \tau_\alpha^{(1)} \tau_\alpha^{(2)} + \frac{r^2}{r^2 - \mu^2} \frac{3 - \tau_\alpha^{(1)} \tau_\alpha^{(2)}}{2} \right] v_1 v_2 + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{A_1(E, q'^2)}{q'^2 - q^2 - i\epsilon} dq'^2 - \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{A_2(E, r'^2)}{r'^2 - r^2 + i\epsilon} dr'^2, \quad (2.8)$$

где $r^2 = (p_2' - p_1')^2 = -2p^2(1 + \cos \theta)$, $\tau_\alpha^{(1)}$ и $\tau_\alpha^{(2)}$ — матрицы изотопического спина 1-го и 2-го нуклонов, g^2 — перенормированная константа связи π -мезонов с нуклонами ($g^2 = 14, 5$), v — двухкомпонентные спиноры. В (2.8) функции $A_1(E, q'^2)$ и $A_2(E, r'^2)$ определяются соотношениями (2.6), в которых суммирование по

¹ Дисперсионные соотношения записаны без дополнительного вычитания. Вычитаемый член в нашем случае не играет роли, поскольку при $l > 0$ он обратится в нуль после подстановки (2.7) в (2.1) и интегрирования по $\cos \theta$.

промежуточным состояниям начинается с двухмезонного состояния. При интегрировании $A_2(E, q'^2)$ мы выразили q^2 через $r^2 = 4m^2 - 4E^2 - q^2$; в такой записи явно видна антисимметрия амплитуды рассеяния.

Величина $2iA_1(E, q^2)$ (и соответственно $2iA_2(E, q^2)$) может быть определена как скачок в амплитуде рассеяния, возникающий, когда q^2 пересекает сверху действительную ось в точке, лежащей правее (левее) точки $q^2 = 4\mu^2$ ($q^2 = -4(\mu^2 + p^2)$). Это утверждение непосредственно следует из (2.8), если учесть, что (2.8) (или (2.7)) определяет амплитуду рассеяния в верхней полуплоскости комплексной плоскости q^2 . Аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость следует проводить, пересекая отрезок действительной оси $-4(\mu^2 + p^2) < q^2 < 4\mu^2$, где амплитуда не имеет особенностей (кроме полюсов).

Для вычисления фаз рассеяния подставим (2.8) в (2.4). При этом интегрирование полюсного члена в (2.8) определит вклад в фазу рассеяния за счет одномезонного приближения. Для синглетной амплитуды одномезонное приближение дает (индекс $m = 0$ будем опускать)

$$I_l^{(1)} = (g^2 \xi^2 / 2E) \lambda_\tau Q_l \left(1 + \frac{1}{2} \xi^2 \right), \quad (2.9)$$

где $\lambda_\tau = 1$ для четных l (изотопический спин $T = 1$) и $\lambda_\tau = -3$ для нечетных l ($T = 0$) и $Q_l(t)$ — функция Лежандра второго рода

$$Q_l(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_l(t')}{t-t'} dt'. \quad (2.10)$$

Поправки к одномезонному приближению возникают за счет подстановки в (2.1) двух последних членов в (2.8) и с учетом соотношения $Q_l(t) = (-1)^{l+1} Q_l(-t)$ оказываются равными

$$I_l^{(2)} = \frac{1}{\pi p^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} dq'^2 Q_l(1 + q'^2/2p^2) [A_1(E, q'^2) + (-1)^{l+1} A_2(E, q'^2)]. \quad (2.11)$$

Вычисления интегралов $I_{l,m}(E)$ для $m = 1$ и $m = 2$ приводят к выражениям, аналогичным (2.9) и (2.11), с той лишь разницей, что вместо функций $Q_l(t)$ возникают функции $(t^2 - 1)^{1/2} Q_l^{(1)}$ и $(t^2 - 1) Q_l^{(2)}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить (2.8) в (2.1) и учесть равенства (мы считаем, что $l > 1$)

$$-\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(1-t'^2)^{1/2}}{t-t'} P_l^{(1)}(t') dt' = (t^2 - 1)^{1/2} Q_l^{(1)}(t);$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1-t'^2}{t-t'} P_l^{(2)}(t') dt' = (t^2 - 1) Q_l^{(2)}(t).$$

Вклад члена A_2 в (2.11) равен вкладу от члена A_1 . Этот вывод непосредственно следует из того факта, что в синглетном состоянии при $T = 0$ $A_2 = A_1$ и амплитуда содержит только нечетные l , а при $T = 1$ $A_2 = -A_1$ и амплитуда содержит только четные l . Поэтому

$$I_l^{(2)} = \frac{2}{\pi p^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} dq'^2 Q_l(1 + q'^2/2p^2) A_1(E, q'^2). \quad (2.12)$$

Используем теперь условие $l \gg 1$. При больших l функция $Q_l(1 + z^2/2)$ быстро убывает с ростом z : если $z \gg 1$, то $Q_l(1 + z^2/2) \sim z^{-2(l+1)}$, если же $z \ll 1$, но $lz \gg 1$, то $Q_l(1 + z^2/2) \sim e^{-lz}$. Будем считать, что, кроме условия $l \gg 1$, выполнено также условие $l\xi \gg 1$, $\xi = \mu/p$ (при $\xi < 1$). Тогда в интеграле (2.12) будет играть роль малая область интегрирования вблизи нижнего предела. Воспользуемся следующим выражением для функции $Q_l(t)$ (см. [6], формула (6.777))

$$Q_l(t) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+3/2)} \exp\{- (l+1) \ln [t + \sqrt{t^2-1}]\} \times \\ \times F\left(\frac{1}{2}, l+1, l+\frac{3}{2}, (t + \sqrt{t^2-1})^{-2}\right) \quad (2.13)$$

и разложим экспоненту и гипергеометрическую функцию в ряд в окрестности $t_0 = 1 + 2\xi^2$, ($\Delta t = t - t_0$):

$$Q_l(t) = Q_l(t_0) \exp\left\{-\Delta t(l+1)/\sqrt{t_0^2-1}\right\} \left[1 + \frac{(l+1)t_0}{(t_0^2-1)^{3/2}} \frac{(\Delta t)^2}{2} \right] \left[1 - \frac{\Delta t}{2(t_0^2-1)(t_0 + \sqrt{t_0^2-1})} \right]. \quad (2.14)$$

После подстановки (2.14) в (2.12) интеграл $I_l^{(2)}$ сводится к

$$I_l^{(2)} = \frac{8}{\pi} \xi^2 Q_l(t_0) \int_0^{\infty} d\left(\frac{q'^2 - 4\mu^2}{4\mu^2}\right) \exp\{-L(q'^2 - 4\mu^2)/4\mu^2\} A_1(E, q'^2), \quad (2.15)$$

$$A_1(E, q^2) = \frac{1}{2i} [M(E, q^2 + i0) - M(E, q^2 - i0)],$$

где

$$L = (l+1) \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \approx \begin{cases} l\xi & \text{для } \xi \ll 1, \\ l+1 & \text{для } \xi \gg 1. \end{cases} \quad (2.16)$$

Нетрудно проверить, что члены разложения в квадратных скобках в (2.14) при больших L вносят малый вклад в интеграл (2.15) (порядка $1/L$), так что наше разложение оправдано и (2.15) имеет точность порядка $1/L$.

Покажем теперь, что при больших L для получения (2.15) нет необходимости в использовании полного дисперсионного соотношения (2.7), а достаточно лишь, чтобы на комплексной плоскости q^2 внутри эллипса, проходящего через точку $q^2 = 4\mu^2 + \kappa^2$ (константа $\kappa^2 \gg 4\mu^2/L$) и имеющего фокусы в точках $q^2 = 0$ и $q^2 = -4\mu^2/\xi^2$, не существовало других особенностей, кроме полюсов

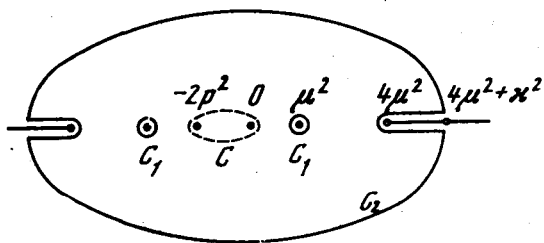


Рис. 1

и особенностей на вещественной оси при $q^2 \gg 4\mu^2$ и $q^2 \leq -4\mu^2(1 + \xi^{-2})$. Для доказательства преобразуем интеграл (2.1), воспользовавшись соотношением

$$\begin{aligned} I_l &= \frac{1}{2p^2} \int_{-4p^2}^0 P_l(1 + q^2/2p^2) M(E, q^2) dq^2 = \\ &= \frac{1}{2p^2 \pi i} \oint_C Q_l(1 + q^2/2p^2) M(E, q^2) dq^2, \end{aligned} \quad (2.1')$$

и деформируем контур C (показан на рис. 1 пунктиром) в контур $C_1 + C_1' + C_2$. Дугу в комплексной области выберем в форме упомянутого выше эллипса и будем расширять эллипс до тех пор, пока он не коснется ближайшей особой точки в комплексной области. Если при этом эллипс будет касаться точки на правой полуоси $q^2 = 4\mu^2 + \kappa^2$, то (2.1') можно записать в виде

$$\begin{aligned} I_l &= -\frac{1}{p^2} Q_l\left(1 + \frac{1}{2} \xi^2\right) \text{Res} [M(E, \mu^2) + (-1)^l M(E, -\mu^2 - 4p^2)] + \\ &+ \frac{1}{2p^2 \pi i} \int_{4\mu^2}^{\infty} Q_l(1 + q^2/2p^2) [\Delta M(E, q^2) - (-1)^l \Delta M(E, -q^2 - 4p^2)] dq^2 + f Q_l\left(1 + \frac{4\mu^2 + \kappa^2}{2p^2}\right), \end{aligned} \quad (2.11')$$

$$\Delta M(E, q^2) = M(E, q^2 + i\epsilon) - M(E, q^2 - i\epsilon) = 2iA(E, q^2),$$

что эквивалентно (2.9), (2.11) с точностью до последнего слагаемого (f — некоторая плавно меняющаяся функция p^2 и l). По сравнению с интегралом по берегам разреза ($q^2 \geq 4\mu^2$) это слагаемое имеет

дополнительный малый множитель

$$Q_l\left(1 + \frac{4\mu^2 + \kappa^2}{2p^2}\right) / Q_l\left(1 + \frac{4\mu^2}{2p^2}\right) \ll 1$$

и при больших l его можно не учитывать.

Как следует из (2.15), нас должны интересовать значения амплитуды $A_1(E, q^2)$ при $q^2 - 4\mu^2 \sim 4\mu^2/L \ll 4\mu^2$. В этом случае в сумме по промежуточным состояниям (2.6) остается только одно двухмезонное состояние, поскольку следующее состояние — 3π -мезона — соответствует минимальному q^2 , равному $9\mu^2$, а состояния с нуклон-антинуклонными парами лежат еще дальше. Таким образом, выражение для $A_1(E, q^2)$ приобретает вид

$$\begin{aligned} A_1(E, q^2) &= \frac{m^2}{4E(2\pi)^3} \sum_{\alpha, \beta} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \bar{u}_\mu(p'_1) \bar{u}_\nu(p'_2) \langle -p_1 | \eta_\mu(0) | k_1, \alpha; k_2, \beta \rangle \times \\ &\times \langle k_1, \alpha; k_2, \beta | \eta_\nu(0) | p_2 \rangle \delta(k_1 + k_2 - q), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где k_1 и k_2 — 4-импульсы двух π -мезонов, находящихся в зарядовых состояниях α и β , $q = p'_1 - p_1$.

Матричные элементы, входящие в (2.17), просто связаны с инвариантным матричным элементом $f_{\alpha\beta}(p, p'; k, k')$ рассеяния мезона на нуклоне (ω — энергия мезона)

$$\bar{u}_\mu(p'_1) \langle -p_1 | \eta_\mu(0) | k_1, \alpha; k_2, \beta \rangle = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} f_{\alpha\beta}(p_1, p'_1; k_1, -k_2), \quad (2.18)$$

$$\bar{u}_\nu(p'_2) \langle k_1, \alpha; k_2, \beta | \eta_\nu(0) | p_2 \rangle = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} f_{\alpha\beta}(p_2, p'_2; -k_1, k_2),$$

причем [7—10]

$$f_{\alpha\beta}(p, p'; -k_1, k_2) = f_{\alpha\beta}^*(p', p; k_1, -k_2). \quad (2.19)$$

Подставляя (2.18) в (2.17), получим

$$\begin{aligned} A_1(E, q^2) &= \frac{m^2}{8\pi E} \sum_{\alpha, \beta} \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{\omega_1 \omega_2} f_{\alpha\beta}(p_1, p'_1; k_1, -k_2) f_{\alpha\beta}(p_2, p'_2; -k_1, k_2) \times \\ &\times \delta(k_1 + k_2 - q). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Интеграл в (2.20) записан в явно инвариантной форме (так как $d\mathbf{k}/\omega$ — инвариант). Анализировать его удобно в той системе координат, в которой у времениподобного 4-вектора q есть только временная составляющая. В этой системе $\omega_1 = \omega_2 = q/2$, $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 \equiv \mathbf{k}$, $k = \sqrt{q^2/4 - \mu^2} \sim \mu/L^{1/2}$, так что компоненты вектора \mathbf{k} малы. Легко видеть, что, если положить $k_1 = q/2 + k$; $k_2 = q/2 - k$, то и в других интересующих нас системах координат, например в системе центра инерции нуклонов, компоненты вектора k являются малыми порядка $\mu/L^{1/2}$. Поэтому, при вычислении

$f_{\alpha\beta}$ в первом приближении по $1/L$ можно пренебречь ¹ k , положив просто $k_1 = k_2 = q/2$. Это приближение незаконно лишь для тех членов в $f_{\alpha\beta}$, которые испытывают резкие изменения в интервале $0 < k \lesssim \mu/L^{1/2}$. Матричный элемент $f_{\alpha\beta}(p_1, p_1'; k + q/2, k - q/2)$ можно рассматривать как функцию двух инвариантов $v = (p_1 + p_1')(k + q/2)/2$, q^2 и записать

$$f_{\alpha\beta}(p_1, p_1'; k + q/2, k - q/2) = \bar{u}(p_1') [L_{\alpha\beta}(v, q^2) + (\hat{k} + \hat{q}/2) M_{\alpha\beta}(v, q^2)] u(p_1), \quad (2.21)$$

где $L_{\alpha\beta}$ и $M_{\alpha\beta}$ — скалярные функции своих аргументов. (Для $f_{\alpha\beta}(p_2, p_2'; -(k + q/2), -(k - q/2))$ имеет место аналогичное выражение.) Член, пропорциональный \hat{q} , может быть отброшен в силу равенства

$$\bar{u}(p_1') \hat{q} u(p_1) = \bar{u}(p_1') (\hat{p}_1' - \hat{p}_1) u(p_1) = 0. \quad (2.22)$$

Будем считать сначала, что $f_{\alpha\beta}$ достаточно медленная функция k , так что можно пренебречь k и положить $k_1 = k_2 = q/2$. Тогда $v = v_0 \equiv (2p_1 + q)(q/2)/2 = 0$, $q^2 = 4\mu^2$, откуда

$$f_{\alpha\beta}(p_1, p_1'; q/2, -q/2) = \bar{u}(p_1') L_{\alpha\beta}(0, 4\mu^2) u(p_1), \quad (2.23)$$

и, как следует из (2.19), $L_{\alpha\beta}(0, 4\mu^2)$ действительно. Подставляя (2.23) в (2.20) и интегрируя по \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 (в системе координат, в которой $q = 0$), находим

$$A_1(E, q^2) = (m^2/2E) \sqrt{q^2/4\mu^2 - 1} \bar{u}(p_1') L_{\alpha\beta}(0, 4\mu^2) u(p_1) \times \bar{u}(p_2') L_{\alpha\beta}(0, 4\mu^2) u(p_2). \quad (2.24)$$

Мы получили хорошо известный результат [11], что в точке ветвления абсорбционная часть амплитуды, которая в данном случае совпадает с мнимой частью ², пропорциональна $\sqrt{q^2 - 4\mu^2}$.

Кроме членов, достаточно медленно меняющихся вблизи точки $v = 0$, $q^2 = 4\mu^2$, в $f_{\alpha\beta}$ есть члены, в которых положить $v = 0$, $q^2 = 4\mu^2$ можно лишь при очень больших, практически не интересных значениях L . Это полюсные члены, соответствующие однонуклонному промежуточному состоянию в амплитуде рассеяния мезон — нуклон и описываемые первым приближением теории возмущений с перенормированной константой g^2 .

¹ Хотя компоненты вектора k имеют малость $\sim 1/L^{1/2}$, но погрешность, которая возникает при пренебрежении ими, будет порядка $\sim 1/L$, поскольку линейные по k члены обратятся в нуль при интегрировании по углам.

² Абсорбционная часть перестает совпадать с мнимой частью, когда при изменении аргументов E , q^2 мы пересечем линию особых точек (не считая линии $q^2 = 4\mu^2$). Ближайшей такой линией является линия $q^2 = 4\mu^2 + \mu^4/p^2$, которая соответствует обращению в нуль всех четырех знаменателей в простейшей четырехвершинной диаграмме [12].

Полюсный член в $f_{\alpha\beta}$ имеет вид ¹

$$f_{\rho\alpha\beta}(p_1, p_1'; k_1, -k_2) = g^2 \bar{u}(p_1') [\gamma_5 (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 - m)^{-1} \gamma_5 \tau_\alpha \tau_\beta + \gamma_5 (\hat{p}_1 + \hat{k}_2 - m)^{-1} \gamma_5 \tau_\beta \tau_\alpha] u(p_1) = -g^2 \bar{u}(p_1') [(2p_1 k_1 + \mu^2)^{-1} \tau_\alpha \tau_\beta - (2p_1 k_2 + \mu^2)^{-1} \tau_\beta \tau_\alpha] \hat{k} u(p_1). \quad (2.25)$$

Поскольку $f_{\rho\alpha\beta}$ содержит в числителе малый множитель \hat{k} , то, казалось бы, этот член вообще можно было бы опустить. Однако (2.25) имеет полюс, расположенный весьма близко к точке $k = 0$ (на расстоянии $\mu^2/2m$ от нее; см. (2.27)). Поэтому интегралы с полюсными членами требуют корректного вычисления. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим интерференционный член, когда вместо одной из амплитуд берется полюсный член, а вместо другой — постоянная (2.23). В этом случае оба члена в квадратных скобках в (2.25) дадут равные вклады и, например, для одного из интерференционных членов мы получим

$$-\frac{m^2 g^2}{8\pi E} \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{\omega_1 \omega_2} \bar{u}(p_1') \hat{k} u(p_1) \frac{1}{2p_1 k_1 + \mu^2} \bar{u}(p_2') L_{\alpha\alpha}(0, 4\mu^2) \times u(p_2) \delta(k_1 + k_2 - q). \quad (2.26)$$

В системе координат, в которой $q = 0$, синглетная часть (2.26) может быть записана как (нормировка спиноров $\bar{u}u = 1$, члены $\sim q^2/4m^2$ отброшены)

$$\frac{mg^2}{8\pi E} \int \frac{d\mathbf{k}}{\omega^2} \frac{\mathbf{k} p_1}{\mu^2 - q^2/2 - 2\mathbf{k} p_1} \delta(q - 2\omega) \bar{u}(p_2') L_{\alpha\alpha}(0, 4\mu^2) u(p_2). \quad (2.27)$$

При переходе от (2.26) к (2.27) мы учли, что в выбранной нами системе координат энергии 1-го нуклона до и после столкновения равны соответственно $E_1 = -q/2$, $E_1' = q/2$. Входящие в интеграл (2.27) компоненты импульса p_1 являются чисто мнимыми при $q/2 < m$. Поэтому, если мы направим ось z по направлению чисто мнимого вектора p_1 , то скалярное произведение $\mathbf{k} p_1$ будет равно $\mathbf{k} p_1 = k_z p_1 = i \sqrt{m^2 - q^2/4} \sqrt{q^2/4 - \mu^2} \cos \vartheta \approx im \sqrt{q^2/4 - \mu^2} \cos \vartheta$

и после интегрирования δ -функции интеграл (2.27) примет вид

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{\omega^2} \frac{\mathbf{k} p_1}{\mu^2 - q^2/2 - 2\mathbf{k} p_1} \delta(q - 2\omega) = \frac{4\pi}{q} \sqrt{\frac{q^2}{4} - \mu^2} \int_{-1}^1 dx \frac{imx \sqrt{q^2/4 - \mu^2}}{\mu^2 - q^2/2 - 2imx \sqrt{q^2/4 - \mu^2}} \approx -\frac{4\pi}{q} \sqrt{\frac{q^2}{4} - \mu^2} \left\{ 1 - \frac{\mu^2}{2m \sqrt{q^2/4 - \mu^2}} \arctg \frac{2m \sqrt{q^2/4 - \mu^2}}{\mu^2} \right\}. \quad (2.28)$$

¹ В обозначениях мы следуем работе [13] $\gamma_5^2 = 1$.

Из (2.28) видно, что при весьма малых $q^2/4 - \mu^2 \ll (\mu/2m)^2 \mu^2$ вклад полюсного члена будет пропорционален $(q^2/4 - \mu^2)^{1/2}$ и, как и следовало ожидать, после подстановки в (2.15) окажется в L раз меньше вклада основного члена (2.24). Но в (2.15) столь малые $q^2/4 - \mu^2$ играют основную роль лишь для очень больших орбитальных моментов, когда $L \gtrsim (2m/\mu)^2$. Этот случай не представляет, конечно, никакого практического интереса. Наоборот, интересен случай $L \ll (2m/\mu)^2$. Тогда для основной области интегрирования в (2.15) $q^2/4 - \mu^2 \gg (\mu/2m)^2 \mu^2$ и (2.28) сводится к $-(4\pi/q) \sqrt{q^2/4 - \mu^2}$. Используя (2.27) и (2.28), мы приходим к выводу, что при $L \ll (2m/\mu)^2$ интерференционный член (2.26) дает после подстановки в (2.15) вклад того же порядка по $1/L$, что и основной член (2.24) и будет отличаться от него лишь множителем порядка $g^2 (\mu/m) \sim 1$ (если считать, что $L_{\alpha\alpha}(0, 4\mu^2) \sim 1/\mu$).

Таким образом, для вычисления $A_1(E, q^2)$ матричный элемент $f_{\alpha\beta}$ следует представить в виде суммы полюсного члена (2.25) и остальной части матричного элемента $\tilde{f}_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} - f_{p\alpha\beta}$, которую достаточно вычислить в точке $\nu = 0$ и $q^2 = 4\mu^2$. Для уточнения результата в $\tilde{f}_{\alpha\beta}$ мы учтем также первый член разложения¹ по ν и \hat{k} . Вычисления мы будем проводить в четырехмерной форме, не-

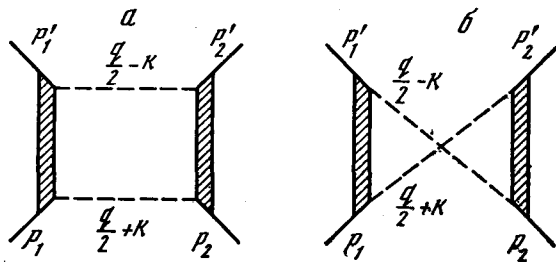


Рис. 2

посредственно вычисляя скачок в амплитуде рассеяния $\Delta M(E, q^2) = 2iA_1(E, q^2)$ и подставляя его в (2.15). Поэтому переведем сделанные нами выводы на привычный язык диаграмм.

В двухмезонном приближении амплитуда рассеяния нуклон — нуклон подсчитывается с помощью диаграмм, изображенных на рис. 2, а, б. Заштрихованная область на этом рисунке означает совокупность всех диаграмм с двумя внешними нуклонными и двумя мезонными линиями. Амплитуду рассеяния, соответствующую диаграммам рис. 2, с точностью до членов, не имеющих скачка при $q^2 \geq 4\mu^2$ (т. е. несингулярных в окрестности $q^2 = 4\mu^2$),

¹ Результат интегрирования произведения этого члена на полюсный будет иметь малость $\sim \mu/m$, а не L^{-1} и численно может оказаться существенным.

можно записать так:

$$M(E, \cos \theta) = (m/2\pi i) \int d^4k f_{\alpha\beta}(p_1, p_1 + q; k + q/2, k - q/2) \times \\ \times f_{\alpha\beta}(p_2, p_2 - q; -k - q/2, -k + q/2) [(k + q/2)^2 - \mu^2]^{-1} \times \\ \times [(k - q/2)^2 - \mu^2]^{-1}, \quad (2.29)$$

где амплитуда рассеяния мезонов на нуклонах $f_{\alpha\beta}$ должна быть вычислена, как было указано выше. Коэффициент $1/2$ введен в (2.29) в связи с тем, что в амплитуде рассеяния мезонов на нуклонах $f_{\alpha\beta}$ учитываются как диаграммы, в которых сначала поглощается мезон с импульсом $k + q/2$ в состоянии α , а потом испускается мезон с импульсом $k - q/2$ в состоянии β , так и диаграммы с обратным порядком поглощения и испускания, что приводит к удвоению всех диаграмм для рассеяния нуклон — нуклон. Как следует из выражения (2.20), в (2.29) должны входить значения функций Грина мезонов на массовой поверхности $k_1^2 = k_2^2 = \mu^2$. Поэтому вместо функций Грина мезонов мы подставили их свободные значения.

Сделаем теперь замечание о роли рассеяния мезона мезоном. Как следует из (2.20), $f_{\alpha\beta}$ является точной амплитудой рассеяния мезонов нуклонами с учетом рассеяния мезона — мезоном, так что, например, диаграммы типа изображенной на рис. 3 входят в $f_{\alpha\beta}$. На первый взгляд кажется, что при подстановке этой диаграммы в

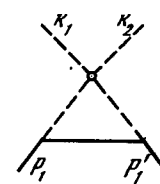


Рис. 3

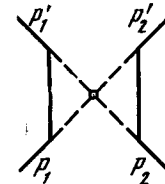


Рис. 4

правую и левую части рис. 2 мы ошибочно учтем диаграмму рис. 4 дважды. На самом деле вклад диаграммы рис. 4 вблизи точки особенности $q^2 = 4\mu^2$ действительно удваивается, поскольку особенность может возникнуть (т. е. мезонные линии могут стать реальными) как слева, так и справа от точки рассеяния мезона мезоном¹.

¹ Из-за наличия рассеяния мезона мезоном амплитуда рассеяния мезона нуклоном имеет особенность при $q^2 = 4\mu^2$ и вблизи этой точки (при $\hat{k} = 0$) пропорциональна $a + ib \sqrt{q^2 - 4\mu^2}$. Такая особенность могла, казалось бы, привести к возникновению поправочных членов порядка $L^{-1/2}$. В теории возмущений можно увидеть, что таких поправок на самом деле не возникнет. Из (2.20) тот же результат может быть получен, если учесть (2.19) и действительность коэффициентов a и b .

3. Использование дисперсионных соотношений для рассеяния мезонов на нуклонах

В настоящем разделе мы вычислим амплитуду рассеяния мезонов на нуклонах $f_{\alpha\beta}(p_1, p_1 + q; k + q/2, k - q/2)$ при малых \hat{k} и $q^2 = 4\mu^2$ путем аналитического продолжения амплитуды рассеяния из физической области. Рассмотрим разность между амплитудой рассеяния и полюсным членом $\tilde{f}_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} - f_{p\alpha\beta}$. Запишем $\tilde{f}_{\alpha\beta}$ в форме (2.21) и разложим по степеням k , ограничиваясь линейными по \hat{k} членами

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\alpha\beta}(p_1, p_1 + q; k + q/2, k - q/2) &= \tilde{L}_{\alpha\beta}(0, 4\mu^2) + \\ &+ (\partial\tilde{L}_{\alpha\beta}(\nu, 4\mu^2)/\partial\nu)_{\nu=0} \left[p_1 k + \frac{kq}{2} \right] + \hat{k} \tilde{M}_{\alpha\beta}(0, 4\mu^2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Члены, пропорциональные kq , обращаются в нуль при интегрировании по k , поскольку в системе координат, где $\mathbf{q} = 0$, инвариант $kq = 0$. Поэтому (3.1) принимает вид

$$\tilde{f}_{\alpha\beta} = \tilde{L}_{\alpha\beta}(0, 4\mu^2) + p_1 k (\partial\tilde{L}_{\alpha\beta}(\nu, 4\mu^2)/\partial\nu)_{\nu=0} + \hat{k} \tilde{M}_{\alpha\beta}(0, 4\mu^2). \quad (3.2)$$

Квадраты всех внешних 4-импульсов, входящих в (3.1), равны их значениям для свободного движения: $p_1^2 = p_1'^2 = m^2$, $k_1^2 = k_2^2 = \mu^2$ и в этом смысле $f_{\alpha\beta}$ является матричным элементом рассеяния реальных мезонов на нуклонах. Однако значения энергии этих мезонов и передаваемого импульса не являются физическими в физических системах координат. В самом деле, из равенства $\nu_0 = 0$ следует, что в брейтовской системе координат, в которой сумма импульсов нуклона до и после рассеяния равна нулю $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1' = 0$, полная энергия мезона $\omega = 0$. С другой стороны, квадрат передаваемого импульса $q^2 = q_0^2 - \mathbf{q}^2 = 4\mu^2$ положителен, тогда как в реальных процессах рассеяния он всегда отрицателен. Это значит, что интересующая нас амплитуда рассеяния мезонов на нуклонах не может быть получена непосредственно с помощью экспериментальных данных по рассеянию мезонов на нуклонах и нам придется воспользоваться аналитическим продолжением амплитуды на значения $\omega = 0$, $q^2 = 4\mu^2$.

Выясним сначала зависимость (3.2) от изотопических переменных. Функции $L_{\alpha\beta}(\nu, q^2)$ и $M_{\alpha\beta}(\nu, q^2)$ можно представить в следующем виде:

$$L_{\alpha\beta}(\nu, q^2) = \delta_{\alpha\beta} L^{(1)}(\nu, q^2) - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \tau_\gamma L^{(2)}(\nu, q^2), \quad (3.3)$$

$$M_{\alpha\beta}(\nu, q^2) = \delta_{\alpha\beta} M^{(1)}(\nu, q^2) - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \tau_\gamma M^{(2)}(\nu, q^2),$$

где

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= \frac{1}{2}(L_+ + L_-) = \frac{1}{3}(L_1 + 2L_3), \\ L^{(2)} &= \frac{1}{2}(L_+ - L_-) = \frac{1}{3}(L_3 - L_1), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$M^{(1)} = \frac{1}{2}(M_+ + M_-) = \frac{1}{3}(M_1 + 2M_3),$$

$$M^{(2)} = \frac{1}{2}(M_+ - M_-) = \frac{1}{3}(M_3 - M_1),$$

где L_+ , M_+ (L_- , M_-) — матричные элементы рассеяния π^+ (π^-) мезонов на протонах: L_1 , M_1 и L_3 , M_3 — матричные элементы рассеяния мезонов на нуклонах соответственно в состояниях с полным изотопическим спином $1/2$ и $3/2$.

Как следует из (2.19), $L^{(1)}$, $L^{(2)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ обладают простыми свойствами симметрии при замене $\nu \rightarrow -\nu$:

$$\begin{aligned} L^{(1)}(\nu, q^2) &= L^{(1)*}(-\nu, q^2), & L^{(2)}(\nu, q^2) &= -L^{(2)*}(-\nu, q^2), \\ M^{(1)}(\nu, q^2) &= -M^{(1)*}(-\nu, q^2), & M^{(2)}(\nu, q^2) &= M^{(2)*}(-\nu, q^2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из общего выражения для мнимой части амплитуды рассеяния нетрудно усмотреть, что при $\nu = 0$ и $q^2 \leq 4\mu^2$ мнимая часть величин $L^{(i)}$ и $M^{(i)}$ должны обращаться в нуль¹. Отсюда и из (3.5) следует, что

$$\tilde{f}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \tilde{L}^{(1)}(0, 4\mu^2) - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \tau_\gamma \{ p_1 k (\partial\tilde{L}^{(2)}(\nu, 4\mu^2)/\partial\nu)_{\nu=0} + \hat{k} \tilde{M}^{(2)}(0, 4\mu^2) \}. \quad (3.6)$$

Стоящие в правой части (3.6) величины можно выразить через их значения при физических энергиях с помощью дисперсионных соотношений по энергии при фиксированном квадрате передаваемого импульса q^2 . Вопрос о том, при каких q^2 имеют место такие дисперсионные соотношения исследовался в ряде работ [14—16]. Авторы этих работ интересовали, однако, лишь отрицательные q^2 , которые осуществляются в реальных процессах. Обоснование дисперсионных соотношений при $q^2 > 0$ и, в частности, в интересующей нас точке $q^2 = 4\mu^2$ может быть проведено без труда. Запишем матричный элемент рассеяния мезонов на нуклонах в брейтовской системе координат как функцию энергии мезона в этой системе ω и передаваемого импульса q^2 в следующем виде [17]:

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}(\omega, q^2) &= i \int d^4x \exp \{ i [\omega t - \mathbf{p}\mathbf{r} \sqrt{\omega^2 - \mu^2 + q^2/4}] \} \theta(x_0) \times \\ &\times \langle p_1' | [j_\beta(x/2), j_\alpha(-x/2)] | p_1 \rangle. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь $j_\alpha(x)$ — нуклонный ток, \mathbf{p} — некоторый единичный вектор. Компоненты импульсов нуклона и мезона в брейтовской системе

¹ Мнимая часть амплитуды рассеяния мезона на нуклоне оказывается отличной от нуля лишь для таких энергий мезона, при которых может возникнуть реальное состояние системы мезон + нуклон (это в брейтовской системе координат соответствует энергиям $\omega > \omega_1 = (m\mu + q^2/4)/(m^2 - q^2/4)^{1/2}$) или реальное состояние системы двух мезонов. Как легко видеть, последнее обстоятельство приводит к возникновению мнимой части амплитуды рассеяния при $q^2 > 4\mu^2$, причем при $q^2 \rightarrow 4\mu^2$ мнимая часть стремится к нулю пропорционально $\sqrt{q^2 - 4\mu^2}$.

координат в общем случае имеют вид:

$$\mathbf{p}_1 = \{0, 0, \sqrt{q^2}/2\}, \quad \mathbf{p}'_1 = \{0, 0, -\sqrt{q^2}/2\},$$

$$\mathbf{k}_1 = \{k_x, k_y, -\sqrt{q^2}/2\}, \quad \mathbf{k}'_1 = \{k_x, k_y, \sqrt{q^2}/2\}$$

или, если ввести единичный вектор \mathbf{n} в плоскости x, y :

$$\mathbf{n} = \{k_x, k_y\} (k_x^2 + k_y^2)^{-1/2},$$

то

$$\mathbf{k}_1 = \{\mathbf{n} \sqrt{\omega^2 - \mu^2 - q^2/4}, -\sqrt{q^2}/2\},$$

$$\mathbf{k}'_1 = \{\mathbf{n} \sqrt{\omega^2 - \mu^2 - q^2/4}, \sqrt{q^2}/2\}$$

(\mathbf{k}_1 — импульс падающего мезона, \mathbf{k}'_1 — рассеянного $k'_1 = -k_2$).

Величина $v = k_1(p + p')/2$ связана с энергией ω соотношением $v = \omega \sqrt{m^2 + q^2/4}$.

Как известно, трудность в обосновании дисперсионных соотношений на основе формулы (3.7) состоит в том, что при аналитическом продолжении $f_{\alpha\beta}(\omega, q^2)$ в комплексную плоскость ω при значениях $\omega^2 < \mu^2 - q^2/4$ корень в экспоненте в (3.7) оказывается чисто мнимым и все выражение расходится при интегрировании по r . Очевидно, что при $q^2 > 0$ (что как бы эквивалентно уменьшению массы мезона) доказательство проходит даже легче, чем для случая рассеяния вперед. В частности, при $q^2 = 4\mu^2$ экспонента в (3.7) приобретает совсем простой вид $\exp[i\omega(t - nr)]$ и аналитичность $f_{\alpha\beta}(\omega, q^2)$ в верхней полуплоскости ω и, следовательно, существование дисперсионных соотношений следует непосредственно из исчезновения запаздывающего коммутатора токов при $t^2 - r^2 < 0$ и $t < 0$.

Дисперсионные соотношения удобно писать не для величин L и M , а для матричных элементов рассеяния мезонов на нуклонах без переворота спина $f(\omega, q^2)$ и с переворотом спина $\varphi(\omega, q^2)$. Связь величин f и φ с L и M получается из соотношения

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') [L^{(i)}(\omega, q^2) + \hat{k}_1 M^{(i)}(\omega, q^2)] u(p) &\equiv \\ \equiv v'^* [f^{(i)}(\omega, q^2) + i\sigma [\mathbf{k}_1 \mathbf{k}'_1] \varphi^{(i)}(\omega, q^2)] v, & \quad (3.8) \\ i = 1, 2, \end{aligned}$$

где v' и v — двухкомпонентные спиноры, описывающие спиновое состояние начального и конечного нуклона в его системе покоя, σ — двухрядные матрицы Паули. Выражая $u(p)$ и $u(p')$ через двухкомпонентные спиноры v ($\bar{u}u = 1$), находим связь между L, M и f, φ в брейтовской системе

$$\begin{aligned} f^{(i)}(\omega, q^2) &= \frac{E}{m} L^{(i)}(\omega, q^2) + \omega M^{(i)}(\omega, q^2), \\ \varphi^{(i)} &= -\frac{1}{2m} M^{(i)}(\omega, q^2), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где E — энергия нуклона в брейтовской системе $E = \sqrt{m^2 + q^2/4}$, $q^2 = -q^2$.

Матричные элементы $f^{(i)}(\omega, q^2)$, $\varphi^{(i)}(\omega, q^2)$ могут быть выражены через амплитуду рассеяния (с переворотом спина и без него) в системе центра инерции мезона и нуклона. Если инвариантный матричный элемент (3.8) записать в системе центра инерции как ¹

$$\begin{aligned} \bar{u}_c(p') [L^{(i)}(\omega_c, q^2) + \hat{k}_{1c} M^{(i)}(\omega_c, q^2)] u_c(p_c) &= \\ = \frac{E_c + \omega_c}{m} v'^* [f_c^{(i)}(\omega_c, q^2) + i\sigma [\mathbf{k}_{1c} \mathbf{k}'_{1c}] \varphi_c^{(i)}(\omega_c, q^2)] v & \quad (3.10) \end{aligned}$$

(индекс c обозначает систему центра инерции) и учесть, что $L^{(i)}$ и $M^{(i)}$ являются инвариантами, то связь между f_c, φ_c и f, φ легко найдется после того, как мы выразим f_c и φ_c через L и M и воспользуемся (3.9). В результате получается [10]

$$\begin{aligned} f^{(i)}(\omega, q^2) &= \frac{E_c + \omega_c}{m} \left\{ \frac{E^2 + mE_c}{E(E_c + m)} f_c^{(i)}(\omega_c, q^2) - \frac{1}{2} q^2 \frac{E^2 - E_c^2}{E(E_c + m)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \varphi_c^{(i)}(\omega_c, q^2) \right\}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\varphi^{(i)}(\omega, q^2) = -\frac{1}{2m} \frac{1}{E_c + m} f_c^{(i)}(\omega_c, q^2) + \left[1 + \frac{q^2}{4m(E_c + m)} \right] \varphi_c^{(i)}(\omega_c, q^2),$$

причем энергия мезона в системе центра инерции E_c связана с энергией в брейтовской системе соотношением ²

$$E\omega = (E_c + \omega_c)\omega_c - \mu^2 - q^2/4. \quad (3.12)$$

При энергиях мезонов в системе центра инерции порядка $(2 \div 3)\mu$, которые будут играть роль в дисперсионных соотношениях, мы можем с хорошей точностью ($\sim (\mu/m)^2$) заменить (3.11) приближенными выражениями

$$f^{(i)}(\omega, q^2) = \frac{E_c + \omega_c}{m} f_c^{(i)}(\omega_c, q^2), \quad \varphi^{(i)}(\omega, q^2) = \varphi_c^{(i)}(\omega_c, q^2). \quad (3.13)$$

Для амплитуд $f_{c,T}(\omega_c, q^2)$, $\varphi_{c,T}(\omega_c, q^2)$, соответствующих заданному значению полного изотопического спина $T = 1/2$ и $3/2$,

¹ Множитель $(E_c + \omega_c)/m$ в правой части (3.10) введен для того, чтобы величины f_c и φ_c точно равнялись амплитудам рассеяния.

² Отметим, что, как следует из (3.12), в интересующей нас точке $\omega = 0$ и $q^2 = -4\mu^2$, ω_c также равно нулю, т. е. брейтовская система совпадает с системой центра инерции. Это обстоятельство можно, конечно, усмотреть и непосредственно из явного выражения для компонент импульсов нуклона и мезона в брейтовской системе.

имеют место известные разложения по полиномам Лежандра [10]

$$f_{c, T}(\omega_c, q^2) = \frac{1}{2ik_c} \sum_l [(l+1) \exp\{2i\delta_{l+}^T(\omega_c)\} + l \exp\{2i\delta_{l-}^T(\omega_c)\} - (2l+1)] P_l(1 - q^2/2k_c^2), \quad (3.14)$$

$$\varphi_{c, T}(\omega_c, q^2) = \frac{1}{2ik_c^3} \sum_l [\exp\{2i\delta_{l+}^T(\omega_c)\} - \exp\{2i\delta_{l-}^T(\omega_c)\}] \dot{P}_l(1 - q^2/2k_c^2),$$

где $\delta_{l+}^T(\omega_c)$ и $\delta_{l-}^T(\omega_c)$ — фазы рассеяния с изотопическим спином T и полными моментами $j = l + 1/2$ и $j = l - 1/2$ соответственно, $\dot{P}_l(x) = dP_l(x)/dx$.

Дисперсионные соотношения для функций $\tilde{f}^{(i)}(\omega, q^2)$ и $\tilde{\varphi}^{(i)}(\omega, q^2)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\tilde{f}^{(1)}(\omega, q^2)] - \operatorname{Re}[f^{(1)}(\omega_0, q^2) - f_p^{(1)}(\omega_0, q^2)] &= \\ = \frac{2}{\pi} (\omega^2 - \omega_0^2) \int_{\omega_1}^{\infty} \omega' d\omega' \frac{\operatorname{Im} f^{(1)}(\omega', q^2)}{(\omega'^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega_0^2)}, \\ \operatorname{Re}[\tilde{f}^{(2)}(\omega, q^2)] - \frac{\omega}{\omega_0} \operatorname{Re}[f^{(2)}(\omega_0, q^2) - f_p^{(2)}(\omega_0, q^2)] &= \\ = \frac{2}{\pi} \omega (\omega^2 - \omega_0^2) \int_{\omega_1}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} f^{(2)}(\omega', q^2)}{(\omega'^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega_0^2)}, \\ \operatorname{Re}[\tilde{\varphi}^{(1)}(\omega, q^2)] &= \frac{2\omega}{\pi} \int_{\omega_1}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} \varphi^{(1)}(\omega', q^2)}{\omega'^2 - \omega^2}, \\ \operatorname{Re}[\tilde{\varphi}^{(2)}(\omega, q^2)] &= \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\infty} \omega' d\omega' \frac{\operatorname{Im} \varphi^{(2)}(\omega', q^2)}{\omega'^2 - \omega^2}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где ω_1 — энергия, начиная с которой могут осуществляться состояния мезон + нуклон $\omega_1 = (m\mu - q^2/4)/(m^2 + q^2/4)^{1/2}$ (энергия, соответствующая ω_1 , в системе центра инерции мезона и нуклона равна μ), ω_0 — некоторая фиксированная энергия. В последних двух соотношениях (3.15) нет необходимости делать вычитание, поскольку амплитуда рассеяния с переворотом спина должна убывать с энергией, как и всякая амплитуда неупругого процесса [18]. Отсюда следует, что φ_c при больших энергиях достаточно быстро падает и интеграл будет сходиться без дополнительного улучшающего сходимости вычитания.

Входящие в (3.15) значения $f_p^{(1)}$ и $f_p^{(2)}$ легко вычисляются, если выражение для полюсного члена (2.25) записать в виде

$$\begin{aligned} g^2 v^{**} \left\{ -\omega \left[\frac{1}{2E\omega + \mu^2 + q^2/2} + \frac{1}{2E\omega - \mu^2 - q^2/2} \right] \delta_{\alpha\beta} - \right. \\ \left. - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \tau_\gamma \left[-\frac{\omega}{2E\omega - \mu^2 - q^2/2} + \frac{\omega}{2E\omega + \mu^2 + q^2/2} \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \frac{i}{2m} \sigma[\mathbf{k}_1 \mathbf{k}'_1] \left[\left(\frac{1}{2E\omega + \mu^2 + q^2/2} + \frac{1}{2E\omega - \mu^2 - q^2/2} \right) \delta_{\alpha\beta} - \right. \\ \left. - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \tau_\gamma \left(\frac{1}{2E\omega - \mu^2 - q^2/2} - \frac{1}{2E\omega + \mu^2 + q^2/2} \right) \right] \} v \equiv \\ \equiv v^{**} \{ f_p^{(1)}(\omega, q^2) \delta_{\alpha\beta} - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \tau_\gamma f_p^{(2)}(\omega, q^2) + i\sigma[\mathbf{k}_1 \mathbf{k}'_1] \times \\ \times [\varphi_p^{(1)}(\omega, q^2) \delta_{\alpha\beta} - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \tau_\gamma \varphi_p^{(2)}(\omega, q^2)] \} v. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Выразим в вычитательном и интегральном членах в (3.15) f и φ через амплитуды рассеяния в системе центра инерции и в качестве ω_0 выберем пороговую энергию μ в этой системе (т. е. $\omega_0 = \omega_1$ в брейтовской системе). Тогда, после подстановки $f_p^{(1)}$ и $f_p^{(2)}$ из (3.16), дисперсионные соотношения для интересующих нас величин $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ и $\varphi^{(2)}$ приобретут вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(1)}(\omega, q^2) &= \frac{m + \mu}{m} f_c^{(1)}(\mu, q^2) + \frac{g^2}{m} + \\ + \frac{2}{\pi} (\omega^2 - \omega_1^2) \int_{\mu}^{\infty} d\omega'_c \frac{d\omega'_c}{d\omega'_c} \omega'_c \frac{E'_c + \omega'_c}{m} \frac{\operatorname{Im} f_c^{(1)}(\omega', q^2)}{(\omega'^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega_1^2)}, \\ \tilde{f}^{(2)}(\omega, q^2) &= \frac{\omega}{\omega_1} \frac{m + \mu}{m} f_c^{(2)}(\mu, q^2) + \frac{g^2}{2m} \frac{\mu^2 + q^2/2}{m\mu - q^2/4} \frac{\omega}{\omega_1} + \\ + \frac{2\omega}{\pi} (\omega^2 - \omega_1^2) \int_{\mu}^{\infty} d\omega'_c \frac{d\omega'_c}{d\omega'_c} \omega'_c \frac{E'_c + \omega'_c}{m} \frac{\operatorname{Im} f_c^{(2)}(\omega', q^2)}{(\omega'^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega_1^2)}, \\ \tilde{\varphi}^{(2)}(\omega, q^2) &= \frac{2}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} d\omega' \frac{d\omega'}{d\omega'_c} \omega' \frac{\operatorname{Im} \varphi_c^{(2)}(\omega', q^2)}{\omega'^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

В полюсных членах в правой части (3.17) мы пренебрегли малыми поправками порядка $(\mu/m)^2$ и опустили знак Re в левой части (3.17), так как нас будет интересовать значения ω , близкие к нулю, и $q^2 = 4\mu^2$, где амплитуда действительна. В интегральных членах (3.17) мы перешли к интегрированию по энергии мезона в системе центра инерции ω'_c , так что нижний предел интегрирования оказался равным μ .

Вычисление правой части (3.17) и, в частности, значения амплитуды в нефизической области, может быть проведено на основе следующих соображений (ср. [19, 10]). При фиксированном q^2 физически осуществимые состояния начинаются с $\omega_{c, \min} = \sqrt{\mu^2 + q^2/4}$, так что область от $\omega'_c = \mu$ до $\omega'_c = \omega_{c, \min}$ является нефизической. Однако, если мы воспользуемся разложением амплитуды рассеяния по полиномам Лежандра (3.14), то легко увидим, что значение фаз рассеяния $\delta_l(\omega_c)$ всегда будет братья при физических значениях $k_c > 0$ и нефизичность будет заключаться лишь в нефизических значениях $\cos \theta_c$: $|\cos \theta_c| > 1$. Аналитическое продолжение полиномов Лежандра $P_l(\cos \theta_c)$ на значения

$|\cos \theta_c| > 1$ известно и, следовательно, вычисление интеграла в правой части (3.17) будет вполне корректным, если только при аналитическом продолжении $f_c(\omega_c, q^2)$ и $\varphi_c(\omega_c, q^2)$ по q^2 мы не выйдем за пределы той области, в которой это аналитическое продолжение законно.

Для задачи рассеяния мезонов на нуклонах в теории возмущений показано [20], что ближайшая особенность к точке $q^2 = 0$, от которой мы начинаем аналитически продолжать $f(\omega, q^2)$ и $\varphi(\omega, q^2)$, лежит при $q^2 = 4\mu^2$, так что мы можем ожидать, что аналитическое продолжение возможно при $q^2 < 4\mu^2$. Эта особенность соответствует рассеянию мезона на нуклоне через промежуточное двухмезонное состояние и имеет характер точки ветвления типа $\sqrt{4\mu^2 - q^2}$. Но, как известно, ряд по степеням x для функций типа $(1-x)^{1/2}$ является абсолютно сходящимся в точке $x = 1$ и дает правильное (равное нулю) значение функции. Это позволяет нам распространить аналитическое продолжение и на точку $q^2 = 4\mu^2$ и, следовательно, значения $f_c(\omega_c, 4\mu^2)$, $\varphi_c(\omega_c, 4\mu^2)$ можно получить путем аналитического продолжения $f_c(\omega_c, q^2)$, $\varphi_c(\omega_c, q^2)$ при малых q^2 . Члены, содержащие особенности при таком аналитическом продолжении, должны обратиться в нуль. Это последнее обстоятельство согласуется с замечанием, сделанным в сноске 7 к разделу 2, где было показано, что члены, пропорциональные $\sqrt{4\mu^2 - q^2}$, дают малый вклад порядка $1/L$, который в нулевом приближении может быть отброшен¹.

Из всего изложенного следует, что мы сможем вычислить правую часть (3.17), если запишем амплитуды рассеяния в виде (3.14), фазы рассеяния возьмем из эксперимента, а полиномы Лежандра $P_l(\cos \theta_c)$ аналитически продолжим на значения $\cos \theta_c = 1 + 2\mu^2/k_c^2$.

Для практических целей в разложении (3.14) достаточно учесть только три фазы δ_1 , δ_3 и δ_{33} . Зависимость этих фаз от энергии возьмем согласно фазовому анализу Орира [21]

$$\delta_1 = 0,16k_c/\mu, \quad \delta_3 = -0,11k_c/\mu, \quad \text{ctg } \delta_{33} = (\mu/k_c)^3 (8,05 - 3,8\omega^*) \omega^*,$$

$$\omega^* = E_c + \omega_c - m.$$

Вычисление дает

$$\begin{aligned} \frac{m+\mu}{m} f_c^{(1)}(\mu, 4\mu^2) &= 0,70/\mu, & \frac{m+\mu}{m\omega_1} f_c^{(2)}(\mu, 4\mu^2) &= 0,23\mu^2, \\ -\frac{2}{\pi} \omega_1^2 \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega'}{d\omega_c} d\omega'_c \frac{E'_c + \omega'_c}{m\omega'} \frac{\text{Im } f_c^{(1)}(\omega'_c, 4\mu^2)}{\omega'^2 - \omega_1^2} &= -0,23/\mu, \end{aligned} \quad (3.18)$$

¹ Заметим, что, поскольку в мнимой части амплитуды рассеяния члены, имеющие точку ветвления $q^2 = 4\mu^2$, строго равны нулю при $q^2 < 4\mu^2$, то при аналитическом продолжении $\text{Im } f_c(\omega_c, q^2)$ (или $\text{Im } \varphi_c(\omega_c, q^2)$) вплоть до $q^2 = 4\mu^2$, эти члены вообще не скажутся. Проведенное в тексте рассуждение важно лишь для членов $\text{Re } f_c^{(i)}(\omega_0, q^2)$ в (3.15).

$$-\frac{2}{\pi} \omega_1^2 \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega'}{d\omega_c} d\omega'_c \frac{E'_c + \omega'_c}{m\omega'^2} \frac{\text{Im } f_c^{(2)}(\omega', 4\mu^2)}{\omega'^2 - \omega_1^2} = -0,047/\mu^2,$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega'}{d\omega_c} d\omega'_c \frac{1}{\omega'} \text{Im } \varphi_c^{(2)}(\omega', 4\mu^2) = 0,028/\mu^2.$$

Складывая (3.18) со значениями полюсных членов (при $g^2 = 14,5$), имеем

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(1)}(0, 4\mu^2) &= \frac{g^2}{\mu} \left(\frac{\mu}{m} + \frac{0,70}{g^2} - \frac{0,23}{g^2} \right) = 0,18 \frac{g^2}{\mu}, \\ \frac{\partial}{\partial \omega} \tilde{f}^{(2)}(\omega, 4\mu^2) \Big|_{\omega=0} &= \frac{g^2}{\mu^2} \left(-0,0085 + \frac{0,23}{g^2} - \frac{0,047}{g^2} \right) = 0,0041 \frac{g^2}{\mu^2}; \quad (3.19) \\ \tilde{\varphi}^{(2)}(0, 4\mu^2) &= 0,0126 g^2 / m \mu^2. \end{aligned}$$

Отсюда, используя (3.9), получаем для входящих в (3.6) величин

$$\begin{aligned} \tilde{L}^{(1)}(0, 4\mu^2) &= 1,2 g^2 / m, \quad (\partial \tilde{L}(v, 4\mu^2) / \partial v)_{v=0} = 0,029 g^2 / m \mu^2, \\ \tilde{M}^{(2)}(0, 4\mu^2) &= -0,025 g^2 / \mu^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Обсудим точность полученных нами результатов. Как следует из (3.19), (3.17) в вычислении главного члена $\tilde{L}^{(1)}(0, 4\mu^2)$ основной вклад (свыше 80%) дает вычитание полюсного члена $f_p^{(1)}(\omega_0, 4\mu^2)$, который вычисляется точно. Вклад интегрального члена в $f^{(1)}$ (3.17) меньше 10%, поэтому та неопределенность, которая может возникнуть на счет неточного вычисления его при больших энергиях (фактически интеграл сходится уже при энергиях $\omega_c \sim 2,5\mu$ и неопределенность в нем, по-видимому, не превышает 10%), не превосходит 1% в $\tilde{L}^{(1)}$. Вклад вычитательного члена $f_c^{(1)}(\mu, 4\mu^2)$ в $\tilde{L}^{(1)}$ составляет около 25%. Основную роль в его вычислении играет P -фаза, поскольку при фиксированном q^2 и $k_c \rightarrow 0$ члены, обусловленные P -фазой, не стремятся к нулю. Учет D -фазы согласно данным Мухина и Понтерковю [22] в неблагоприятном случае

$$\delta_{3, j=1/2} = -0,2 \frac{\pi}{180} \left(\frac{k_c}{\mu} \right)^5, \quad \delta_{3, j=3/2} = 0$$

изменяет $f_c^{(1)}(\mu, 4\mu^2)$ на 7%. Неточность в $f_c^{(1)}(\mu, 4\mu^2)$ в основном проистекает из-за того, что функция $f_c^{(1)}(\mu, q^2)$ имеет особенность типа $\sqrt{4\mu^2 - q^2}$ (см. сноску на стр. 89) и вычисление $f_c^{(1)}(\mu, 4\mu^2)$ путем аналитического продолжения по q^2 лишь S -, P - и D -амплитуд не является достаточно хорошим. Можно думать, что $f_c^{(1)}(\mu, 4\mu^2)$ может содержать ошибку $\sim 25\%$ и, следовательно, величина $\tilde{L}^{(1)}(0, 4\mu^2)$ определена с точностью $\sim 5-7\%$. При этом предполагается, что рассеяние мезона мезоном не является аномально большим и сингулярная часть $f_c^{(1)}(\mu, q^2)$ не содержит большого коэффициента. Такое предположение может не выполняться, если рас-

РАССЕЯНИЕ НУКЛОНА НА НУКЛОНЕ В ДВУХМЕЗОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПРИ БОЛЬШИХ ОРБИТАЛЬНЫХ МОМЕНТАХ¹

Совместно с А. Д. Галанниным, А. Ф. Грашиным и Б. Л. Иоффе

С помощью метода, развитого авторами ранее [1], вычисляется амплитуда рассеяния нуклона на нуклоне в двухмезонном приближении при больших орбитальных моментах. Конкретные вычисления производятся для синглетной амплитуды в нерелятивистском приближении при не очень больших орбитальных моментах $1 \ll l \ll 4m^2/\mu^2$ (m — масса нуклона, μ — мезона). Результаты вычислений показывают, что уже F и G фазы при энергии нуклонов в лабораторной системе $E_{\text{лаб}} \lesssim 200 \text{ Мэв}$ с хорошей точностью могут быть получены из одномезонного приближения. Этот вывод может оказаться существенным для фазового анализа рассеяния нуклонов.

1. Вычисление двухмезонной амплитуды

В предыдущей работе [1]² было показано, что для вычисления амплитуды рассеяния нуклона на нуклоне в двухмезонном приближении при больших орбитальных моментах достаточно знать амплитуду рассеяния мезонов на нуклонах $f_{\alpha\beta}$. Эту последнюю амплитуду, согласно формулам (2.25, I), (3.1, I), (3.6, I), (3.20, I), следует записать так:

$$f_{\alpha\beta}(p_1, p_1 + q; k + q/2, k - q/2) = f_{p\alpha\beta} + \tilde{f}'_{\alpha\beta} + \tilde{f}''_{\alpha\beta},$$

$$f_{p\alpha\beta} = -g^2 \tau_\alpha \tau_\beta \frac{\hat{k}}{(k + q/2)^2 + 2p_1(k + q/2)} + g^2 \tau_\beta \tau_\alpha \frac{\hat{k}}{(k - q/2)^2 - 2p_1(k - q/2)}, \quad (1.1)$$

$$\tilde{f}'_{\alpha\beta} = \frac{g^2}{m} \alpha \delta_{\alpha\beta}, \quad \tilde{f}''_{\alpha\beta} = i \frac{g^2}{\mu^2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \tau_\gamma \left(\beta_1 \hat{k} + \beta_2 \frac{p_1 k}{m} \right),$$

где $\alpha = 1, 2$; $\beta_1 = 0,025$, $\beta_2 = -0,029$.

Подставим (1.1) в (2.29, I). Опустив слагаемое, квадратичное по $\tilde{f}''_{\alpha\beta}$ (оно даст в фазы рассеяния вклад, содержащий дополнительный множитель $1/L$, где L определено (2.16, I)), получим

$$M^2(q^2) = \frac{g^4}{\pi m} \left[\frac{3\alpha^2}{4} B_0 - \frac{3\alpha}{2} B_1 + \tau_\alpha^{(1)} \tau_\alpha^{(2)} B_2 + (3 + 2\tau_\alpha^{(1)} \tau_\alpha^{(2)}) B_3 + (3 - 2\tau_\alpha^{(1)} \tau_\alpha^{(2)}) B_4 \right], \quad (1.2)$$

¹ ЖЭТФ, 1960, 38, 475.

² Далее ссылки на [1] будут отмечаться как I.

сеяние мезона мезоном имеет резонанс при малых энергиях. В этом случае для оценки точности $f_c^{(1)}$ ($\mu, 4\mu^2$) нужно привлекать более высокие фазы. Оценка, полученная на основании D -фазы, ввиду отсутствия данных по более высоким фазам и возможным погрешностям опыта [22], может оказаться не вполне точной.

Члены $\partial L^{(2)}/\partial v$ и $M^{(2)}$ значительно меньше $L^{(1)}$ и поэтому ошибка в их вычислении практически не скажется на дальнейших результатах. Основная ошибка здесь возникает за счет неточного вычисления интеграла от мнимой части $\varphi_c^{(2)}$ (ω_c, q^2) при больших энергиях и может, по-видимому, доходить до 15—20%.

Подстановка в (2.28) $f_{\alpha\beta}$ в виде $f_{p\alpha\beta} + \tilde{f}_{\alpha\beta}$ приводит к сумме нескольких членов, между которыми, как показывает вычисление (см. [23]), происходит сильное сокращение (другими словами, если вместо $f_{\alpha\beta}$ подставить первое приближение теории возмущений, то получится грубо неверный результат). Такая компенсация $f_{p\alpha\beta}$ и $\tilde{f}_{\alpha\beta}$ сильно увеличивает роль погрешностей при определении величины $\tilde{L}^{(1)}$ ($0, 4\mu^2$). Конкретные вычисления двухмезонных фаз и сравнение их с одномезонными будет произведено в следующей работе [23].

Академия наук СССР

Получено 12 июня 1959 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Б. Окунь, И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 1959, 36, 300 (Собр. трудов, № 91).
2. S. Mandelstam. Phys. Rev., 112, 1344, 1958.
3. H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmerman. Nuovo cimento, 1, 205, 1955.
4. M. Goldberger. Phys. Rev., 1955, 99, 979.
5. В. Я. Файнберг, Е. С. Фрадкин. ДАН СССР, 1956, 109, 507.
6. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн. Таблица интегралов. Гостехиздат, 1951.
7. А. Salam. Nuovo cimento, 1956, 3, 424. А. Salam, W. Gilbert. Nuovo cimento, 1956, 3, 607.
8. Б. Л. Иоффе. ЖЭТФ, 1956, 31, 583.
9. Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 1956, 31, 515.
10. R. H. Capps, G. Takeda. Phys. Rev., 1956, 103, 1877.
11. R. J. Eden. Proc. Roy. Soc., 1952, A210, 388.
12. R. Karplus, C. M. Sommerfield, E. H. Wichman. Phys. Rev., 1959, 114, 376; Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 1959, 37, 62.
13. R. P. Feynman. Phys. Rev., 1949, 76, 749, 769.
14. Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений. Физматгиз, 1958.
15. H. J. Vrettermann, R. Oehme, J. G. Taylor. Phys. Rev., 1958, 109, 2178.
16. H. Lehmann. Nuovo cimento, 1958, 10, 579.
17. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, 1957, стр. 404.
18. И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 1956, 30, 423 (Собр. трудов, № 106); Л. Б. Окунь, И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 1956, 30, 424 (Собр. трудов, № 107).
19. M. L. Goldberger. Proc. Sixth Annual Rochester Conf., N. — Y., 1956.
20. K. Symanzik. Progr. Theor. Phys., 1958, 20, 690.
21. J. Ogar. Phys. Rev., 1955, 100, 288.
22. А. И. Мушин, В. М. Понтекорво. ЖЭТФ, 1956, 31, 550.
23. А. Д. Галаннин, А. Ф. Грашин, Б. Л. Иоффе, И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 38, 1960, 475 (Собр. трудов, № 93).

$$B_0 = \frac{2}{i} \int \Delta(k, q) d^4k (\bar{u}_{p_1+q} u_{p_1}) (\bar{u}_{p_2-q} u_{p_2}),$$

$$B_1 = \frac{2m}{i} \int \left[\frac{(\bar{u}_{p_1+q} | \hat{k} | u_{p_1}) (\bar{u}_{p_2-q} u_{p_2})}{(k+q/2)^2 + 2p_1(k+q/2)} + \frac{(\bar{u}_{p_2-q} | \hat{k} | u_{p_2}) (\bar{u}_{p_1+q} u_{p_1})}{(k-q/2)^2 + 2p_2(k-q/2)} \right] \Delta(k, q) d^4k,$$

$$B_2 = -\frac{2m^2}{i\mu^2} \int \left[\frac{(\bar{u}_{p_1+q} | \beta_1 \hat{k} + \beta_2 p_1 k/m | u_{p_1}) (\bar{u}_{p_2-q} | \hat{k} | u_{p_2})}{(k-q/2)^2 + 2p_2(k-q/2)} + \frac{(\bar{u}_{p_1+q} | \hat{k} | u_{p_1}) (\bar{u}_{p_2-q} | \beta_1 \hat{k} + \beta_2 p_2 k/m | u_{p_2})}{(k+q/2)^2 + 2p_1(k+q/2)} \right] \Delta(k, q) d^4k,$$

$$B_3 = \frac{m^2}{i} \int \frac{(\bar{u}_{p_1+q} | \hat{k} | u_{p_1}) (\bar{u}_{p_2-q} | \hat{k} | u_{p_2}) \Delta(k, q)}{[(k+q/2)^2 + 2p_1(k+q/2)][(k-q/2)^2 + 2p_2(k-q/2)]} d^4k,$$

$$B_4 = -\frac{m^2}{i} \int \frac{(\bar{u}_{p_1+q} | \hat{k} | u_{p_1}) (\bar{u}_{p_2-q} | \hat{k} | u_{p_2}) \Delta(k, q)}{[(k+q/2)^2 + 2p_1(k+q/2)][(k+q/2)^2 - 2p_2(k+q/2)]} d^4k,$$

$$\Delta(k, q) = [(k-q/2)^2 - \mu^2]^{-1} [(k+q/2)^2 - \mu^2]^{-1}.$$

Вводя, как обычно, фейнмановский параметр x , запишем B_0 в виде

$$B_0 = \frac{2w}{i} \int_0^1 dx \int d^4k [k^2 - \mu^2 + q^2/4 - qk(1-2x)]^{-2}, \quad (1.3)$$

$$w = (\bar{u}_{p_1+q} u_{p_1}) (\bar{u}_{p_2-q} u_{p_2}). \quad (1.4)$$

Интеграл по d^4k в (1.3) расходится на бесконечности, но вклад от больших импульсов является аддитивной константой, не зависящей от q^2 , и его можно не учитывать. Конечное слагаемое выделяем, дифференцируя предварительно (1.3) по μ^2 , затем интегрируя по d^4k и выполняя обратное интегрирование по μ^2 . Интегрируя, наконец, по dx , получим сингулярную часть интеграла в виде

$$B_0 = -w \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-s^2}}{s}, \quad (1.5)$$

$$s = \sqrt{1 - q^2/4\mu^2}. \quad (1.6)$$

При этом для корня (1.6) мы выбираем ту ветвь, которая в физической области положительна. В этом случае на верхнем берегу разреза $s = -i |s|$.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь синглетной амплитуды в нерелятивистском приближении и только для этого случая будем вычислять матричные элементы типа (1.4). Разложив w по степеням p^2/m^2 и подставив $\cos \theta = 1 + 2\xi^2$, получим с точностью до квадратичных членов включительно¹

$$w = 1 + (p^2/2m^2)(1 - \cos \theta) = 1 - \varepsilon^2; \quad \varepsilon = \mu/m. \quad (1.7)$$

¹ Обратим внимание на то, что ближайшие поправочные члены к выписанным в (1.7), в данном случае p^4/m^4 , отсутствуют. Аналогичные сокращения имеют место в матричных элементах (1.16), (1.23).

Разложив теперь (1.5) по степеням s и оставляя главный член, получим окончательно

$$B_0 = -\pi(1 - \varepsilon^2)s/2. \quad (1.8)$$

Для интегрирования в B_1 введем два фейнмановских параметра x_1 и x_2 (учтем, что $2p_1q = -q^2$, $2p_2q = q^2$):

$$B_1 = \frac{4m}{i} \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} dx_1 \int d^4k \left\{ \frac{(\bar{u}_{p_1+q} | \hat{k} | u_{p_1}) (\bar{u}_{p_2-q} u_{p_2})}{(k^2 - 2\bar{p}k - \Delta)^2} + \dots \right\}, \quad (1.9)$$

$$\bar{p} = -q/2 + qx_1 - p_1x_2, \quad \Delta = -q^2/4 - p_1qx_2 + \mu^2(1-x_2);$$

многоточием обозначен аналогичный член с заменой p_1 на p_2 .

Интегрируя по d^4k , получим

$$B_1 = w \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} dx_1 \frac{x_2}{b^2}, \quad b^2 = x_2^2 + \varepsilon^2(1-x_2) - 4\varepsilon^2(1-s^2)x_1 \times \\ \times (1-x_1-x_2). \quad (1.10)$$

Сделав замену $x_1 = (1 - \varepsilon y - z)/2$, $x_2 = \varepsilon y$ и проинтегрировав по dz , получим

$$B_1 = \frac{w}{\sqrt{1-s^2}} \int_0^{1/\varepsilon} \frac{y}{a} \operatorname{arctg} \frac{(1-\varepsilon y)\sqrt{1-s^2}}{a} dy, \quad (1.11)$$

где

$$a^2 = s^2 + \varepsilon(1 - 2s^2)y + [1 - \varepsilon^2(1 - s^2)]y^2. \quad (1.12)$$

При малых s^2 в (1.11) играют роль малые значения y , поэтому $\operatorname{arctg} [(1 - \varepsilon y)\sqrt{1-s^2}/a]$ можно заменить на $\pi/2$ (в Приложении показано, что при этом мы получим точное значение сингулярной части интеграла (1.11)). После этого интеграл легко вычисляется, причем верхний предел дает несингулярное в окрестности $s^2 = 0$ слагаемое, которое может быть отброшено. Далее, разложив результат по степеням s^2 и ε^2 и подставив (1.7), получим

$$B_1 = -\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) \left[s - \frac{\varepsilon}{2} \ln(\varepsilon + 2s) \right]. \quad (1.13)$$

Интеграл B_1 соответствует уже рассмотренному в разделе 2 работы [1] интерференционному члену, а его скачок на разрезе совпадает с (2.28, I).

Как уже отмечалось [1], при вычислении фаз мы будем интересоваться такими случаями, когда в эффективной области интегрирования в (2.15, I) $|2s| \gg \varepsilon$ (что соответствует $L \ll 4m^2/\mu^2$), поэтому члены типа $\ln(\varepsilon + 2s)$ мы не разлагаем по степеням s . Так как в физической области $s > 0$, то аргумент логарифма в (1.13) не обращается в нуль. Однако на другом листе римановой поверхности, где $s < 0$, этот аргумент обращается в нуль и, следовательно,

на этом листе имеется особая точка при $4s^2 = \mu^2/m^2$ или $q^2 = 4\mu^2 - \mu^4/m^2$.

Интеграл B_2 запишем в виде

$$B_2 = -\frac{4}{\varepsilon^2} \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} dx_1 F, \quad (1.14)$$

$$F = \frac{1}{i} \int d^4k \left\{ \frac{(\bar{u}_{p_1+q} | \hat{h} | u_{p_1}) (\bar{u}_{p_2-q} | \hat{h} | u_{p_2})}{(k^2 - 2\bar{p}k - \Delta)^2} + \dots \right\},$$

где величины \bar{p} , Δ определены (1.9), а многоточие означает аналогичный член с заменой p_2 на p_1 . Дифференцируя F по μ^2 и интегрируя затем по d^4k , получим

$$\frac{dF}{d\mu^2} = \frac{1-x_2}{4} \left\{ \frac{m^2 x_2^2 \beta_1 w_1 + x_2 [x_2 (m^2 + 2p^2) + q^2 (1-2x_1)/4] \beta_2 w}{(\bar{p}^2 + \Delta)^2} - \frac{1}{2} \frac{\beta_1 w_2 + \beta_2 w_1}{\bar{p}^2 + \Delta} \right\}, \quad (1.15)$$

где

$$w_1 = [(\bar{u}_{p_2-q} u_{p_2}) (\bar{u}_{p_1+q} | \hat{P}_2 | u_{p_1}) + (\bar{u}_{p_1-q} | \hat{P}_1 | u_{p_1}) (\bar{u}_{p_2-q} u_{p_2})] / 2m,$$

$$w_2 = (\bar{u}_{p_1+q} | \gamma_\alpha | u_{p_1}) (\bar{u}_{p_2-q} | \gamma_\alpha | u_{p_2}).$$

С точностью до членов, квадратичных по p^2/m^2 и ε^2 включительно, имеем

$$w_1 = 1 + \frac{p^2}{m^2} \left(2 - \frac{1 - \cos \theta}{2} \right) = 1 + \frac{2p^2}{m^2} + \varepsilon^2, \quad w_2 = 1 + \frac{2p^2}{m^2}. \quad (1.16)$$

Дальнейшие вычисления не содержат каких-либо трудностей. Опуская несингулярные в окрестности $s^2 = 0$ слагаемые, используя (1.7) и (1.16) и обозначая

$$\beta = -(\beta_1 + \beta_2) \left(1 + 2p^2/m^2 + \frac{5}{2} \varepsilon^2 \right) - 2\varepsilon^2 \beta_1, \quad (1.17)$$

получим

$$B_2 = -\frac{\pi}{4} \beta \left[s - \frac{\varepsilon}{2} \ln(\varepsilon + 2s) \right]. \quad (1.18)$$

Переходим теперь к вычислению интегралов B_3 и B_4 , которым соответствует четвертый порядок теории возмущений. Вводя четыре фейнмановских параметра и интегрируя по d^4k , получим

$$B_3 = \frac{m^2}{4} \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \delta \left(\sum x_i - 1 \right) \left[\frac{(\bar{u}_{p_2-q} | \hat{h} | u_{p_2}) (\bar{u}_{p_1+q} | \hat{h} | u_{p_1})}{(k^2 + \Delta)^2} - \frac{1}{2} \frac{w_3}{k^2 + \Delta} \right], \quad (1.19)$$

$$B_4 = -\frac{m^2}{4} \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \delta \left(\sum x_i - 1 \right) \times \left[\frac{(\bar{u}_{p_2-q} | \hat{h}' | u_{p_2}) (\bar{u}_{p_1+q} | \hat{h}' | u_{p_1})}{(k^2 + \Delta)^2} - \frac{1}{2} \frac{w_3}{k^2 + \Delta} \right], \quad (1.20)$$

где

$$h = p_2 x_1 + p_1 x_2 - q(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)/2,$$

$$h' = p_2 x_1 - p_1 x_2 - q(x_1 + x_2 + x_3 - x_4)/2,$$

$$\Delta = \mu^2(x_3 + x_4) - q^2(1 - 2x_1 - 2x_2)/4.$$

Учитывая, что с точностью p^2/m^2 , ε^2 , числитель в (1.19) можно записать в виде (ср. (1.22))

$$(\bar{u}_{p_2-q} | \hat{h} | u_{p_2}) (\bar{u}_{p_1+q} | \hat{h} | u_{p_1}) = m^2 (x_1 + x_2)^2 w_1,$$

преобразуем B_3 следующим образом:

$$B_3 = -\frac{1}{4} \left[\frac{w_3}{2} + w_1 \frac{\partial}{\partial \gamma} \right]_{\gamma=1} \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \delta \left(\sum x_i - 1 \right) \times$$

$$\times [\gamma (x_1 + x_2)^2 + \varepsilon^2 (x_3 + x_4 - 4(1-s^2)x_3 x_4) + 4(p^2/m^2 + \varepsilon^2(1-s^2))x_1 x_2]^{-1}.$$

Произведя замены переменных

$$x_1 = (\varepsilon y + \varepsilon x)/2, \quad x_2 = -x_1 + \varepsilon y, \quad x_3 = (1 - x_1 - x_2 - z)/2$$

и проинтегрировав по dz , получим

$$B_3 = -\frac{1}{4\sqrt{1-s^2}} \left[\frac{w_3}{2} + w_1 \frac{\partial}{\partial E^2} \right] \int_0^{1/\varepsilon} dy \int_0^y \frac{dx}{b_1} \arctg \frac{(1-\varepsilon y)\sqrt{1-s^2}}{b_1},$$

$$b_1^2 = s^2 + \varepsilon(1-2s^2)y + E^2 y^2 - [p^2/m^2 + \varepsilon^2(1-s^2)]x^2$$

$$(E^2 = 1 + p^2/m^2).$$

Так же, как при вычислении B_1 и B_2 , заменим в подынтегральном выражении арктангенс на $\pi/2$ и проинтегрируем по dx :

$$B_3 = -\frac{\pi}{8\sqrt{1-s^2}} \left(\frac{w_3}{2} + w_1 \frac{\partial}{\partial (E^2)} \right) \times$$

$$\times \int_0^{1/\varepsilon} \frac{dy}{\sqrt{p^2/m^2 + \varepsilon^2(1-s^2)}} \arcsin \left[\frac{y}{a_1} \sqrt{p^2/m^2 + \varepsilon^2(1-s^2)} \right],$$

$$a_1^2 = s^2 + \varepsilon(1-2s^2)y + E^2 y^2.$$

При p^2/m^2 , $\varepsilon^2 \ll 1$ можно разложить арксинус в ряд (учитываем два члена), после чего интегрирование по dy и последующее дифференцирование по E^2 дает для $|s|^2 \ll 1$:

$$B_3 = -\frac{\pi}{16} \left\{ (1 + 4\varepsilon^2)s - \varepsilon \left(1 + \frac{5}{2} \varepsilon^2 \right) \ln(\varepsilon + 2s) + (1 + \varepsilon^2) \frac{\varepsilon s}{\varepsilon + 2s} \right\}. \quad (1.21)$$

Для вычисления B_4 нужно точнее знать числитель в (1.20):

$$(\bar{u}_{p_2-q} | \hat{h}' | u_{p_2}) (\bar{u}_{p_1+q} | \hat{h}' | u_{p_1}) = m^2 (x_1 - x_2)^2 w_1 + m^2 x_1 x_2 w_3, \quad (1.22)$$

$$w_3 = -\frac{4p^2}{m^4} \left(1 - \frac{1 - \cos \theta}{2}\right) = -\frac{4p^2}{m^2} \left(\frac{p^2}{m^2} + \varepsilon^2\right). \quad (1.23)$$

Произведя замену переменных

$$x_2 = (1 - x_3 - x_4 - \varepsilon z)/2, \quad x_3 = (1 - \varepsilon y - x)/2, \quad x_4 = 1 - \varepsilon y - x_3$$

и проинтегрировав по dz , получим

$$B_4 = \frac{1}{4} \mathfrak{L} \frac{1}{E} \int_0^{1/\varepsilon} dy \int_0^{1-\varepsilon y} dx \frac{1}{b_2} \arctg \frac{yE}{b_2},$$

$$\mathfrak{L} = \frac{w_2}{2} + \left(w_1 - \frac{w_3}{4}\right) \frac{\partial}{\partial E^2} - \frac{w_3}{4} \frac{\partial}{\partial (p^2/m^2)}, \quad (1.24)$$

$$b_2^2 = s^2 + \varepsilon(1 - 2s^2)y - [p^2/m^2 + \varepsilon^2(1 - s^2)]y^2 + (1 - s^2)x^2.$$

Вычисление B_4 (см. Приложение) приводит в нерелятивистском приближении к следующему результату:

$$B_4 = -\frac{\pi}{16} \left\{ \left(1 + 3\varepsilon^2\right) s - \varepsilon \left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2\right) \ln(\varepsilon + 2s) + \frac{\varepsilon}{2Ev} \ln \frac{2sE + \varepsilon v}{\xi E(1+v)} - i\pi \frac{\varepsilon}{4v\sqrt{1-s^2}} \right\}, \quad (1.25)$$

$$v = \sqrt{1 + 4s^2/\xi^2}, \quad \xi = \mu/p. \quad (1.26)$$

Ветвь корня (1.26) определена аналогично (1.6) с разрезом от $s^2 = -\xi^2/4$ до $-\infty$. Характерной особенностью этой части амплитуды является наличие второй особой точки при $v = 0$, что соответствует $q^2 = 4\mu^2(1 + \xi^2/4)$ с особенностью вида

$$[4\mu^2(1 + \xi^2/4) - q^2]^{-1/2}.$$

При $\xi^2/4 \ll 1$ вторая точка находится в окрестности первой точки ($s^2 = 0$), а при $\xi^2 \rightarrow \infty$ отодвигается от первой на бесконечно большое расстояние; поэтому члены в (1.25), сингулярные только во второй точке, дадут вклад в фазы лишь для случая $\xi^2/4 \lesssim 1/L$. В связи с этим при вычислении таких членов произведено разложение по ξ^2 , что обеспечивает вычисление фаз с ошибками $< 1/L$ (см. Приложение). Последнее слагаемое в (1.25) является единственным членом во всей двухмезонной амплитуде, дающим вклад в $\text{Im}I_i^{(2)}$, поэтому оно вычислено точно для любых $s^2 \leq 0$, так как эффективной областью интегрирования по $|s|$ для $\text{Im}I_i^{(2)}$ является уже окрестность второй точки $|s| = \xi/2$.

Подставляя (1.8), (1.13), (1.18), (1.21) и (1.25) в (1.2), получим для сингулярной части синглетной амплитуды следующее

выражение ($|s|^2 \ll 1, |v|^2 \ll 1$):

$$M^{(2)}(s^2) = -\frac{3g^4}{8m} \left\{ c_0 s + \varepsilon c_1 \ln(\varepsilon + 2s) + \varepsilon c_2 \frac{s}{\varepsilon + 2s} + \varepsilon \frac{3 - 2\lambda_\tau}{12} \left[\frac{1}{Ev} \ln \frac{2Es + \varepsilon v}{\xi E(1+v)} - \frac{i\pi}{2v\sqrt{1-s^2}} \right] \right\}, \quad (1.27)$$

$$c_0 = (\alpha - 1)^2 + (7/2 - \alpha - \alpha^2)\varepsilon^2 + \lambda_\tau(\varepsilon^2 + 2\beta)/3,$$

$$c_1 = \alpha - 1 + (\alpha/2 - 2)\varepsilon^2 - \lambda_\tau(\varepsilon^2 + \beta)/3,$$

$$c_2 = (3 + 2\lambda_\tau)(1 + \varepsilon^2)/6,$$

где λ_τ — собственное значение оператора $\tau_\alpha^{(1)}\tau_\alpha^{(2)}$. При вычислении амплитуды учтены поправки первого порядка от разложения по степеням ε^2 и $p^2/m^2 = \varepsilon^2/\xi^2$.

2. Вычисление двухмезонных фаз

Для вычисления двухмезонных синглетных фаз нам осталось проинтегрировать амплитуду рассеяния по $|s|$ вдоль разреза, используя соотношение (2.15, I) для каждой из входящих в (1.27) функций.

Учитывая, что скачок функции s на разрезе $\Delta s = -2i|s|$, получим для вклада в I_l от этой функции

$$[s]_l = -4\pi^{-1/2}\xi^2 Q_l(1 + 2\xi^2) L^{-3/2}. \quad (2.1)$$

Подставляя в (2.15, I) скачок функции $\ln(\varepsilon + 2s)$, равный $-2i \arctg(2|s|/\varepsilon)$, получим для соответствующего вклада в I_l :

$$[\ln(\varepsilon + 2s)]_l = -(16\xi^2/\pi) Q_l(1 + 2\xi^2) \int_0^\infty e^{-L|s|^2} \arctg(2|s|/\varepsilon) |s| d|s|. \quad (2.2)$$

Интеграл (2.2) вычисляем, продифференцировав его сначала по ε :

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_0^\infty e^{-L|s|^2} \arctg\left(\frac{2|s|}{\varepsilon}\right) |s| d|s| = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{L}} + \frac{\varepsilon\pi}{8} e^{\varepsilon^2 L/4} \times \left[1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{L}}{2}\right) \right], \quad (2.3)$$

где $\Phi(\varepsilon\sqrt{L}/2)$ — интеграл вероятности. Если мы ограничимся рассмотрением не слишком больших орбитальных моментов, то параметр $\zeta = \varepsilon\sqrt{L}/2 \ll 1$. При любых энергиях для этого достаточно ограничить l неравенством

$$l \ll 4/\varepsilon^2 = 180. \quad (2.4)$$

Разложив теперь (2.3) по степеням ζ , получим после обратного интегрирования по ε

$$[\ln(\varepsilon + 2s)]_l = -4\xi^2 Q_l(1 + 2\xi^2) L^{-1} [1 - 2\pi^{-1/2}\zeta + \dots]. \quad (2.5)$$

Заметим, что оба выписанных в (2.5) члена легко получить прямо из (2.2), разложив арктангенс по степеням $\varepsilon/2|s|$, однако следующие члены разложения по ζ получить таким образом уже нельзя, так как интегралы от каждого отдельного члена будут расходиться.

Для члена $s/(\varepsilon + 2s)$, разложив по степеням $\varepsilon/2|s|$, получим первый член разложения по ζ :

$$\Delta \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2s} = -\frac{2i\varepsilon|s|}{\varepsilon^2 + 4|s|^2} = -i \frac{\varepsilon}{2|s|} + \dots,$$

$$\left[\frac{s}{\varepsilon + 2s} \right]_l = -\frac{2\xi^2}{\sqrt{\pi}} \varepsilon L^{-1/2} Q_l(1 + 2\xi^2). \quad (2.6)$$

При интегрировании оставшихся членов рассмотрим отдельно две области интегрирования: $0 \leq |s| \leq |\xi/2|$ (от первой особой точки до второй) и $|s| \geq \xi/2$ (после второй точки). Для функции

$$[\ln(2Es + \varepsilon v) - \ln E\xi(1 + v)]/Ev$$

в первой области имеем

$$\Delta \frac{1}{Ev} \ln \frac{2Es + \varepsilon v}{E\xi(1 + v)} = -\frac{2i}{Ev} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2E|s|}{\varepsilon v} = -\frac{2i}{Ev} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon v}{2E|s|} + \dots \right). \quad (2.7)$$

Первый член разложения по $\varepsilon/2|s|$ дает вклад в I_l :

$$-\frac{8\xi^2}{E} Q_l(1 + 2\xi^2) \int_0^{\xi/2} e^{-L|s|^2} \frac{|s|d|s|}{\sqrt{1 - 4|s|^2/\xi^2}} =$$

$$= -\frac{4\xi^3}{E\sqrt{L}} Q_l(1 + 2\xi^2) e^{-\xi^2 L/4} \int_0^{\xi\sqrt{L/2}} e^{z^2} dz. \quad (2.8)$$

Во второй области интегрирования

$$\Delta \frac{1}{Ev} \ln \frac{2E|s| + \varepsilon v}{E\xi(1 + v)} = \frac{2i}{E|v|} [\ln(\varepsilon|v| + 2E|s|) - \ln 2E|s|] = \frac{is}{E^2|s|} + \dots \quad (2.9)$$

Объединив вклады от первого члена разложения (2.9) и от второго члена в (2.7), получим

$$4\pi^{-1/2}\xi^2 \varepsilon L^{-1/2} (1 - p^2/m^2) Q_l(1 + 2\xi^2). \quad (2.10)$$

В (2.10) мы подставили $E^2 = 1 + p^2/m^2$ и учли члены первого порядка по p^2/m^2 .

Последнее слагаемое в амплитуде (1.27) является единственным, дающим вклад в $\operatorname{Im} I_l^{(2)}$. Для него разрез начинается только во второй точке¹, поэтому мы не можем использовать формулу (2.15, I), полученную для начальной точки $t = 1 + 2\xi^2$. Для начальной точки $t_\xi = 1 + 2\xi^2(1 + \xi^2/4)$, которая соответствует $v = 0$ ($q^2 = 4\mu^2(1 + \xi^2/4)$), совершенно аналогично можно получить формулу

$$I_l = \frac{\xi^4}{\pi i} Q_l(t_\xi) \int_0^\infty e^{-L\xi|v|^2} \Delta M(v^2) d|v|^2, \quad (2.11)$$

$$L\xi = (l + 1)\xi^3/\sqrt{(1 + \xi^2/4)[1 + \xi^2(1 + \xi^2/4)]}.$$

Подставляя $i/v\sqrt{1 - s^2} \approx i/v\sqrt{1 + \xi^2/4}$ в (2.11), получим для соответствующего вклада в I_l :

$$[i/v\sqrt{1 - s^2}]_l = 2i\xi^3(\pi L)^{-1/2} Q_l(t_\xi). \quad (2.12)$$

Учитывая (2.1), (2.5), (2.6), (2.10) и (2.12), получим для двухмезонного синглетного интеграла I_l :

$$I_l^{(2)} = \frac{3g^4}{2m} \frac{\xi^2}{\sqrt{\pi L^{3/2}}} \left\{ Q_l(1 + 2\xi^2) [c_0 + \zeta d_1 + \zeta^2 d_2] + i\pi \frac{3 - 2\lambda_\tau}{12\varepsilon} \xi^2 Q_l(t_\xi) \right\}, \quad (2.13)$$

где

$$d_1 = 2\sqrt{\pi} \left[c_1 + \frac{1}{6} (3 - 2\lambda_\tau) (1 - p^2/2m^2) \psi(z) \right],$$

$$d_2 = 2c_2 - 4c_1 - \left(1 - \frac{2}{3} \lambda_\tau \right) (1 - p^2/m^2),$$

$$\psi(z) = ze^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx, \quad z^2 = L\xi^2/4.$$

Подставляя численные значения для α , β и $\varepsilon^2 = 0,0223$, имеем

$$c_0 = 0,06 + 0,01\lambda_\tau, \quad d_1 = 0,6 - 0,03\lambda_\tau + 0,6\lambda_\tau^2 (1 - p^2/2m^2) \psi(z),$$

$$d_2 = -0,7 + p^2/m^2 + \lambda_\tau (1,4 - 2p^2/3m^2). \quad (2.14)$$

Синглетные фазы рассеяния связаны с интегралами I_l следующим образом:

$$p \operatorname{Re} I_l = 2 \sin 2\delta_l \approx 4\delta_l, \quad p \operatorname{Im} I_l = 2(1 - \cos 2\delta_l) \approx 4\delta_l^2.$$

Отсюда следует, что для больших орбитальных моментов (когда $|\delta_l| \ll 1$) двухмезонная фаза $\delta_l^{(2)} = (\varepsilon m/4\xi) \operatorname{Re} I_l^{(2)}$ пропорциональ-

¹ Интересно отметить, что этот результат не связан с использованным нами приближением (разложение по $1/L$) и справедлив даже для точной амплитуды рассеяния, т. е. вклад в $\operatorname{Im} I_l$ дают значения $t \geq t_\xi$.

на квадрату одномезонной фазы $\delta_l^{(1)}$, так как $\text{Im} I_l^{(1)} = 0$, а квадрат «полной» фазы $(\delta_l)^2 \approx [\delta_l^{(1)}]^2$.

Полученные результаты (2.13), (2.14) показывают, что происходит сильная компенсация вкладов от теории возмущений (диаграммы четвертого порядка) и членов, полученных с помощью дисперсионных соотношений (содержащих α и β). Кроме того, взаимно компенсируются члены, содержащие β_1 и β_2 (в конечный результат входит их линейная комбинация $\beta \ll \beta_1, \beta_2$), в результате чего часть амплитуды рассеяния мезона на нуклоне $\tilde{f}_{\alpha\beta}$ (см. (1.1)) дает незначительный вклад в (2.13).

Формула (2.13) является главной частью асимптотического разложения по параметру $1/L$ (см. раздел 2 работы [1]) и поэтому ее точность должна быть, вообще говоря, порядка $1/L$. В результате указанной выше компенсации в главном члене роль следующего члена асимптотического разложения может возрасти. Для грубых оценок по порядку величины можно пользоваться полученной формулой и в тех случаях, когда параметр разложения не очень мал, $1/L \lesssim 1$.

Отношение двухмезонных фаз к одномезонным

$E_{\text{лаб}}, \text{Мэв}$	2,5	10	40	90	160	360	650
1P	-0,08	-0,15	-0,2				
1D	0,02	0,04	0,1	0,25			
1F	$-3 \cdot 10^{-3}$	$-6 \cdot 10^{-3}$	-0,02	-0,04	-0,05	-0,1	
1G	10^{-3}	$3 \cdot 10^{-3}$	0,01	0,04	-0,1	0,25	
1H	-10^{-4}	$4 \cdot 10^{-4}$	$-3 \cdot 10^{-3}$	$-7 \cdot 10^{-3}$	-0,015	-0,035	-0,08

В таблице приведены значения $\delta_l^{(2)}/\delta_l^{(1)}$, вычисленные для некоторых l и ξ , согласно формулам (2.13) и (2.9, I). Мы видим, что с хорошей точностью можно пользоваться одномезонной 1D фазой для энергий $E_{\text{лаб}} \lesssim 40 \text{ Мэв}$ и одномезонными 1F и 1G фазами для $E_{\text{лаб}} \lesssim 150 \text{ Мэв}$. Приведенные оценки по порядку величины должны быть справедливы и для триплетных фаз. Отсюда следует, что при фазовом анализе рассеяния нуклонов для $E_{\text{лаб}} \lesssim 150 \text{ Мэв}$ все фазы, соответствующие $l \geq 3$, можно считать одномезонными, а из опыта определять лишь S -, P - и D -фазы.

3. Заключение

Полученные нами результаты означают, что уже при небольших орбитальных моментах фазы упругого рассеяния нуклонов нуклонами определяются одномезонным взаимодействием. Это обстоятельство может быть существенным при проведении фазового анализа нуклонных соударений, поскольку (как было уже

отмечено [2,3]) нет необходимости считать при этом все учитываемые фазы произвольно варьируемыми параметрами. Если для заданных l и E двухмезонные амплитуды (2.13) оказываются значительно меньшими одномезонных (2.9, I), то с достаточным основанием можно учитывать соответствующие фазы в одномезонном приближении. Отсутствие в данный момент полного опыта по нуклон-нуклонному рассеянию не дает, по-видимому, возможности сделать однозначный фазовый анализ экспериментальных данных. Наилучшие из имеющихся данных по рассеянию $p-p$ с энергией 310 Мэв дают восемь наборов фаз [4], из которых только два имеют фазы с большими l , совпадающими с одномезонными. Несомненно, что использование одномезонного «хвоста» в пределах, указанных в настоящей работе, должно облегчить фазовый анализ.

Результаты этой работы существенно основывались на использовании дисперсионных соотношений при передаваемых импульсах, близких к $4\mu^2$. Хотя нет оснований сомневаться в применимости дисперсионных соотношений в этих условиях, тем не менее экспериментальная проверка полученных результатов могла бы пролить свет на область применимости дисперсионных соотношений. Так как мы рассматривали только синглетное рассеяние, то, естественно, мы не получили полного матричного (по спинам) оператора рассеяния, отвечающего двухмезонному обмену. Однако вычисления для триплетных состояний не представляют принципиальных трудностей и произведены Грашиным и Кобзаревым [6].

Во всех приведенных выше рассуждениях мы вели разложение по степеням $1/L$, оставляя лишь первый исчезающий член, так что точность нашего результата должна быть порядка $1/L$. Нетрудно видеть, однако, что основные формулы (2.12, I) и (2.20, I) будут иметь место при значительно меньших ограничениях на величину орбитального момента. Для их применимости достаточно выполнения неравенства

$$1 \gg \frac{Q_l \left(1 + \frac{9}{2} \xi^2\right)}{Q_l(1 + 2\xi^2)} \approx \begin{cases} \exp\left\{-\left(l + \frac{1}{2}\right)\xi\right\} & \text{для } \xi^2 \ll 1, \\ \left(\frac{4}{9}\right)^{l+1} & \text{для } \xi^2 \gg 1, \end{cases}$$

обеспечивающего возможность пренебречь в сумме по промежуточным состояниям в $A_1(E, q^2)$ трехмезонными состояниями. Формула (2.21, I) при этом сохранится. В этом случае, конечно, нельзя ограничиться вычислением $\tilde{f}_{\alpha\beta}$ в точке $\omega = 0$ и $q^2 = 4\mu^2$, а необходимо знать амплитуду рассеяния мезонов на нуклонах в некоторой конечной области вокруг точки $\omega = 0$, $q^2 = 4\mu^2$. Поэтому задача аналитического продолжения амплитуды рассеяния мезонов на нуклонах существенно усложнится. Если бы, однако, такое аналитическое продолжение было осуществлено, то можно было бы получить достаточно точные выражения для двухмезонных фаз рассеяния нуклонов нуклонами при еще меньших l . При этом надо подчеркнуть, что такое расширение на малые l существенно

основывается на результатах Мандельштама [5], в то время как полученные в этой работе результаты в сущности основаны только на том, что: 1) ближайшая особая точка (кроме одномононного полюса) лежит при $q^2 = 4\mu^2$; 2) вблизи $q^2 = 4\mu^2$ нет никаких других особых точек (кроме $q^2 = 4\mu^2 (1 + \xi^2/4)$).

В результате сильной компенсации главных членов, о которой говорилось выше, погрешности в определении $L^{(1)}(0, 4\mu^2) = a$ (раздел 3 работы [1]) могут сильно изменить (например, в два раза) окончательные данные о двухмезонных фазах, приведенные в таблице. Однако, если отношение $\delta_l^{(2)}/\delta_l^{(1)}$, например, меньше 10%, то эти погрешности не смогут изменить вывода о том, что в данном случае фаза рассеяния в основном определяется одномононным взаимодействием.

Рассеяние нуклонов нуклонами, обязанное двухмезонному обмену, оказалось возможным выразить через рассеяние π -мезонов нуклонами и, таким образом, установить связь между этими различными процессами. Это обстоятельство не случайно. Если окажется возможным проведение вычисления с малыми l , то нуклон-нуклонное рассеяние будет выражаться через амплитуды рассеяния мезонов нуклонами, амплитуду процесса $\pi + n \rightarrow 2\pi + n$ и т. д.

Авторы выражают свою признательность Л. Д. Ландау за многочисленные дискуссии, а также В. Б. Берестецкому, Л. Б. Окуню, А. П. Рудику, Я. А. Смородинскому, К. А. Тер-Мартirosяну, И. М. Шмушкевичу за ряд полезных замечаний.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Вычисление B_1 . Для вычисления интеграла B_1 введем вспомогательную функцию

$$B_1(u) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \int_0^{1/\varepsilon} \frac{y}{a} \operatorname{arctg} \frac{(1-\varepsilon y) \sqrt{1-s^2} + u}{a} dy, \quad (II.1)$$

$$a^2 = s^2 + \varepsilon(1-2s^2)y + [1 - \varepsilon^2(1-s^2)]y^2.$$

Искомый интеграл равен значению этой функции при $u = 0$, которое можно записать в виде

$$B_1(0) = B_1(\infty) - \int_0^\infty \frac{\partial B_1(u)}{\partial u} du, \quad (II.2)$$

$$B_1(\infty) = \frac{1}{2\sqrt{1-s^2}} \int_0^{1/\varepsilon} \frac{y dy}{a}, \quad (II.3)$$

$$\frac{\partial B_1(u)}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \int_0^{1/\varepsilon} \frac{y dy}{1 - \varepsilon y + y^2 + u^2 + 2(1-\varepsilon y)\sqrt{1-s^2}}; \quad u > 0. \quad (II.4)$$

Рассмотрим аналитические свойства функций (II.2), (II.3), (II.4) по переменной s^2 . Исходный интеграл был аналитической функцией на всей плоскости с разрезом от $s^2 = 0$ до $-\infty$ (что соответствует $q^2 \geq 4\mu^2$, $t \geq 1 + 2\xi^2$). В интеграле (II.3) появилась дополнительная особая точка $s^2 = 1$ ($q^2 = 0$), поэтому для (II.3) необходимо сделать второй разрез от $s^2 = 1$ до $+\infty$ ($q^2 \leq 0$, $t \leq 1$). Интеграл (II.4) как функция переменной $\sqrt{1-s^2}$ аналитичен в правой полуплоскости, а как функция s^2 — на всей плоскости с разрезом от $s^2 = 1$ до $+\infty$, так как мы положили $\sqrt{1-s^2} > 0$ при $s^2 < 1$. Поскольку при вычислении фаз нужно интегрировать по разрезу $s^2 \leq 0$ ($q^2 \geq 4\mu^2$), то вклад от второго слагаемого в (II.2) тождественно исчезает и его можно не учитывать. Оставшийся интеграл вычисляется элементарно. Таким образом, изложенный способ позволил нам точно выделить из исходного интеграла (1.14) сингулярное слагаемое, дающее вклад в (2.15, I), «испортив» при этом поведение функции в другой области, которая не входит в последующее интегрирование (2.15, I).

2. Вычисление B_4 . Интеграл B_4 , которому соответствует фейнмановский график четвертого порядка, изображенный на рисунке, обладает, в отличие от предыдущих интегралов, той особенностью, что подынтегральная функция его параметрического представления (1.20) сингулярна для любых вещественных q^2 . Это приводит к тому, что вещественная ось для интеграла $B_4(q^2)$, рассматриваемого формально при любых комплексных значениях q^2 , является особой линией. Однако прямыми вычислениями мы покажем, что функцию B_4 можно аналитически продолжить из физической области на всю плотность с разрезом от $q^2 = 4\mu^2$ до $+\infty$, что соответствует аналитическому продолжению, использованному в разделе 2 работы [1]. При этом

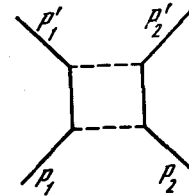


Диаграмма для интеграла B_4

она будет совпадать с исходным фейнмановским интегралом лишь в верхней полуплоскости. Для вычисления фаз нам нужна именно эта функция, и мы не будем вводить для нее особого обозначения.

Для вычисления оставшегося в (1.24) интеграла по двум параметрам введем функцию

$$f(u) = \int_0^{1/\varepsilon} dy \int_0^{1-\varepsilon y} dx \frac{1}{b_2} \operatorname{arctg} \frac{yE + u}{b_2}, \quad (II.5)$$

$$b_2^2 = s^2 + \varepsilon(1-2s^2)y - [p^2/m^2 + \varepsilon^2(1-s^2)]y^2 + (1-s^2)x^2 - i0.$$

Искомый интеграл равен значению $f(u)$ при $u = 0$:

$$f(0) = f(\infty) - \int_0^{\infty} \frac{\partial f(u)}{\partial u} du, \quad (\text{П.6})$$

$$f(\infty) = \frac{\pi}{2} \int_0^{1/\varepsilon} dy \int_0^{1-\varepsilon y} \frac{dx}{b_2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-s^2}} \int_0^{1/\varepsilon} [\ln(R_1 + \sqrt{1-s^2}(1-\varepsilon y)) - \ln R] dy, \quad (\text{П.7})$$

$$R^2 = s^2 + \varepsilon(1-2s^2)y - [p^2/m^2 + \varepsilon^2(1-s^2)]y^2 - i0,$$

$$R_1^2 = 1 - \varepsilon y - p^2 y^2 / m^2 - i0,$$

$$\frac{\partial f(u)}{\partial u} = \int_0^{1/\varepsilon} dy \int_0^{1-\varepsilon y} dx \left[s^2 + \varepsilon(1-2s^2)y + \left(E^2 - \frac{p^2}{m^2} - \varepsilon^2(1-s^2) \right) y^2 + (1-s^2)x^2 + 2Eyu + u^2 \right]^{-1}. \quad (\text{П.8})$$

Подынтегральное выражение в (П.7) сингулярно по-прежнему на всей вещественной оси, поэтому при последующем интегрировании по dy нужно считать s^2 вещественным, а результат интегрирования аналитически продолжать в нефизическую область. Подынтегральное выражение в (П.8) сингулярно уже лишь для $s^2 \leq 0$ ($q^2 \geq 4\mu^2$), т. е. второе слагаемое в (П.6) является аналитической функцией на всей плоскости с разрезом от $s^2 = 0$ до $-\infty$. После интегрирования по x (П.8) имеет вид

$$\frac{\partial f(u)}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \int_0^{1/\varepsilon} \frac{dy}{a_2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{1-s^2}(1-\varepsilon y)}{a_2}, \quad (\text{П.9})$$

$$a_2^2 = s^2 + \varepsilon y(1-2s^2) + [E^2 - p^2/m^2 - \varepsilon^2(1-s^2)]y^2 + 2Eyu + u^2.$$

Из этого интеграла выделим сингулярное на разрезе слагаемое, вводя еще один вспомогательный параметр аналогично тому, как это сделано в (П.1), (П.2):

$$\frac{\partial f(u)}{\partial u} = \frac{\partial f(u, \infty)}{\partial u} - \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u \partial v} dv, \quad (\text{П.10})$$

$$\frac{\partial f(u, \infty)}{\partial u} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-s^2}} \int_0^{1/\varepsilon} \frac{dy}{a_2}, \quad (\text{П.11})$$

$$\frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u \partial v} = \int_0^{1/\varepsilon} \left[1 - \varepsilon y + \left(E^2 - \frac{p^2}{m^2} \right) y^2 + 2Eyu + u^2 + v^2 + 2(1-\varepsilon y)v\sqrt{1-s^2} \right]^{-1} dy, \quad u, v \geq 0. \quad (\text{П.12})$$

Второе слагаемое в (П.10) можно не учитывать, так как оно является аналитической функцией для $\operatorname{Re} s^2 < 1$ ($\operatorname{Re} q^2 > 0$). В оставшейся сингулярной

части (П.11) появилась дополнительная особая точка $s^2 = 1$ и второй разрез от $s^2 = 1$ до $+\infty$ ($q^2 \leq 0$). Подставим теперь (П.10), (П.11) в (П.6) и проинтегрируем по du . На верхнем пределе интеграл расходится, но зависимость от s^2 исчезает, поэтому нужно оставить лишь вклад от нижнего предела. Таким образом, сингулярная часть, дающая вклад в (2.15, 1), имеет вид

$$f = f(\infty) + \frac{\pi}{2\sqrt{1-s^2}} \int_0^{1/\varepsilon} \ln[R_2 + Ey] dy, \quad (\text{П.13})$$

$$R_2^2 = s^2 + \varepsilon y(1-2s^2) + [E^2 - p^2/m^2 - \varepsilon^2(1-s^2)]y^2 - i0.$$

Оставшийся в (П.13) интеграл по dy вычисляется точно, так как после интегрирования по частям и уничтожения иррациональностей в знаменателе интеграл приводится к элементарному:

$$f(\infty) = i\pi \frac{2p^2/m^2 + \varepsilon^2}{4pP^2/m} \ln \frac{\varepsilon - 2ip/m}{\varepsilon} - \frac{\pi K_1}{4\sqrt{1-s^2}} \ln(-K_1) + \frac{\pi K_2}{4\sqrt{1-s^2}} \ln K_2 + i\pi^2 \frac{\varepsilon(1-2s^2)}{8P^2\sqrt{1-s^2}} - \pi \frac{\varepsilon(1-2s^2)}{8P^2\sqrt{1-s^2}} \times \times \ln \left(\frac{4p^2}{m^2} + \varepsilon^2 \right) - \frac{\pi K}{8P^2\sqrt{1-s^2}} \ln \frac{2\sqrt{1-s^2}p/m - iK}{2\sqrt{1-s^2}p/m + iK} + \frac{\pi \varepsilon(1-2s^2)}{8P^2\sqrt{1-s^2}} \ln \left[\frac{1}{4P^2} (F_1 - KF_2)(F_1 + KF_2) \right] + \frac{\pi K}{8P^2\sqrt{1-s^2}} \ln \frac{F_1 - KF_2}{F_1 + KF_2}. \quad (\text{П.14})$$

Здесь обозначено:

$$F_1 = 2(2p^2/m^2 + \varepsilon^2)(\sqrt{1-s^2} + 1 - s^2) + K^2, \quad F_2 = \varepsilon(1 + 2\sqrt{1-s^2}),$$

$$P^2 = p^2/m^2 + \varepsilon^2(1-2s^2), \quad K = \sqrt{4s^2 p^2/m^2 + \varepsilon^2},$$

$$K_1 = [K + \varepsilon(1-2s^2)]/2P^2, \quad K_2 = [K - \varepsilon(1-2s^2)]/2P^2.$$

Корень K выбран так, что он положителен в физической области, а разрез направлен от $s^2 = -\xi^2/4$ до $-\infty$ ($q^2 \geq 4\mu^2(1 + \xi^2/4)$). При этом функция (П.14) аналитична на всей плоскости с указанным разрезом. Оставляя лишь слагаемые, сингулярные при $s^2 < 1$ ($q^2 > 0$), получим

$$f(\infty) = \frac{\pi}{4\sqrt{1-s^2}} [-K_1 \ln(-K_1) + K_2 \ln K_2]. \quad (\text{П.15})$$

Аналогично вычисляем второе слагаемое в (П.13):

$$\int_0^{1/\varepsilon} dy \ln[R_2 + Ey] = \frac{1}{\varepsilon} [\ln(\sqrt{E^2 - p^2/m^2} + E) - 1] + \frac{K_1}{2} \ln(-K_1) - - \frac{K_2}{2} \ln K_2 + K_2 \ln(1/\varepsilon + K_2) - \frac{i\pi K_1}{2} + \frac{K}{2P^2} \ln(2Es + K) -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{E\varepsilon(1-2s^2)}{2WP^2} \ln [2Ws + \varepsilon(1-2s^2)] + \frac{K_1 + K_2}{2} \ln (2P^2\varepsilon) - \\
& - \frac{K_1}{2} \ln \{2(E + \sqrt{E^2 - p^2/m^2}) [K \sqrt{E^2 - p^2/m^2} + \varepsilon E(1-2s^2)] + \\
& + \varepsilon K(K - \varepsilon)\} - \frac{K_2}{2} \ln \{(2E - \sqrt{E^2 - p^2/m^2}) [K \sqrt{E^2 - p^2/m^2} + \\
& + \varepsilon E(1-2s^2)] + \varepsilon K(K + \varepsilon)\} + \frac{\varepsilon E(1-2s^2)}{2WP^2} \ln \left(\frac{2W}{\varepsilon} \sqrt{E^2 - p^2/m^2} + \right. \\
& \left. + 2 \frac{E^2 - p^2/m^2}{\varepsilon} - \varepsilon \right),
\end{aligned}$$

где обозначено $W^2 = E^2 - P^2$. Опустив слагаемые, несингулярные при $s^2 < 1$, а также последнее слагаемое, сингулярное при $W = 0$ (что соответствует $q^2 = 4m^2$), и сложив (П.15), получим окончательно сингулярную часть исходного интеграла (для $4\mu^2 \leq q^2 < 4m^2$):

$$\begin{aligned}
f = & \frac{\pi}{2\sqrt{1-s^2}} \left\{ - \frac{E\varepsilon(1-2s^2)}{2WP^2} \ln [2Ws + \varepsilon(1-2s^2)] + \frac{K}{2P^2} \ln (2Es + \right. \\
& \left. + K) - \frac{i\pi K}{4P^2} + K_2 \ln \left(2 \frac{p^2}{m^2} + \varepsilon^2 + \varepsilon K \right) - \frac{K_1}{2} \ln \{2(E + \sqrt{E^2 - p^2/m^2}) \times \right. \\
& \left. \times [K \sqrt{E^2 - p^2/m^2} + \varepsilon E(1-2s^2)] + \varepsilon K(K - \varepsilon)\} - \right. \\
& \left. - \frac{K_2}{2} \ln \{2(E - \sqrt{E^2 - p^2/m^2}) [K \sqrt{E^2 - p^2/m^2} + \varepsilon E(1-2s^2)] + \right. \\
& \left. + \varepsilon K(K + \varepsilon)\}. \right. \quad (\text{П.16})
\end{aligned}$$

Характерной особенностью функций $f(s^2)$ и $B_4(s^2)$, получающейся из $f(s^2)$ путем применения некоторого дифференциального оператора (см. (1.24)), является наличие двух особых точек: точки $s^2 = 0$ ($q^2 = 4\mu^2$) и второй точки $s^2 = -\xi^2/4$, которая соответствует значению $K = 0$ ($q^2 = 4\mu^2(1 + \xi^2/4)$). При $\xi^2/4 \ll 1$ вторая точка находится в окрестности первой, а при $\xi^2 \rightarrow \infty$ отодвигается от первой на бесконечно большое расстояние. Очевидно, что члены, сингулярные только во второй точке, дадут вклад при интегрировании в (2.15, 1) только при $\xi^2/4 \lesssim 1/L$, так как для них разрез начинается при $|s^2| = \xi^2/4$ и по сравнению с членами, сингулярными в первой точке, они после интегрирования будут иметь дополнительный множитель $\exp(-\xi^2 L/4)$. В связи с этим такие слагаемые в (П.16) можно разложить по степеням ξ^2 и оставить главные члены разложения. При этом точность фаз будет определяться параметром $\xi^2 \exp(-\xi^2 L/4)$, исчезающим при $\xi^2 \rightarrow 0$ (большие энергии) и при $\xi^2 \rightarrow \infty$ (малые энергии). Наибольшая погрешность будет в промежуточной области $\xi^2/4 \approx 1/L$, где этот параметр принимает максимальное значение $4/2,7L \approx 1/L$. Но даже в этой области разложение по ξ^2 обеспечивает такую же точность, как используемое нами асимптотическое разложение по $1/L$. Кроме того, нужно учитывать лишь первый член разложения по степеням K^2 , аналогично тому, как мы учитывали лишь первый член разложения по степеням s^2 . Учитывая эти замечания, упростим три последних слагаемых в (П.16),

после чего получим в нерелятивистском приближении для $|s^2| \leq 1$, $|K|^2 \ll \varepsilon^2$

$$\begin{aligned}
f = & \frac{\pi}{4P^2} \left\{ - \frac{E\varepsilon}{W} \ln [2Ws + \varepsilon(1-2s^2)] + \right. \\
& \left. + K \ln \left[\frac{p}{m} \frac{2Es + K}{E(\varepsilon + K)} \right] - \frac{i\pi K}{2\sqrt{1-s^2}} \right\}. \quad (\text{П.17})
\end{aligned}$$

Ближайшие поправочные члены к (П.17) при этом исчезают, а наибольшие из оставшихся имеют вид $K\xi^4/P^2$, $K(p/m)^4/P^2$. Действуя на (П.17) дифференциальным оператором $\mathfrak{L}(1/4E)$ (см. (1.24)), получим формулу (1.26).

Академия наук СССР

Получено 12 июня 1959 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Галанин, А. Ф. Грашин, Б. Л. Иоффе, И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 1959, 37, 1663 (Собр. трудов, № 92).
2. А. Ф. Грашин. ЖЭТФ, 1959, 36, 1717.
3. М. Moravcsik, P. Cziffra, M. MacGregor, H. Stapp. Bull. Amer. Phys. Soc., 1959, 4, 49.
4. H. Stapp, T. Ypsilantis, N. Metropolis. Phys. Rev., 1957, 105, 302.
5. S. Mandelstam. Phys. Rev., 1958, 112, 1344.
6. А. Ф. Грашин, И. Ю. Кобзарев. ЖЭТФ, 1960, 38, 3.

О ПРОЦЕССАХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ γ -КВАНТОВ С НЕСТАБИЛЬНЫМИ ЧАСТИЦАМИ¹

Совместно с И. М. Шмурикевичем

В работе рассматриваются различные неупругие процессы при столкновениях быстрых частиц с ядрами, которые не сопровождаются возбуждением ядер. Амплитуды этих процессов имеют при $q^2 = 0$ (q^2 обозначает квадрат переданного ядру 4-импульса) полюс, связанный с обменом виртуальным фотоном. Это приводит к тому, что при достаточно малых значениях q^2 обмен фотоном дает больший вклад в амплитуду, чем обмен сильно взаимодействующими частицами. В результате можно связать сечение рассматриваемого процесса при небольших значениях q^2 с сечением взаимодействия γ -кванта с падающей частицей. При заданных значениях q^2 и $E \gg m$ (E обозначает энергию падающей частицы в лабораторной системе координат, а m — ее массу) энергия родившихся частиц w , вычисленная в их системе центра, ограничена условием $w^2 - m^2 < 2E \sqrt{q^2}$.

Соотношение между сечениями упомянутых выше реакций эквивалентно соотношению, следующему из рассмотрения реакций методом Вайцзекера — Вильямса, и получено в настоящей работе ковариантным образом. Обсуждаются условия применимости полученного соотношения, в частности, для описания процессов с участием сильно взаимодействующих частиц. Оценивается вклад процессов, происходящих в кулоновском поле ядра, в полное сечение взаимодействия падающей частицы с ядром. Подробно рассматриваются некоторые процессы, происходящие в кулоновском поле ядра: тормозное излучение π или K -мезонов, превращение одного π -мезона в два π -мезона, переход Λ -частицы в Σ^0 -частицу.

1. Введение

Рассмотрим реакцию образования одной или нескольких частиц при столкновении быстрой частицы a с ядром N и будем считать, что ядро отдачи не возбуждается и не испытывает никаких превращений:

$$a + N \rightarrow N + A, \quad (1.1)$$

где A обозначает набор родившихся частиц.

Среди диаграмм, описывающих этот процесс, есть график, представленный на рис. 1. Жирные линии на этом графике соответствуют ядру, P_1 и P_2 обозначают импульсы ядра до и после столкновения, p — импульс падающей частицы и $q = P_1 - P_2$ — импульс виртуального фотона, соответствующий множителю $1/q^2$ в матричном элементе. Благодаря этому множителю вклад рассматриваемой диаграммы имеет полюс при $q^2 = 0$ и велик при достаточно малых значениях q^2 . Диаграммы, отвечающие обмену π -мезоном между ядром и остальными частицами, не имеют полюса при $q^2 = 0$. Следовательно, при достаточно малых значениях q^2 ,

$$q^2 \ll m_\pi^2, \quad (1.2)$$

можно пренебречь вкладами всех диаграмм, кроме представленной на рис. 1. Условие справедливости этого приближения будет количественно сформулировано ниже (см. формулы (2.4) и (3.6)).

Обозначая энергию родившихся частиц в их системе центра через w и массу частицы a — m , имеем

$$w^2 = -(p + q)^2 = m^2 - q^2 - 2qp. \quad (1.3)$$

Так как рассматриваются реакции, для которых $w^2 - m^2$ не мало по сравнению с m_π^2 , то, вследствие предположения (1.2), членом q^2 в правой части равенства (1.3) можно пренебречь. То-

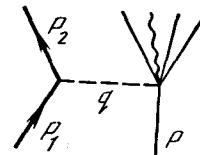


Рис. 1

гда из соотношения (1.3) следует, что в системе координат, где частица a покоится до столкновения,

$$q_0 = \frac{w^2 - m^2}{2m}. \quad (1.4)$$

Обозначая скорость и энергию ядра до столкновения через V и E_1 соответственно, находим, что в той же системе координат из равенства $P_2^2 = (P_1 - q)^2$ следует

$$q_0 = Vq - q^2/2E_1. \quad (1.5)$$

В рассматриваемых условиях величиной $q^2/2E_1$ в правой части (1.5) можно, очевидно, пренебречь и, следовательно,

$$q_0 = Vq. \quad (1.6)$$

¹ Nucl. Phys., 1961, 23, 452. Перевод В. И. Захарова,

Обозначая параллельную и перпендикулярную по отношению к V составляющие вектора q как q_{\parallel} и q_{\perp} соответственно

$$q = q_{\parallel} + q_{\perp}, \quad q_{\parallel} = (qV) V/V^2, \quad (1.7)$$

имеем

$$q^2 = q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2 - q_0^2 = q_{\perp}^2 + q_0^2(1/V^2 - 1) = q_{\perp}^2 + [(w^2 - m^2)/2p]^2, \quad (1.8)$$

где p — импульс падающей частицы a в лабораторной системе координат ($P_1 = 0$). Следует отметить, что соотношение (1.6) может быть записано в инвариантной форме

$$U_{\mu} q_{\mu} = 0, \quad (1.9)$$

где U_{μ} — вектор 4-скорости ядра

$$U_{\mu} = P_{1\mu}/M. \quad (1.10)$$

Следовательно, равенство (1.6) имеет место в произвольной системе координат, если через V обозначить скорость ядра в этой системе.

Из соотношения (1.8) находим, что максимальное значение w при заданном q^2 равно

$$w_{\max}^2 - m^2 = 2p\sqrt{q^2}. \quad (1.11)$$

Из этого равенства следует, что если энергия E падающей частицы достаточно велика, то величина w может быть большой, если даже q^2 очень мало и удовлетворяет уравнению (1.2) или более сильному ограничению.

С другой стороны, при достаточно малых q^2 (в пределе при $q^2 = 0$) правая часть диаграммы, представленной на рис. 1, соответствует матричному элементу образования частиц A при взаимодействии фотона с частицей a

$$\gamma + a \rightarrow A. \quad (1.12)$$

Следовательно, сечение σ_c процесса (1.1) может быть при этих условиях просто связано с сечением σ_p фотопроцесса (1.12).

Таким образом, изучение различных процессов при взаимодействии очень быстрых частиц с ядром, сопровождающихся малой передачей импульса ядру, может служить средством для определения сечений взаимодействия γ -квантов с нестабильными частицами¹.

В разделе 2 настоящей статьи выводится общее соотношение между сечениями процесса (1.1) и соответствующего фотопроцесса (1.12). Как само соотношение, так и его вывод, аналогичны, конечно, полученным в работе [2] за исключением двух пунктов.

Амплитуда рассматриваемых процессов имеет полюс, связанный с обменом фотоном при $q^2 = 0$. Хотя этот полюс не лежит в физической области реакции, он может находиться сколь угодно близко к ней при достаточно больших значениях энергии падающей частицы.

Следовательно, вычет в этом полюсе определяет величину амплитуды при достаточно малых q^2 . Амплитуда же процессов, рассмотренных в работе [2], имеет полюс при $q^2 = -m_{\pi}^2$, т. е. на конечном расстоянии от физической области. Другое отличие связано с векторными свойствами фотонов и калибровочной инвариантностью электромагнитных взаимодействий.

Соотношение между сечениями процессов, которое будет получено в настоящей статье должно по существу совпадать с результатом, полученным на основе хорошо известного метода Вайцекера — Вильямса [3]. Ковариантный способ получения этого соотношения² возможно, представляет самостоятельный интерес тем более, что он может привести к более определенным критериям применимости результатов, особенно для процессов с участием сильно взаимодействующих частиц.

В разделе 3 вычисляется вклад процессов, происходящих в кулоновском поле ядра, в полное сечение взаимодействия падающей частицы с ядром, причем учитывается экранирование поля

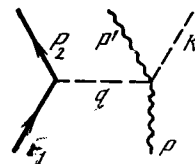


Рис. 2

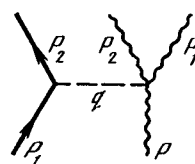


Рис. 3

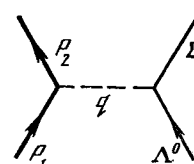


Рис. 4

ядра электронами. В разделе 4 подробно рассматриваются следующие реакции:

1. Тормозное излучение π - или K -мезонов в поле ядра (рис. 2)

$$\pi + N \rightarrow N + \pi + \gamma, \quad K + N \rightarrow N + K + \gamma. \quad (1.13)$$

2. Переход при взаимодействии с ядром одного π -мезона в два (рис. 3)

$$\pi + N \rightarrow N + \pi_1 + \pi_2. \quad (1.14)$$

3. Переход Λ -частицы при взаимодействии с ядром в Σ^0 -частицу (рис. 4)

$$\Lambda + N \rightarrow N + \Sigma^0. \quad (1.15)$$

¹ Аналогичные идеи высказываются в статье [1], которая была получена после завершения настоящей работы.

² Согласно сообщению Я. А. Смородинского, эта проблема рассматривалась также А. Бадаляя.

2. Вывод основной формулы и обсуждение метода

Пренебрегая вкладом всех диаграмм за исключением представленной на рис. 1, получаем для матричного элемента S -матрицы, соответствующего процессу (1.1)

$$\langle A, P_2 | S | p, P_1 \rangle = -i(2\pi)^4 \left(\frac{f_a f}{4E_1 E_2} \right)^{1/2} \frac{G_\mu R_\mu}{q^2} \delta(P_1 + p_1 - P_2 - Q), \quad (2.1)$$

где E_1 и E_2 — энергия ядра до и после столкновения, E — энергия падающей частицы a , $f = \prod_{(A)} f_i$, где $f_i = m_i/E_i$ для фермиона и $f_i = 1/2 E_i$ для бозона, в то время как соответствующие множители для родившихся частиц считаются включенными под знак произведения, и f_a — аналогичный множитель для падающей частицы. Полный 4-импульс частиц, образующих набор A , обозначен через Q . G_μ и R_μ представляют собой вершинные функции, соответствующие левой и правой частям диаграммы.

Из калибровочной инвариантности теории следует, что

$$q_\mu G_\mu = 0, \quad (2.2)$$

$$q_\mu R_\mu = 0. \quad (2.3)$$

В дальнейшем для того чтобы не рассматривать распределение заряда внутри ядра, мы ограничим возможные значения q^2 условием

$$q^2 \ll m_\pi^2 A^{-2/3}, \quad (2.4)$$

которое является более сильным, чем условие (1.2). Для таких значений q^2

$$G_\mu = -iZe (P_{1\mu} + P_{2\mu}). \quad (2.5)$$

Равенство (2.5), строго говоря, справедливо только для ядер со спином $s = 0$. Если $s \neq 0$, то выражение для вершины G_μ будет содержать дополнительные члены, которые, однако, будут содержать в качестве сомножителей компоненты вектора q . Эти дополнительные члены будут, следовательно, пренебрежимо малы, и равенство (2.5) может быть также использовано и в случае $s \neq 0$.

¹ Если, например, $s = 1/2$, то

$$G_\mu = Ze (\bar{u}_2 \gamma_\mu u_1) + \frac{1}{2} i \lambda \bar{u}_2 (\hat{q} \gamma_\mu - \gamma_\mu \hat{q}) u_1,$$

где λ — аномальный магнитный момент ядра. Очевидно, что

$$\begin{aligned} G_\mu &= -\frac{iZe}{2M} (P_{1\mu} + P_{2\mu}) (\bar{u}_2 u_1) + \frac{i}{2} \left(\frac{Ze}{2M} + \lambda \right) \bar{u}_2 (\hat{q} \gamma_\mu - \gamma_\mu \hat{q}) u_1 \approx \\ &\approx -\frac{iZe}{2M} (P_{1\mu} + P_{2\mu}) \bar{u}_2 u_1. \end{aligned}$$

Согласно равенствам (2.3), (2.5) и (1.10) имеем

$$G_\mu R_\mu = -2iZe P_\mu R_\mu = -2iZe M U_\mu R_\mu. \quad (2.6)$$

Тот факт, что величина $P_{2\mu}$ не входит в уравнение (2.6) и U_μ удовлетворяет условию (1.9), аналогичному соотношению (2.2) в пренебрежении членами $\sim q^2$ (см. (1.5)), соответствует тому, что в рассматриваемых условиях отдача ядра не существенна и кулоновское поле ядра может рассматриваться как внешнее. Используя затем соотношения (2.3), (1.9), (1.6) и (1.7), получаем

$$\begin{aligned} U_\mu R_\mu &= \frac{1}{(1-V^2)^{1/2}} (\mathbf{V}\mathbf{R} - R_0) = (1-V^2)^{-1/2} (\mathbf{V}\mathbf{R} - R_0/q_0) = \\ &= [q_0 (1-V^2)^{1/2}]^{-1} \{(\mathbf{V}\mathbf{q})(\mathbf{V}\mathbf{R}) - \mathbf{q}\mathbf{R}\} = \\ &= -[q_0 (1-V^2)^{1/2}]^{-1} \{(1-V^2)\mathbf{q}_\parallel + \mathbf{q}_\perp\} \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Согласно формуле (2.3)

$$\mathbf{q}_\parallel \mathbf{R} = \mathbf{q}_\parallel \mathbf{R}_\parallel = q_0 R_0 - \mathbf{q}_\perp \mathbf{R}_\perp, \quad (2.8)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{R}_\parallel + \mathbf{R}_\perp$ и $\mathbf{R}_\parallel = (\mathbf{R}\mathbf{V})\mathbf{R}/V^2$, как и в равенстве (1.7) и, подставляя (2.8) в (2.7), получаем

$$U_\mu R_\mu = -(1-V^2)^{1/2} R_0 - \frac{V^2}{(1-V^2)^{1/2}} \frac{\mathbf{q}_\perp \mathbf{R}_\perp}{q_0}. \quad (2.9)$$

Эта формула справедлива в любой системе координат (\mathbf{V} обозначает скорость ядра в соответствующей системе). Однако разделение величины $U_\mu R_\mu$ на два члена в формуле (2.9) не является релятивистски инвариантным, то есть ни один из этих членов не является инвариантом. Выберем, следовательно, определенную систему координат, именно такую, где частица a покоится до столкновения ($\mathbf{p}' = 0$), как наиболее удобную. В дальнейшем соответствующие величины в этой системе координат будут обозначаться как V , q_0 , R_0 . Тогда $1 - V \ll 1$ (так как в лабораторной системе координат частица a , по предположению является ультрарелятивистской). Далее, согласно равенствам (1.8) и (2.4), величины q_\perp и $q_0 (1 - V^2)^{1/2}$ имеют одинаковые предельные значения, равные $m_\pi A^{-1/3}$. Если предположить, что эти величины одного порядка малости и что компоненты R_μ представляют собой величины одного порядка в системе координат, где частица a покоится до столкновения, то первый член в соотношении (2.9) содер-

Произведение нового множителя $1/2M$ и нормировочных множителей $f_1^{1/2} = (M/E_1)^{1/2}$ и $f_2^{1/2} = (M/E_2)^{1/2}$ для ядра (которое в данном случае является фермионом) равно $(4E_1 E_2)^{-1/2}$, что точно совпадает с нормировочным множителем для ядра со спином нуль, который учитывался в формуле (2.1).

жит дополнительный малый множитель $(1 - V^2)^{1/2}$ и может быть отброшен¹.

Так как это пренебрежение во всяком случае справедливо, когда $q_{\perp} \neq 0$ и скорость V достаточно близка к единице, то мы получаем

$$G_{\mu}R_{\mu} = 2iZeE_1q_{\perp}R_{\perp}/q_0. \quad (2.10)$$

Так как мы интересуемся величиной амплитуды процесса (1.1) при малых q^2 , то в медленно меняющихся функциях можно положить $q^2 = 0$. Согласно равенству (1.8) можно считать, что $q_{\perp} = 0$, $V = 1$ в аргументах функций R_0 и R_{\perp} в правых частях соотношений (2.9) и (2.10). При этом выражение $R_{\mu}e_{\mu}$ определяет амплитуду фотопротона (1.12), причем квант распространяется в направлении вектора \mathbf{V} и имеет энергию q_0 в системе координат, где $\mathbf{p} = 0$; \mathbf{e} — единичный вектор поляризации кванта. Дифференциальное сечение фотопротона $d\sigma_p$ определяется формулой

$$d\sigma_p(w) = \frac{(2\pi)^4}{2q_0m} g_a f |e_{\mu}R_{\mu}|^2 \delta(q + p - Q) d\Gamma, \quad (2.11)$$

где $d\Gamma = \Pi_{(A)}(d^3p_i/(2\pi)^3)$, q_0 — импульс фотона в системе координат, где $\mathbf{p} = 0$ (см. формулу (1.4)), f — тот же множитель, что и в равенстве (2.1), величина g_a равна m , если частица a — фермион, и равна $1/2$, если a — бозон ($g_a = Ef_a$ см. (2.1)).

С другой стороны, для дифференциального сечения процесса (1.1) имеем согласно (2.1)

$$d\sigma_c = \frac{(2\pi)^4}{4P_1^0m} \frac{|G_{\mu}R_{\mu}|^2}{q^4} g_a \frac{d^3P_2}{(2\pi)^3 E_2} f d\Gamma \delta(q + p - Q), \quad (2.12)$$

где P_1^0 — импульс ядра в системе, где $\mathbf{p} = 0$. Принимая во внимание соотношения (2.10) и (2.11) и замечая, что

$$d^3P_2 = d^3q = q_{\perp} dq_{\perp} dq_{\parallel} d\varphi = \frac{1}{2} dq_{\perp}^2 dq_{\parallel} d\varphi \quad (2.13)$$

и что

$$dq_{\parallel} = \frac{dw^2}{2mV} \quad (2.14)$$

¹ Выражение $U_{\mu}R_{\mu}$ может быть разделено на две части инвариантным образом и записано как

$$U_{\mu}R_{\mu} = -pR/pU + (UR + pR/pU).$$

Принимая во внимание уравнения (1.9), (2.3) и (1.6), легко показать, что в системе координат, где $\mathbf{p} = 0$

$$UR + \frac{pR}{pU} = -\frac{V^2}{q_0(1 - V^2)^{1/2}} \mathbf{q}_{\perp} \mathbf{R}_{\perp},$$

$$-pR/pU = -(1 - V^2)^{1/2} R_0.$$

в системе координат где $\mathbf{p} = 0$ (мы должны здесь использовать эту систему координат, так как все величины в правой части равенства (2.10) выражены в этой системе), получаем

$$d\sigma_c = \frac{Z^2\alpha}{2\pi^2} \frac{q_{\perp}^2 dq_{\perp}^2 d\varphi}{q^4} \frac{dw^2}{w^2 - m^2} d\sigma_p(w, \varphi), \quad (2.15)$$

где мы пренебрегли отличием величин E_2/E_1 и V от единицы; $d\sigma_p(w, \varphi)$ — дифференциальное сечение процесса (1.12), отвечающего кванту, поляризованному в направлении азимутального угла φ , $\alpha = e^2/4\pi$. Переходя в равенстве (2.15) от переменной q_{\perp}^2 к q^2 и пренебрегая различием между p и E , получаем окончательно с помощью равенства (1.8):

$$d\sigma_c = \frac{Z^2\alpha}{2\pi} \frac{dw^2}{w^2 - m^2} \frac{1}{q^4} \left[q^2 - \left(\frac{w^2 - m^2}{2E} \right)^2 \right] dq^2 d\varphi d\sigma_p(w, \varphi). \quad (2.16)$$

Интегрируя по углу φ и обозначая опять проинтегрированное сечение через $d\sigma_c$, находим

$$d\sigma_c = \frac{Z^2\alpha}{2\pi} \frac{dw^2}{w^2 - m^2} \frac{dq^2}{q^4} \left[q^2 - \left(\frac{w^2 - m^2}{2E} \right)^2 \right] d\sigma_p(w), \quad (2.17)$$

где $d\sigma_p(w)$ обозначает дифференциальное сечение фотопротона, усредненное по различным поляризациям.

Так как мы положили $q_{\perp} = 0$ в выражениях для R_0 и R_{\perp} , то первый член в равенстве (2.9) не зависит от азимутального угла φ , а второй член пропорционален $\cos \varphi$. Если не пренебрегать первым членом, то при подстановке (2.9) в (2.8) получаем после интегрирования по φ вместо (2.17)

$$d\sigma_c = \frac{Z^2\alpha}{\pi} \frac{dw^2}{w^2 - m^2} \frac{dq^2}{q^4} \left\{ \left[q^2 - \left(\frac{w^2 - m^2}{2E} \right)^2 \right] d\sigma_p + 4\pi^4 g_a \frac{m^2 (w^2 - m^2)}{E^4} |R_0|^2 d\Omega \right\}, \quad (2.18)$$

где $d\Omega$ обозначает инвариантный элемент фазового объема

$$d\Omega = fd\Gamma \delta(q + p - Q), \quad (2.19)$$

$$|R_0|^2 = m^{-2} |p_{\mu}R_{\mu}|^2. \quad (2.20)$$

Хотя множитель $m^2(w^2 - m^2)/E^4$ мал, мы удерживаем в уравнении (2.18) второй член в фигурных скобках. Из равенства (2.9) следует, что учет этого члена имеет значение только, если величина q_{\perp} мала и удовлетворяет условию $q_{\perp} < q_0(1 - V^2)$. Иными словами, при фиксированном значении q^2 второй член в формуле (2.18) можно опускать всегда за исключением тех случаев, когда $w^2 - m^2$ отличается от своего максимального значения $w_{\max}^2 - m^2 = 2E\sqrt{q^2}$ на величину порядка $2E\sqrt{q^2 m^2/E^2}$. Тем не менее из уравнений (2.9) и (1.8) следует, что даже если $q_{\perp} = 0$, выраже-

ние $G_\mu R_\mu/q^2$ содержит множитель $(1 - V^2)^{-1/2} = E/m$. Следовательно, при достаточно больших энергиях вклад в полное сечение кулоновского взаимодействия представляется важным даже в случае $q_\perp = 0$.

Следует отметить также следующее обстоятельство. Замена q^2 на нуль в аргументе функции R_μ допустима в том случае, если выполнено условие (1.2). Величина m_π фигурирует в этом неравенстве на том основании, что масса π -мезона является наименьшей среди всех масс сильно взаимодействующих частиц. Это неравенство приводит к меньшим ограничениям, чем соотношение (2.4) и по этой причине не принималось до сих пор во внимание. Но если мы рассматриваем процесс столкновения с ядром частиц, обладающих только электромагнитными и слабыми взаимодействиями, условие, аналогичное неравенству (1.2), является главным. Так, для процессов, сопровождающих взаимодействие электронов или μ -мезонов с ядрами (например, тормозное излучение), должно быть выполнено условие

$$q^2 \ll m_e^2 \quad (2.21)$$

или соответственно

$$q^2 \ll m_\mu^2 \quad (2.22)$$

Для электронов условие (2.21) является всегда более сильным, чем (2.4). Что касается μ -мезонов, то ограничение (2.4) не является очень существенным, хотя и может оказаться более сильным. Если выполнено условие (2.22), то соотношения, аналогичные (2.16), (2.17) или (2.18), остаются справедливыми, если даже неравенство (2.4) имеет обратный знак. В этом случае следует только заменить Z на $Zd(q^2)$, где $d(q^2)$ — зарядовый формфактор ядра. Данные об этом формфакторе могут быть получены из экспериментов по упругому рассеянию электронов ядрами. Для процессов с участием сильно взаимодействующих частиц такая замена оказывается бесполезной. Как будет показано в разделе 3, ограничения на величину q^2 , связанные с учетом сильных взаимодействий, оказываются, во всяком случае, не менее сильными, чем условие (2.4).

Формулы, выделенные в этом разделе, совпадают по существу с результатами, полученными в работе [3], причем различие сводится к тому, что здесь они получены в дифференциальной форме, в то время как в работах [3] найдены соотношения для сечений, проинтегрированных по спектру псевдофотонов (по q^2 и w^2 в наших обозначениях). Следует отметить, что ограничение на величину q^2 в форме (2.21) в настоящей работе получено исходя из требования о возможности замены q^2 в аргументах вершинных функций R_\perp и R_0 значением, отвечающим реальному фотону. В хорошо известных статьях, цитированных выше, неравенство (2.21) следует из принципа неопределенности, ограничивающего возможность применения полуклассического метода, использованного в этих статьях.

3. Вклад в полное сечение взаимодействия релятивистской частицы с ядром от процессов, происходящих в кулоновском поле ядра

Пренебрегая вторым членом в фигурных скобках в равенстве (2.18), интегрируя это равенство по всем переменным, за исключением q^2 и w^2 , и обозначая результат как $\sigma_c(q^2, w^2) dq^2 dw^2$, имеем

$$\sigma_c(q^2, w^2) dq^2 dw^2 = \frac{Z^2 \alpha}{\pi} \frac{dw^2}{w^2 - m^2} \frac{dq^2}{q^4} \left[q^2 - \left(\frac{w^2 - m^2}{2E} \right)^2 \right]. \quad (3.1)$$

Пусть w_0 является пороговой энергией рассматриваемого фотопроцесса (1.12). Тогда, принимая во внимание равенства (1.8) и (1.11), получаем для пределов интегрирования по w^2 и q^2

$$w_{\min}^2 = w_0^2, \quad (3.2)$$

$$q_{\min}^2 = \left(\frac{w_0^2 - m^2}{2E} \right)^2, \quad w_{\max}^2 = 2E \sqrt{q^2} + m^2.$$

Просуммируем (3.1) по всем неупругим процессам (1.1), возможным при данном значении w . Тогда для дифференциального сечения $\sigma_c^t(q^2, w^2) dq^2 dw^2$ имеем выражение, которое отличается от правой части (3.1) только заменой $\sigma_p(w)$ на $\sigma_p^t(w)$ — полное сечение взаимодействия γ -кванта с частицей a . Интегрируя полученное соотношение по w^2 :

$$\begin{aligned} \sigma_c^t(q^2) dq^2 &= dq^2 \int_{w_{0,\min}^2}^{2E \sqrt{q^2} + m^2} \sigma_c^t(q^2, w^2) dw^2 = \frac{Z^2 \alpha}{\pi} \frac{dq^2}{q^4} \times \\ &\times \int_{w_{0,\min}^2}^{2E \sqrt{q^2} + m^2} (w^2 - m^2)^{-1} \left[q^2 - \left(\frac{w^2 - m^2}{2E} \right)^2 \right] \sigma_p^t w dw^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $w_{0,\min}$ — наименьшее пороговое значение w для неупругих процессов. Если бы мы приняли во внимание второй член в фигурных скобках в равенстве (2.18), то его вклад после интегрирования по w^2 был бы пренебрежимо мал.

Если предположить, что, начиная с некоторого значения w , равного ϵ , сечение $\sigma_p^t(w)$ остается постоянным при росте w , то можно вычислить величину $\sigma_c^t(q^2)$. Заменяя в формуле (3.3) нижний предел интегрирования на ϵ и предполагая, что $2E \sqrt{q^2} \gg \epsilon^2 - m^2$, получаем

$$\sigma_c^t(q^2) dq^2 = \frac{Z^2 \alpha}{\pi} \sigma_p^t \ln \frac{2E \sqrt{q^2}}{e^{-1/2} (\epsilon^2 - m^2)} \frac{dq^2}{q^2}. \quad (3.4)$$

Интересно сравнить величину этого сечения с сечением чисто ядерного взаимодействия $\sigma_N(q^2) dq^2$. Предположим опять, что в

пределе больших энергий E суммарное сечение неупругих процессов становится постоянным и равным геометрическому сечению $\pi m_\pi^{-2} A^{1/2}$. Тогда для величины $\sigma_N^t(q^2)$ при малых q^2 имеем по порядку величины

$$\sigma_N(q^2) dq^2 = \frac{\pi A^{1/2}}{m_\pi^2} \frac{dq^2}{q^2}, \quad (3.5)$$

где \bar{q} — среднее значение переданного ядру импульса при столкновении, например, релятивистских π -мезонов с ядром. Предполагая, что $\sigma_p^t \approx \alpha/m_\pi^2$, находим из сравнения соотношений (3.4) и (3.5), что сечения $\sigma_c^t(q^2)$ и $\sigma_N^t(q^2)$ становятся равными при

$$\sqrt{q^2} \approx \bar{q} \frac{Z\alpha}{\pi A^{1/2}}. \quad (3.6)$$

Рассмотрим такие энергии, что $(\ln 2E \sqrt{q^2}/e^{1/2} (\epsilon^2 - m^2))^{1/2} \approx 1$, хотя $2E \sqrt{q^2}/(\epsilon^2 - m^2) \gg 1$. Предполагая, что $\bar{q} \approx (2 - 3) m_\pi$, получаем из равенства (3.6), что даже для тяжелых ядер вклад процессов в кулоновском поле ядра становится доминирующим только при очень небольших значениях $\sqrt{q^2}$, равных, по порядку величины, 10—15 Мэв/с. Это приводит, конечно, к тому, что определение сечения взаимодействия γ -квантов с нестабильными частицами из экспериментов по взаимодействию этих частиц с ядрами представляет собой очень трудную экспериментальную задачу.

Оценим, наконец, вклад кулоновского поля ядра в полное сечение. Для этого проинтегрируем (3.4) по q^2 от $q_{\min}^2 = \{(\epsilon^2 - m^2)/2E\}^2$ (см. (3.2)) до $q_{\max}^2 = m_\pi^2 A^{1/2}$. Тогда получаем

$$\sigma_c = \frac{Z^2\alpha}{\pi} \sigma_p^t \left(\ln \frac{2m_\pi E}{e^{1/2} A^{1/2} (\epsilon^2 - m^2)} \right)^2. \quad (3.7)$$

Если даже мы предположим, что $\sigma_p^t(w)$ постоянно для $w > \epsilon$, то σ_c растет пропорционально $\ln^2 E$ только до энергий, ограниченных условием

$$(\epsilon^2 - m^2)/2E > 1/a_0, \quad (3.8)$$

где

$$a_0 = 1/m_e \alpha Z^{1/2}. \quad (3.9)$$

Если

$$(\epsilon^2 - m^2)/2E < 1/a_0, \quad (3.10)$$

то начинает играть роль экранирование электронами заряда ядра. Заменяя при интегрировании равенства (3.4) нижний предел на $1/a_0^2$, мы получаем в этом случае

$$\sigma_c = \frac{2Z^2\alpha}{\pi} \sigma_p^t \ln \frac{m_\pi}{\alpha m_e Z^{1/2} A^{1/2}} \ln \left[\left(\frac{m_\pi m_e \alpha Z^{1/2}}{e A^{1/2}} \right)^{1/2} \frac{2E}{\epsilon^2 - m^2} \right]. \quad (3.11)$$

Если ϵ представляет собой величину порядка нескольких π -мезонных масс, то из равенства (3.10) следует, что экранирование проявляется только при энергиях $E > 10^{13}$ эв. Если положить $E = 10^{13}$ эв, $Z = 70$, $\sigma_p^t = \alpha/m_\pi^2$, то с помощью равенства (3.7) находим

$$\sigma_c \approx 40 \text{ мб}. \quad (3.12)$$

4. Применение к некоторым конкретным процессам

Для процесса тормозного излучения (1.13) имеем

$$R_\mu = M_{\mu\nu} e_\nu, \quad (4.1)$$

где e_ν — вектор поляризации излучаемого фотона. Импульс фотона будет в дальнейшем обозначаться k , а импульс мезона после излучения — p' . Тензор $M_{\mu\nu}$ отвечает вершинной части с двумя мезонными и двумя фотонными линиями (см. правую часть диаграммы на рис. 2). Для того чтобы написать общее выражение для $M_{\mu\nu}$, построим четыре ортогональных вектора [4] $n^{(i)}$ из векторов p, p', q, k , имея в виду, что $q^2 \neq 0$. Прежде всего введем 4-векторы

$$K = k + q, \quad t = k - q, \quad P = p + p'. \quad (4.2)$$

Тогда 4-векторы

$$\begin{aligned} t'_\mu &= t_\mu - K_\mu (Kt)/K^2, & P'_\mu &= P_\mu - K_\mu (PK)/K^2 - t'_\mu (Pt')/t'^2, \\ N_\mu &= i \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} P_\nu K_\lambda t'_\rho \end{aligned} \quad (4.3)$$

вместе с вектором K образуют искомую систему векторов. Следовательно, $M_{\mu\nu}$ может быть представлен в следующей форме:

$$M_{\mu\nu} = \sum_{i,k} b_{ik} (w^2, t^2, q^2) n_\mu^{(i)} n_\nu^{(k)}. \quad (4.4)$$

Условия $q_\mu M_{\mu\nu}$ и $M_{\mu\nu} k_\nu = 0$, которые следуют из калибровочной инвариантности, приводят к ряду соотношений между величинами b_{ik} . Окончательно, для $M_{\mu\nu}$ получаем

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= a_1 P'_\mu P'_\nu + a_2 N_\mu N_\nu + c_1 (q_\mu - k_\mu q^2/kq) P'_\nu + \\ &+ c_2 P'_\mu k_\nu + c_3 (q_\mu - k_\mu q^2/kq) k_\nu. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Величины a_1, a_2, c_1, c_2, c_3 представляют собой функции тех же инвариантов, что и b_{ik} . Так как $k_\nu e_\nu = 0$, то

$$R_\mu = a_1 (P'e) P'_\mu + a_2 (Ne) N_\mu + c_1 (P'e) (q_\mu - k_\mu q^2/kq). \quad (4.6)$$

Подставляя равенство (4.6) в (2.9) и полагая везде, где возможно, $q^2 = 0$, имеем

$$d\sigma_c = \frac{Z^2\alpha}{\pi} \frac{dw^2}{w^2 - m^2} \frac{dq^2}{q^4} \left\{ \left[q^2 - \left(\frac{w^2 - m^2}{2E} \right)^2 \right] d\sigma_p + \right. \\ \left. + \frac{(w^2 - m^2)^2 - w^2 t^2}{\pi E^4 t^2} \left[a_1 \frac{(w^2 - m^2)^2 - w^2 t^2}{t^2} + c_1 \frac{w^2 - m^2}{4} \right] dt^2 \right\}, \quad (4.7)$$

где $d\sigma_p$ — дифференциальное сечение эффекта Комптона на π - или K -мезонах

$$d\sigma_p = \left[\frac{(w^2 - m^2)^2}{t^2} - w^2 \right]^2 (|a_1|^2 + |a_2|^2 t^8) \frac{dt^2}{2\pi(w^2 - m^2)}. \quad (4.8)$$

В соотношениях (4.7) и (4.8) было выполнено интегрирование по азимуту вектора t . Как уже упоминалось в разделе 2 (см. обсуждение после формулы (2.20)), в основной области изменения q^2 и w^2 вторым членом в соотношении (4.7) можно пренебречь. Измерение сечения тормозного излучения в рассматриваемых условиях позволило бы определить сечение комптоновского рассеяния на π - или K -мезонах, и измерение при $q_{\perp} \ll \frac{m(w^2 - m^2)}{2E^2}$ позволило бы определить второй член в фигурной скобке в равенстве (4.7).

При вычислении вклада в величину $R_0 = -\frac{1}{m} p_{\mu} R_{\mu}$ третьего члена в соотношении (4.6), который содержит множитель $q_{\mu} - k_{\mu} q^2/kq$, мы пренебрегли членом q_{μ} . Так как в первоначальном выражении $U_{\mu} R_{\mu}$ члены в R_{μ} , пропорциональные q_{μ} , не дают вклада, то может показаться, что третий член в равенстве (4.6) должен быть целиком опущен. Такое заключение, однако, неверно, поскольку (4.6) подставляется в уравнение (2.9) в уже преобразованном виде, когда каждый из членов содержит явным образом малый множитель $1 - V^2$ или q_{\perp} . Следовательно, в других множителях (в частности в $q_{\mu} - k_{\mu} q^2/kq$), мы должны положить $q^2 = 0$. Если с самого начала выбрать в качестве исходного выражение $U_{\mu} F_{\mu}$, где $F_{\mu} = q_{\mu} + q^2 f_{\mu}$, то из условия $F_{\mu} q_{\mu} = 0$ следует, что $q_{\mu} f_{\mu} = -1$. После этого легко получить, что

$$U_{\mu} F_{\mu} = q^2 U_{\mu} f_{\mu} = -(q^2/q_0 (1 - V^2)^{1/2}) \{1 + f_{\perp} q_{\perp} + f_{\parallel} q_{\parallel} (1 - V^2)\} \approx \\ \approx -q^2/q_0 (1 - V^2)^{1/2} = -q_0 (1 - V^2)^{1/2} - q_{\perp}^2/q_0 (1 - V^2)^{1/2}.$$

При условии, что $q_{\perp} < q_0 (1 - V^2)$ вторым членом можно пренебречь, и мы получаем

$$U_{\mu} F_{\mu} = -q_0 (1 - V^2)^{1/2} = (1 - V^2)^{1/2} q_{\mu} p_{\mu}/m,$$

т. е. тот же результат, что и при подстановке в (2.9) q_{μ} вместо F_{μ} .

Для процесса (1.14) $\pi + N \rightarrow N + \pi_1 + \pi_2$ вершинная часть R_{μ} является псевдовектором. Пусть p_1 и p_2 обозначают импульсы родившихся π -мезонов. Тогда из векторов q, p, p_1, p_2 , удовлетворяющих уравнению $q + p = p_1 + p_2$, можно построить только один независимый псевдовектор $N_{\mu} = i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_{\nu} p_{1\rho} p_{2\sigma}$. Он удовлетворяет условию $q_{\mu} N_{\mu} = 0$.

Мы можем, следовательно, считать, что

$$R_{\mu} = a(w^2, t^2, q^2) N_{\mu}, \quad (4.9)$$

где $t = p_1 - p_2$. Для рассматриваемого процесса формула, связывающая сечения реакций $\pi + N \rightarrow N + \pi_1 + \pi_2$ и $\gamma + \pi \rightarrow \pi_1 + \pi_2$, совпадает с (2.17). Так как $N_{\mu} p_{\mu} = 0$, то в этой формуле нет члена, аналогичного второму члену в соотношениях (2.18) или (4.7). Дифференциальное сечение $d\sigma_p$ реакции $\gamma + \pi \rightarrow \pi_1 + \pi_2$, усредненное по поляризациям и проинтегрированное по азимуту вектора t , следующим образом связано с формфактором $a(w^2, t^2, 0)$

$$d\sigma_p = \frac{|a|^2}{128\pi} \frac{w^2 t^2 (w^2 - 3m^2 - t^2)}{(w^2 - m^2)^2} dt^2. \quad (4.10)$$

Остановимся теперь на процессе (1.15) $\Lambda + N \rightarrow N + \Sigma^0$. Выполняя над амплитудой этой реакции те же преобразования, которые привели от формулы (2.9) к (2.18), получаем

$$d\sigma_c = \frac{2Z^2\alpha m_{\Lambda} m_{\Sigma}}{(m_{\Sigma}^2 - m_{\Lambda}^2)^2} \left\{ \left[q^2 - \frac{(m_{\Sigma}^2 - m_{\Lambda}^2)^2}{4E^2} \right] |\mathbf{R}_{\perp}|^2 + \right. \\ \left. + \frac{m_{\Lambda}^2 (m_{\Sigma}^2 - m_{\Lambda}^2)^2}{2E^4} |\mathbf{R}_0|^2 \right\} \frac{dq^2}{q^4}. \quad (4.11)$$

Усредняя это соотношение по различным направлениям спина Λ -частицы и суммируя по направлениям спина Σ^0 -частицы, имеем

$$d\sigma_c = \frac{8\pi Z^2\alpha m_{\Sigma}^3}{(m_{\Sigma}^2 - m_{\Lambda}^2)^3} \left\{ \left[q^2 - \frac{m_{\Sigma}^2 - m_{\Lambda}^2}{4E^2} \right] \frac{1}{\tau} + \right. \\ \left. + \frac{m_{\Lambda}^2 (m_{\Sigma}^2 - m_{\Lambda}^2)^3}{8\pi m_{\Sigma}^2 E^4} |\mathbf{R}_0|^2 \right\} \frac{dq^2}{q^4}, \quad (4.12)$$

где мы учли соотношение между временем жизни τ Σ^0 -частицы по отношению к распаду $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$ и величиной $|\mathbf{R}_{\perp}|^2$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{m_{\Lambda} (m_{\Sigma}^2 - m_{\Lambda}^2)}{4\pi m_{\Sigma}^2} |\mathbf{R}_{\perp}|^2. \quad (4.13)$$

Черта над $|\mathbf{R}_0|^2$ и $|\mathbf{R}_{\perp}|^2$ означает усреднение и суммирование по спинам начального и конечного состояний соответственно. Для того чтобы оценить вклад, связанный с кулоновским полем \mathbf{E}_{\perp} пол-

ное сечение перехода Λ в Σ^0 при столкновении Λ -частиц с ядром, проинтегрируем (4.12) по q^2 в пределах от $q_{\min}^2 = (m_\Sigma^2 - m_\Lambda^2)/(2E)^2$ до $q_{\max}^2 = m_\pi^2 A^{-2/3}$; вторым членом в фигурных скобках в равенстве (4.12) можно при этом пренебречь. В результате интегрирования получаем

$$\sigma_c = \frac{16\pi Z\alpha^2 m_\Sigma^3}{(m_\Sigma^2 - m_\Lambda^2)^{3/2}} \ln \frac{2m_\pi E}{e^{1/2} (m_\Sigma^2 - m_\Lambda^2) A^{1/2}}. \quad (4.14)$$

Распад $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$ представляет собой M_1 или E_1 переход (в зависимости от относительной четности Λ и Σ^0 -частиц). Поэтому можно оценить время τ , используя формулу для вероятности дипольного перехода $1/\tau = 2/3 (m_\Sigma - m_\Lambda)^3 \mu^2$ и принимая естественное предположение, что величина μ дипольного момента перехода заключена в пределах $\alpha^{1/2}/m_\pi$ и $\alpha^{1/2}/m_N$. Тогда при $E \approx 10^{10}$ эв и $Z_\alpha = 1/2$ получаем следующую оценку: $0,4 \text{ мб} < \sigma_c < 20 \text{ мб}$.

Уравнение (4.14) имеет место, если

$$E < \frac{m_\Sigma^2 - m_\Lambda^2}{2m_e \alpha Z^{1/2}} \approx 10^{13} \text{ эв}, \quad (4.15)$$

когда несущественно экранирование кулоновского поля ядра электронами. Полагая при больших энергиях нижний предел интегрирования по q^2 равным $1/a_0^2$ (см. (3.9)), находим

$$\sigma_c = \frac{16\pi Z^2 \alpha m_\Sigma^3}{(m_\Sigma^2 - m_\Lambda^2)^{3/2}} \ln \frac{m_\pi}{m_e \alpha Z^{1/2} A^{1/2}}. \quad (4.16)$$

В лабораторной системе координат величина q^2 связана с углом θ между направлением вылета Σ^0 -частицы и импульсом Λ -частицы

$$q^2 = (m_\Sigma^2 - m_\Lambda^2)/2E + E^2 \theta^2. \quad (4.17)$$

Подставляя это выражение в равенство (4.12) и вводя элемент телесного угла $d\Omega = 2\pi \theta d\theta$, получаем следующую формулу для углового распределения родившихся Σ^0 -частиц

$$d\sigma_c = \frac{8Z\alpha^2 m_\Sigma^3}{(m_\Sigma^2 - m_\Lambda^2)^{3/2}} \frac{\theta^2 + \theta_1^2}{(\theta^2 + \theta_2^2)^2} d\Omega, \quad (4.18)$$

где

$$\theta_1^2 = \frac{m_\Lambda^3 (m_\Sigma^2 - m_\Lambda^2)^3}{8\pi m_\Sigma^2 E^3} |R_0|^2 \tau, \quad (4.19)$$

$$\theta_2^2 = \left(\frac{m_\Sigma^2 - m_\Lambda^2}{2E^2} \right)^2.$$

Величины τ и θ_1 можно легко выразить через формфакторы вершинной части R_μ . Записывая последнюю в форме

$$R_\mu = (\bar{u}_\Sigma | \Gamma_\mu | u_\Lambda), \quad (4.20)$$

мы можем определить наиболее общий вид Γ_μ , удовлетворяющий условию (2.3). Если четности P_Λ и P_Σ частиц Λ и Σ^0 одинаковы, то

$$\Gamma_\mu = -i \left\{ a(q^2) \left(q_\mu + \frac{iq^2}{m_\Sigma - m_\Lambda} \gamma_\mu \right) + b(q^2) (\gamma_\mu \hat{q} - \hat{q} \gamma_\mu) \right\}. \quad (4.21)$$

Если $P_\Lambda = -P_\Sigma$, то

$$\Gamma_\mu = \gamma_5 \left\{ a(q^2) \left(q_\mu - \frac{iq^2}{m_\Sigma + m_\Lambda} \gamma_\mu \right) + b(q^2) (\gamma_\mu \hat{q} - \hat{q} \gamma_\mu) \right\}. \quad (4.22)$$

Как это следует из инвариантности сильных взаимодействий по отношению к операции зарядового сопряжения, формфакторы $a(q^2)$ и $b(q^2)$ в обеих этих формулах представляют собой действительные величины и совпадают, за исключением тривиальных множителей, с матричным элементом $\langle \Sigma^0 | j_\mu(0) | \Lambda \rangle$, где $j_\mu(x)$ — эрмитовский оператор тока.

В обоих случаях $P_\Lambda = P_\Sigma$ и $P_\Lambda = -P_\Sigma$ имеем

$$\frac{1}{\tau} = b^2(0) \frac{(m_\Sigma^2 - m_\Lambda^2)^3}{2\pi m_\Sigma^2}. \quad (4.23)$$

Для θ_1 можно получить следующие выражения:

$$\theta_1 = \begin{cases} \frac{(m_\Sigma^2 - m_\Lambda^2)(m_\Sigma - m_\Lambda)}{4E^3} \left(1 + \frac{m_\Sigma + m_\Lambda}{2(m_\Sigma - m_\Lambda)} \frac{a(0)}{b(0)} \right), & \text{если } P_\Lambda = P_\Sigma, \\ \frac{(m_\Sigma^2 - m_\Lambda^2)(m_\Sigma + m_\Lambda)}{4E^3} \left(1 + \frac{m_\Sigma - m_\Lambda}{2(m_\Sigma + m_\Lambda)} \frac{a(0)}{b(0)} \right), & \text{если } P_\Lambda = -P_\Sigma. \end{cases} \quad (4.24)$$

Условие применимости полученной формулы сводится для рассматриваемого процесса к следующему неравенству

$$\theta \ll \frac{m_\pi}{EA^{1/2}}. \quad (4.25)$$

Так как $\theta_1 \ll \theta_2 \ll m_\pi/EA^{1/2}$, то уравнение (4.18) содержит только один неизвестный параметр τ . Поэтому время жизни Σ^0 -частицы может быть определено путем измерения сечения перехода Λ -частицы в Σ^0 -частицу для углов вылета θ , меняющихся в пределах $\theta_1 \ll \theta \ll m_\pi/EA^{1/2}$, или полного сечения процесса σ_c (см. уравнения (4.14) или (4.16)) при условии малой передачи импульса ядру ($q^2 \ll m_\pi^2 A^{-2/3}$).

ОБ ОБРАЗОВАНИИ ПУЧКОВ π -МЕЗОНОВ БОЛЬШОЙ ЭНЕРГИИ¹

Совместно с Ю. П. Никитиным и И. М. Шмушкевичем

Мы благодарим профессора О. Пиччони за интересные обсуждения проблем, затронутых в настоящей работе во время 9-й Международной конференции по физике высоких энергий, проходившей в Киеве в 1959 году.

Мы благодарим также В. Б. Берестецкого, В. Н. Грибова, И. Т. Дятлова за обсуждения, полезные замечания и интерес к нашей работе.

Институт теоретической
и экспериментальной физики, Москва
Физико-технический институт
Академии наук СССР, Ленинград

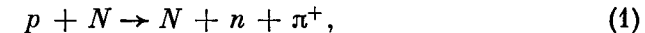
Получено 25 июля 1960 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. L. Good, W. D. Walker. Preprint.
2. G. F. Chew, F. E. Low. Phys. Rev., 1959, 113, 1640.
3. G. Weizsacker. Z. Phys., 1934, 88, 612; E. Williams. Phys. Rev., 1934, 45, 729.
4. R. E. Prange. Phys. Rev., 1958, 110, 240.

Вычислено сечение образования быстрых π^+ -мезонов при столкновениях протонов высокой энергии с ядрами, в результате которых ядру передается малый импульс. В таких условиях основную роль во взаимодействии играет обмен виртуальными фотонами. Поэтому рассматриваемое сечение определяется с помощью существующих экспериментальных данных о сечении фотообразования π^+ -мезонов на протонах.

Пучки быстрых π -мезонов получают в настоящее время на протонных ускорителях благодаря взаимодействию первичных протонов с ядрами. Если эти протоны имеют энергию E_L порядка 30—40 Бэв, то, как будет показано ниже, для генерации π^+ -мезонов с энергией $\epsilon_L \lesssim 0,4-0,5 E_L$ существенную роль играет механизм, связанный с действием кулонова поля ядра. Речь идет о реакции



в которой ядру N передается малый импульс. Если выполняется условие

$$q^2 \ll \mu^2 A^{-1/2}, \quad (2)$$

где $q^2 = (P - P')^2$, P и P' — 4-импульсы ядра до и после столкновения, A — атомный вес ядра и μ — масса π -мезона, то, как показано ранее [1], в амплитуду процесса (1) основной вклад вносят графики, связанные с обменом виртуальными фотонами (см. рис. 1). В этих условиях дифференциальное поперечное сечение процесса (1) $d\sigma$ можно определить по методу Вайцекера — Вильямса, используя имеющиеся экспериментальные данные о сечении фотообразования π -мезонов на нуклонах. Исходя из связи между этими сечениями (см. [1], формула (2.17)), имеем

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha}{\pi} \frac{dw^2}{w^2 - m^2} \frac{dq^2}{(q^2)^2} \left[q^2 - \left(\frac{w^2 - m^2}{2E_L} \right)^2 \right] d\Omega_p \quad (\alpha = 1/137). \quad (3)$$

Здесь Z — заряд ядра; E_L — энергия налетающего протона в лабораторной системе координат (лаб. с.); m — масса протона; w — энергия образующихся в реакции нейтрона и π^+ -мезона (или

¹ ЖЭТФ, 1961, 41, 963.

протона и π^0 -мезона) в C -системе, т. е. в системе центра масс (с.ц.м.) этих частиц; $d\sigma_p$ — дифференциальное поперечное сечение фотопроцесса

$$\gamma + p \rightarrow n + \pi^+, \quad (4)$$

которое мы запишем следующим образом:

$$d\sigma_p = 2\pi\sigma_p(\omega, \theta_c) \sin\theta_c d\theta_c, \quad (5)$$

где θ_c — угол между импульсами π -мезона и γ -кванта в C -системе, а ω — частота в W -системе, т. е. в той системе координат, в которой покоится протон до столкновения.

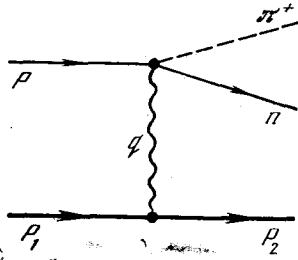


Рис. 1

Принимая во внимание, что $w^2 = m^2 + 2m\omega$, проинтегрируем (3) по q^2 в пределах между

$$q_{\min}^2 = \left(\frac{w^2 - m^2}{2E_L}\right)^2 = \left(\frac{m\omega}{E_L}\right)^2 \quad \text{и} \quad q_{\max}^2 = \frac{\mu^2}{A^{1/2}}.$$

Обозначая получившийся результат через $\sigma_\pi(E_L, \omega, \theta_c) d\omega \sin\theta_c d\theta_c$, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_\pi(E_L, \omega, \theta_c) d\omega \sin\theta_c d\theta_c = & 2Z^2\alpha \left[2\ln \frac{\mu E_L}{mA^{1/2}\omega} - 1 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{mA^{1/2}\omega}{\mu E_L}\right)^2 \right] \frac{d\omega}{\omega} \sigma_p(\omega, \theta_c) \sin\theta_c d\theta_c. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что в силу условия (2) и того, что $\omega^2 - m^2 < 2E_L \sqrt{q^2}$, допустимые значения ω ограничиваются условием

$$\omega < \mu E_L / mA^{1/2}. \quad (7)$$

Для того чтобы получить энергетическое и угловое распределения π -мезонов в лаб. с., перейдем, прежде всего, в (6) от θ_c и ω к другим переменным ε_L и θ_L — энергии и углу вылета (отсчитанного от направления импульса первичных протонов) образующегося π -мезона в лаб. с.

Из законов сохранения, относящихся к процессу (4), следует, что

$$\cos\theta = \left[(m + \omega)\varepsilon - m\omega - \frac{1}{2}\mu^2 \right] / g\omega, \quad (8)$$

где ε и g — энергия и импульс образующегося π -мезона в W -системе, а θ — угол между импульсами π -мезона и γ -кванта в этой же системе. С другой стороны,

$$\varepsilon_L = m^{-1}(\varepsilon E_L - gp_L \cos\theta). \quad (9)$$

Из (8) и (9) имеем

$$\varepsilon = \frac{\omega(1 - \varepsilon_L/p_L) + \mu^2/2m}{1 - (\omega/m)(E_L/p_L - 1)}. \quad (10)$$

Учитывая (7), вторым слагаемым в знаменателе получившегося выражения для ε можно пренебречь. Действительно,

$$\frac{\omega}{m} \left(\frac{E_L}{p_L} - 1 \right) \approx \frac{\omega}{m} \frac{m^2}{2E_L^2} < \frac{m}{2E_L^2} \frac{\mu E_L}{mA^{1/2}} = \frac{\mu}{2E_L A^{1/2}} \ll 1. \quad (11)$$

Кроме того, в числителе (10) можно пренебречь слагаемым $\mu^2/2m$, так как во всяком случае $\varepsilon > \mu$. Следовательно, с достаточно хорошей точностью

$$\varepsilon = \omega(1 - \varepsilon_L/E_L). \quad (12)$$

Рассмотрим теперь те π -мезоны, которые в лаб. с. вылетают под малыми углами к направлению первичных протонов, имея при этом очень большую энергию ε_L , составляющую заметную долю энергии E_L . Как мы сейчас увидим, эти π -мезоны и в W -системе будут в основном релятивистскими, т. е. для них $\varepsilon \approx g \gtrsim \mu$. Принимая это во внимание, из (9) и (12) получаем

$$\omega = m\varepsilon_L/(E_L - \varepsilon_L) [1 - (p_L/E_L) \cos\theta]. \quad (13)$$

Отсюда при заданном ε_L для минимальной частоты ω_{\min} (соответствующей $\theta = \pi$) имеем

$$\omega_{\min} = m\varepsilon_L/2(E_L - \varepsilon_L). \quad (14)$$

Минимальное значение ε , соответствующее ω_{\min} , оказывается, согласно (12), равным $m\varepsilon_L/2E_L$. Поэтому сделанное раньше предположение о том, что $\varepsilon \gtrsim \mu$, выполняется для тех π -мезонов, энергия которых в лаб. с. ε_L удовлетворяет условию

$$\varepsilon_L \gtrsim 2\mu E_L/m = \varepsilon_1. \quad (15)$$

С другой стороны, для максимальной частоты ω_{\max} из (13) следуют также значения ω ($\omega_{\max} = 2\varepsilon_L E_L^2/m(E_L - \varepsilon_L)$), кото-

рые при интересующих нас больших ε_L всегда много больше ω_{\max} , определяемого соотношением (7). Поэтому в (6) интегрирование по ω должно производиться в пределах от ω_{\min} до $\omega_{\max} = \mu E_L / mA^{1/2}$. При этом условии $\omega_{\min} < \omega_{\max}$ определяет верхний предел для ε_L , возможный при выполнении условия (7):

$$(\varepsilon_L)_{\max} = \frac{E_L}{1 + m/2\omega_{\max}} = \frac{E_L}{1 + m^2 A^{1/2} / 2\mu E_L} = \varepsilon_2. \quad (16)$$

Таким образом, рождение быстрых π -мезонов с энергией $\varepsilon_L \geq 2\mu E_L / m$ на кулоновском поле ядра возможно только при достаточно большой энергии E_L налетающих протонов

$$E_L \geq mA^{1/2} / (1 + 2\mu/m). \quad (17)$$

Обозначим через V скорость C -системы относительно W -системы и через v — скорость образующегося π -мезона в C -системе:

$$V = \frac{\omega}{m + \omega}, \quad v = \sqrt{(\omega - \mu^2/2m)^2 - \mu^2/(\omega + \mu^2/2m)}. \quad (18)$$

Тогда

$$v \cos \theta_c = \left[g \cos \theta - \frac{\omega}{m + \omega} \varepsilon \right] / \left[\varepsilon - \frac{\omega}{m + \omega} g \cos \theta \right]. \quad (19)$$

С той же точностью, с какой было получено соотношение (13), имеем

$$\cos \theta_c \approx \left[\cos \theta - \frac{\omega}{m + \omega} \right] / \left[1 - \frac{\omega}{m + \omega} \cos \theta \right] = 1 - \frac{\varepsilon_L}{E_L} \left(2 + \frac{m}{\omega} \right). \quad (20)$$

Далее,

$$E_L \varepsilon_L - \sqrt{(E_L^2 - m^2)(\varepsilon_L^2 - \mu^2)} \cos \theta_L = m\varepsilon. \quad (21)$$

Отсюда, учитывая (12) и (15), получаем

$$\begin{aligned} \cos \theta_L &= \frac{\varepsilon_L E_L}{\sqrt{(E_L^2 - m^2)(\varepsilon_L^2 - \mu^2)}} \left(1 - \frac{m\varepsilon}{\varepsilon_L E_L} \right) \approx \\ &\approx \left(1 + \frac{m^2}{2E_L^2} + \frac{\mu^2}{2\varepsilon_L^2} \right) \left[1 - \frac{m\omega}{\varepsilon_L E_L} \left(1 - \frac{\varepsilon_L}{E_L} \right) \right] \approx \\ &\approx 1 + \frac{m^2}{2E_L^2} - \frac{m\omega}{\varepsilon_L E_L} \left(1 - \frac{\varepsilon_L}{E_L} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Следовательно, для малых θ_L ($\theta_L \ll 1$), которые только и существенны для рассматриваемого процесса, имеем

$$\theta_L^2 = \frac{2m\omega}{\varepsilon_L E_L} \left(1 - \frac{\varepsilon_L}{E_L} \right) - \frac{m^2}{E_L^2}. \quad (23)$$

Максимально возможный угол $\theta_L^{\max}(E_L, \varepsilon_L)$ вылета π -мезонов с энергией ε_L , допускаемый соотношением (7), оказывается поэтому равным

$$[\theta_L^{\max}(E_L, \varepsilon_L)]^2 = \frac{2\mu}{A^{1/2}\varepsilon_L} \left(1 - \frac{\varepsilon_L}{E_L} \right) - \frac{m^2}{E_L^2}. \quad (24)$$

Формулы (20) и (23) позволяют произвести в (6) переход к переменным ε_L и θ_L , в результате чего находим

$$\begin{aligned} \sigma_{\pi}(E_L, \varepsilon_L, \theta_L) d\varepsilon_L d\Omega_L &= \frac{4Z^2\alpha}{\pi} \left[2 \ln \frac{\omega_{\max}}{\omega} - \right. \\ &\left. - 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{\max}} \right)^2 \right] \sigma_p(\omega, \theta_c) \frac{\theta_L^2 + m^2/\varepsilon_L E_L}{E_L(\theta_L^2 + m^2/E_L^2)^2} d\varepsilon_L d\Omega_L. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь ω и θ_c определяются при заданных ε_L и θ_L формулами (20) и (23), а $d\Omega_L = 2\pi\theta_L d\theta_L$.

Для получения энергетического распределения образующихся π -мезонов удобнее сразу в (6) перейти с помощью (20) от переменной θ_c к ε_L и проинтегрировать получившееся выражение по ω в пределах, определяемых формулами (7) и (14). Тогда получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\pi}(E_L, \varepsilon_L) d\varepsilon_L - d\varepsilon_L \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \sigma_{\pi}(\omega, \theta_c) \sin \theta_c \frac{d\theta_c}{d\varepsilon_L} d\omega &= \\ = 2Z^2 \frac{d\varepsilon_L}{E_L} \alpha \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \left[2 \ln \frac{\omega_{\max}}{\omega} - 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{\max}} \right)^2 \right] \times \\ \times \sigma_p(\omega, \theta_c) \left(2 + \frac{m}{\omega} \right) \frac{d\omega}{\omega}. \end{aligned} \quad (26)$$

Имеющиеся данные о сечении фотообразования π -мезонов на нуклонах удобно представить в виде

$$\sigma_p(\omega, \theta_c) = A(\omega) + B(\omega)\cos\theta_c + C(\omega)\cos^2\theta_c, \quad (27)$$

где $A(\omega)$, $B(\omega)$ и $C(\omega)$ — известные из экспериментов величины (см. [2], где собраны данные о фоторождении π^+ -мезонов для энергии γ -квантов, меньшей 1 $B\varepsilon$). С учетом (20) это дает возможность провести численное интегрирование в (26) и получить энергетический спектр π -мезонов с энергией ε_L , лежащей в интервале от $2\mu E_L/m$ до $E_L/(1 + m^2 A^{1/2}/2\mu E_L)$ (см. (15) и (16)), и вылетающих в узком конусе с углом раствора $\theta_L^{\max}(E_L, \varepsilon_L)$ (см. (24)).

Результаты вычисленного таким способом сечения $\sigma_{\pi}(E_L, \varepsilon_L)$ для ядер с $Z = 82$ и $A = 207$ (Pb) и для значений энергии первичных протонов $E_L = 20, 30, 40 B\varepsilon$ при различных значениях ε_L содержатся в табл. 1.

$E_L, \text{ Бэв}$	ε_L/E_L			
	0,30	0,35	0,40	0,50
20	131	59	15	0,02
30	194	108	36	1,9
40	226	129	50	5,3

По поводу этих вычислений заметим следующее. Частота ω , соответствующая резонансу ($3/2, 3/2$) порядка 2μ . Поэтому, если $\omega_{\min} \leq 2\mu$, то область резонанса попадет внутрь интервала интегрирования в (26). Согласно (14) это будет иметь место, если

$$\varepsilon_L/E_L \leq (1 + m/4\mu)^{-1} \approx 0,4. \quad (28)$$

Основной вклад в интеграл для $\sigma_{\pi}(E_L, \varepsilon_L)$ будут тогда вносить частоты ω , близкие ω_{\min} . Поэтому, если дополнительно к (28) будет выполняться условие

$$\omega_{\max}/\omega_{\min} \gg 1, \quad (29)$$

то при существенных значениях ω будет большим и первый множитель в подынтегральном выражении (26) (логарифмический член велик). При выполнении условий (28) и (29) можно ожидать, что рассмотренный механизм, связанный с действием кулонова поля ядра, будет вносить заметный и может быть даже основной вклад (т. е. превышающий вклад, связанный с чисто ядерными взаимодействиями) в сечение образования быстрых π -мезонов.

Для π -мезонов с энергией ε_L , удовлетворяющих условию (28), неравенство (29) сводится к следующему:

$$E_L/2mA^{1/2} \gg 1. \quad (30)$$

Выполнение условия (29) существенно еще и по следующим причинам. При переходе от (3) к (6) мы заменили неравенство (2), являющееся условием применимости (3), точным равенством, определяющим верхний предел интегрирования по q^2 . Возникающая из-за этого неточность будет незначительной, если аргумент логарифма в квадратных скобках (6) ω_{\max}/ω будет много больше единицы. Поэтому и для $\sigma_{\pi}(E_L, \varepsilon_L)$ соответствующая ошибка будет малой при выполнении условия (29).

При энергии первичных протонов E_L , равной, например, 30 Бэв, и энергии образуемых π -мезонов $\varepsilon_L = 0,4E_L = 12 \text{ Бэв}$ выполняется условие (28) и $\omega_{\max}/\omega_{\min} \approx 2,5$. Поэтому можно думать, что при этих условиях рассмотренный механизм вносит

$E_L, \text{ Бэв}$	20	30	40	50	60	75
σ'_{π}	0,146	0,395	0,656			
σ_{π}	1,09	2,54	3,88	5,05	6,08	7,38

существенный вклад в образование π -мезонов соответствующей энергии, вылетающих под углами, не превышающими примерно 2° (см. формулу (24)). По-видимому, этот механизм будет оставаться существенным в области энергии π -мезонов $\varepsilon_L \geq 0,4 E_L$, которая с ростом E_L будет составлять все большую долю энергии.

В первой строке табл. 2 даны значения сечения $\sigma'_{\pi}(E_L)$, которые получены в результате численного интегрирования $\sigma_{\pi}(E_L, \varepsilon_L)$ по ε_L в пределах, определяемых (15) и (16):

$$\sigma'_{\pi}(E_L) = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma_{\pi}(E_L, \varepsilon_L) d\varepsilon_L. \quad (31)$$

Во второй строке этой таблицы приведены данные, показывающие зависимость от E_L сечения $\sigma_{\pi}(E_L)$, отвечающего образованию в реакции (1) π -мезонов с любыми импульсами, при которых выполняется условие (2). Это сечение соответствует π -мезонам, которые в л.с. могут иметь не только большую, но и малую энергию ($\varepsilon_L < 2\mu E_L/m$). Величина этого сечения получается заменой в

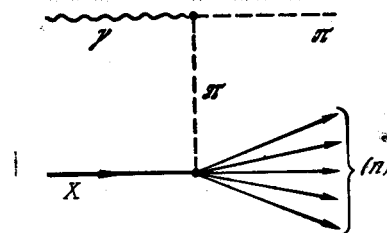


Рис. 2

(6) дифференциального поперечного сечения $2\pi\sigma_p(\omega, \theta_c) \sin \theta_c d\theta_c$ на полное сечение реакции (4) $\sigma_p(\omega)$ с последующим численным интегрированием по ω в пределах от $\omega_1 = \mu(1 + \mu/2m)$ (энергетический порог реакции (4)) до ω_{\max} , определяемого формулой (7)

$$\sigma_{\pi}(E_L) = \frac{Z^2\alpha}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_{\max}} \left[2\ln \frac{\omega_{\max}}{\omega} - 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{\max}} \right)^2 \right] \sigma_p(\omega) \frac{d\omega}{\omega}. \quad (32)$$

ОБ УПРУГОМ РАССЕЯНИИ ЯДРАМИ БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ¹

Совместно с А. Ахиезером

Рассматривается рассеяние быстрых частиц, могущих поглощаться ядрами. Картина рассеяния эквивалента дифракции заряженных волн от абсолютно черного шарика. Выведенные формулы являются обобщением дифракционного рассеяния быстрых нейтронов для случая заряженных частиц.

Бор, Пайерс и Плачек и Бете [1] показали, что упругое рассеяние быстрых нейтронов ядрами должно происходить, главным образом, на малые углы. При этом предполагается, что коэффициент прилипания нейтронов, длина волны которых считается малой по сравнению с размерами ядра, равен единице для прицельных параметров, меньших, чем радиус ядра, и равен нулю, если прицельный параметр больше радиуса ядра. Таким образом, анизотропное рассеяние обусловлено поглощением нейтронов, попадающих на поверхность ядра; его можно рассматривать как дифракцию нейтронов от абсолютно черного шарика.

Естественно возникает вопрос о влиянии ядерного взаимодействия на рассеяние быстрых заряженных частиц, также могущих поглощаться ядрами. Такими частицами могут быть протоны, α -частицы, дейтроны и другие, употребляемые при ядерных реакциях; необходимо только, чтобы, попадая на поверхность ядра, частицы захватывались им и образовывали составное ядро. К числу рассматриваемых частиц можно отнести также медленные мезотроны, если предположить, что они интенсивно захватываются ядрами².

¹ ЖЭТФ, 1946, 16, 396; J. Phys. USSR, 1945, 9, 471.

² Недавние экспериментальные результаты Росси [2] по распаду медленных (нерелятивистских) мезотронов указывают на то, что медленные отрицательные мезотроны не успевают распасться из-за захвата их ядрами.

Сечения $\sigma_{\pi}(E_L, \epsilon_L)$ и $\sigma_{\pi'}(E_L)$ могут быть вычислены с помощью существующих экспериментальных данных только для энергии первичных протонов $E_L < 40$ Бэв. Энергии E_L , большей 40 Бэв, соответствует, согласно (7), ω_{\max} , которая при $A = 207$ превышает 1 Бэв. Соответствующих данных для сечения фотопроцесса (4) $\sigma_p(\omega, \theta_c)$ при энергии γ -квантов, большей 1 Бэв, пока нет. Сечение же $\sigma_{\pi}(E_L)$ может быть с хорошей точностью вычислено и при $E_L < 40$ Бэв. Это обусловлено тем, что основной вклад в интеграл в правой части (32) обязан сравнительно низким частотам, отвечающим резонансу ($3/2, 3/2$).

В недавно опубликованной работе [3] Дрелл пришел к заключению, что выход π -мезонов очень большой энергии должен быть выше на электронных ускорителях, а не на протонных, уже при энергии γ -квантов (возникающих при тормозном излучении электронов) и протонов $E_L = 25$ Бэв. Но, оценивая сечение образования быстрых π -мезонов при столкновениях протонов с ядрами, Дрелл исходил из результатов, основанных на статистической модели. Однако применимость статистических расчетов вероятности процессов, в которых почти вся энергия сталкивающихся частиц передается одной частице, вызывает, по-видимому, наибольшие сомнения. С другой стороны, сечение фотообразования π -мезонов на ядрах вычислялось Дреллом в полюсном приближении, т. е. только с учетом графиков, изображенных на рис. 2 (на котором X и (n) соответствуют ядру в начальном и конечном состояниях). В применении к процессам с участием ядер законность такого приближения вызывает особые сомнения (см. замечания Гелл-Манна [4] по поводу работы Дрелла), так как возможно, что ближайшая особенность по величине передаваемого ядру импульса в амплитуде таких процессов связана не с μ -массой π -мезона, а с меньшей величиной $1/R = \mu/A^{1/2}$ (R — радиус ядра).

Академия наук СССР

Получено 25 апреля 1961 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Я. Померанчук, И. М. Шмушкевич. Nucl. Phys., 1961, 23, 452 (Собр. трудов, № 94).
2. Г. Бете, Ф. Гобман. Мезоны и поля, т. 2, ИИЛ, 1957, H. H. Bingham, A. B. Clegg. Phys. Rev., 1958, 112, 2053; F. P. Dixon, R. L. Walker. Phys. Rev. Lett., 1958, 1, 459.
3. S. D. Drell. Phys. Rev. Lett., 1960, 5, 278.
4. M. Gell-Mann. Proc. 1960 Annual Internat. Conf. High Energy Phys. Rochester, Univ. Rochester, 1960, p. 641.

В случае $n > n_0$ $\beta_n = e^{2i\eta_n}$, где η_n — фаза на бесконечности в кулоновом поле, равная, как известно, [4]:

$$\eta_n = \arg \Gamma(n + 1 + i\alpha), \quad \alpha = \frac{Ze^2}{\hbar v} \quad (2)$$

(v — скорость падающих частиц вдали от ядра).

Приведем значения n_0 для нескольких значений энергии. Для протонов высота потенциального барьера в конце периодической системы составляет около 12 Мэв. При энергии протонов в 15 Мэв $n_0 = 4$; для $E = 24$ Мэв $n_0 = 8$. Для α -частиц высота барьера в конце периодической системы равна примерно 25 Мэв. При энергии α -частиц $E = 30$ Мэв $n_0 = 9$, при $E = 40$ Мэв $n_0 = 16$. Для мезотронов с энергией $E = 80$ Мэв $n_0 = 6$ (конец периодической системы). Для легких ядер значения энергии, при которых $n_0 \gg 1$, значительно уменьшаются (для протонов при $E = 15$ Мэв в этих условиях $n_0 \approx 9$; для α -частиц с энергией $E = 30$ Мэв $n_0 \approx 22$; для мезотронов получаются прежние значения).

Перепишем теперь формулу для $f(\theta)$, используя сделанные предположения о β_n :

$$f(\theta) = \frac{1}{2} i\lambda \sum_{n=1}^{n_0} (2n+1) P_n(\cos \theta) - \frac{1}{2} i\lambda \sum_{n_0}^{\infty} (2n+1)(e^{2i\eta_n} - 1) P_n(\cos \theta). \quad (3)$$

Мы предполагаем здесь, что ζ_n резко меняется, как было сказано выше, при $n = n_0$. Можно считать, что роль промежуточных членов с $n \sim n_0$ незначительна, если только n_0 достаточно велико. Однако этим не исчерпываются условия применимости формулы (3). Так как n_0 определяется неточно, то при изменении n_0 на единицу амплитуда рассеяния должна незначительно меняться. Отсюда вытекают условия $|P_n(\cos \theta) - P_{n+1}(\cos \theta)| \ll |P_n(\cos \theta)|$ и $|\eta_n - \eta_{n+1}| \ll |\eta_n|$. При больших углах рассеяния замена n_0 на $n_0 \pm 1$ приводит к изменению амплитуды рассеяния на величину порядка самой амплитуды. Поэтому углы рассеяния, как видно из первого неравенства, должны быть малыми по сравнению с единицей. Из второго неравенства следует $\alpha \ll n_0$.

В применении к нейтронам вторая сумма в (3) равна нулю. Пользуясь известной формулой [5]:

$$(2n+1) P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x),$$

можно в этом случае представить $f(\theta)$ в виде:

$$f_{\text{нейтр}}(\theta) = \frac{1}{2} i\lambda [P'_{n_0+1}(\cos \theta) - P'_{n_0-1}(\cos \theta)].$$

Исследованию рассеяния быстрых заряженных частиц, сильно поглощающихся ядрами, посвящена настоящая статья. Если рассеяние быстрых нейтронов аналогично дифракции света от абсолютно черного тела, то в данном случае речь идет о дифракции заряженных лучей от абсолютно черного заряженного шара.

Будем исходить из следующей формулы, определяющей амплитуду рассеянной волны [3, 4]:

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{n=0}^{\infty} (\beta - 1)(2n+1) P_n(\cos \theta), \quad (1)$$

где k — волновой вектор падающих частиц вдали от ядра, $(-1)^{n+1}\beta_n$ — отношение расходящейся к сходящейся волне с моментом n ; в случае отсутствия ядерного поглощения $\beta_n = e^{2i\eta_n}$, η_n — вещественная фаза, определяющая асимптотическое поведение радиальной волновой функции частицы. При наличии поглощения β_n связана с вероятностью образования составного ядра; именно, доля частиц с моментом n , которые поглощаются ядром, равна

$$\zeta_n = 1 - |\beta_n|^2$$

(ζ_n называется коэффициентом прилипания частиц с моментом n).

Полный поперечник для всех процессов, связанных с образованием составного ядра, равен $\sigma_t = \sum_0^{\infty} (2n+1) \pi \lambda^2 \zeta_n$.

Если кинетическая энергия падающих частиц на поверхности ядра $w > 0$ достаточно велика, то можно считать $\zeta_n \rightarrow 1$; для отрицательных w , достаточно больших по абсолютному значению, $\zeta_n = 0$ ¹.

Критическое значение углового момента n_0 , отделяющего положительные и отрицательные значения w , равно

$$n_0 = \frac{P}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{Ze^2}{RE}},$$

где R — радиус ядра, E — энергия падающей частицы, λ — ее длина волны (вдали от ядра), Ze — заряд ядра. Будем считать энергию падающих частиц достаточно большой, так что $n_0 \gg 1$, и предположим, что $\zeta_n = 1$ при $n < n_0$ и $\zeta_n = 0$, если $n > n_0$. Ясно, что определение n_0 , отделяющего значения коэффициента прилипания $\zeta_n = 1$ от $\zeta_n = 0$, имеет смысл с точностью до величины порядка единицы.

¹ Бете [3] полагает, что для справедливости этих утверждений в применении к нейтронам достаточно считать $|w| > 1$ Мэв.

Используя далее асимптотическую формулу

$$P_n(\cos \theta) = \left(\frac{2}{\pi n \sin \theta}\right)^{1/2} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right],$$

справедливую при выполнении условия [6] $2(2n + 3) \sin \theta \gg 1$, и замечая, что бесселева функция $J_1(z)$ при $z \gg 1$ равна $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} z^{-1/2} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right)$, получим при $\theta < 1$:

$$f_{\text{нейтр}}(\theta) = i \frac{R}{\theta} J_1(n_0 \theta). \quad (4)$$

Такой формулой определяется, как известно из оптики, дифракция от шара радиуса R . Поперечник упругого рассеяния нейтронов равен, как легко видеть, площади тени ядра πR^2 . Такое же значение имеет полный поперечник неупругого рассеяния нейтронов. Эти результаты, относящиеся к нейтронам, были получены в [1].

В случае заряженных частиц, применяя формулу Стирлинга к вычислению η_n , получим следующее выражение для $e^{2i\eta_n}$.

$$e^{2i\eta_n} = n^{2i\alpha}, \quad n \gg 1, \quad n \gg \alpha.$$

При $\theta \neq 0$ $\sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) P_n(\cos \theta)$ суммируется к нулю, поэтому этот ряд можно вычесть из (3); получим

$$f(\theta) = -\frac{i\lambda}{2} \sum_{n_0}^{\infty} (2n + 1) n^{2i\alpha} P_n(\cos \theta). \quad (5)$$

Ряд (5) не сходится в обычном смысле, но тем не менее суммируется. Расходимость обусловлена ролью малых углов в кулоновском рассеянии. Если умножить амплитуду рассеянной волны в кулоновом поле на $1 - \cos \theta$, то получится всюду конечная величина. Полезно поэтому преобразовать ряд (5), умножив его предварительно на $1 - \cos \theta$ и использовав формулу [5]:

$$(2n + 1) x P_n(x) = (n + 1) P_{n+1}(x) + n P_{n-1}(x),$$

$$(1 - \cos \theta) f(\theta) = -\frac{i\lambda}{2} \sum_{n_0}^{\infty} n^{2i\alpha} [(2n + 1) P_n - (n + 1) P_{n+1} - n P_{n-1}] =$$

$$= -\frac{i\lambda}{2} \{n_0(n_0 - 1)^{2i\alpha} P_{n_0}(\cos \theta) - n_0^{2i\alpha+1} P_{n_0-1}(\cos \theta) +$$

$$+ \sum_{n_0}^{\infty} [(2n + 1) n^{i\alpha} - (n + 1)^{2i\alpha} - (n + 1)^{1+2i\alpha}] P_n(\cos \theta)\}.$$

¹ Заметим, что формула (4) справедлива также при сколь угодно малых углах θ .

Выражение в квадратных скобках в последней сумме с точностью до $1/n^2$ равно $-(2i\alpha)^2 n^{2i\alpha-1}$, поэтому предыдущую формулу можно представить в виде:

$$(1 - \cos \theta) f(\theta) = \frac{i\lambda}{2} \left\{ n_0^{2i\alpha+1} (P_{n_0} - P_{n_0-1}) - 2i\alpha n_0^{2i\alpha} P_{n_0} - \right. \\ \left. - (2i\alpha)^2 \sum_{n_0}^{\infty} n_0^{2i\alpha-1} P_n \right\}. \quad (9)$$

В области применимости асимптотической формулы для полиномов Лежандра (грубо говоря, при $n_0 \theta \gg 1$) и для достаточно малых α , $\alpha \ll n_0 \theta$, первое слагаемое в (6) играет главную роль.

Как было показано выше, излагаемый метод справедлив для малых углов рассеяния. Легко видеть, что при $\theta \ll 1$ и $n \gg 1$ $P_n(\cos \theta) \approx J_0(n\theta)$. Заменяя в (6) сумму интегралом по n (для этого необходимо, чтобы $\alpha \ll n_0$; это условие выполнено), получим:

$$f(\theta) = i\lambda \left\{ \frac{n_0^{2i\alpha+1}}{\theta} J_1(n_0 \theta) + \frac{1}{\theta^2} \left[2i\alpha n_0^{2i\alpha} J_0(n_0 \theta) + \right. \right. \\ \left. \left. + (2i\alpha)^2 \theta^{-1+i\alpha} \int_{n_0}^{\infty} z^{2i\alpha-1} J_0(z) dz \right] \right\}. \quad (6')$$

Интеграл, входящий в (6), можно назвать дифракционным интегралом рассматриваемой задачи.

Рассмотрим несколько предельных случаев. Если $n_0 \theta \gg 1$ и $\alpha \ll n_0 \theta$, то дифракционный интеграл можно оценить интегрированием по частям, он равен приближенно

$$(2/\pi)^{1/2} (n_0 \theta)^{2i\alpha-3} \sin\left(n_0 \theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

и

$$f(\theta) = i\lambda \frac{n_0^{2i\alpha+1}}{\theta} J_1(n_0 \theta), \quad n_0 \theta \gg 1, \quad \alpha \ll n_0 \theta. \quad (7)$$

Эта формула при $\alpha = 0$ переходит в приведенную выше формулу (4) для амплитуды $f_{\text{нейтр}}(\theta)$. В этих условиях рассеяние заряженных частиц только фазой отличается от рассеяния нейтронов. Величина же эффективного сечения совпадает с нейтронной.

Если $n_0 \theta \ll 1$, то дифракционный интеграл может быть вычислен при любых α . Пользуясь формулой [6]:

$$\int_0^{\infty} x^m J_0(x) dx = 2^m \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{m}{2}\right)},$$

получим ¹

$$\int_{n_0\theta}^{\infty} z^{2i\alpha-1} J_0(z) dz = \int_0^{\infty} z^{2i\alpha-1} J_0(z) dz - \int_0^{n_0\theta} z^{2i\alpha-1} J_0(z) dz =$$

$$= \frac{2^{2i\alpha}}{2i\alpha} \frac{\Gamma(1+i\alpha)}{\Gamma(1-i\alpha)} - \int_0^{n_0\theta} z^{2i\alpha-1} J_0(z) dz.$$

При $n_0\theta \ll 1$ $J_0(z)$ в последнем интеграле можно заменить единицей, поэтому

$$\int_{n_0\theta}^{\infty} z^{2i\alpha-1} J_0(z) dz = \frac{2^{2i\alpha}}{2i\alpha} e^{2in_0\theta} - \frac{(n_0\theta)^{2i\alpha}}{2i\alpha}, \quad n_0\theta \ll 1, \quad e^{2in_0\theta} = \frac{\Gamma(1+i\alpha)}{\Gamma(1-i\alpha)}.$$

Амплитуда рассеяния имеет вид

$$f(\theta) = \frac{i\lambda}{2} n_0^{2i\alpha+2} - \frac{2\alpha\lambda}{\theta^2} e^{-2i\alpha \ln \frac{\theta}{2} + 2in_0\theta}, \quad n_0\theta \ll 1. \quad (8)$$

Второе слагаемое представляет собой амплитуду кулоновского рассеяния.

Резюмируем полученные результаты в применении к ядрам с $\alpha \ll 1$. Для углов рассеяния $\theta \ll \frac{2\sqrt{\alpha}}{n_0}$ мы получаем кулоновское рассеяние; при $\frac{1}{n_0} \gg \theta \gg \frac{2\sqrt{\alpha}}{n_0}$ дифференциальное сечение рассеяния не зависит от углов θ , наконец, при $n_0\theta \gg 1$ амплитуда рассеяния только фазой отличается от амплитуды рассеяния нейтронов. Рассмотрим теперь ядра с $\alpha \gg 1$ ². Предположим, что $\theta < 2\alpha/n_0$. Пользуясь асимптотической формулой для $J_0(z)$, справедливой при $z \gg 1$, перепишем дифракционный интеграл в виде [мы можем пользоваться асимптотическим разложением $J_0(z)$, так как в наших условиях играют роль $z \sim 2\alpha \gg 1$]:

$$\int_{n_0\theta}^{\infty} z^{2i\alpha-1} f_0(z) dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{n_0\theta}^{\infty} z^{-1/2} e^{2i\alpha \ln z} \{e^{i(z-\pi/4)} + e^{-i(z-\pi/4)}\} dz.$$

Интеграл можно вычислить по методу «перевала» [4]. Легко видеть, что интеграл от второго слагаемого значительно превосходит интеграл от первого слагаемого. Производная показателя z обращается в нуль при $z_0 = 2\alpha$. Для применимости метода необходимо прежде всего выполнение условия $2\alpha > n_0\theta$. Раскладывая показатель в ряд по степеням $z - z_0$ и сохраняя член, пропор-

циональный $(z - z_0)^2$, получим

$$\int_{n_0\theta}^{\infty} z^{2i\alpha-1} J_0(z) dz = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} (2\alpha)^{-1/2} e^{i(2\alpha \ln 2\alpha - 2\alpha + \frac{\pi}{4})} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix^2/4\alpha} dx.$$

В полученном интеграле область существенных значений по порядку величины равна $\sqrt{\alpha}$. Метод «перевала» можно применять при выполнении условия $\sqrt{\alpha} \ll z_0$, т. е. $\alpha \gg 1$. Формула (6') приобретает вид

$$f(\theta) = i\lambda \left\{ n_0^{2i\alpha+1} \frac{J_0(n_0\theta)}{\theta} + \frac{2i\alpha}{\theta^2} n_0^{2i\alpha} J_0(n_0\theta) - \frac{2\alpha}{\theta^2} e^{-2i\alpha(\ln \theta - \ln 2\alpha + 1)} \right\}.$$

В рассматриваемом случае третье слагаемое значительно превосходит первые два и представляет собой амплитуду рассеяния в кулоновском поле при $\alpha \gg 1$:

$$f(\theta) \approx -\frac{2i\alpha\lambda}{\theta^2} e^{-2i\alpha(\ln \theta - \ln 2\alpha + 1)} =$$

$$= -\frac{2\alpha\lambda}{\theta^2} e^{-2i\alpha \ln \frac{\theta}{2} + 2in_0\theta}, \quad \alpha \gg 1, \quad 2\alpha \gg n_0\theta. \quad (9)$$

В том случае, когда $\alpha \gg 1$, можно воспользоваться формулой (7) для амплитуды рассеяния. Мы получаем в этих условиях дифракционное рассеяние.

Таким образом для ядер с $\alpha \gg 1$ резерфордское рассеяние имеет место для углов рассеяния, меньших, чем α/n_0 . Для углов рассеяния, больших, чем α/n_0 , мы получаем дифракционное рассеяние, аналогичное рассеянию быстрых нейтронов.

Заметим, что при $\alpha \gg 1$ и $\theta \approx \frac{2\alpha}{n_0}$ формулы (7) и (9) не переходят друг в друга. Кулоновское рассеяние в $\sqrt{\alpha}$ превышает дифракционное рассеяние. Отсюда следует, что при $\theta \sim 2\alpha/n_0$ происходит резкое изменение эффективного сечения рассеяния. Причина этого заключается в изменении интервала эффективных значений n при переходе угла рассеяний θ через значение $2\alpha/n_0$.

Ширина области интегрирования по n при $\theta < 2\alpha/n_0$ по порядку величины равна $n_0\sqrt{\alpha}$, при $\theta > 2\alpha/n_0$ эффективный интервал n составляет лишь $n_0\alpha$, т. е. в $\sqrt{\alpha}$ раз меньше. Легко видеть, что резкое изменение эффективного сечения в α раз происходит в интервале углов порядка $1/\sqrt{\alpha}$ от угла $2\alpha/n_0$, отделяющего области кулоновского и дифракционного рассеяний.

Приведем формулу для отношения эффективного сечения рассеяния, отнесенного к единице телесного угла $\sigma(\theta)$, к соответствующему резерфордскому сечению

$$\frac{\sigma(\theta)}{\sigma_R(\theta)} = \frac{1}{4\alpha^2} \{ |AJ_1(A) - 4\alpha^2 [\Phi_\alpha(A) \cos(2\alpha \lg A) + \Psi_\alpha(A) \sin(2\alpha \lg A)]|^2 + |2J_\alpha(A) + \Psi_\alpha(A) \cos(2\alpha \lg A) - \Phi_\alpha(A) \sin(2\alpha \lg A)|^2 \}, \quad (10)$$

¹ Интегралы имеют смысл, если считать α комплексной величиной с бесконечно малой отрицательной мнимой частью.

² Для протонов с энергией в 15 Мэв в конце периодической системы $\alpha = \frac{Z}{137} \sqrt{\frac{Mc^2}{2E}} \approx 4$ (M — масса протона).

$$\Phi_\alpha(A) + i\Psi_\alpha(A) = \int_A^\infty z^{2iz-1} J_0(z) dz, \quad A = n_0 \theta.$$

В предельных случаях $\alpha \ll 1$ и $\alpha \gg 1$ имеем

а) $\alpha \ll 1$:

$$\frac{\sigma(\theta)}{\sigma_R(\theta)} = 1, \quad \theta \ll \frac{\sqrt{\alpha}}{n_0};$$

$$\frac{\sigma(\theta)}{\sigma_R(\theta)} = \frac{n_0^4 \theta^4}{16\alpha^2}, \quad \frac{1}{n_0} \gg \theta \gg \frac{2\sqrt{\alpha}}{n_0};$$

$$\frac{\sigma(\theta)}{\sigma_R(\theta)} = \left| \frac{n_0 \theta}{2d} j_{5k}(n_0 \theta) \right|^2, \quad 1 \gg \theta \gg \frac{1}{n_0};$$

б) $\alpha \gg 1$:

$$\frac{\sigma(\theta)}{\sigma_R(\theta)} = 1, \quad \theta \ll -\frac{\alpha}{n_0};$$

$$\frac{\sigma(\theta)}{\sigma_R(\theta)} = \left| \frac{n_0 \theta}{2\alpha} J_1(n_0 \theta) \right|^2, \quad \frac{\alpha}{n_0} \ll \theta \ll 1.$$

Из приведенных формул следует, что упругое рассеяние протонов, α -частиц, дейтронов и других легких ядер при больших энергиях только в области очень малых углов следует формуле Резерфорда. При углах, больших, чем $\sqrt{\alpha}/n_0$ ($\alpha \ll 1$) или α/n_0 ($\alpha \gg 1$), вместо обычного кулоновского рассеяния мы имеем рассеяние того же типа, что рассеяние быстрых нейтронов — сечение, в среднем, обратно пропорциональное кубу угла рассеяния, а не четвертой степени по Резерфорду. Рассеяние на большие углы становится более вероятным из-за наличия поглощающего ядра. Средний угол рассеяния оказывается значительно большим, чем в чисто кулоновском случае.

В заключение авторы приносят искреннюю благодарность проф. Л. Д. Ландау за интерес к работе.

Физико-технический институт
Академии наук УССР
Академия наук СССР

Получено 28 февраля 1945 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Placzek, H. Bethe. Phys. Rev., 1940, 57, 1072 A.
2. K. Rossi, N. Nelson. Phys. Rev., 1942, 62, 417.
3. H. Bethe. Phys. Rev., 1940, 57, 1132.
4. N. Mott, H. Massey. Theory of Atomic Collisions. Oxford, 1933.
5. H. Bethe. Handb. Phys., 1933, XXIV/1, 273.
6. E. Whittaker, G. Watson. A Course of Modern Analysis. 4th ed., Cambridge, 1927.
7. M. Born. Optik, Berlin, 1933; Л. Ландау и Е. Лифшиц. Теория поля, стр. 153.

ИЗЛУЧЕНИЕ γ -КВАНТОВ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ БЫСТРЫХ π -МЕЗОНОВ С НУКЛОНАМИ¹

Совместно с Л. Д. Ландау

Для определения тормозного спектра γ -лучей, возникающего при столкновениях π -частиц большой энергии с нуклонами или ядрами, достаточно знания волновой функции ψ π -мезона вне нуклона. Исходя из предположения, что нуклон «черен» по отношению к π -мезонам, находится внешняя ψ -функция в виде суммы плоской волны и волны, дифрагированной от черного шарика. При помощи этой функции определяются сечения излучения γ -квантов, возникающих при дифракции π -мезонов и при их захвате нуклонами. При больших энергиях π -мезонов дифференциальные сечения в области малых углов достигают очень больших значений. Выясняется влияние на испускание γ -квантов размеров π -мезона. При этом в формулы для излучения вводится формфактор π -мезона. Экспериментальное исследование тормозного γ -спектра π -мезонов могло бы дать возможность определения этого формфактора.

Сильное взаимодействие между π -мезонами больших энергий и нуклонами приводит к большой вероятности таких столкновений между ними, при которых π -частица и нуклон объединяются в сильно возбужденную короткоживущую систему [1], распадающуюся далее на несколько мезонов и, возможно, некоторое число нуклонных пар. Такой ход столкновений π -мезонов с нуклонами не может быть описан методами теории возмущений, поскольку он отвечает случаю очень сильного взаимодействия. В этих условиях нуклоны (или пары) представляют собой по отношению к π -мезону черное тело, радиус которого R определяет сечение πR^2 . Волновая функция ψ π -мезона вне R , очевидно, будет представлять собой суперпозицию плоской волны и волны, дифрагированной от «черного» нуклона. Оказывается, что в релятивистских условиях знание ψ во внешней области достаточно для точного вычисления тормозного излучения γ -квантов почти любой энергии, если эти кванты летят в направлении, мало отличающемся от направления падающей π -частицы. Положение здесь напоминает то, которое встречается при тормозном излучении электронов на кулоновых силах, когда в крайних релятивистских условиях излучение осуществляется на больших расстояниях от ядра. Физическая причина таких явлений одна и та же и заключается в том, что законы сохранения при излучении требуют все меньших передач импульса от излучающей частицы постороннему телу.

¹ ЖЭТФ, 1953, 24, 505.

Излагаемая ниже теория может быть применена не только к «черному» нуклону (или ядру), но и к «серому», только частично поглощающему мезоны. Мы сначала рассмотрим первый случай как более простой.

Волновое уравнение для частицы со спином 0 (π -мезон [2]) вне нуклона (ядра) с требуемой точностью имеет вид ($\hbar = c = 1$):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \mu^2\right)\psi = \frac{2e}{i} A \nabla \psi, \quad (1)$$

$$A = \sum_{ij} \sqrt{\frac{2\pi}{f\Omega}} j(a_{ij} e^{i(fr - \omega t)} + a_{ij}^+ e^{-i(fr - \omega t)}).$$

Применяем к (1) теорию возмущений, считая правую часть малой и заменяя там ψ на ψ_0 , равную сумме начальной плоской и расходящейся дифрагированной волн:

$$\psi_0 = \Phi_0(r) e^{-iEt}.$$

Ищем решение в виде ряда

$$\psi = \psi_0 + \sum_{r'} \Phi_{r'} e^{-iE't},$$

где

$$(-E'^2 - \Delta + \mu^2) \Phi_{r'} = \frac{2e}{i} \sqrt{\frac{2\pi}{f\Omega}} \sum_j j \nabla \Phi_0 e^{-iE't} a_{ij}^+ \quad (2)$$

(сумма берется по направлениям f).

Компонента Φ , отвечающая испусканию заданного кванта, равна

$$\Phi_{r'} = \int G(r, r') \frac{2e}{i} \sqrt{\frac{2\pi}{f\Omega}} (j \nabla \Phi_0) e^{-iE't} d\tau', \quad (3)$$

где G — функция Грина уравнения (2),

$$p'^2 = (E - f)^2 - \mu^2. \quad (4)$$

Испускание γ -квантов может происходить либо при поглощении π -мезона с последующим вылетом многих частиц, либо при дифракционном рассеянии π -мезонов. Начнем рассмотрение со второго случая, при котором в конце процесса имеется γ -квант и рассеянный π -мезон, а нуклон (ядро) получает небольшую отдачу.

Функция G , входящая в (3), должна учитывать дифракцию около нуклона, поэтому она равна [3]

$$G(r, r') = \frac{p'}{2\pi i} \int \frac{e^{ip'|r'-s|}}{|r'-s|} \frac{e^{ip'|r-s|}}{4\pi|r-s|} ds. \quad (5)$$

Интегрирование по s может производиться, например, по той части плоскости, перпендикулярной вектору $r - r'$ и проходящей через нуклон, которая находится «вне» нуклона (рис. 1). Дополняя область интегрирования по s внутренностью нуклона,

получаем

$$G(r, r') = \frac{e^{ip'|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} + G_1, \quad (6)$$

где G_1 имеет вид (5) с тем отличием, что область интегрирования лежит внутри нуклона.

Подставляем первый член (6) в (3)

$$\frac{e}{\sqrt{2\pi f\Omega}} \int \frac{e^{ip'|r-r'|}}{|r-r'|} (j \nabla \Phi_0) e^{-iE't} d\tau'. \quad (7)$$

Для нахождения дифракционного излучения необходимо определить поток дифрагированных частиц, сопровождаемых γ -квантами. Для этого нужно найти Φ при $r \rightarrow \infty$. Тогда (7) упрощается

$$\frac{ee^{ip'r}}{\sqrt{2\pi f\Omega} tr} \int e^{-ip'r'} (j \nabla) \Phi_0 e^{-iE't} d\tau' = \frac{(jp') ee^{ip'r}}{\sqrt{2\pi f\Omega} r} \int \Phi_0 e^{-i(t+p')r'} d\tau', \quad (8)$$

$$p' = p'(r/r).$$

Вместо Φ_0 подставляем [3]

$$\Phi_0 = e^{ipr} - \frac{p}{2\pi i} \int \frac{e^{ip|r-\rho|}}{|r-\rho|} d\rho. \quad (9)$$

Второй член представляет дифракцию в исходном состоянии π -мезона (расходящаяся волна). Вектор ρ , перпендикулярный p , лежит в плоскости, проходящей через нуклон, и удовлетворяет условию $\rho^2 \leq R^2$.

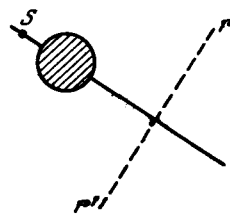


Рис. 1

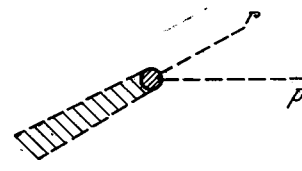


Рис. 2

Первый член в (9) дает нуль в силу законов сохранения. Вместо (8) имеем

$$\begin{aligned} & - \frac{ee^{ip'r}}{\sqrt{2\pi f\Omega} r} (jp') \frac{p}{2\pi i} \iint \frac{e^{ip|r-\rho|}}{|r-\rho|} d\rho e^{-i(t+p')r'} d\tau' \approx \\ & \approx \frac{ee^{ip'r}}{\sqrt{2\pi f\Omega} r} (jp') \frac{1}{p - |p' + f|} \int e^{-i(t+p')\rho} d\rho = \\ & = e \sqrt{\frac{2\pi}{f\Omega}} \frac{e^{ip'r}}{r} \frac{(jp')}{p - |p' + f|} R \frac{J_1(|\theta + p'\theta'|R)}{|\theta + p'\theta'|}. \end{aligned} \quad (10)$$

При вычислении (10) использовано условие малости углов θ между \mathbf{f} и \mathbf{p} и θ' между \mathbf{p}' и \mathbf{p} . θ и θ' — двумерные угловые векторы

$$\mathbf{p}' = \frac{(\mathbf{p}'\mathbf{p})}{p^2} \mathbf{p} + \mathbf{p}'\theta'; \quad \mathbf{f} = \frac{(\mathbf{f}\mathbf{p})}{p^2} \mathbf{p} + \mathbf{f}\theta. \quad (11)$$

Перейдем теперь к вычислению члена, содержащего G_1

$$2e \sqrt{\frac{2\pi}{j\Omega}} \frac{1}{i} \int G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (j\nabla\Phi_0) e^{-i\mathbf{r}'\mathbf{d}\tau'}$$

G_1 , рассматриваемое как функция \mathbf{r}' , отлично от нуля только в области геометрической тени по отношению к направлению \mathbf{r} , т. е. в заштрихованной области рис. 2. Поскольку нас интересуют точки \mathbf{r} , лежащие в пределах узкого дифракционного конуса, эти \mathbf{r}' лежат там, где падающая волна еще не дошла до ядра и потому еще не искажена дифракцией. Поэтому здесь Φ_0 совпадает с плоской волной $e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}'}$. Пользуясь (6) и (5), имеем при $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & 2e \sqrt{\frac{2\pi}{j\Omega}} (j\mathbf{p}) \int G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{f}, \mathbf{r}')} d\tau' = \\ & = -\frac{e}{\sqrt{8\pi^3 j\Omega}} \frac{(j\mathbf{p})}{r} e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}'} \iint \frac{e^{i\mathbf{p}'|\mathbf{r}'-\mathbf{s}'| + i(\mathbf{p}-\mathbf{f}, \mathbf{r}')}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{s}'|} ds' d\tau' = \\ & = e \frac{1}{\sqrt{2\pi j\Omega}} \frac{e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}'}}{r} \frac{j\mathbf{p}}{p'-|\mathbf{p}-\mathbf{f}|} \int e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{f}, \mathbf{s}')} ds'. \end{aligned} \quad (12)$$

\mathbf{s}' перпендикулярен \mathbf{p}' и по величине меньше или равен R' , где R' — сечение взаимодействия дифрагированной π -частицы с нуклоном (R' может и не совпадать с R).

В (12) входит фурье-компонента дифрагированной волны в конечном состоянии

$$e \frac{j\mathbf{p}}{r} e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}'} \sqrt{\frac{2\pi}{j\Omega}} \frac{1}{p'-|\mathbf{p}-\mathbf{f}|} R' \frac{J_1(|\mathbf{p}\theta' - \mathbf{f}(\theta' - \theta)| R')}{|\mathbf{p}\theta' - \mathbf{f}(\theta' - \theta)|}. \quad (13)$$

Складывая (10) и (13), находим $\Phi_{\mathbf{p}'}(r \rightarrow \infty)$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}'}}{r} e \sqrt{\frac{2\pi}{j\Omega}} \left\{ \frac{R J_1(|\mathbf{p}\theta' + \mathbf{f}\theta| R)}{|\mathbf{p}\theta' + \mathbf{f}\theta|} \frac{j\mathbf{p}'}{p-|\mathbf{p}'+\mathbf{f}|} + \right. \\ & \left. + \frac{R' J_1(|\mathbf{p}\theta' - \mathbf{f}(\theta' - \theta)| R')}{|\mathbf{p}\theta' - \mathbf{f}(\theta' - \theta)|} \frac{j\mathbf{p}}{p'-|\mathbf{p}-\mathbf{f}|} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Поток дифрагированных частиц на единицу телесного угла равен

$$e^2 \frac{2\pi}{j\Omega} \left| \left\{ \left\{ \right\} \right\} \right|^2 2p'.$$

(Здесь множитель $2p'$ появляется при вычислении потока частиц спина 0.) Деля его на плотность потока падающих частиц $2p$ и умножая на число состояний кванта, получаем дифференци-

альное сечение испускания кванта частоты f , сопровождаемого π -частицей

$$\begin{aligned} \sigma_0^d(j) df d\theta d\theta' &= \frac{E'}{E} \frac{e^2}{4\pi^2} f \left| \frac{R J_1(|\mathbf{p}\theta' + \mathbf{f}\theta| R)}{|\mathbf{p}\theta' + \mathbf{f}\theta|} \frac{j\mathbf{p}}{p-|\mathbf{p}'+\mathbf{f}|} + \right. \\ & \left. + \frac{R' J_1(|\mathbf{p}\theta' - \mathbf{f}(\theta' - \theta)| R')}{|\mathbf{p}\theta' - \mathbf{f}(\theta' - \theta)|} \frac{j\mathbf{p}}{p'-|\mathbf{p}-\mathbf{f}|} \right|^2 df d\theta d\theta'. \end{aligned} \quad (15)$$

Отметим, что (15) может быть также получено при рассмотрении радиационных переходов из начального состояния, взятого в виде плоской и расходящейся дифрагированной волны, в конечное состояние, описываемое плоской и сходящейся [4] дифрагированной волной (впереди у которой тень).

При вычислении (10) и (13) главную роль играли расстояния от нуклона порядка

$$r_{\text{эф}} \sim \frac{1}{p-|\mathbf{p}'+\mathbf{f}|} = \frac{1}{p-p'-f+(p'\theta^2/2p)}. \quad \theta = \theta - \theta'.$$

Воспользуемся законом сохранения энергии для преобразования $p - p' - f$

$$\begin{aligned} \sqrt{E^2 - \mu^2} - \sqrt{(E-f)^2 - \mu^2} - f &= E - \frac{\mu^2}{2E} - (E-f) + \\ + \frac{\mu^2}{2(E-f)} - f &= \frac{\mu^2 f}{2(E-f)E} \approx \frac{\mu^2 f}{2p'p}, \quad r_{\text{эф}} \sim 2p'p/f(\mu^2 + p'^2\theta^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) следует, что при $E \gg \mu$ и $\theta \leq \mu/E$ $r_{\text{эф}} \gg E/\mu^2 \gg R$, что оправдывает пренебрежение областью внутри «нуклона» в этих условиях. Заметим, что нуклон «черен» только при $E \gg \mu$.

Выражение для вероятности излучения (15) было получено на основании волнового уравнения (1), в котором взаимодействие π -частицы с электромагнитным полем рассматривается так, как если бы π -частица была точечной. Между тем сильное взаимодействие π -частицы с нуклонным фоном должно приводить к «размыванию» заряда π -частицы по некоторой области, имеющей размеры порядка или меньшей, чем $1/\mu$. При выполнении условия (16) все излучение осуществляется на большом расстоянии от ядра. Поэтому влияние электрических размеров π -частицы на испускание квантов должно в некоторых условиях привести к появлению в (1) и во всех последующих формулах «формфактора» F . Он является функцией от инвариантной частоты кванта в системе покоя π -частицы:

$$F = F\left(\frac{Ej - \mathbf{p}\mathbf{f}}{\mu^2}\right). \quad (17)$$

Если $E \gg \mu$, $\theta \ll 1$, то

$$F = F\left(\frac{j}{2E} + \frac{Ej\theta^2}{2\mu^2}\right). \quad (18)$$

Когда аргумент F , мал, то $F = 1$. При больших значениях аргумента $F \rightarrow 0$. При введении F следует подчеркнуть следующие три обстоятельства.

1) Излучение не зависит от деталей, характеризующих столкновение π -мезона с ядром. Существенно только знание ψ -функции на большом расстоянии от ядра; поэтому ядро не может оказать серьезного влияния на свойства нуклонного вакуума, окружающего π -частицу, и, следовательно, в излучении проявляется структура невозмущенной π -частицы.

2) В случае дифракционного излучения необходимо, чтобы инвариантные частоты кванта в системах покоя падающего и дифрагированного мезонов мало отличались друг от друга. Это приводит к условию

$$\frac{E_f - pf}{\mu^2} - \frac{E'f - p'f}{\mu^2} = \frac{f^2 - (p - p', f)}{\mu^2} \ll 1.$$

При малых углах θ и θ' имеем]

$$\left| \frac{\theta^2 E - (\theta - \theta')^2 E' - (\mu^2 f | EE')}{2\mu^2} f \right| \ll 1. \quad (19)$$

3) Даже при выполнении (19), по-видимому, необходимо, чтобы в процессе дифракции π -мезоны не испытывали очень больших ускорений; в противном случае эти ускорения могут повлиять на «форму» частицы. Математически это означает зависимость F от инварианта $pp' - \mu^2 = EE' - pp' - \mu^2$, при малых значениях которого F является функцией только от инвариантной частоты. Таким образом, введение формфактора, относящегося к π -частице, испытывающей небольшие ускорения, налагает условие

$$\frac{f^2}{2EE'} + \frac{EE'\theta'^2}{2\mu^2} \ll 1. \quad (20)$$

Отсюда и из (19) следует

$$f \ll E, \quad \theta' < \mu/2E, \quad \theta \ll \mu^2/Ef\theta'. \quad (20a)$$

При этом форм фактор оказывается зависящим от $f\theta^2$:

$$F = F(Ef\theta^2/2\mu^2). \quad (20b)$$

Когда (19) удовлетворено, но (20) не имеет места, то входит более сложный форм фактор (по отношению к процессу излучения, при котором π -частица испытывает заданное ускорение).

Если (19) не выполнено, то простое понятие форм фактора теряет смысл. Вместо него в формулы для интенсивности излучения войдет более сложная величина, связанная с двумя инвариантными частотами кванта и учитывающая влияние ускорения, т. е. содержащая инвариант (20).

Таким образом, при выполнении условий (19), (20) вместо (15) получаем

$$\sigma_0^d(j) df d\theta d\theta' = \frac{E'}{E} \frac{e^2}{4\pi^2} f \left| F \left(\frac{E\theta^2}{2\mu^2} f \right) \right|^2 \left| \frac{R J_1(|p'\theta' + f\theta| R)}{|p'\theta' + f\theta|} \frac{jp'}{p - |p' + f|} + \frac{R' J_1(|p'\theta' - f(\theta' - \theta)| R')}{|p'\theta' - f(\theta' - \theta)|} \frac{jp}{p' - |p - f|} \right|^2 df d\theta d\theta'. \quad (21)$$

Так как $p - f \approx p'$, то аргумент бесселевой функции, входящей во второй член (21), равен $|p'\theta' + f\theta|R'$ и при $R' = R$ совпадает с аргументом бесселевой функции, входящей в первый член. Поэтому, если $R = R'$, то имеет место более простое выражение для $\sigma_0^d(j)$:

$$\sigma_0^d(j) = \frac{E'}{E} \frac{e^2}{4\pi^2} f \frac{R^2 J_1^2(|p'\theta' + f\theta| R)}{|p'\theta' + f\theta|^2} \left| \frac{jp'}{p - |p' + f|} + \frac{jp}{p' - |p - f|} \right|^2 |F|^2. \quad (22)$$

Наиболее важную роль играют малые θ и θ' , при которых (22) существенно упрощается

$$\sigma_0^d(j) = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{E'}{E} R^2 \frac{J_1^2(|E'\theta' + f\theta| R)}{|E'\theta' + f\theta|^2} \times \left| \frac{jp'}{(\mu^2/E'^2) + (\theta - \theta')^2} \frac{E}{E'} - \frac{jp}{(\mu^2/E^2) + \theta^2} \frac{E'}{E} \right|^2 |F|^2. \quad (23)$$

Здесь также использовано условие $E, E' \gg \mu$. Если же $R \neq R'$, то при малых θ и θ' (21) дает

$$\sigma_0^d(j) = \frac{E'}{E} \frac{e^2}{\pi^2} \frac{|F|^2}{f} \left| \frac{jp'}{(\mu^2/E'^2) + (\theta - \theta')^2} \frac{E}{E'} R \frac{J_1(|E'\theta' + f\theta| R)}{|E'\theta' + f\theta|} - \frac{jp}{(\mu^2/E^2) + \theta^2} \frac{E'}{E} R' \frac{J_1(|E'\theta' + f\theta| R')}{|E'\theta' + f\theta|} \right|^2. \quad (24)$$

Суммируя (23) по поляризациям, получаем

$$\sigma_0^d = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{1}{f} \frac{E'}{E} R^2 \frac{J_1^2(|E'\theta' + f\theta| R)}{|E'\theta' + f\theta|^2} \left\{ \frac{[\theta\theta']^2}{(\mu^2/E'^2) + (\theta - \theta')^2} \frac{E^2}{\theta^2} + \left| \frac{E(\theta, \theta' - \theta)}{(\mu^2/E'^2) + (\theta - \theta')^2} \frac{1}{\theta} + \frac{E'\theta}{(\mu^2/E^2) + \theta^2} \right|^2 \right\} |F|^2. \quad (25)$$

Первый член в (25) обязан поляризации $\mathbf{j}_1 = [pf] / Ef\theta$, второй $\mathbf{j}_2 = [f|pf]| / Ef^2\theta$. Формулу (25) можно переписать также следующим образом:

$$\sigma_0^d = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{E'}{E} \frac{1}{f} \left| F \right|^2 R^2 \frac{J_1^2(|E'\theta' + f\theta| R)}{|E'\theta' + f\theta|^2} \left\{ \frac{E'^2\theta^2}{\left(\frac{\mu^2}{E^2} + \theta^2 \right)^2} + \frac{E^2(\theta - \theta')^2}{\left[\frac{\mu^2}{E'^2} + (\theta - \theta')^2 \right]^2} - 2 \frac{EE'(\theta, \theta - \theta')}{\left(\frac{\mu^2}{E^2} + \theta^2 \right) \left[\frac{\mu^2}{E'^2} + (\theta - \theta')^2 \right]} \right\}. \quad (26)$$

Для получения спектрального состава излучения необходимо проинтегрировать (26) по всем θ и θ' . В общем виде это приводит к сложным выражениям.

Рассмотрим сперва столкновение π -частицы с тяжелыми ядрами, когда можно считать R большим по сравнению с $1/\mu$, что приводит к существенным упрощениям. Если θ и θ' малы по сравнению с μ/E , μ/E' , то фигурная скобка в (26) равна

$$\left\{ \right\} = \frac{E'^2 E^2}{\mu^4} |f\theta + E'\theta'|^2. \quad (27)$$

Таким образом, при $\theta \ll \mu/E$, $|\theta - \theta'| \ll \mu/E'$, σ_0^d равно

$$\sigma_0^d = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{E'}{E} \frac{R^2}{f} J_1^2(|E'\theta' + f\theta| R) \frac{E'^2 E^2}{\mu^4} |F|^2. \quad (28)$$

Если $R \gg 1/\mu$, то сравнение (26) и (28) показывает, что в интеграле по θ и θ' главную роль играют такие θ и θ' , при которых J_1^2 можно заменить его средним значением

$$J_1^2(|E'\theta' + f\theta| R) \approx \frac{1}{\pi} \frac{1}{|E'\theta' + f\theta| R}.$$

Это среднее значение получается при замене быстро осциллирующего множителя $\cos^2(|E'\theta' + f\theta| R - 3\pi/4)$ на $1/2$. При этом

$$\sigma_0^d = \frac{e^2}{\pi^3} \frac{E'}{E} \frac{R}{f} \frac{|F|^2}{|E'\theta' + f\theta|^3} \left\{ \frac{E'^2 \theta^2}{\left(\frac{\mu^2}{E^2} + \theta^2\right)^2} - 2 \frac{EE'(\theta, \theta - \theta')}{\left(\frac{\mu^2}{E^2} + \theta^2\right) \left[\frac{\mu^2}{E'^2} + (\theta - \theta')^2\right]} + \frac{E^2(\theta - \theta')^2}{\left[\frac{\mu^2}{E'^2} + (\theta - \theta')^2\right]^2} \right\}. \quad (29)$$

Вводим вместо θ и θ' переменные s и η :

$$\theta = \frac{\mu}{E} s = \frac{1}{\gamma} s; \quad \theta' - \theta = \frac{\mu}{E'} \eta = \frac{1}{\gamma'} \eta, \quad (30)$$

при помощи которых (29) приобретает следующий вид:

$$\sigma_0^d d\theta d\theta' = \frac{e^2}{\pi^3} \frac{R}{\mu} \frac{1}{f} \frac{1}{|s + \eta|^3} \left(\frac{s}{1 + s^2} + \eta \frac{1}{1 + \eta^2} \right)^2 \times \left| F \left(\frac{f}{2E} [s^2 + 1] \right) \right|^2 ds d\eta. \quad (31)$$

При интегрировании по s и η основную роль играют s и $\eta \sim 1$. При этом $|E'\theta' + f\theta| R \sim \mu R \gg 1$, что и оправдывает использование асимптотического разложения J_1 . Кроме того, согласно (30) и (16) все излучение определяется областью вне ядра. Производя интегрирование по s и η , определяем сечение испускания квантов данной частоты в том случае, когда F можно положить

равным единице:

$$\sigma^d(f) = \frac{4e^2}{\pi} \frac{E'}{E} \frac{1}{f} \frac{R}{\mu} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\text{sh } \alpha} \left[\text{cth } 2\alpha - \frac{2\alpha}{\text{sh}^2 2\alpha} \right] \approx \approx 2,3e^2 \frac{E'}{E} \frac{1}{f} \frac{R}{\mu}. \quad (32)$$

Таким образом эффективное сечение испускания жестких γ -лучей, вызванных дифракцией π -частиц, пропорционально радиусу ядра R , т. е. медленно растет с увеличением атомного номера ($\sim A^{1/2}$). Согласно (32) испускаемый спектр имеет простую зависимость от частоты. Угловое распределение квантов дается формулой (29).

Определим еще полную энергию, излученную при столкновении, полагая $F = 1$. По порядку величины она равна

$$\int d f \sigma^d f = 2,3e^2 \frac{R}{\mu} \int_0^E \frac{E'}{E} d f = 1,15e^2 \frac{R}{\mu} E. \quad (33)$$

Полное сечение испускания квантов с частотой, большей f , равно ($F = 1$):

$$\int_f^E \sigma^d(f) d f = 2,3e^2 \frac{R}{\mu} \left(\ln \frac{E}{ef} + \frac{f}{E} \right) (\mu R \gg 1). \quad (34)$$

Если $A \sim 1$, то $R \lesssim 1/\mu$ и в общем случае интегрирование (26) по углам затруднительно.

В переменных s и η (26) имеет вид:

$$\sigma_0^d d\theta d\theta' = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{E'}{E} \frac{R^2}{f} \frac{1}{|s + \eta|^2} J_1^2(\mu R |s + \eta|) \times \times \left(\frac{s}{1 + s^2} + \frac{\eta}{1 + \eta^2} \right)^2 \left| F \left(\frac{f}{2E} s^2 \right) \right|^2 ds d\eta. \quad (35)$$

Когда $f\theta R \ll 1$, то (26) упрощается

$$\sigma_0^d = \frac{e^2}{\pi^2 f} \frac{E'}{E} \frac{R^2 J_1^2(E'\theta' R)}{\theta'^2} \left\{ \frac{\theta^2}{\left(\frac{1}{\gamma'^2} + \theta^2\right)^2} - 2 \frac{(\theta, \theta - \theta') E}{\left(\frac{1}{\gamma'^2} + \theta^2\right) \left[\frac{1}{\gamma'^2} + (\theta - \theta')^2\right] E'} + \frac{(\theta - \theta')^2 E^2}{E'^2 \left[\frac{1}{\gamma'^2} + (\theta - \theta')^2\right]^2} \right\}. \quad (36)$$

Это выражение при малых f ($f \ll E$) совпадает с классическим излучением, возникающим при «внезапном» изменении импульса π -частицы вследствие дифракции. В таких условиях соблюдается общая связь между сечениями упругих и неупругих столкновений [5]. Интегрируя (36) по всем направлениям фотона θ и

полагая $F = 1$, находим полное сечение испускания квантов частоты f любых направлений при заданном угле дифракции θ' , когда $f \ll E$:

$$\int \sigma_0^d d\theta = \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{f} \frac{R^2 J_1^2(ER\theta')}{\theta'^2} \left[\frac{1 + (\gamma^2 \theta'^2/2)}{(\gamma \theta'/2) \sqrt{1 + (\gamma^2 \theta'^2/4)}} \ln \left(\frac{\gamma \theta'}{2} + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 \theta'^2}{4}} \right) - 1 \right]. \quad (37)$$

Интегрируя (36) по всем углам дифракции при заданном направлении кванта θ , определяем сечение испускания квантов частоты f , сопровождающихся произвольно дифрагированными π -частицами:

$$\int \sigma_0^d d\theta' = \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{f} R^2 \gamma^2 \int_0^\infty \frac{J_1^2(\mu R b)}{b} db \left\{ \frac{2 + b^2}{1 + s^2} \frac{1}{\sqrt{(1 + s^2 + b^2)^2 - 4s^2 b^2}} - \frac{1 + s^2 + b^2}{[(1 + s^2 + b^2)^2 - 4s^2 b^2]^{3/2}} - \frac{1}{(1 + s^2)^2} \right\}; \quad s = (E/\mu)\theta. \quad (38)$$

Производим интегрирование (37) по всем углам дифракции θ' и получаем полное сечение испускания фотонов частоты f ($f \ll E$)

$$\sigma^d(f) = \frac{4}{f} e^2 R^2 \int_0^\infty \frac{J_1^2(2\mu R b)}{b} db \left[\frac{1 + 2b^2}{b \sqrt{1 + b^2}} \ln(b + \sqrt{1 + b^2}) - 1 \right]. \quad (39)$$

Основную роль здесь играют $b \sim 1$, т. е. углы дифракции порядка $1/\gamma$. Если $2\mu R \gg 1$, то из (39) следует (32).

Когда $f \sim E$, то формула (35) ($F = 1$) при интегрировании по углам θ и θ' дает следующее выражение для полного сечения испускания кванта частоты f :

$$\sigma^d(f) = 4 \frac{E'}{E} \frac{R^2 e^2}{f} \int_0^\infty \frac{J_1^2(2\mu R q)}{q^2} dq \left[\frac{2q^2 + 1}{q \sqrt{q^2 + 1}} \ln(q + \sqrt{q^2 + 1}) - 1 \right] = 4 \frac{E'}{E} \frac{e^2}{f} R^2 \mathfrak{N}(\mu R). \quad (40)$$

Полная потеря энергии, связанная с дифракционным излучением, согласно (40) равна

$$\int f \sigma^d(f) df = 2ER^2 e^2 \mathfrak{N}(\mu R). \quad (41)$$

Интегральное сечение испускания квантов с частотой, большей f , равно

$$\int_0^E \sigma^d df = 4e^2 R^2 \left(\ln \frac{E}{ef} + \frac{f}{E} \right) \mathfrak{N}(\mu R). \quad (42)$$

Если $\mu R \gg 1$, то выражения (40), (41) и (42) переходят в (32), (33) и (34).

Обратимся теперь к излучению, сопровождающему захват π -частицы нуклоном (ядром), — его можно назвать излучением остановки. Для определения вероятности этого процесса необходимо найти поток π -частиц на нуклон, когда на бесконечности имеется квант. Это требует значения Φ_p при $r = R$. Но волны

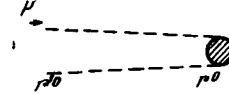


Рис. 3

на поверхность нуклона приходят из области, лежащей перед нуклоном (рис. 3), где G и Φ_0 равны

$$G = \frac{e^{i p' |r-r'|}}{4\pi |r-r'|}, \quad \Phi_0 = e^{i p r}. \quad (43)$$

Поэтому

$$\Phi_p(r \rightarrow R) = \frac{F}{\sqrt{2\pi/\Omega}} e^{(j p)} \int \frac{e^{i p' |r-r'|}}{|r-r'|} e^{i(p-r, r')} d\tau' \approx \approx - \frac{\sqrt{2\pi} F e^{(j p)}}{\sqrt{j\Omega} p'} e^{i(p-r, R)} \frac{1}{p' - |p-f|}. \quad (44)$$

Отсюда находим поток частиц

$$\frac{4\pi}{j\Omega} e^2 \frac{(j p)^2}{p'^2} \frac{\pi R^2}{(p' - |p-f|)^2} p' |F|^2.$$

Деля его на поток падающих частиц $2p$ и суммируя по \mathbf{i} , находим дифференциальное сечение при заданной поляризации \mathbf{j}

$$\sigma_{oc}(\mathbf{j}) df d\theta = \frac{e^2}{4\pi} R^2 \frac{(j p)^2 |F|^2}{(p' - |p-f|)^2 p p'} df d\theta. \quad (45)$$

Так как θ мало, то (45) упрощается

$$\sigma_{oc}(\mathbf{j}) = \frac{e^2}{\pi} R^2 \left(\frac{j p}{p} \right)^2 \frac{|F|^2 E'}{E f} \frac{1}{\left(\frac{\mu^2}{E^2} + \theta^2 \right)^2}. \quad (46)$$

Суммируем по поляризации

$$\sigma_{oc} = \frac{e^2}{\pi} R^2 \frac{\theta^2}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^2} \frac{E-f}{E} \frac{1}{f} \left| F \left(\frac{f E \theta^2}{2\mu^2} \right) \right|^2. \quad (47)$$

Если $f \ll E$, то (47) соответствует классическому «остановочному» излучению, возникающему при внезапной остановке заряда, когда время его остановки мало.

Проинтегрированное по $f \geq f_{\min}$ и $\theta \leq \theta_{\max}$ сечение при $F = 1$ равно

$$e^2 R^2 \left(\ln \frac{\theta_{\max}^2 E^2}{e \mu^2} \right) \left(\ln \frac{E}{f_{\min}} - 1 \right). \quad (48)$$

В отличие от дифференциального излучения, в котором главную роль играют углы θ порядка $1/\gamma$, в «захватном» излучении основное место занимают значительно большие углы. Однако при $\theta > \sqrt{2\mu^2/Ef}$, в соответствии с (20а, б), формфактор может начать существенно ограничивать интенсивность излучения. Поэтому полная вероятность «остановочного» излучения с учетом конечных размеров π -частицы получится при интегрировании (47) от $F = 1$ до $\theta \sim \sqrt{2\mu^2/Ef}$

$$\int_{f_{\min} \leq f \leq E} \sigma_{0c} df d\theta \approx e^2 R^2 \int_{f_{\min}}^E \frac{df}{f} \ln \frac{E}{f} = \frac{1}{2} e^2 R^2 \ln^2 \frac{E}{f}. \quad (49)$$

Если $f \sim E$, то (49) верно только по порядку величины. Сравнивая (49) с (42) или (34), мы видим, что остановочное излучение несколько больше дифракционного. Полная излученная энергия при остановочном излучении в рассматриваемых условиях равна по порядку величины

$$e^2 R^2 \int_0^E \ln \frac{E}{f} df = e^2 R^2 E. \quad (50)$$

Следует отметить, что хотя интегральные сечения излучения γ -квантов малы по сравнению с πR^2 , дифференциальные сечения излучения на малые углы быстро растут и при углах порядка μ/E достигают очень больших значений, когда E растет.

Если $\theta = \mu/E$, то «остановочное» излучение имеет дифференциальное сечение, равное согласно (47),

$$\frac{e^2}{4\pi} R^2 \left(\frac{E}{\mu} \right)^2 \frac{E-f}{E} \frac{1}{f}. \quad (51)$$

Когда $E/\mu = \sqrt{4\pi/e^2} \approx 40$, дифференциальное сечение оказывается равным

$$R^2 \frac{E-f}{E} \frac{1}{f} \quad (52)$$

и соответствует ядерным сечениям.

К рассмотренному здесь остановочному излучению, вызванному захватом π -мезона нуклоном или ядром, следует добавить излучение, обязанное возникающему движению нуклона или ядра как целого, а также γ -излучение от вторичных мезонов и нуклонов, возникших при захвате первичного π -мезона. γ -излучение

от движения нуклона или ядра относительно мало ввиду большой массы нуклона или ядра как целого. Что касается γ -излучения от вторичных частиц, то, во-первых, эти частицы распределены в сравнительно широком телесном угле [6], а, во-вторых, их энергия значительно меньше энергии первичной частицы, и поэтому даже в направлении, совпадающем с направлением одной из вторичных частиц, интенсивность γ -излучения будет малой по сравнению с интенсивностью излучения в направлении, близком к направлению первичной π -частицы.

Академия наук СССР

Получено 17 января 1953 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Ферми. Усп. физ. наук, 1952, 46, 71; Progr. Theor. Phys., 1950, 5, 570.
2. R. Durbin, H. Loar, J. Steinberg et. Phys. Rev., 1951, 83, 646.
D. Clark, A. Roberts, R. Wilson. Phys. Rev., 1951, 83, 649.
3. Л. Ландау и Е. Лифшиц. Теория поля, 2-е изд. ГИИТЛ, 1948, стр. 168.
4. Л. Ландау и Е. Лифшиц. Квантовая механика. ГИИТЛ, 1948, стр. 481.
5. A. Nordstreck. Phys. Rev., 52, 1937, 62.
6. Л. Д. Ландау. Изв. АН СССР, сер. физ. 1953, 17, 51.

О ВНЕШНЕЙ (ДИФРАКЦИОННОЙ) ГЕНЕРАЦИИ ЧАСТИЦ ПРИ ЯДЕРНЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ¹

Совместно с Е. Л. Фейнбергом

1. При больших энергиях ядерно-активных частиц ($E > 10^9$ эв) возникают условия, в которых возможна генерация новых частиц через посредство своеобразного механизма, заслуживающего, на наш взгляд, внимания.

Рассмотрим взаимодействие быстрой частицы с ядром (или с другой частицей), сопровождающееся ее поглощением (приводящим к какой-либо ядерной реакции). Пусть длина волны частиц мала по сравнению с размерами ядра (или другой частицы). В таком случае неизбежным результатом поглощения является возникновение дифрагированной волны.

Обычно считают, что этот эффект проявляется только как упругое рассеяние. Однако связанное с таким рассеянием изменение движения заряда вызывает излучение γ -квантов (например, при поглощении π -мезонов ядрами).

Очевидно, что подобное дифракционное рассеяние ядерно-активных частиц (нуклонов, π -мезонов) должно сопровождаться испусканием π -мезонов, а может быть и нуклонных пар. Так как при этом генерация новых частиц осуществляется частицей, не проникающей внутрь ядра, то этот процесс можно называть также внешней генерацией.

Импульс, передаваемый в таком процессе ядру, относительно мал (как мы увидим, порядка или менее чем μc , где μ — масса мезона, c — скорость света), вследствие чего ядро не возбуждается, и поэтому в процессе генерации практически не должно возникать медленных нуклонов. Генерируемая частица должна иметь направление, близкое к направлению первичной частицы, причем если ливень возникает при взаимодействии отдельной частицы с ядром, то характерным признаком подобного механизма является отсутствие второго, «обратного», конуса частиц.

2. Энергетический порог рассматриваемого процесса связан прежде всего с требованием, чтобы процесс происходил вне ядра.

Пусть, например, нуклон массы M и энергии E генерирует мезон энергии ε и массы μ . Импульс, передаваемый ядру в продоль-

ном направлении, если считать углы разлета малыми, равен:

$$q_{\parallel} = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - M^2 c^2} - \sqrt{\frac{(E - \varepsilon)^2}{c^2} - M^2 c^2} - \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{c^2} - \mu^2 c^2}.$$

Минимальное значение q_{\parallel} достигается при $\varepsilon \approx \frac{\mu}{M} E$, когда оно равно $\mu c \frac{Mc^2}{E}$. Обратная величина q_{\parallel} определяет размеры эффективной области, участвующей в излучении. Эта область лежит вне ядра радиуса R , если хотя бы для одного измерения, например для продольного, имеет место соотношение

$$q_{\parallel} R \ll h. \quad (1)$$

Это достигается при минимальном q_{\parallel} , когда

$$E \gg Mc^2 \frac{\mu c}{h} R \approx A^{1/2} Mc^2. \quad (2)$$

Таков энергетический порог рассматриваемого процесса, когда образующийся мезон уносит энергию $\varepsilon \approx \frac{\mu}{M} E$. Если, считая все частицы релятивистскими, искать порог для образования мезонов большей энергии, $\varepsilon \sim E$, то порог будет выше:

$$E \gg Mc^2 \frac{Mc}{h} R \approx A^{1/2} Mc^2 \frac{M}{\mu}. \quad (3)$$

В случае генерации n частиц пороги (2) и (3) возрастают в n раз.

Условие (1) по существу выражает требование, чтобы ядро участвовало в процессе как целое. Такой процесс можно рассматривать и в рамках теории возмущений, когда поглощение в ядре мало и дело сводится к интерференции волн, рассеянных отдельными нуклонами ядра, например, как при фотогенерации мезонов¹. Однако теория возмущений, если и применима, то только в области медленных, нерелятивистских мезонов. Поэтому мы ею не пользуемся и считаем, наоборот, ядро сильно поглощающим, как черное тело. Для допустимости этого необходимо, чтобы полный передаваемый ядру импульс q был мал по сравнению с обратной толщиной d эффективно поглощающего слоя ядра («скин-слоем»), $qd \ll h$.

Для оценки d нужно пояснить, что именно следует называть «поглощением», приводящим к возникновению дифракции и последующей дифракционной генерации. Пока речь идет об упругом дифракционном рассеянии, «поглощением» будет любое взаимодействие первичной частицы, выводящее ее из состояния с данным начальным импульсом p_0 . Если же речь идет о дифракционной генерации, при которой ядру передается импульс q , то

¹ ДАН СССР, 1953, 93, 439. (Представлено академиком Л. Д. Ландау 26 сентября 1953 г.)

¹ E. L. Feinberg. J. Phys. USSR, 1941, 5, 177.

под «поглощением» нужно понимать процесс неупругого соударения, при котором первичная частица теряет импульс q , т. е. нужно считать

$$qd(q) < h. \quad (4)$$

Нас будут, как увидим, интересовать процессы, при которых $q \sim \mu c$. В области релятивистских энергий можно, по-видимому, считать, что при сближении двух нуклонов на расстояние порядка $h/\mu c$ происходит передача импульса не менее чем μc . Поэтому и d нужно полагать равным $h/\mu c$. Следовательно, должно быть

$$q = \sqrt{q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2} \approx q_{\perp} \leq \mu c. \quad (5)$$

Таким образом, полный передаваемый импульс практически совпадает с поперечным.

3. Оценка величины эффективного сечения, ввиду отсутствия теории взаимодействия быстрых частиц, встречает значительные трудности. В качестве наводящих соображений используем выводы, получаемые при применении теории возмущений к процессу излучения (процесс дифракции на черном теле при этом трактуется феноменологически). Воспользовавшись, например, методикой, развитой Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчуком, будем налагать условия (4) и (5) на величину передаваемого импульса, т. е. отбирать дифрагированные волны, при которых передается достаточно большой импульс. При этом получают следующие оценки: частицы разлетаются под углом порядка Mc^2/E относительно первоначального направления нуклона. Поперечное сечение имеет порядок (g — константа псевдоскалярной связи):

$$\sigma \approx \frac{g^2}{\pi \hbar c} \left(\frac{\mu}{M}\right)^2 R \frac{h}{\mu c} = \frac{g^2}{\pi} \left(\frac{h}{\mu c}\right)^2 \left(\frac{\mu}{M}\right)^2 A^{1/2}. \quad (6)$$

Теория возмущений здесь заведомо неверна. Однако указанный порядок величины сечения (6) можно получить и из более общих соображений. В системе отсчета, в которой первичная частица вначале покоится, она приобретает импульс порядка $q_{\perp} \sim \mu c$. Ее скорость при этом будет $v \approx \left(\frac{\mu}{M}\right)c \ll c$. Между тем, эффективное излучение частиц будет происходить лишь при $v^2 \sim c^2$. Это объясняет появление множителя $(\mu/M)^2$. Что касается линейной зависимости от радиуса ядра, то она является общей для дифракционных процессов такого рода и связана с тем, что отбрасываются достаточно большие передаваемые импульсы.

Из приведенных рассуждений следует, что для генерации мезонов мезонами ($M = \mu$) эффект должен быть больше, чем при генерации нуклонами, а для легких ядер близок к геометрическому сечению (отличие в множителе $A^{-1/2}$ и, может быть, в числовых множителях).

4. Сечение обычной генерации, связанной с попаданием первичной частицы в ядро, пропорционально $A^{2/3}$. Сечение же дифракционной генерации пропорционально $A^{1/2}$. Поскольку, кроме того, и энергетический порог растет с A , рассмотренный эффект должен быть относительно существеннее для легких ядер.

5. Процессы дифракционного возбуждения могут иметь место и в других случаях.

Пусть, например, происходит столкновение двух ядер. Если энергия падающего ядра настолько велика, что длина волны много меньше радиусов ядер, то наряду с процессом прямого соударения, приводящим к полному развалу ядер, должна происходить связанная с этим «поглощением» первичного потока дифракция, сопровождающаяся передачей малого импульса ядру в целом.

Если передан импульс $q_{\perp} \gtrsim \mu c$, $q_{\parallel} < \mu c/A^{1/2}$, то могут осуществиться возбуждение и внешний, дифракционный развал одного из ядер (или обоих). При этом возможен не полный развал ядер, а разделение его на другие ядра. Не исключено, что подобным образом можно понять наблюдавшиеся в фотопластинках случаи, когда при столкновении быстрых ядер в космических лучах одно из них либо вовсе не разваливается, либо делится на 2 или 3 ядра.

Академия наук СССР

Получено 8 мая 1953 г.

ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНА, СОПРОВОЖДАЮЩЕЕСЯ ЗАХВАТОМ БЫСТРОГО ПРОТОНА ЯДРОМ¹

Совместно с А. И. Ахиезером

1. Поглощение быстрого протона ядром вызывает возмущение падающей протонной волны, благодаря чему может произойти излучение фотона (дифракционное излучение). Однако более существенным является излучение фотона, сопровождающееся непосредственным поглощением протона. Это излучение, которое может быть названо излучением остановки, аналогично рассмотренному в [1] излучению фотонов, сопровождающемуся поглощением π -мезонов нуклонами или ядрами. В настоящей заметке мы определим сечение излучения остановки в случае протонов, предполагая, что протон описывается уравнением Дирака и что ядро является абсолютно черным.

2. Для определения сечения интересующего нас процесса нужно найти поток протонов, падающих на ядро, в предположении, что на бесконечности имеется фотон. Будем исходить из уравнения Дирака для протона в поле фотона $A_\mu = \frac{e_\mu}{\sqrt{2\omega}} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)}$ с энергией ω , импульсом \mathbf{k} и поляризацией e_μ (нормировочный объем считаем равным единице)

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi = \frac{ie}{\sqrt{2\omega}} \gamma_\mu e_\mu e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)}\psi \quad (1)$$

и заменим в правой части этого уравнения ψ плоской падающей протонной волной $u_p e^{i(\mathbf{p}\mathbf{r}-Et)}$, где u_p — спинорная амплитуда плоской волны с импульсом \mathbf{p} и энергией E . Таким образом мы получим неоднородное уравнение для $\Phi = \Phi(\mathbf{r})e^{iE't}$, где $E' = E - \omega$ и $\Phi(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению²

$$\left(\gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \gamma_4 E' + m\right)\Phi(\mathbf{r}) = \frac{ie}{\sqrt{2\omega}} \gamma e e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{r}} u_p. \quad (2)$$

Найдя из этого уравнения $\Phi(\mathbf{r})$ на поверхности ядра, мы сможем определить поток протонов, падающих на ядро, когда на бесконечности имеется фотон. Плотность этого потока равна

$$j = \left(\overline{\Phi} \frac{\gamma \mathbf{p}}{p} \Phi\right)_{r=R}, \quad \overline{\Phi} = \Phi^* \gamma_4,$$

а интересующее нас дифференциальное сечение излучения остановки связано с j соотношением

$$d\sigma = \frac{j\pi R^2}{v} \frac{\omega^2 d\omega d^3\theta}{(2\pi)^3}, \quad (3)$$

где v — скорость протонов и $d^3\theta$ — телесный угол, в котором испускается фотон.

Решение уравнения (2) имеет вид

$$\overline{\Phi}(\mathbf{r}) = -\frac{ie}{\sqrt{2\omega}} \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \gamma e e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{r}'} u_p d^3r', \quad (4)$$

где $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — функция Грина для уравнения Дирака в случае свободного неограниченного пространства [2]

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \gamma_4 E' - m\right) \frac{e^{ip'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (5)$$

$$p' = \sqrt{E'^2 - m^2}.$$

Используя (5), получим

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}(\mathbf{r}) &= -\frac{ie}{\sqrt{2\omega}} \frac{1}{4\pi} [i\gamma(\mathbf{p}-\mathbf{k}) - \gamma_4 E' - m] \gamma e u_p \int \frac{e^{ip'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \times \\ &\times e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{r}'} d^3r' = \frac{ie}{2\sqrt{2\omega}} [i\gamma(\mathbf{p}-\mathbf{k}) - \\ &- \gamma_4 E' - m] \gamma e u_p \frac{e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{r}}}{p'(p' - |\mathbf{p}-\mathbf{k}|)} \end{aligned} \quad (6)$$

(в последнем выражении использовано предположение о малости угла между \mathbf{k} и \mathbf{p} и условие $E \gg m$).

Плотность потока протонов равна

$$j = \frac{-ie^2}{8\omega p} \frac{1}{p'^2(p' - |\mathbf{p}-\mathbf{k}|)^2} u_p^* \gamma e [i\gamma(\mathbf{p}-\mathbf{k}) + \gamma_4 E' + m] \gamma_4 \gamma p [i\gamma(\mathbf{p}-\mathbf{k}) - \gamma_4 E' - m] \gamma e u_p. \quad (7)$$

Используя соотношение

$$u_p = \frac{1}{2E} (-i\gamma \mathbf{p} + \gamma_4 E + m) \gamma_4 u_p,$$

перепишем (7) в виде

$$j = \frac{ie^2}{32\omega p E} \frac{1}{p'^2(p' - |\mathbf{p}-\mathbf{k}|)^2} \text{spur} \left\{ \gamma e [i\gamma(\mathbf{p}-\mathbf{k}) - \gamma_4 E' - m] \gamma p [i\gamma(\mathbf{p}-\mathbf{k}) - \gamma_4 E' - m] \gamma e [i\gamma \mathbf{p} - \gamma_4 E - m] \right\}. \quad (8)$$

¹ ДАН СССР, 1954, 94, 821.

² Мы пользуемся хевисайдовой единицей заряда и считаем $c = \hbar = 1$.

Просуммировав (8) по поляризациям фотонов и используя (3), получим следующее выражение для дифференциального сечения излучения остановки:

$$d\sigma = \frac{e^2 R^2}{(2\pi)^2} \frac{d\omega}{\omega} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{p^2} + \theta^2\right)^2} \left\{ \frac{p-\omega}{p} \theta^2 + \frac{\omega^2}{2p^2} \left(\frac{m^2}{p^2} + \theta^2\right) \right\} d^2\theta. \quad (9)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках определяет излучение остановки для частиц без спина [1], а второе обусловлено спином протона. Мы видим, что отличие между излучением остановки для частицы без спина и частицы со спином проявляется только в области больших частот. Необходимо, однако, иметь в виду, что в области больших частот протон нельзя рассматривать как точечный заряд, так как при этом благодаря взаимодействию протона с мезонным вакуумом должно сказываться «размазывание» протона. Влияние размеров протона в некоторых условиях приводит к появлению формфактора F , зависящего от инвариантной частоты фотона¹ $\frac{E\omega - k\rho}{m}$

$$F = F\left(\frac{E\omega - k\rho}{m\mu}\right) = F\left[\left(\frac{\omega}{2E} + \frac{E\omega}{2m^2} \theta^2\right) \frac{m}{\mu}\right]. \quad (10)$$

Протон можно рассматривать как точечный при малых аргументах этой функции, когда $\omega \ll E \frac{\mu}{m}$ и $\theta \ll \sqrt{\frac{\mu m}{E\omega}}$.

Сечение излучения остановки с учетом формфактора протона имеет вид

$$d\sigma = \frac{e^2 R^2}{(2\pi)^2} \frac{d\omega}{\omega} \frac{|F|^2}{\left(\frac{m^2}{p^2} + \theta^2\right)^2} \left\{ \frac{p-\omega}{p} \theta^2 + \frac{\omega^2}{2p^2} \left(\frac{m^2}{p^2} + \theta^2\right) \right\} d^2\theta. \quad (11)$$

Интегрируя $d\sigma$ по θ , найдем спектральный состав излучения $d\sigma_\omega$. Не учитывая формфактора, получим следующее выражение для $d\sigma_\omega$:

$$d\sigma_\omega = \frac{e^2 R^2}{2\pi} \ln\left(\frac{E}{\omega} \sqrt{\frac{\mu}{m}}\right) \cdot \left(\frac{E-\omega}{E} + \frac{\omega^2}{2E^2}\right) d\omega, \quad (12)$$

причем в качестве верхнего предела при интегрировании по θ мы взяли $\theta_m \approx \sqrt{\frac{\mu m}{E\omega}}$, так как при больших θ формфактор может сильно уменьшить интенсивность излучения. При $\omega \sim E$ (12) верно только по порядку величины.

Заметим, что экспериментальное изучение излучения остановки может дать важные сведения о формфакторе протона.

3. Выражение для $d\sigma$ может быть получено также из уравнения второго порядка

$$(\square - m^2)\psi \approx 2ieA_\nu \frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} + \frac{ie}{2} \gamma_\nu \gamma_\mu F_{\nu\mu} \psi, \quad (13)$$

где $F_{\nu\mu}$ — тензор электромагнитного поля, если заменить в правой части (13) ψ на $e^{i(p\mathbf{r} - Et)} u_p$ и воспользоваться функцией Грина для скалярного уравнения

$$G_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Заменяя член $\frac{ie}{2} \gamma_\nu \gamma_\mu F_{\nu\mu} \psi$ на $\frac{ie}{2} \rho \gamma_\nu \gamma_\mu F_{\nu\mu} \psi$, можно учесть аномальный магнитный момент протона, равный $(\rho - 1)\frac{e}{2}$. Взамен (9) мы получим при этом следующее выражение для $d\sigma$:

$$d\sigma = \frac{e^2 R^2}{(2\pi)^2} \frac{d\omega}{\omega} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{E^2} + \theta^2\right)^2} \left[\left(1 - \rho \frac{\omega}{E} + \frac{1}{2} \rho^2 \frac{\omega^2}{E^2}\right) \theta^2 + \frac{1}{2} \rho^2 \frac{\omega^2}{E^2} m^2 \right]. \quad (14)$$

В заключение мы хотим выразить благодарность акад. Л. Д. Ландау за интерес к работе и за ценную дискуссию.

Академия наук СССР

Получено 30 ноября 1953 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 1953, 24, 505 (Собр. трудов, № 97).
2. А. И. Ахиезер. ДАН, 1954, 94, 651.

¹ При этом мы считаем размеры протона порядка $1/\mu$.

ПОЛУФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОБРАЗОВАНИЯ π-МЕЗОННЫХ ПАР γ-КВАНТАМИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЙ¹

При больших энергиях γ-квантов возникает возможность построения полуфеноменологической теории образования π-мезонных пар γ-квантами, аналогичной теории испускания γ-квантов π-мезонами, развитой в [1]. Дело в том, что ядра (включая и протоны) можно считать черными шариками по отношению к π-мезонам большой энергии. Это является следствием интенсивного взаимодействия между π-мезонами и ядрами. Используя «черноту» нуклонов, можно определить волновую функцию ψ π-мезонов вне ядра как сумму плоской и дифрагированной волн. Если рассматривать процессы рождения пар, при которых углы между π⁺, π⁻ и квантом малы, то вероятность такого акта полностью определяется волновой функцией ψ π-мезона вне ядра (отметим, что только такие углы практически важны). Таким образом, можно все точно сосчитать, за исключением одного множителя (см. (13)), который включает в себя взаимодействие π⁺ и π⁻, а также отражает влияние конечных размеров π-частиц (форм-фактор). Сравнение выводов теории с экспериментом позволит определить этот множитель и тем самым получить ценные для теории сведения о взаимодействии π⁺- и π⁻-частиц и об их размерах.

Матричный элемент процесса: γ → π⁺ + π⁻ имеет вид²

$$M = e \sqrt{\frac{2\pi}{f}} \frac{1}{i} \int [\psi_1^* (j\nabla\psi_2^*) - \psi_2^* (j\nabla\psi_1^*)] e^{i\mathbf{r}\tau} d\tau, \quad (1)$$

где j — поляризация кванта.

ψ₁ и ψ₂ являются суммой плоской и сходящейся волн [2]

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2E_1}} \left[e^{i\mathbf{p}_1\mathbf{r}} + \frac{p_1}{2\pi i} \int \frac{e^{-ip_1|r-s_1|}}{|r-s_1|} ds_1 \right] = \frac{1}{\sqrt{2E_1}} [e^{i\mathbf{p}_1\mathbf{r}} + \Phi_1]. \quad (2)$$

Аналогично ψ₂.

Интегрирование по s₁ (s₂) производится по кругу радиуса R, перпендикулярному p₁ (p₂) и проходящему, например, через

центр нуклона (ядра); E₁ — энергия π⁺; E₂ — энергия π⁻; πR² равно сечению всех неупругих столкновений π-мезона с ядром (большинство из них приводит к интенсивным «звездам», сопровождающимся взрывными ливнями типа Ферми [3] — Ландау [4]).

Рассмотрим сперва часть (1), включая Φ₁ и Φ₂. Запишем эти функции следующим образом:

$$\Phi_1 = \frac{p_1}{4\pi^2 i} \iint \frac{e^{-i(\mathbf{q}, \mathbf{r}-s_1)}}{q^2 - p_1^2 + i\varepsilon} dq ds_1, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3)$$

(соответственно Φ₂).

Получающееся выражение имеет вид:

$$\begin{aligned} & -\frac{e}{i} \frac{p_1 p_2}{\sqrt{2^2 E_1 E_2}} \frac{1}{16\pi^6} \int ds_1 ds_2 dq dq' d\tau e^{i(t+\mathbf{q}, \mathbf{r}, \tau)} \times \\ & \times e^{-i(\mathbf{q} s_1 + \mathbf{q}' s_2)} \sqrt{\frac{2\pi}{f}} \frac{i(\mathbf{j}, \mathbf{q}' - \mathbf{q})}{(q'^2 - p_1^2 - i\varepsilon)(q^2 - p_2^2 - i\varepsilon)} = \\ & = \frac{e p_1 p_2}{2 \sqrt{E_1 E_2} \pi^3} \sqrt{\frac{2\pi}{f}} \int ds_1 ds_2 dq e^{-i\mathbf{q} s_1 + i(\mathbf{f} + \mathbf{q}, s_2)} \times \\ & \times \frac{(j\mathbf{q})}{(q^2 - p_1^2 - i\varepsilon)(|\mathbf{f} + \mathbf{q}|^2 - p_2^2 - i\varepsilon)}. \quad (4) \end{aligned}$$

Вводим q_z — проекцию q на направление f и перпендикулярную к f часть g:

$$\begin{aligned} & \frac{e p_1 p_2}{\sqrt{2\pi^5 E_1 E_2} f} \int ds_1 ds_2 e^{i\mathbf{g}, (s_2 - s_1)} d\mathbf{g} (j\mathbf{g}) \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \times \\ & \times \frac{e^{iq_z(s_{2z} - s_{1z}) + i f s_{2z}}}{q_z^2 + g^2 - p_1^2 - i\varepsilon} \frac{1}{[(q_z + f)^2 + g^2 - p_2^2 - i\varepsilon]}. \quad (5) \end{aligned}$$

Интегрирование по q_z может быть проведено, замыкая контур интегрирования большой полуокружностью и находя вычеты. Для упрощения при этом используем, что f — p₁ — p₂ ≈ $\frac{m^2 f}{2p_1 p_2} \rightarrow 0$ (m — масса π-частицы). В результате получаем:

$$\frac{\pi i e p_1 p_2}{\sqrt{2\pi^5 E_1 E_2} f^3} \int ds_1 ds_2 (j\mathbf{g}) d\mathbf{g} \frac{e^{i(p_2 s_{2z} + p_1 s_{1z})}}{m^2 + g^2} e^{i(\mathbf{g}, s_2 - s_1)} \quad (6)$$

(здесь можно f — p₂ заменить на p₁, так как s_{2z} мало).

Выразим s_{1z}, используя перпендикулярность s₁ и p₁:

$$s_{1z} = -\frac{s_1 k_1}{p_1}, \quad p_1 = p_1 \frac{f}{f} \left(1 - \frac{k_1^2}{2p_1^2} \right) + k_1, \quad \mathbf{f} k_1 = 0, \quad k_1 \ll p_1. \quad (7)$$

¹ ДАН СССР, 1954, 96, 265.

² $\hbar = c = 1$.

Пользуясь (7) и аналогичным выражением для s_{2z} , преобразуем (6) [5]:

$$\begin{aligned} & \frac{ie p_1 p_2}{\sqrt{2\pi^3 E_1 E_2 f^3}} \int ds_1 ds_2 dg \frac{jg}{m^2 + g^2} e^{i(g, s_2 - s_1) - i(s_1 k_1 + s_2 k_2)} = \\ & = e \sqrt{\frac{p_1 p_2}{2\pi^3 f^3}} \int ds_1 ds_2 e^{-i(k_1 s_1 + k_2 s_2)} (j\nabla_{s_2}) \int \frac{e^{i(g, s_2 - s_1)}}{m^2 + g^2} dg = \\ & = e \sqrt{\frac{2p_1 p_2}{\pi f^3}} \int ds_1 ds_2 e^{-i(k_1 s_1 + k_2 s_2)} (j\nabla_{s_2}) \int_0^\infty e^{-m|s_2 - s_1| \operatorname{ch} \theta} d\theta. \end{aligned} \quad (8)$$

Переходим теперь к интегралам, содержащим либо Φ_1 , либо Φ_2 :

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\pi}{2E_1 E_2 f}} \frac{e}{i} \int e^{if\tau} [e^{-ip_1 \tau} (j\nabla \Phi_2^*) + \Phi_1^* j\nabla e^{-ip_2 \tau} - \\ & - e^{-ip_2 \tau} (j\nabla \Phi_1^*) - (j\nabla e^{-ip_1 \tau}) \Phi_2^*] d\tau = \\ & = \sqrt{\frac{2\pi}{E_1 E_2 f}} e \int [j p_1 e^{i(f-p_1, r)} \Phi_2^* - j p_2 e^{i(f-p_2, r)} \Phi_1^*] d\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Пользуемся теперь (3):

$$\begin{aligned} & \frac{ei}{\sqrt{8\pi^3 E_1 E_2 f}} \int e^{if\tau} d\tau \left[(jk_1) p_2 e^{-ip_1 r} \int ds_2 dq' \frac{e^{i(q', r - s_2)}}{q'^2 - p_2^2 - i\varepsilon} - \right. \\ & \left. - e^{-ip_2 r} (jk_2) p_1 \int ds_1 dq \frac{e^{i(q, r - s_1)}}{q^2 - p_1^2 - i\varepsilon} \right] = \\ & = ei \sqrt{\frac{8\pi}{E_1 E_2 f}} \left[(jk_1) p_2 \frac{\int e^{-i(p_1 - f, s_2)} ds_2}{(f - p_1)^2 - p_2^2} - \frac{\int e^{i(f - p_2, s_1)} ds_1 (jk_2) p_1}{(f - p_2)^2 - p_1^2} \right] = \\ & = ei \sqrt{\frac{8\pi}{E_1 E_2 f^3}} \left[\frac{(jk_1) p_1 p_2}{m^2 + k_1^2} \int e^{i(f - p_1, s_2)} ds_2 - \frac{(jk_2) p_1 p_2}{m^2 + k_2^2} \int e^{i(f - p_2, s_1)} ds_1 \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Преобразуем интегралы по s_1 и s_2 , учитывая (7):

$$\begin{aligned} & \int e^{i(f - p_1, s_2)} ds_2 = \int e^{-ik_1 s_2 + ip_2 s_2} ds_2 = \int e^{-i(k_1 s_2 + k_2 s_2)} ds_2 = \\ & = 2\pi \frac{R}{k} J_1(kR), \quad k = k_1 + k_2. \end{aligned} \quad (11)$$

В соответствии с этим переписываем (11):

$$ei \sqrt{\frac{32\pi^3 p_1 p_2}{f^3}} \left[\frac{jk_1}{m^2 + k_1^2} - \frac{jk_2}{m^2 + k_2^2} \right] \frac{R}{k} J_1(kR). \quad (12)$$

Складывая (8) и (12), находим полный матричный элемент перехода M , так как член, не содержащий Φ_1 и Φ_2 , исчезает в силу законов сохранения.

При вычислении (8), (12) главную роль, играли расстояния до ядра порядка $p_1 p_2 / m^2 f$, если $k_1 \sim k_2 \lesssim m$. Это проще всего можно увидеть из (2) (см. также [1]). Таким образом, пользование ψ -функциями, взятыми вне ядра, законно.

Определяем теперь эффективное сечение процесса:

$$d\sigma_j(p_1, p_2) = 2\pi |M^2| \frac{d p_{1z} dk_1 dk_2}{(2\pi)^6} |F_{+-}|^2. \quad (13)$$

Появление множителя F вызвано тем, что взаимодействие мезонов с γ -квантами может не соответствовать взаимодействию точечной частицы, как это имеет место в (1). Далее возможное существование сильного (в частности, неэлектромагнитного) взаимодействия π^+ - и π^- -частиц друг с другом может привести к тому, что значение ψ -функции, описывающей систему π^+ , π^- , при совпадении координат π^+ и π^- будет сильно отличаться от произведения $\psi(r_1)\psi(r_2)$, аналогично тому, как у заряженной частицы $|\chi(0)|^2$ отличается от $|\chi(\infty)|^2$ на множитель $\frac{2\pi e^2}{v} [e^{2\pi e^2/v} - 1]^{-1}$. (Влияние этого эффекта на образование электронно-позитронных пар было рассмотрено А. Д. Сахаровым [6].) Множитель типа $\left| \frac{\chi(0)}{\chi(\infty)} \right|^2$ может появиться и в наших выражениях. Аналогично [1], влияние всех изложенных выше обстоятельств приводит к появлению в матричном элементе дополнительного множителя F .

Следует подчеркнуть, что выделение множителя F возможно только в силу больших расстояний от ядра, играющих роль в нашей задаче.

Влияние возможных конечных размеров π -частиц и их взаимодействия содержится в F , который является функцией от трех инвариантов:

$$\frac{1}{m} \omega_1^0 = \frac{E_1 f - p_1 f}{m^2}, \quad \frac{1}{m} \omega_2^0 = \frac{E_2 f - p_2 f}{m^2}, \quad I = \frac{-p_1 p_2 + E_1 E_2}{m^2}. \quad (14)$$

ω_1^0 есть частота кванта в системе покоя π^+ , ω_2^0 — частота кванта в системе покоя π^- ; $I = \frac{1 + u^2}{1 - u^2}$, где u — скорость π -частиц в системе центра тяжести π^+ и π^- .

В наиболее важном случае, когда $p_1 \sim p_2$, $k_1 \sim k_2 \lesssim m$, все инварианты оказываются порядка единицы, и можно думать, что F по порядку величины равно единице.

Интеграл, входящий в (8), оказывается особенно простым при $mR \gg 1$, т. е. для ядер в середине и конце таблицы Менделеева. Поэтому этот случай заслуживает отдельного рассмотрения.

ОБРАЗОВАНИЕ π -МЕЗОННЫХ ПАР γ -КВАНТАМИ В СЛУЧАЕ ТЯЖЕЛЫХ ЯДЕР¹

При $mR \sim 1$ из (8), (12), (13), (14) можно сделать следующие выводы: 1) полное сечение пропорционально $e^2 R^2$ и не зависит от энергии; 2) эффективная область углов равна m/p ; 3) распределение по энергиям довольно размытое.

Академия наук СССР

Получено 5 марта 1954 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Ландау, И. Померанчук. ЖЭТФ, 1953, 24, 505 (Собр. трудов, № 97).
2. Л. Ландау, Е. Лифшиц. Теория поля, 2-е изд., 1948, стр. 168.
3. Э. Ферми. Усп. физ. наук, 46, 71 (1952); Progr. Theor. Phys., 5, 570 (1950).
4. Л. Ландау. Изв. АН СССР, сер. физ., 1953, 17, 51.
5. И. Н. Рыжик, И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 1951; Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, 1949, стр. 190.
6. А. Д. Сагаров. ЖЭТФ, 1948, 18, 631.

Полуфеноменологическая теория образования π -мезонных пар γ -квантами была сформулирована ранее². В том случае, когда радиус ядра велик по сравнению с комптоновской длиной π -мезона: $R \gg 1/m$, матричный элемент перехода (формула (8))² может быть существенно упрощен.

Если ввести в формулу (8)² новые переменные $s = \frac{s_1 + s_2}{2}$, $\sigma = s_2 - s_1$, то эффективные значения σ оказываются порядка или меньше³ $1/m$. Поэтому при $mR \gg 1$ можно производить интегрирование по s и σ независимо в следующих пределах: $s^2 \leq R^2$, $\sigma^2 < \infty$. В новых переменных формула (8)² имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{ie p_1 p_2}{\sqrt{2\pi^2 E_1 E_2 f^3}} \int ds e^{-iks} \int dg \int d\sigma e^{ig\alpha + 1/2i(\sigma, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)} \frac{j\mathbf{g}}{m^2 + g^2} = \\ & = ie \sqrt{\frac{8\pi E_1 E_2}{f^3}} \frac{R2\pi}{k} J_1(kR) \int \delta\left(g - \frac{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}{2}\right) \frac{j\mathbf{g}}{m^2 + g^2} d\mathbf{g} = \\ & = ie \sqrt{\frac{8\pi^3 E_1 E_2}{f^3}} \frac{R}{k} J_1(kR) (j, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) [m^2 + 1/4(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)^2]^{-1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Складывая (1) и (12)², получаем матричный элемент M :

$$ie \sqrt{\frac{8\pi^3 E_1 E_2}{f^3}} \frac{R}{k} J_1(kR) \left[\frac{(j, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)}{m^2 + 1/4(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)^2} + \frac{2j\mathbf{k}_1}{m^2 + k_1^2} - \frac{2j\mathbf{k}_2}{m^2 + k_2^2} \right]. \quad (2)$$

Эффективные значения $k \sim 1/R \ll m$, тогда как k_1, k_2 могут быть порядка m . Поэтому $(\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathbf{k}_1 \approx -\mathbf{k}_2$. Используем это для упрощения (2):

$$M = -ie \sqrt{\frac{8\pi^3 E_1 E_2}{f^3}} \frac{R}{k} J_1(kR) \frac{2j\mathbf{b}}{m^2 + b^2}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}{2}. \quad (3)$$

Когда $\mathbf{k}_1 \approx -\mathbf{k}_2$, инварианты, входящие в сечение в формуле (13)², выражаются следующим образом:

$$\frac{\omega_1^0}{m} = \frac{j}{2E_1} \frac{m^2 + b^2}{m^2}, \quad \frac{\omega_2^0}{m} = \frac{m^2 + b^2}{m^2}, \quad I = \frac{\omega_1^0 + \omega_2^0}{m} - 1. \quad (4)$$

Таким образом, множитель F в формуле² (13) не зависит от \mathbf{k} и

¹ ДАН СССР, 1954, 96, 481.

² И. Я. Померанчук. ДАН, 1954, 96, 265 (Собр. трудов, № 100).

³ $\hbar = c = 1$.

от направления \mathbf{b} , что дает возможность произвести интегрирование дифференциального сечения по этим переменным. Дифференциальное сечение равно:

$$d\sigma_j(\mathbf{k}, \mathbf{b}, E_1) = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{R^2}{k^2} J_1^2(kR) \frac{E_1(f-E_1)dE_1}{f^3(m^2+b^2)^2} dbdk |F(\omega_1^0, \omega_2^0)|^2 (\mathbf{j}\mathbf{b})^2,$$

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{f}}{f} \left(p_1 - \frac{k_1^2}{2p_1} \right) + \mathbf{k}_1, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{\mathbf{f}}{f} \left(p_2 - \frac{k_2^2}{2p_2} \right) + \mathbf{k}_2, \quad (5)$$

$$d\mathbf{k} = kdkd\varphi_k, \quad d\mathbf{b} = bdbd\varphi_b.$$

F — симметричная функция своих аргументов.

Усредняя по поляризациям кванта, находим:

$$d\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{b}, E_1) = \frac{e^2}{2\pi^2} \frac{R^2}{k^2} \frac{J_1^2(kR) E_1(f-E_1) dE_1}{f^3(m^2+b^2)^2} b^2 dbdk |F|^2. \quad (6)$$

Интегрируем теперь (6) по \mathbf{k} и φ_b , получаем

$$d\sigma(b, E_1) = e^2 R^2 \frac{E_1(f-E_1) dE_1}{f^3} \frac{b^2 db}{(m^2+b^2)^2} |F|^2. \quad (7)$$

Формулы (5), (6) и (7) дают возможность определить из опытных данных $|F|^2$ и тем самым получить сведения о взаимодействии π^+ - и π^- -частиц друг с другом, а также о их размерах.

Остающееся интегрирование по E_1 и b может быть произведено, только полагая, что $F = 1$. При этом получается следующее выражение:

$$\int_0^f dE_1 \int_0^{b_{\max}} db \dots = \frac{e^2}{12} R^2 \left[\ln \frac{m^2 + b_{\max}^2}{m^2 e} + \frac{m^2}{m^2 + b_{\max}^2} \right]. \quad (8)$$

При $z \sim 80-90$ образование пар под действием чисто кулоновских сил оказывается всего лишь в несколько раз меньшим, чем (8). Поэтому в этих условиях необходимо учитывать наряду с (8) часть, обязанную кулонову полю.

В заключение следует отметить невозможность превращения виртуально родившейся пары π^+ и π^- при их взаимодействии друг с другом в два π^0 -мезона. Это связано с законом сохранения зарядовой четности. Квант зарядово-нечетен. Система из двух π^0 -мезонов зарядово-четна. Так как ядро выполняет только функции черного тела, то его следует при этом считать зарядово-четным. Таким образом, процесс $\gamma \rightarrow 2\pi^0$ в рассматриваемых условиях не может иметь места. Так как образование пар ($\pi^+ \pi^-$)- и $2\pi^0$ -мезонов, не сопровождающееся возбуждением ядра, практически может иметь место только при помощи механизма, разобранный в этой работе, то закон сохранения зарядовой четности приводит к выводу, что сечение процесса $\gamma \rightarrow 2\pi^0$ должно быть при $f \gg m$ очень малым по сравнению с сечением процесса $\gamma \rightarrow \pi^+ + \pi^-$.

В ы в о д ы: 1. Сечение (образования $\pi^+ \pi^-$)-пар, не сопровождающееся возбуждением ядра в экстремрелятивистских условиях, не зависит от энергии кванта и оказывается пропорциональным R^2 ($\sim A^{2/3}$). По порядку величины интегральное сечение равно $\frac{e^2}{10} R^2$.

2. Процесс $\gamma \rightarrow 2\pi^0$ имеет малую вероятность по сравнению с процессом $\gamma \rightarrow \pi^+ + \pi^-$.

3. Распределение по величине \mathbf{k} дается (6). Эффективные $k \sim 1/R$.

4. Эффективные b связаны с «размерами» π -частиц и свойствами их взаимодействия.

Академия наук СССР

Получено 5 марта 1954 г.

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ γ -КВАНТОВ, СОПРОВОЖДАЮЩЕМСЯ ПОГЛОЩЕНИЕМ БЫСТРЫХ ПРОТОНОВ ЯДРАМИ¹

Совместно с А. И. Ахиезером

Поглощение быстрых протонов ядрами может сопровождаться излучением фотонов, обусловленным двумя механизмами. С одной стороны, поглощение протона ядром вызывает дифракционное возмущение протонной волны, могущее приводить к излучению (дифракционное излучение) [1]; с другой стороны, излучение может вызываться непосредственным поглощением протона (излучение остановки) [2]. Более существенным является второй механизм. В настоящей заметке мы хотим оценить роль аномального магнитного момента протонов в излучении остановки, учет которого в [2] произведен неточно.

Будем предполагать, что для оценки излучения остановки протон можно описывать уравнением Дирака с аномальным магнитным моментом μ' :

$$(\gamma \partial / \partial x_\nu - ie \gamma_\nu A_\nu - i \mu' \gamma_\nu \gamma_\rho F_{\nu\rho} + m) \psi = 0, \quad (1)$$

здесь $F_{\nu\rho} = dA_\rho/dx_\nu - dA_\nu/dx_\rho$ — тензор поля и A_ν — векторный потенциал, равный $A_\nu = (2\omega)^{-1/2} e_\nu \exp\{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)\}$ (e_ν — единичный вектор поляризации, ω — частота, \mathbf{k} — волновой вектор фотона; мы пользуемся системой единиц, в которой $c = \hbar = 1$). Так как $e \ll 1$, то в членах, содержащих электромагнитное поле, можно заменить ψ на $\psi_0 = ue^{i(\mathbf{p}\mathbf{r} - Et)}$, где u — спинорная амплитуда плоской падающей протонной волны с импульсом \mathbf{p} и энергией E . Таким образом, мы получим неоднородное уравнение для $\psi = \Phi(\mathbf{r}) e^{-iEt}$, имеющее вид

$$(\boldsymbol{\gamma} \partial / \partial \mathbf{r} - \gamma_4 E' + m) \Phi = (2\omega)^{-1/2} (ie\hat{e} + 2\mu'\hat{k}\hat{e}) \Phi_0(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (2)$$

где

$$E' = E - \omega, \quad \hat{a} = \gamma_\nu a_\nu (\nu = 1, 2, 3, 4), \quad \Phi_0(\mathbf{r}) = ue^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}.$$

Найдя из этого уравнения $\Phi(\mathbf{r})$ на поверхности ядра, которое предполагается абсолютно черным по отношению к падающим протонам, можно определить поток протонов, поглощаемых ядром, когда на бесконечности имеется один фотон. Плотность это-

¹ ЖЭТФ, 1956, 30, 201.

го потока определяется формулой

$$j = \left(\overline{\Phi} \frac{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}}{p} \Phi \right)_{r=R}, \quad \overline{\Phi} = \Phi^* \gamma_4,$$

а сечение излучения остановки равно

$$d\sigma = (j\pi R^2/v) (2\pi)^{-3} \omega^2 d\omega d^2\theta, \quad (3)$$

где v — скорость протонов, $d^2\theta$ — телесный угол, в котором испускается фотон.

Решение уравнения (2) имеет вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = -(2\omega)^{-1/2} \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (ie\hat{e} + 2\mu'\hat{k}\hat{e}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \Phi_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (4)$$

где G_0 — функция Грина для уравнения Дирака [1]:

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \left(\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \gamma_4 E' - m \right) \frac{e^{ip'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad p' = \sqrt{E'^2 - m^2}. \quad (5)$$

Используя (5), можно показать, что $\Phi(\mathbf{r})$ определяется формулой

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\sqrt{2\omega}} [i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\boldsymbol{\gamma} - E'\gamma_4 - m] [ie\hat{e} + 2\mu'\hat{k}\hat{e}] u \frac{e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{r}}}{p'(p'-|\mathbf{p}-\mathbf{k}|)}$$

и что поток равен

$$j = \frac{i}{32\omega p E p'^2 (p' - |\mathbf{p}-\mathbf{k}|)^2} \text{Sp} \{ [-2\mu'\hat{e}\hat{k} - ie\hat{e}] [i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\boldsymbol{\gamma} - E'\gamma_4 - m] \times \\ \times \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} [i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\boldsymbol{\gamma} - E'\gamma_4 - m] [ie\hat{e} + 2\mu'\hat{k}\hat{e}] [i\mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} - E\gamma_4 - m] \}. \quad (6)$$

Производя суммирование по поляризациям фотона при помощи формулы

$$\sum_e \mathbf{e}\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}\mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b} - k^{-2} (\mathbf{a}\mathbf{k}) (\mathbf{b}\mathbf{k}),$$

где \mathbf{a} и \mathbf{b} — матричные векторы, представим j в виде

$$j = \frac{1}{8\omega p E p'^2 (p' - |\mathbf{p}-\mathbf{k}|)^2} \text{Sp} \{ [i((\mathbf{p}\mathbf{p}_1)\mathbf{p}_1 + \delta\mathbf{p})\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{p}\mathbf{p}_1 (E'\gamma_4 + m)] \times \\ \times [2\mu'\hat{k} + ie] [-i(\mathbf{p}\mathbf{n}) (\mathbf{n}\boldsymbol{\gamma}) + E\gamma_4 - m] [2\mu'\hat{k} + ie] \}, \quad (6')$$

где

$$\mathbf{n} = \mathbf{k}/k, \quad 2\delta = (E - k)^2 - m^2 - (\mathbf{p}-\mathbf{k})^2, \quad E' = E - k, \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p} - \mathbf{k}.$$

Дифференциальное сечение излучения остановки равно

$$d\sigma = \frac{R^2}{(2\pi)^2} \frac{d\omega}{\omega} \frac{p^2}{(m^2 + p^2\theta^2)^2} \left\{ e^2 \left[p(p-\omega)\theta^2 + \frac{\omega^2}{2p^2} (m^2 + p^2\theta^2) \right] + \right. \\ \left. + 2\mu'^2 \frac{\omega^2}{p^2} (m^2 + p^2\theta^2)^2 - m\mu' \frac{\omega}{p^2} (m^2 + p^2\theta^2) \right\} d^2\theta. \quad (7)$$

НЕУПРУГИЕ ДИФРАКЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ¹

Совместно с Е. Л. Фейнбергом

1. Введение

Настоящая статья представляет собой обзор ряда теоретических работ различных авторов [1—10], опубликованных в течение двух последних лет. Объединяемые общей физической идеей, эти работы посвящены, однако, довольно различным конкретным явлениям. В обзоре дается дальнейшее развитие теории как в направлении изучения других конкретных явлений, так и по линии обобщения и улучшения самого метода.

Мы рассмотрим явления, происходящие в процессе столкновения частиц высокой энергии, в основном — более 10^8 эв (в некоторых случаях характерные черты данного явления проявляются только при энергиях выше 10^{12} эв). Мы, однако, надеемся, что подобные явления могут иметь место при любых энергиях. Мы имеем в виду неупругие столкновения, электромагнитное тормозное излучение, фоторождение пар π -мезонов, расщепление быстрых дейтронов и т. д. Рассматриваемые процессы объединяет то обстоятельство, что все они связаны с дифракцией частиц на мишени, причем эта мишень играет роль «третьего тела». Таким телом может быть, например, «макроскопическое» скопление других частиц (тормозное излучение электрона в среде, в частности, в кристаллической решетке; электромагнитное излучение, сопровождающее дифракцию π -мезона на ядре и т. д.). Следует подчеркнуть, что энергия при этом считается достаточно большой, так чтобы длина волны оказывалась много меньше чем, соответственно, постоянная решетки, радиус ядра и т. д. Несмотря на это дифракционные явления оказываются крайне существенными. Эта особенность прежде всего требует пояснения.

Формальная основа настоящего исследования определяется следующими соображениями, которым, как мы полагаем, до сих пор не уделялось внимания. Когда энергия участвующих в процессе частиц растет, угол их разлета уменьшается. Это приводит к уменьшению продольной компоненты q_{\parallel} импульса q , передаваемого «третьему телу» (кристаллической решетке, ядру, и т. д.). При достаточно больших энергиях q_{\parallel} может стать меньше обрат-

¹ Nuovo Cim., 1956, Suppl., № 4, 652. Перевод М. С. Маринова и И. С. Цукермана.

Первое слагаемое в квадратных скобках (7) определяет излучение остановки для частиц без спина [3], а второе обусловлено спином протона. Последние два слагаемых определяют излучение, вызванное наличием аномального магнитного момента протона.

Мы видим, что влияние спина и аномального магнитного момента протона на излучение остановки существенно только в области больших частот. Следует, однако, иметь в виду, что в области больших частот протон нельзя, строго говоря, рассматривать как точечный заряд, так как при этом, благодаря взаимодействию протона с мезонным вакуумом, должно сказываться «размазывание» протона, учет которого в некоторых условиях может быть произведен введением формфактора F , зависящего от инвариантной частоты фотона¹:

$$F = F\left(\frac{E\omega - \mathbf{pk}}{m\omega}\right) = F\left[\frac{\omega}{2E}\left(1 + \frac{E^2}{m^2}\theta^2\right)\frac{m}{m_0}\right].$$

Сечение излучения с учетом формфактора протона определяется произведением (7) на $|F|^2$.

Выражаем искреннюю благодарность В. Барьяхтару и С. Пелетминскому за помощь, оказанную ими при выполнении ряда вычислений.

Физико-технический институт
Академии наук УССР
Академия наук СССР

Получено 29 апреля 1955 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ахиезер. ДАН СССР, 1954, 94, 651.
2. А. Ахиезер, и И. Я. Померанчук. ДАН СССР, 1954, 94, 821 (Собр. трудов, № 99).
3. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 1953, 24, 505 (Собр. трудов, № 97).

¹ Мы считаем, что размеры протона порядка $1/m_0$ (m_0 — масса мезона).

ной величины характерных размеров «третьего тела» (расстояния между атомами или радиуса ядра R). Другими словами, при достаточно высокой энергии будет выполняться одно из следующих условий:

$$q_{\parallel} a \ll 1, \quad (1)$$

или

$$q_{\parallel} R \ll 1. \quad (1a)$$

Согласно соотношению неопределенности это означает, что эффективный радиус существенной в задаче области пространства, равный (при $\hbar = c = 1$)

$$r_{\text{эф}} = 1/q_{\parallel}, \quad (2)$$

становится очень велик по сравнению с a или R , какой бы малой ни была длина волны (сравните дифракцию рентгеновых лучей на решетке при скользющем падении или дифракцию света на крае лунного диска и т. д.). При тормозном излучении электрона такая область может содержать много атомов; в случае соударения с ядром она будет включать все ядро как целое.

Отмеченная особенность по-разному проявляется в различных процессах и различным образом используется при их теоретическом описании.

Существенно, с одной стороны, что кроме обычно учитываемого «третьего тела» равную роль играют другие частицы среды, и взаимодействие со всеми ними происходит одновременно. Таким образом, процесс в среде будет отличаться от такого же процесса на изолированном теле. Это оказывается особенно важным для чисто электромагнитных процессов: тормозного излучения электрона в кулоновском поле ядра и т. д. (ср., однако, параграф 4.3 настоящей статьи).

С другой стороны, если мы имеем дело с явлением, в котором во всей рассматриваемой области имеется только одно тело (например, ядро), то рассеивающее действие этого тела на другие частицы, принимающие участие в процессе, должно быть известно только на больших расстояниях. Процесс является «внешним» по отношению к телу. И это действие можно описывать феноменологически, используя, например, формулы дифракционной теории или какие-либо данные о поведении рассеиваемых частиц вдали от ядра (излучение фотона π -мезоном, взаимодействующим с ядром, и т. д.).

Рассмотрим проблемы первого типа. Электрон с энергией E (его масса покоя m и импульс p) испытывает тормозное излучение (импульс фотона k); переданный ядру импульс q имеет две компоненты, причем поперечная компонента, q_{\perp} , по величине порядка m (это можно видеть из того факта, что угол разлета частиц, участвующих в процессе, оказывается по величине порядка или меньше $q_{\perp}/p \sim m/E$), а продольная, q_{\parallel} , для нулевого угла разлета равна

$$q_{\parallel} = \sqrt{E^2 - m^2} - \sqrt{(E - k)^2 - m^2} - k \approx \frac{m^2 k}{2E(E - k)} \quad (3)$$

(пока рассмотрение ведется по порядку величины, это выражение для q_{\parallel} справедливо не только для $\theta = 0$, но и для всей существенной области углов $\theta \sim m/E$).

Движение электрона и кванта через всю область пространства, простирающуюся по p на длину $1/q_{\parallel} \sim 2E(E - k)/m^2 k$, существенно сказывается на излучении. При этом следует отметить по крайней мере следующие явления.

1. При больших E (или соответственно малых k), достаточных для выполнения условия (1a), на тормозное излучение частицы, движущейся вдоль некоторой кристаллографической оси кристалла, будут совместно (когерентно) влиять все ядра, расположенные в пределах сечения с размерами $1/q_{\parallel}$; число таких ядер равно

$$N_{\text{эф}} \sim 1/q_{\parallel} a. \quad (4)$$

Это означает, что эффективный заряд рассеивающего центра будет равен $N_{\text{эф}} Ze$ вместо Ze , и сечение процесса будет пропорционально $N_{\text{эф}}^2$, т. е. возникнут максимумы тормозного излучения интерференционной природы.

2. При движении в аморфной, а также в кристаллической среде в случае достаточно больших E или достаточно малых k электрон может на длине $1/q_{\parallel}$ претерпеть достаточно большое число рассеяний, что выведет его за пределы угла порядка m/E . При этом процесс излучения нарушится. Таким образом, тормозное излучение в среде должно падать, когда энергия превосходит некоторое большое значение.

3. Оба эффекта должны сказываться на процессе образования электронных пар практически при тех же условиях, поскольку взаимодействия компонент пары с третьим телом имеют те же характерные черты.

4. Для мягких фотонов тормозного излучения может проявиться отклонение коэффициента преломления среды $\sqrt{\epsilon}$ от единицы. На достаточно большом пути $r_{\text{эф}} = 1/q_{\parallel}$ дополнительная фаза фотона, равная

$$(\sqrt{\epsilon} - 1) k r_{\text{эф}}, \quad (5)$$

может возрасти настолько, что на этом участке не будет выполнена когерентность, и весь процесс рассеяния нарушится.

5. Вернемся теперь к ядерным взаимодействиям, для которых наиболее важно не действие среды, а тот факт, что процесс является внешним по отношению к ядру.

Если частица, способная провзаимодействовать с ядром, ударяет в него, она может испустить фотон (когда она электрически заряжена) или π -мезон (в частности, если частица является нуклоном). Например, когда заряженный π -мезон (с энергией E и массой покоя μ), падающий на ядро, испускает фотон с импульсом

k , то для нулевых углов разлета (пренебрегая отдачей ядра)

$$q_{\parallel} \sim \frac{\mu^2 k}{2E(E-k)}. \quad (6)$$

Если E велико или k соответственно мало, так что выполняется неравенство (1а), то существенная в задаче область пространства становится много большей размеров ядра. Ядро при этом действует как целое, а образование кванта протекает на больших расстояниях от ядра.

Этот процесс можно пояснить и другим путем. Возможность поглощения π -мезона ядром означает также, что должна иметь место дифракция π -мезона на ядре. В ходе этой дифракции мезон приобретает некоторый поперечный импульс отдачи, равный $q_{\perp} \approx r\theta$, и при достаточно больших углах θ это приводит к испусканию фотона.

В области высоких энергий можно считать, что дифракция вызывается наличием «черного шара». Если длина волны мезона достаточно мала, можно при этом воспользоваться кирхгофовским приближением дифракционной теории.

6. Совершенно так же можно дать полуфеноменологическую трактовку фоторождения π -мезонных пар.

7. Нуклон высокой энергии E (с массой покоя M) при взаимодействии с ядром может испустить π -мезон с энергией E_{π} ; при этом для малых углов

$$\begin{aligned} q_{\parallel} &= \sqrt{E^2 - M^2} - \sqrt{(E - E_{\pi})^2 - M^2} - \sqrt{E_{\pi}^2 - \mu^2} \approx \\ &\approx \frac{M^2 E_{\pi}}{2E(E - E_{\pi})} + \frac{\mu^2}{2E_{\pi}}. \end{aligned} \quad (7)$$

В случае выполнения условия (1а) появляется возможность внешнего образования π -мезонов. При этом следует феноменологически учитывать рассеяние нуклона, а также мезона.

8. Дифракция должна иметь место, когда быстрое нерелятивистское ядро, например, дейтрон, сталкивается с ядром мишени. При этом налетающее ядро приобретает поперечный импульс, в результате чего может происходить его расщепление (совершенно независимо от расщепления, вызываемого электростатическим полем ядра), которое можно назвать дифракционным или внешним расщеплением. Например, для дейтрона с кинетической энергией E (энергию связи обозначим через ε_d) и в предположении равенства энергий вылетающих протона и нейтрона (правильность этого допущения подтверждается последующими вычислениями) мы имеем

$$q_{\parallel} = \sqrt{2(2M - \varepsilon_d)E} - 2\sqrt{2M \frac{1}{2}(E - \varepsilon_d)} \approx \sqrt{\frac{M}{E}} \varepsilon_d. \quad (8)$$

В этом случае условие (1а) может удовлетворяться даже при энергиях выше нескольких $M\varepsilon$.

Во всех процессах (5) — (8), в которых ядро действует как целое, характерной чертой является то, что оно и поперечный импульс воспринимает также как целое. Предполагая, что $q = \sqrt{q_{\perp}^2 + q_{\parallel}^2} \approx q_{\perp}$ не очень велико, а именно, $q_{\perp} < \mu$ (такое соотношение практически нужно для рассмотрения ядра с резким краем), мы можем получить, что энергия, передаваемая ядру с атомным весом A , равна

$$\frac{q^2}{2MA} \lesssim \mu \frac{\mu}{2MA} \sim \frac{12 M\varepsilon\varepsilon}{A}, \quad (9)$$

т. е. так мала, что ядро, испытывая некоторую отдачу, как правило, не разрушается.

9. Еще один пример приложения того же принципа можно обнаружить, рассматривая любые столкновения быстрых нуклонов с ядрами, при которых происходит разрушение ядра и образуются новые частицы. В этом случае (в интервале энергий $10^9 - 10^{12}$ эв) часто пытаются исследовать процесс каскадного размножения в ядре. Однако оказывается, что фактически даже рассмотрение последующих столкновений возможно только при достаточно больших углах разлета частиц и энергиях отдачи нуклонов. В противном случае налетающая частица взаимодействует одновременно со всеми внутриядерными нуклонами, расположенными на ее пути, т. е. со всем «туннелем».

2. Электромагнитные явления, сопровождающие ядерные столкновения

2.1. Испускание фотонов в ходе дифракции и при захвате мезонов [4]. Рассмотрим электромагнитные процессы, сопровождающие столкновения быстрых заряженных π -мезонов с ядрами, причем будем считать, что импульс мезонов достаточно велик, а длина волны мала по сравнению с радиусом ядра R .

Правильно включить ядерные взаимодействия в теоретические расчеты невозможно. Оказывается, однако, что испускание электромагнитного излучения, сопровождающее ядерное соударение, можно подробно изучить на основе характерных особенностей процесса столкновения, описанных выше.

В общем случае процесс обуславливается испусканием поля, сопровождающего мезон, когда он рассеивается или поглощается ядром. Поэтому, по крайней мере для квантов малых энергий, их спектр имеет форму dk/k , а вероятность испускания отличается от вероятности основного процесса коэффициентом $e^2 \approx 1/137$ (и множителями, логарифмически зависящими от энергий).

При этом подразумеваются два типа взаимодействий для π -мезонов: с электромагнитным полем и с полем ядерных сил (электромагнитное взаимодействие с ядром можно не учитывать). Возможность довольно полного и достаточно строгого расчета в случае взаимодействия первого типа обусловлена тем, что можно

использовать теорию возмущений, в то время как для взаимодействий второго типа рассмотрение ведется вне рамок этого приближения (в чем и состоит существо метода).

Действительно, вне ядра мы можем записать волновую функцию π -мезона с учетом влияния ядра. Допустим, например, что ядро ведет себя по отношению к π -мезонам, как черное тело (что справедливо, как показывает эксперимент, уже при $E \sim 2 \div 3 \cdot 10^9$ эв). Тогда псевдоскалярная волновая функция π -мезона будет являться суперпозицией начальной плоской волны и волны, образовавшейся при дифракции на шаре. Согласно формуле Кирхгофа для дифракции ($pR \gg 1$) мы имеем

$$\psi_p = \psi_0 + \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{V}} \left[\exp(ipr) + \frac{ip}{2\pi} \int_{(S)} \frac{\exp(ip|r-r'|)}{|r-r'|} dS' \right], \quad (10)$$

причем интегрирование ведется по сечению ядра, перпендикулярному импульсу π -мезона p . В подынтегральном выражении плоская волна содержит импульс, отличающийся от p . Это связано с тем фактом, что π -мезон испытывает ускорение при дифракционном рассеянии на ядре (причем рассеяние, в свою очередь, является следствием всех процессов «поглощения» π -мезона, под которыми мы подразумеваем любые процессы, выводящие π -мезон из начального состояния с импульсом p). Этого ускорения оказывается достаточно, чтобы привести к электромагнитному излучению π -мезона, если только последний получает в системе координат, в которой он первоначально покоился, поперечный импульс $q_{\perp} \gtrsim \mu$. Разлагая волновую функцию ψ_p в ряд Фурье и выделяя члены с $q_{\perp} \sim \mu$, можно оценить величину сечения процесса. Более полную теорию можно построить, либо используя теорию возмущений при рассмотрении перехода мезона под действием поля излучения из состояния (10) в состояние

$$\psi_p^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{V}} \left[\exp(ip'r) - \frac{ip'}{2\pi} \int_{(S')} \frac{\exp(-ip'|r-r'|)}{|r-r'|} dS' \right] \quad (11)$$

(плоская волна плюс сходящаяся волна, причем интегрирование ведется по сечению ядра, перпендикулярному импульсу p'), либо записывая уравнение для ψ в присутствии квантованной электромагнитной волны с вектор-потенциалом A :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \mu^2 \right) \psi = \frac{2e}{i} A \nabla \psi. \quad (12)$$

При этом вместо ψ подставляется выражение

$$\psi = \psi_p \exp(-iE_p t) + \sum_{p'} \exp(-iE_{p'} t) \psi_{p'} \quad (13)$$

и используется функция Грина (учитывающая наличие черного шара) получающегося уравнения для ψ_p в виде

$$G(r, r') = \frac{\exp(ip'|r-r'|)}{4\pi|r-r'|} - \frac{p'}{2\pi i} \int \frac{\exp(ip'|r-s|) \exp(ip'|r'-s|)}{|r-s| |4\pi|r'-s|} dS \quad (14)$$

(интегрирование ведется по сечению ядра, перпендикулярному вектору $r-r'$). Таким способом мы приходим к выражению для волновой функции вылетающего π -мезона с импульсом p' , сопровождающегося фотоном с импульсом k .

При вычислении сечения процесса возникает вопрос, можно ли считать π -мезон точечной частицей. Если предположить точечность π -мезона, то его дифракционное рассеяние ядром с радиусом R , приводящее к испусканию кванта с импульсом k , будет иметь сечение, содержащее в качестве множителя некоторую функцию от безразмерного параметра $\mathfrak{N}(\mu R)$, стремящуюся при $\mu R \gg 1$ к величине $0,56/\mu R$. Для таких $\mu R \gg 1$ ($A \gg 1$) мы имеем

$$\sigma^d(k) = 2,3e^2 \frac{(E-k)R}{Ek\mu} \approx 2,3e^2 \frac{(E-k)A^{1/2}}{Ek\mu^2}. \quad (15)$$

При этом полная излученная энергия равна

$$\int k \sigma^d(k) dk \approx 2ER^2 e^2 \mathfrak{N}(\mu R). \quad (16)$$

Совершенно так же можно вычислить сечение излучения при поглощении π -мезона ядром. Это есть такое излучение, которое сопровождается π -мезонный ток, направленный внутрь ядра. Сечение процесса, проинтегрированное по частотам $k > k_{\min}$ и углам вылета фотона $\theta < \theta_{\max}$, равно

$$\sigma^c = e^2 R^2 \ln \left(\frac{\theta_{\max} E^2}{e^2 \mu^2} \right) \left[\ln \left(\frac{E}{k_{\min}} \right) - 1 \right]. \quad (17)$$

Принимая во внимание релятивистские эффекты, можно представить влияние формфактора π -мезона на излучение фотонов в виде множителя

$$F = F \left(\frac{kE(\theta^2 + \mu^2/E^2)}{2\mu^2} \right). \quad (18)$$

Мы можем, следовательно, надеяться, что в будущем детальное экспериментальное исследование описанного выше электромагнитного излучения сможет обеспечить нам возможность определения такой важной величины, как формфактор π -мезона.

Полная излученная энергия для процесса, обусловленного захватом, как оказывается, имеет величину порядка $e^2 R^2 E$, а сечение особенно велико при испускании фотонов под малыми углами. Действительно, при $\theta = \mu/E$ сечение процесса захватного из-

лучения равно

$$\frac{e^2}{4\pi} R^2 \left(\frac{E}{\mu} \right)^2 \frac{(E-k)}{Ek} \quad (19)$$

и при $E/\mu \sim 40$ составляет $R^2 (E-k)/Ek$, что по порядку величины равно ядерным сечениям. Процессы, аналогичные рассмотренным выше, для случая начальных частиц со спином $1/2$ были исследованы в работах [2]. В них, в частности, была получена дифракционная формула Кирхгофа для частиц со спином половина.

2.2. Фоторождение π -мезонных пар на ядре [3]. Процесс, рассмотренный выше, имел качественные характеристики, порядок величин которых можно было предсказать. Изучение этого процесса дало возможность получить точные формулы и, более того, развить метод, применимый к ряду других процессов. Так, в работе [3] исследовался процесс, указанный в заголовке этого параграфа, причем действие ядра, рассматриваемого по отношению к π -мезонам как черное тело, учитывалось путем описания образующихся π -мезонов с помощью уравнения (11). Поэтому мезон-ядерное взаимодействие трактовалось точно (в основном предположении, что ядро является абсолютно черным).

Полученное для сечения процесса выражение оказывается довольно сложным. Однако в случае тяжелых ядер, когда их радиус велик по сравнению с длиной волны π -мезона, формулы значительно упрощаются. Сечение образования пары π -мезонов с импульсами p_1 и p_2 фотоном с импульсом k имеет вид

$$d\sigma = \frac{e^2 R^2}{2\pi^2 k^2} J_1^2(\kappa R) \frac{E_1(k-E_1) dE_1 b^2 db d\kappa}{k^2 (\mu^2 + b^2)^2}, \quad (20)$$

где

$$p_1 = \frac{k}{k} \left(p_1 - \frac{k_1^2}{2p_1} \right) + k_1, \quad p_2 = \frac{k}{k} \left(p_2 - \frac{k_2^2}{2p_2} \right) + k_2, \\ \kappa = k_1 + k_2, \quad b = \frac{1}{2} (k_2 - k_1), \quad E_1 = \sqrt{p_1^2 + \mu^2}.$$

Здесь k_1, k_2 — двумерные векторы, перпендикулярные импульсу фотона, $k_1^2 \ll k^2, k_2^2 \ll k^2$. При выводе (20) π -мезон считался точечным; в противном случае в этой формуле появляется множитель, имеющий смысл формфактора рассматриваемого процесса. Учет сильного $\pi^+\pi^-$ -взаимодействия также дает дополнительный множитель в этой формуле.

Интегрирование выражения (20) по всем κ и значениям b , меньшим некоторого b_{\max} , дает следующее распределение по энергии:

$$d\sigma = \frac{e^2 R^2}{2} \left[\ln \left(\frac{\mu^2 + b_{\max}^2}{\mu^2} \right) + \frac{\mu^2}{\mu^2 + b_{\max}^2} - 1 \right] \frac{E_1(k-E_1)}{k^3} dE_1; \quad (20a)$$

полное сечение равно

$$\sigma = \frac{e^2 R^2}{12} \left[\ln \left(\frac{\mu^2 + b_{\max}^2}{\mu^2} \right) + \frac{\mu^2}{\mu^2 + b_{\max}^2} - 1 \right]. \quad (20b)$$

Неточность π -мезона существенна при больших b_{\max} .

На основе равенств (20) — (20b) можно сделать следующие выводы:

1) сечение образования $\pi^+\pi^-$ -пар, не сопровождаемое возбуждением ядра, в ультрарелятивистском случае не зависит от энергии фотона;

2) сумма поперечных импульсов π^+ - и π^- -мезонов ($\kappa = k_1 + k_2$) по порядку величины равна $1/R$. Распределение по этой величине дается выражением (20);

3) эффективное значение b , равное $1/2 (k_2 - k_1)$, зависит от «размеров» элементарных частиц и от их взаимодействий.

Следует подчеркнуть, что тот же процесс с образованием двух нейтральных мезонов запрещен сохранением зарядовой четности: γ -квант является по отношению к заряду нечетным, а π -мезоны — четными (ядро действует как черное тело и поэтому должно рассматриваться как четная частица). Таким образом, сечение процесса $\gamma \rightarrow 2\pi^0$ при больших энергиях много меньше сечения реакции $\gamma \rightarrow \pi^+ + \pi^-$.

Помимо случая, когда оба мезона уходят на бесконечность, может иметь место процесс, в котором при поглощении γ -кванта на некотором расстоянии от ядра образуется виртуальная пара π -мезонов, причем один из них уходит, а второй поглощается ядром с образованием «звезды» (т. е. с разрушением ядра). Теория такого процесса была развита Ю. А. Вдовиним [4], который для порядка величины сечения получил (при $R \gg 1/\mu$) оценку $(e^2/10) R (1/\mu)$. Важной чертой этого процесса является факт уноса большей части энергии γ -кванта одним мезоном (а именно, тем, который освобождается в реакции). Указанный автор исследовал также образование «звезд» фотоном в случае, когда оба виртуальных π -мезона, образовавшиеся на большом расстоянии от ядра, захватываются им. Такой механизм образования «фотозвезд» имеет сечение $\sigma \sim e^2 R^2 \ln(k/\mu)$ (в случае точечных π -мезонов).

3. Чисто электромагнитные процессы

3.1. Тормозное излучение электронов в кристаллической решетке [5]. Впервые возможность одновременного действия всех атомов кристаллической решетки на тормозное излучение была указана Е. Дж. Вильямсом [11]. Однако этот автор дал только оценку, которая, как теперь выяснилось, привела его к неверному заключению о том, что тормозное излучение должно падать при очень больших энергиях из-за регулярного расположения атомов. Критерий возникновения этого эффекта, данный им без

каких-либо комментариев, не был подтвержден дальнейшим исследованием. Позднее Ферретти [12] рассматривал влияние кристаллической решетки гораздо более тщательно. Однако эти результаты также не являются количественными, и они не подтверждаются результатами, излагаемыми ниже.

В статьях М. Л. Тер-Микаэляна [5] рассматривалось тормозное излучение релятивистского электрона, проникающего в кристаллическую решетку (для простоты рассматривалась кубическая решетка) с данным направлением относительно кристаллографических осей. Использовалась обыкновенная теория возмущений (практически вычисления проводились методом Вайцзекара — Вильямса, как и в работе Ферретти, однако те же формулы были получены в системе отсчета, в которой решетка покоится). Потенциал кристалла является суммой потенциалов экранированных полей ядер. Важно учесть тепловые колебания атомов. Легко видеть, что эффективное сечение для испускания фотона в процессе, в котором решетка получает импульс q , отличается в этом случае от сечения для изолированного атома интерференционным множителем

$$\left| \sum_i \exp(iq r_i) \right|^2,$$

где имеется в виду сумма по мгновенным положениям ядер, r_i . Усреднение по тепловым колебаниям приводит этот множитель, как обычно в теории рассеяния рентгеновских лучей на кристаллах, к виду

$$N_1 N_2 N_3 [1 - \exp(-2M)] + \exp(-2M) \left| \sum \exp(iq r_{i0}) \right|^2. \quad (21)$$

Здесь N_1, N_2, N_3 — числа атомов вдоль различных осей; $2M = q^2 u^2$, где u^2 — средний квадрат теплового смещения атома; r_{i0} — вектор равновесного положения i -го атома. Соответственно сечение разлагается на «аморфную часть», которая пропорциональна полному числу атомов в кристалле (N_1, N_2, N_3), и «интерференционную часть». Аморфное сечение излучения меньше сечения для изолированного атома, умноженного на число атомов, причем разница зависит от температуры и для некоторых элементов может быть порядка 10—20%. С увеличением температуры эта разница уменьшается. Эта часть излучения не зависит от начального направления движения электрона.

Интерференционная часть имеет более сложную структуру. Так как поперечная компонента импульса, передаваемого ядру, всегда велика ($q_{\perp} \sim m$), то ядра, расположенные в плоскости, перпендикулярной движению электрона, не дают интерференции, в то время как ядра, расположенные вдоль пути электрона, вносят вклад в этот эффект. Более точное, чем в формулах (1) и (3), рассмотрение дает для энергии, при которой этот эффект является

существенным, величину

$$\frac{E}{m} \gtrsim \frac{am}{4\pi} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \sim \nu \frac{137}{2\pi} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \quad (22)$$

Здесь $\nu = 10^8 a$, где a — постоянная решетки; $\varepsilon = k/E$ — доля начальной энергии электрона, излученная в виде фотона. При $\nu \sim 3$ и $\varepsilon \sim 1/2$ это дает $E \gtrsim 50 Mэв$. Для более высоких энергий (или для более мягких квантов) это сечение возрастает пропорционально квадрату эффективного числа атомов $N_{эф}$, расположенных вдоль пути электрона. В работе [5] исследовались условия появления интерференционного максимума, был рассчитан случай кристалла произвольной толщины, были даны условия применимости полученных формул и излучалась зависимость от начального направления движения электрона, Например, интерференционная часть тормозного излучения электронного пучка с угловыми размерами θ , проникающего в решетку вдоль одной из осей, деленная на полное число атомов решетки, равна

$$\frac{\sigma_{int}(\varepsilon) d\varepsilon}{N_1 N_2 N_3} = \sigma_{B-H}(\varepsilon) d\varepsilon \frac{\pi\rho}{a\theta} \quad (23)$$

при условии, что $(2\pi/a) \sqrt{\bar{u}^2} = \theta_{max} > \theta > \theta_{min} = (\varepsilon/(1-\varepsilon)) am (m/2E)$. Здесь σ_{B-H} — обычное сечение Бете—Гайтлера, $\rho \approx a_0 Z^{-1/2}$ — радиус экранирования атома. Интерференционное излучение падает при $\theta < \theta_{min}$. Для вольфрама $\theta_{max} = 2,4^\circ$ при $T = 0$, $\theta_{max} = 4,8^\circ$ при дебаевской температуре W . Так как $\pi\rho/a \approx (2\pi/\nu) Z^{-1/2} \sim 1$. то для достаточно малых θ интенсивность излучения может во много раз превышать интенсивность для изолированного атома.

Существенно, что интеграл по всем углам дает как раз такую же интенсивность, как для тормозного излучения на изолированном атоме. Поэтому в случае пучка электронов, проникающего сквозь достаточно толстый поликристалл, эффект кристаллической структуры исчезает. Таким образом, действие решетки состоит в формировании острого и узкого максимума за счет некоторого уменьшения фоновой интенсивности.

3.2. Эффект многократного рассеяния в тормозном излучении электронов [6]. В случае аморфной среды, когда не возникает интерференции, при достаточно высоких энергиях появляется другое важное явление: на тормозное излучение влияет многократное рассеяние электронов атомами среды (в случае кристалла это явление играет менее значительную роль [5]). Эта возможность была указана в работе [6]. В этой работе были также даны оценки и приближенные формулы для предельных случаев при классическом рассмотрении тормозного излучения (этот подход справедлив при излучении мягких фотонов, $k \ll E$, и дает оценку эффекта в целом), а также до некоторой степени и при квантовом рассмотрении. Более строгая классическая количественная теория

этого эффекта и в особенности его квантовое рассмотрение оказалась очень сложной. Это было сделано А. Б. Мигдалом [7]. Его результаты подтверждают, в частности, результаты классического приближенного рассмотрения.

Если во время движения сквозь существенную область с размерами $q_{\parallel}^{-1} \sim 2E(E-k)/m^2k$ (см. формулу (3)) частицы претерпевают многократное рассеяние, достаточное для того, чтобы отклонить их на угол $\theta \sim m/E$, то процесс излучения нарушается. Средний квадрат угла рассеяния на этом пути (принимая для оценки $k \ll E$)

$$\bar{\theta}_s^2 = \left(\frac{E_s}{E}\right)^2 \frac{r_{\text{eff}}}{L} \sim \frac{2E_s^2}{m^2kL} \sqrt{\frac{E_s}{E}}$$

где $E_s = \sqrt{4\pi \cdot 137} m \approx 21 \text{ Мэв}$, L — радиационная длина (в см) для данной среды. Если $\bar{\theta}_s^2 \geq (m/E)^2$, т. е. если

$$\frac{E}{m} \geq \frac{1}{60} \sqrt{kL}, \quad (24)$$

то интенсивность излучения должна падать. Даже для жестких квантов, $k \sim \frac{1}{2} E$, эта формула дает

$$\frac{E}{m} > \frac{1}{7200} mL. \quad (25)$$

Для свинца $L \approx 0,5 \text{ см}$, для воздуха при нормальных условиях $L \approx 3 \cdot 10^4 \text{ см}$. Соответственно сечение тормозного излучения должно быть меньше, чем обычно принимается, для энергий $E > 2 \cdot 10^6 \text{ эв}$ для свинца и при $E > 10^{11} \text{ эв}$ для воздуха. В случае более мягких квантов этот эффект проявляется при более низких энергиях. При заданной энергии E эффект проявляется для фотонов с импульсом

$$k < 3600 \left(\frac{E}{m}\right)^2 \frac{1}{Lm}, \quad (26)$$

т. е. для свинца при $k < 4 \cdot 10^{-7} (E/m) E$. Например, электрон с энергией $E \sim 5 \cdot 10^{10} \text{ эв}$ даст в свинце небольшое число фотонов с импульсом $k < 0,01 E \sim 5 \cdot 10^8 \text{ эв}$.

Более последовательная оценка в области применимости классического рассмотрения ($k \ll E$) показывает, что в отличие от обычной формулы Бете—Гайтлера

$$dI_{\text{В-Н}} = \frac{e^2}{3\pi^2} \frac{dk}{L} \frac{E_s^2}{m^2} = \frac{16}{3} \frac{n}{137} (Zr_0)^2 \ln(191Z^{-1/3}) dk \quad (27)$$

(n — число атомов среды на единицу объема, Z — атомный номер элемента, $r_0 = e^2/m$ — классический радиус электрона), интен-

сивность описывается равенством

$$dI = \frac{e^2}{2} \sqrt{k} dk \frac{E_s}{E} \frac{1}{\sqrt{6\pi L}} \quad \text{для } k \ll \left(\frac{EE_s}{m^2}\right)^2 \frac{1}{6L}. \quad (28)$$

Таким образом, сечение тормозного излучения при высоких энергиях падает как $1/E$, в то время как спектр фотонов ведет себя как $dI/k \sim dk/\sqrt{k}$. При достаточно высоких энергиях электроны и позитроны превращаются в проникающую компоненту. Как отмечалось выше, то же самое справедливо и для рождения пар фотонами. Поэтому фотоны также становятся проникающими.

Этот результат получен путем рассмотрения классического уравнения для энергии, испускаемой при частоте $\omega = k$ в элемент телесного угла $d\Omega$ электроном, движущимся по траектории

$$dI = \frac{e^2}{4\pi^2} k^2 dk d\Omega \left| \int_{-\infty}^{\infty} [n\mathbf{v}] \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] dt \right|^2, \quad (29)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ — радиус-вектор и скорость электрона, заданные как функции времени t , \mathbf{n} — единичный вектор распространения фотона, $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}$. Классическое приближение к формуле Бете—Гайтлера получается, если положить $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$, и \mathbf{v} меняется внутри некоторой области размером a от одного постоянного значения \mathbf{v}_1 до некоторого другого \mathbf{v}_2 (результатирующая формула справедлива для фотонов с длиной волны $\lambda \gg a$). В частности, при $\mathbf{v}_2 = 0$ получается излучение остановившейся частицы. Однако в среде благодаря многократному рассеянию скорость \mathbf{v} меняется все время вокруг \mathbf{v}_1 , а потом вокруг \mathbf{v}_2 . Достаточно рассматривать как флуктуирующие только те компоненты скорости, которые перпендикулярны к \mathbf{v}_1 и, соответственно, к \mathbf{v}_2 . Их квадраты растут пропорционально времени. Например, в случае испускания излучения, направленного вдоль начального движения частицы, $k\mathbf{v}_1(-\infty) = kv_1(-\infty)$, фаза при $-\infty < t < 0$ будет содержать, в среднем, выражения вида $\left[v_1 \left(1 - \frac{1}{2} \bar{\theta}_s^2(t) - 1\right) \omega t\right]$ вместо $\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t = \omega t(v_1 - 1)$, где $\theta_s(t)$ — угол многократного рассеяния. Для $kv_1 \bar{\theta}_s^2 \geq 2k(1 - v_1)$ возникает существенный член i , благодаря быстрым флуктуациям подынтегрального выражения, dI (по формуле (29)) падает. Истинное значение интенсивности должно получаться путем усреднения выражения для dI по поперечным компонентам скорости. В работе [6] вместо усреднения dI усреднялась только фаза. Это приводит к оценке, даваемой ф-лой (28). Однако позднее точные вычисления, использующие очень красивый метод, были выполнены при $E \gg m$ А. Б. Мигдалом [7], которому удалось дать квантовую теорию этого явления.

Усредняя формулу (29) для dI по рассеяниям в классическом случае, Мигдал преобразует его, выразив его среднее значение через фурье-компоненты вероятности данного значения скорости

W_k (фурье-компоненты возникают от экспонент в формуле (29)). В пространстве угловых переменных W_k удовлетворяет уравнению типа Фоккера — Планка. Решая это уравнение, Мигдал получает

$$dI = \{dI\}_0 \Phi(s) = \frac{4e^2 Q}{3\pi(1-v)} \Phi(s),$$

$$s = \frac{1-v}{4} \sqrt{\frac{\omega}{Q}}, \quad Q = 4\pi n (Zr_0)^2 (\ln 191 Z^{-1/3}) (1-v^2). \quad (30)$$

Здесь $\{dI\}_0$ — излучаемая энергия, вычисленная при пренебрежении рассеянием (классическое приближение к формуле Бете—Гайтлера), $\Phi(s)$ — табулируемая функция

$$\Phi(s) = 3s \int_0^\infty \exp(-sx) \frac{\cos sx + \sin sx}{\operatorname{ch}^2 x/2} dx +$$

$$+ 24s^2 \int_0^\infty \exp(-sx) \frac{\sin sx}{\operatorname{sh} x} dx - 6\pi s^2. \quad (30a)$$

При $s \rightarrow \infty$ (рассеянием можно пренебречь) $\Phi(s) \rightarrow (1-48/7 s^4)$ и мы приходим к формуле (27): при $s \rightarrow 0$ $\Phi(s) \rightarrow 6s$; результат отличается от формулы (28) числовым множителем порядка единицы. Эта полная формула показывает, что в свинце для фотонов с импульсом $k = 1/2 E$ отклонение от формулы Бете—Гайтлера достигает 50%, если $E = 3 \cdot 10^{12}$ эв.

Квантовое рассмотрение, необходимое в области $k \sim E$, гораздо сложнее. Благодаря рассеянию излучающая частица не описывается волновой функцией, и вводится матрица плотности. Автор получает для нее кинетическое уравнение, которое он последовательно решает. Результат в основном подтверждает классическое рассмотрение, однако содержит некоторые специфические особенности.

3.3. Эффект поляризации среды [8]. В работе [8] было показано, что указанное выше рассмотрение влияния многократного рассеяния на тормозное излучение должно быть дополнено учетом поляризации среды. Фактически отличие скорости фотонов от единицы должно быть принято в расчет. Это можно сделать, введя в (29) общий множитель $\sqrt{\epsilon}$ и положив

$$\mathbf{k} = \sqrt{\epsilon} \omega \mathbf{n} \quad (31)$$

вместо $\mathbf{k} = \omega \mathbf{n}$. Здесь можно принять, что диэлектрическая проницаемость среды ϵ имеет вид

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi n Z e^2}{m \omega^2}. \quad (32)$$

Это означает, что эффект существен для наиболее мягких квантов. Поэтому классические формулы работают удовлетворительно. Модифицировав (29) указанным образом и усреднив фазу подынтегральной функции по возможным рассеяниям, замечаем, что кроме члена, обусловленного рассеянием, $\omega t \left(1 - \frac{1}{2} \theta_s^2(t)\right)$, фаза содержит другой член, $\omega t (\sqrt{\epsilon} - 1) \approx (2\pi n Z e^2 / m \omega) t$. Если второй член превосходит первый (низкие частоты), то поляризация играет доминирующую роль. Результаты работы [8] можно суммировать следующим образом.

1. Если энергия электрона не превышает некоторого критического значения

$$E < E_{\text{крит}} = \left(\frac{m}{E_s}\right)^2 6L \sqrt{\frac{4\pi n Z e^2}{m}} m \quad (33)$$

(для конденсированной среды, для элементов середины или конца периодической системы $E_{\text{крит}} \sim 10^4 \text{ Мэв} \sim 10^{10} \text{ эв}$), многократное рассеяние не может дать заметного эффекта, так как поляризация среды доминирует. Для различных частотных областей имеем следующие случаи. Если

$$\omega \gg \sqrt{\frac{4\pi n Z e^2}{m}} \frac{E}{m},$$

то

$$dI = \frac{1}{3\pi} \frac{dk}{L} \left(\frac{E_s}{m}\right)^2, \quad (34)$$

т. е. влиянием среды можно пренебречь, и справедлива формула, которая является классическим аналогом формулы Бете — Гайтлера (и совпадает с ней при $k \ll E$). Если

$$\sqrt{\frac{4\pi n Z e^2}{m}} \ll \omega \ll \sqrt{\frac{4\pi n Z e^2}{m}} \frac{E}{m}$$

(для частот $\omega \lesssim \sqrt{4\pi n Z e^2 / m}$ приближенная формула (32) не справедлива), то

$$dI = \frac{m}{12\pi^2 L n Z} \frac{E_s^2}{E^2} k^2 dk. \quad (35)$$

2. Если энергия электрона возрастает и становится $E \gtrsim E_{\text{крит}}$, то возникает область частот, в которой многократное рассеяние играет основную роль, а именно для

$$\left(\frac{4\pi n Z e^2}{m}\right)^{2/3} \left(\frac{6E^2 L}{E_s^2}\right)^{1/3} = \omega_p \ll \omega \ll E \frac{E}{m} \left(\frac{E_s}{m}\right)^2 \frac{1}{6L} = \omega_s \quad (36)$$

выполняется формула (28). Для $E \gtrsim E_0 = m^2 L (E_s/m)^2$ область, определяемая равенством (36), покрывает почти всю высокока-

стотную часть спектра, за исключением интервала $E - E_0 < \omega < E$, где еще выполняется формула Бете—Гайтлера. Для $\omega \ll \omega_p$ снова справедливо равенство (35), для $\omega \gg \omega_s$ справедливо равенство (27).

В целом ситуация может быть схематически изображена на рис. 1, на котором масштаб не выдержан с количественной точностью; на самом деле $\omega_p \ll E$. Интересной особенностью влияния

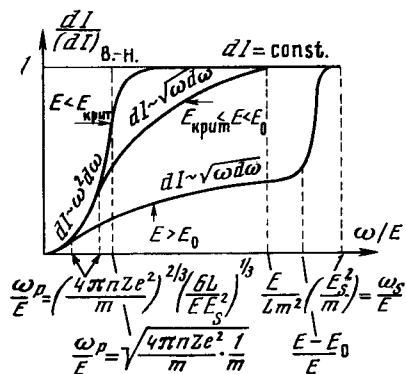


Рис. 1

среды является исчезновение так называемой инфракрасной катастрофы. Поэтому при экспериментальной проверке радиационных поправок, вычисляемых обычно для различных процессов и сильно зависящих от инфракрасной катастрофы, следует учитывать присутствие среды.

4. Ядерные явления

4.1. Испускание мезонов нуклонами в процессе дифракционного рассеяния [9]. Этот процесс отличается от рассмотренных ниже тем, что он не может быть рассчитан количественно с такой же точностью из-за отсутствия последовательной мезонной теории и неприменимости теории возмущений. В этом случае теория возмущений может дать не более, чем неопределенное указание на возможный порядок величины сечения.

Условие (1а) при использовании равенства (7) дает энергетический порог эффекта. Если мезон забирает небольшую часть энергии (порядка $(\mu/M)E$), то это условие имеет вид

$$E \ll \mu RM \approx A^{1/2} M. \quad (37)$$

В противоположном случае, если энергия мезона того же порядка, что энергия нуклона, это условие принимает вид

$$E \gg \frac{M}{\mu} A^{1/2} M, \quad (38)$$

т. е. порог значительно возрастает. В случае образования нескольких мезонов порог возрастает пропорционально их числу. Отличительной особенностью такого процесса будет отсутствие так называемого «второго конуса», образовавшиеся мезоны будут двигаться (в системе центра масс) только вперед.

При определении поперечного сечения мы должны учитывать тот факт, что этот процесс нельзя считать вызванным взаимодействием с ядром в целом, если поперечная компонента передаваемого импульса достаточно велика, точнее если она превосходит обратное расстояние между нуклонами в ядре. Это расстояние можно считать равным $1/\mu$. Поэтому мы должны ограничиться областью $q \lesssim \mu$. В этом случае скорость, приобретаемая нуклоном (в его системе покоя), мала: $v \sim \mu/M$. Соответственно процесс испускания мезонов не может быть очень интенсивным. В самом деле, применяя (таким же образом, как в пункте 2.1) теорию возмущений и принимая псевдоскалярную связь нуклонов с псевдоскалярными мезонами, мы получаем для испускания одного мезона:

$$\sigma \sim g^2 \frac{A^{1/2}}{\mu^2} \left(\frac{\mu}{M}\right)^2 \approx \frac{g^2}{A^{1/2}} \left(\frac{\mu}{M}\right)^2 \sigma_0. \quad (39)$$

Здесь g — константа связи, σ_0 — геометрическое сечение ядра. Даже для $g^2 \sim 10-20$ эффективное сечение меньше, чем σ_0 . Благодаря величине порога и в соответствии с (39) это явление должно быть сравнительно более ощутимо в случае легких ядер.

Так как мезонные взаимодействия — сильные, можно предположить, что аналогичный процесс возможен и для рождения π -мезонов при дифракции π -мезонов на ядрах. В этом случае малость массы мезона благоприятна для процесса.

4.2. Дифракционное расщепление дейтрона. Расчет этого процесса можно выполнить последовательно, несмотря на то, что закон взаимодействия нуклонов не известен с определенностью. Необходимо знать только волновую функцию дейтрона. Эта функция определенно известна только для расстояний между нейтроном и протоном, превышающих радиус ядерных взаимодействий, $1/\mu$. Поэтому детальные расчеты возможны только для некоторых процессов, для случаев передачи небольших импульсов, $q \ll \mu$. Исследование было выполнено для дейтронов с кинетической энергией в интервале от 50 до 170 Мэв, в этом случае ядро можно считать непрозрачным. Для того чтобы оценить сечение, поступим следующим образом. Рассмотрим волновую функцию дейтрона, испытывающего, как целое, дифракцию на черном шаре, изображающем ядро мишени (здесь следует учитывать конечные размеры дейтрона, благодаря этому в расчеты входит волновая функция его внутреннего движения, $\varphi(|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n|)$). Выделяя в этой функции случаи рассеяния с передаваемым моментом q , достаточно большим для расщепления дейтрона, т. е. $q \sim \mu$, мы полу-

чаем для величины сечения оценку $\sigma \sim RR_d$, где R — радиус ядра мишени; R_d — радиус дейтрона. Таким образом, σ — того же порядка величины, что сечение срыва, и много меньше геометрического сечения, $\pi(R + R_d)^2$. Принимая $R \ll R + R_d$ (это предположение не имеет фундаментального значения, в настоящее время рассматривается более общий случай), мы можем использовать теорию возмущений. Можно показать, что сечение дифракционного расщепления, в результате которого нейтрон приобретает импульс P_n , а протон — импульс P_p , имеет вид

$$d\sigma(P_n, P_p) = 2\pi |\langle \psi_{P_n}^{(-)} \psi_{P_p}^{(-)} | U | \psi_d \rangle|^2 \delta(E - E_0), \quad (40)$$

где $\psi_{P_n}^{(-)}$ и $\psi_{P_p}^{(-)}$ — волновые функции нейтрона и протона, определяемые формулой (11), ψ_d — волновая функция дейтрона, дифракционно рассеянного как целое, U — оператор, описывающий взаимодействие протона с нейтроном. Ограничиваясь той частью всех процессов, которая соответствует $q < \mu$, мы принимаем, что ядро мишени имеет резкую границу, подставляем дейтронную функцию $\psi \sim \exp[-\alpha|r_p - r_n|]$, $\alpha = \sqrt{M\epsilon_d}$, и считаем U δ -функцией от расстояния между протоном и нейтроном. Последнее упрощение возможно, так как относительная скорость нуклонов в конечном состоянии мала, того же порядка, что их скорость внутри дейтрона. Таким образом, расщепляясь из-за слабого толчка, дейтрон дает протон и нейтрон с теми же угловыми и энергетическими распределениями, что и в случае реакции срыва. Фактически в обоих случаях эти распределения определяются распределениями внутри дейтрона. Однако в противоположность реакции срыва в рассматриваемом случае как протон, так и нейтрон получаются путем очень простого процесса. Сечение равно

$$\sigma \approx RR_d^2 \frac{q_{\max}}{\mu}. \quad (41)$$

Здесь q_{\max} — наибольшее значение передаваемых импульсов, разрешенное вышеуказанным условием. Полагая $q_{\max} \sim \mu$, получим $\sigma \sim RR_d$.

Для экспериментальной проверки этих результатов необходимы измерения на совпадениях. Можно однако упомянуть, что все эксперименты по определению выхода протонов всегда давали для сечения реакций срыва неразумно большие значения. Например, группа экспериментаторов [13], не обращавших внимания на описанный здесь процесс, находила из эксперимента удивительно большую величину радиуса ядра, т. е. $R = r_0 A^{1/2} c r_0 \approx (1,6-1,7) \cdot 10^{-13}$ см. Представляется вполне вероятным, что на эти эксперименты сильно влияло в действительности дифракционное расщепление.

Мы хотели бы отметить, что подобное дифракционное расщепление возможно также для некоторых других ядер, если энергия

активации для соответствующей реакции достаточно низка. Так как этот процесс имеет чисто кинематическую природу и определяется поперечными компонентами импульса (в частности, это можно видеть по независимости сечения от энергии дейтрона), то ситуация не меняется при переходе к релятивистским энергиям дейтрона (для этого случая ядро вновь становится непрозрачным).

Рассмотренный процесс исследовался независимо одним из авторов (Е. Ф.) и А. И. Ахиезером и А. Г. Ситенко.

4.3. Столкновение нуклона с ядром. Как уже отмечалось (параграф 1, формула (9)), благодаря большому размеру существенной области может случиться, что столкновение быстрого налетающего нуклона (или π -мезона) с нуклонами или ядром с образованием π -мезонов нельзя рассматривать как совокупность последовательных столкновений. Несколько более детальная оценка показывает, что подобная каскадная схема справедлива, только если частицы, родившиеся в столкновении двух нуклонов, разлетаются изотропно в их системе центра масс, и поэтому если в лабораторной системе угол порядка $\sqrt{M/E}$, а энергия отдачи превосходит примерно 100 Мэв на нуклон. Для меньших углов и меньших энергий отдачи в каждом акте столкновения участвуют много рассеивающих центров. По-видимому, имеется экспериментальное указание [14] против такой схемы последовательных столкновений не только при очень высоких энергиях, когда применима теория Ферми—Ландау, но также и при энергиях порядка $10^{10} - 10^{11}$ эв.

5. Заключение

Обсуждавшиеся выше результаты — это, конечно, только примеры развиваемого метода. Этот метод может быть распространен на различные другие явления (это фактически выполняется в настоящее время). В частности, рассматривалось образование пар, сопровождающее дифракцию частицы на ядре, а также некоторые другие эффекты. В некоторых случаях оказалось разумным считать ядро частично проникаемым. Поведение рассеянной частицы в существенной области может быть представлено в более общем виде, чем тот, который следует из формулы Кирхгофа и т. п. Все эти и другие аналогичные возможности заслуживают дальнейшего рассмотрения.

Академия наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 24, 505, 1953 (Собр. трудов, № 97).
2. А. И. Ахиезер. ДАН СССР, 94, 651, 1954. А. И. Ахиезер и И. Я. Померанчук. ДАН СССР, 94, 821, 1954 (Собр. трудов, № 99).

ДИФРАКЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ С ЯДРАМИ¹

Совместно с А. И. Ахиезером

3. И. Я. Померанчук. ДАН СССР, 96, 481, 625, 1954 (Собр. трудов, № 100—101).
4. Ю. А. Вдовин. Некоторые процессы взаимодействия гамма-квантов высокой энергии с π -мезонами и нуклонами. М., канд. диссерт., 1955.
5. М. Л. Тер-Микаэлян. ЖЭТФ, 1954, 25, 289, 296.
6. Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчук. ДАН СССР, 1953, 92, 535, 735 (Собр. трудов, № 51—52).
7. А. Б. Мигдал. ДАН СССР, 1954, 96, 49.
8. М. Л. Тер-Микаэлян. ДАН СССР, 1954, 94, 1033.
9. И. Я. Померанчук и Е. Л. Фейнберг. ДАН СССР, 1953, 93, 439 (Собр. трудов, № 98).
10. Е. Л. Фейнберг. ЖЭТФ, 1955, 28, 242.
11. E. J. Williams. Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-fys. Medd., 1935, 13, 276.
12. B. Ferretti. Nuovo cimento, 1950, 7, 118.
13. G. P. Millburn, W. Birnbaum, W. E. Crandall, L. Schechter. Phys. Rev., 1954, 95, 1268, W. Heckrote. Phys. Rev., 1954, 95, 1279.
14. И. Л. Розенталь, Д. С. Чернавский. УФН, 1954, 52, 185; 1955, 55, 121.

1. Введение

Поглощение, которым может сопровождаться рассеяние нуклонов ядрами, вызывает, как известно, добавочное возмущение нуклонной падающей волны и приводит к дополнительному упругому рассеянию нуклонов, не связанному с образованием составного ядра.

Сильное поглощение частиц имеет место в области больших энергий, когда длина волны частицы значительно меньше радиуса ядра. В этих условиях ядро ведет себя по отношению к падающим на него частицам как черное или как полупрозрачное тело, и упругое рассеяние частиц, связанное с возможностью их поглощения ядрами, аналогично дифракции света от черного (или полупрозрачного) тела. Такое дифракционное рассеяние быстрых частиц поглощающими ядрами в наиболее чистом виде проявляется в случае быстрых нейтронов — частиц, не обладающих зарядом. Однако оно может происходить в несколько модифицированном виде также и в случае быстрых заряженных частиц, например протонов. В этом случае, в отличие от нейтронов, мы имеем дело с дифракцией заряженных лучей [10].

Дифракционным упругим рассеянием не исчерпываются явления, связанные с поглощением частиц. Если частица обладает зарядом, то дифракционное рассеяние может сопровождаться излучением фотона¹. Такое дифракционное излучение фотона может иметь место, например, в случае протонов, поглощаемых ядрами. Но гораздо более важное значение имеет это явление для заряженных π -мезонов, рассеиваемых ядрами или отдельными нуклонами, ввиду сравнительно небольшой массы π -мезонов.

π -мезоны больших энергий сильно взаимодействуют с нуклонами, и это взаимодействие приводит к большой вероятности таких столкновений между ними, при которых π -мезон и нуклон объединяются в сильно возбужденную короткоживущую систему, распадающуюся далее на несколько мезонов и, возможно, на несколько нуклонных пар. Нуклон при этом представляет собой, по отношению к π -мезону, черное тело (шарик), радиус которого R определяется сечением поглощения π -мезонов $\sigma_a = \pi R^2$.

¹ УФН, 1958, 55, 593.

Дифракционное излучение фотона π -мезоном или другой заряженной частицей не следует смешивать с излучением фотона, связанным с непосредственным поглощением этой частицы ядром. Такое излучение, которое мы будем называть излучением остановки, оказывается во многих случаях более вероятным, чем дифракционное излучение [1].

Процессом, в некотором смысле обратным тормозному излучению, является образование пары частиц фотоном. Если, например, тормозное излучение фотона электроном в кулоновском поле ядра представляет собой переход электрона из одного состояния с положительной энергией в другое состояние также с положительной энергией, сопровождающийся испусканием фотона, то образование электронно-позитронной пары фотоном в кулоновском поле ядра можно рассматривать как переход электрона из состояния с отрицательной энергией в состояние с положительной энергией, сопровождающийся поглощением фотона. Такой процесс образования пары частиц фотоном не требует, однако, обязательного наличия кулоновского поля ядра. Он может происходить также в присутствии нейтральной частицы (или нуклона), обладающей свойством поглощать отдельные компоненты пары. В частности, может происходить образование фотоном π -мезонных пар в присутствии поглощающего мезоны нуклона или образование фотоном протонно-антипротонных пар в присутствии поглощающего ядра. Этот процесс можно назвать дифракционным образованием пар [2].

Дифракционное образование мезонных и нуклонных пар может происходить также при столкновении быстрой ядерно-активной частицы (мезона, нуклона) с ядром [3].

До сих пор мы говорили о дифракционных явлениях, происходящих при рассеянии точечных частиц. Специфическими особенностями должно отличаться дифракционное рассеяние слабо связанных сложных частиц, таких, как дейтрон. В этом случае помимо чисто упругого рассеяния дейтронов, аналогичного дифракционному рассеянию точечных частиц, должно происходить еще дифракционное расщепление дейтронов [15—17]. Действительно, благодаря малой энергии связи дейтрона сравнительно небольшое изменение его импульса при дифракционном рассеянии может привести к расщеплению дейтрона, происходящему вдали от ядра.

Наряду с реакцией срыва (stripping) дифракционное расщеплением дейтрона приводит к освобождению нейтрона и протона, т. е. увеличивает выход нейтронов и протонов, возникающих при столкновении быстрых дейтронов с ядрами.

Чрезвычайно существенной особенностью указанных дифракционных процессов является то, что все они протекают вдали от ядра. Это связано с тем, что при больших энергиях частиц законы сохранения требуют малых передач импульса ядру, а малые передачи импульса соответствуют большим прицельным параметрам.

Рассмотрим, например, дифракционное излучение фотона π -мезоном. При больших энергиях π -мезонов мы имеем здесь такое же положение, как и в случае тормозного излучения фотона электроном в кулоновском поле ядра. С ростом энергии электрона уменьшается импульс, передаваемый ядру, и поэтому в релятивистской области, когда этот импульс очень мал, излучение происходит на больших расстояниях от ядра. Так как этот вывод основывается только на законах сохранения, то он, естественно, остается справедливым не только для тормозного излучения на кулоновских силах, но и в случае дифракционного излучения.

Аналогичная ситуация имеет место и при дифракционном образовании пар, а также при дифракционном расщеплении дейтронов — все эти процессы связаны в области больших энергий с малыми передачами импульса ядру и поэтому происходят вдали от ядра.

В области больших энергий частиц и малых углов рассеяния существует общая связь между вероятностью неупругих процессов и амплитудой упругого рассеяния. (Одной из иллюстраций этой связи является вывод формулы Бете — Гайтлера для вероятности тормозного излучения фотона ультрарелятивистским электроном в кулоновском поле ядра в случае малых углов рассеяния — см. п. 9.) Поэтому для исследования различных дифракционных процессов в области больших энергий фактически достаточно знания амплитуды упругого рассеяния, которая определяется поведением волновой функции частицы вдали от рассеивателя (ядра).

Волновая функция частицы вдали от ядра имеет вид суперпозиции плоской падающей волны и волны, дифрагированной от ядра (черного или полупрозрачного). Последнюю можно найти оптическим методом с помощью принципа Гюйгенса. Поэтому возможно построение полуфеноменологической теории дифракционных явлений в области больших энергий, основанной на применении обобщенного принципа Гюйгенса.

Изложению основных результатов такой теории и посвящена настоящая статья [ср. 14].

2. Упругое дифракционное рассеяние

Начнем с рассмотрения простейшей задачи о дифракционном рассеянии нейтральных точечных частиц поглощающими ядрами, которые мы будем считать абсолютно черными.

Дифракционное рассмотрение справедливо только для быстрых частиц, длина волны которых λ мала, по сравнению с радиусом ядра R . В этих условиях рассеяние происходит на малые углы, порядка $\phi \sim \frac{\lambda}{R}$. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением движения частиц в плоскости, перпендикулярной волновому вектору \mathbf{K} падающей частицы.

Свободное движение частиц в этой плоскости описывается волновой функцией

$$\psi_{\mathbf{x}} = L^{-1} e^{i\mathbf{x}\rho}$$

где L — нормировочная длина, \mathbf{x} и ρ — проекции волнового вектора и радиус-вектора частицы на плоскость, перпендикулярную \mathbf{K} . Волновая функция падающих частиц имеет вид: $\psi_0 = L^{-1}$.

Рассмотрим теперь, к чему приводит наличие ядра. Оно, очевидно, поглощает все те частицы, для которых прицельный параметр ρ меньше R . Если ввести величину $\Omega(\rho)$, равную

$$\Omega(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho \leq R, \\ 1 & \text{при } \rho > R, \end{cases} \quad (1)$$

то можно сказать, что дифракционная картина, обусловленная наличием поглощающего ядра, будет соответствовать разложению функции $\Psi = \Omega(\rho) \psi_0$ по волновым функциям свободного движения $\psi_{\mathbf{x}}$:

$$\Psi \equiv \Omega(\rho) \psi_0 = \sum_{\mathbf{x}} a_{\mathbf{x}} \psi_{\mathbf{x}}, \quad (2)$$

а именно, коэффициент $a_{\mathbf{x}}$ в этом разложении будет представлять собой амплитуду вероятности рассеяния, при котором поперечная составляющая волнового вектора частицы равна \mathbf{x} .

Вероятность дифракционного рассеяния, при котором поперечная составляющая волнового вектора \mathbf{x} лежит в интервале $d\mathbf{x}$, связана с $a_{\mathbf{x}}$ соотношением

$$dw = |a_{\mathbf{x}}|^2 \frac{L^2 d\mathbf{x}}{(2\pi)^2},$$

а соответствующее дифференциальное сечение рассеяния будет

$$d\sigma = L^2 dw = |a_{\mathbf{x}}|^2 L^4 \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi)^2}. \quad (3)$$

Так как функции $\psi_{\mathbf{x}}$ образуют полную ортонормированную систему, удовлетворяющую условиям нормировки

$$\int \psi_{\mathbf{x}}(\rho) \psi_{\mathbf{x}'}^*(\rho) d\rho = \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'},$$

то из (2) следует, что

$$a_{\mathbf{x}} = \int \psi_{\mathbf{x}}^* \Omega(\rho) \psi_0 d\rho = \int \psi_{\mathbf{x}}^* [1 - \Omega(\rho)] \psi_0 d\rho. \quad (4)$$

Подставляя сюда (1), получим

$$a_{\mathbf{x}} = -\frac{2\pi}{L^2} \frac{RJ_1(KR\vartheta)}{K\vartheta}, \quad (4')$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя. Величину \mathbf{x} можно связать с углом рассеяния ϑ :

$$\mathbf{x} = K \sin \vartheta \sim K\vartheta$$

(так как дифракционное рассмотрение справедливо только при малых углах рассеяния, то мы заменили $\sin \vartheta$ на ϑ). Замечая еще, что $d\mathbf{x} = K^2 d\vartheta$, где $d\vartheta = 2\pi \vartheta d\vartheta$ — элемент телесного угла, в котором рассеивается частица, найдем согласно (3) окончательно известное выражение для дифференциального сечения дифракционного рассеяния

$$d\sigma_e = R^2 \frac{J_1^2(KR\vartheta)}{\vartheta^2} d\vartheta. \quad (5)$$

Полное сечение упругого дифракционного рассеяния равно

$$\sigma_e = \int \frac{R^2 J_1^2(KR\vartheta)}{\vartheta^2} d\vartheta = \pi R^2. \quad (6)$$

Так как сечение поглощения частиц черным ядром также равно

$$\sigma_a = \pi R^2, \quad (7)$$

то интегральное сечение всех процессов, включающих как рассеяние, так и поглощение, будет

$$\sigma_t = \sigma_e + \sigma_a = 2\pi R^2. \quad (7')$$

Коэффициент разложения $a_{\mathbf{x}}$ можно связать с амплитудой рассеяния $f(\vartheta)$:

$$f(\vartheta) = -i \frac{L^2 K}{2\pi} a_{\mathbf{x}} \quad (8)$$

и сечением упругого рассеяния

$$d\sigma_e = |f(\vartheta)|^2 d\vartheta. \quad (9)$$

Из (4') следует, что

$$f(\vartheta) = i \frac{RJ_1(KR\vartheta)}{\vartheta}. \quad (8')$$

В (8) фазовый множитель выбран равным i , так как при таком выборе справедлива оптическая теорема, согласно которой интегральное сечение всех процессов взаимодействия частиц с ядром связано с амплитудой упругого рассеяния на нулевой угол соотношением [25]

$$\sigma_t = 4\pi\lambda \operatorname{Im} f(0). \quad (10)$$

Чтобы получить это соотношение, будем исходить [25] из следующего общего выражения для амплитуды рассеяния в центральном-симметричном поле:

$$f(\vartheta) = -\frac{i\lambda}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (\beta_l - 1) P_l(\cos \vartheta), \quad (11)$$

где β_l — отношение амплитуд расходящейся и сходящейся волн с моментом l и $P_l(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра. В отсутствие поглощения величина β_l равна по модулю единице

$$\beta_l = e^{2i\eta_l},$$

где η_l — вещественная величина, определяющая изменение фазы на бесконечности у волны с моментом l . При наличии поглощения модуль β_l меньше единицы.

Интегральное сечение упругого рассеяния равно

$$\sigma_e = 2\pi \int_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin \theta d\theta.$$

Подставляя сюда вместо $f(\theta)$ выражение (11) и используя формулу

$$2\pi \int_0^\pi |P_l(\cos \theta)|^2 \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{2l+1},$$

получим

$$\sigma_e = \pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |\beta_l - 1|^2. \quad (12)$$

Для определения сечения поглощения частиц нужно найти поток частиц S в направлении к рассеивающему центру (началу координат):

$$S = \frac{i\hbar}{2m} \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial r} \right) d\Omega,$$

где m — масса частицы и ψ — ее волновая функция. Вместо ψ мы можем сюда подставить асимптотическое выражение волновой функции при больших r

$$\psi \sim e^{ikz} + \frac{1}{r} e^{ikr} f(\theta) = \frac{i}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) (e^{-ikr} - (-1)^l \beta_l e^{ikr}) P_l(\cos \theta).$$

В результате мы получим

$$S = \frac{\pi\hbar}{mk} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\beta_l|^2).$$

Разделив это выражение на плотность потока падающих частиц, равную $k\hbar/m$, найдем сечение поглощения частиц

$$\sigma_a = \pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\beta_l|^2). \quad (13)$$

Сложив сечения σ_e и σ_a , получим полное сечение для всех процессов

$$\sigma_t = \sigma_e + \sigma_a = 2\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - \operatorname{Re} \beta_l). \quad (14)$$

Замечая, что

$$f(0) = -\frac{i\lambda}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (\beta_l - 1),$$

легко представить σ_t в виде (10).

3. Учет полупрозрачности ядра

В области больших энергий длина свободного пробега частиц в ядерном веществе может стать сравнимой с размерами ядра. Если $\bar{\sigma}$ — среднее значение сечения рассеяния нейтрона отдельными нуклонами, то длина свободного пробега нейтрона в ядерном веществе L может быть определена по формуле

$$L = \frac{4\pi}{3} \frac{R^3}{A\bar{\sigma}}, \quad (15)$$

где $R = r_0 A^{1/2}$ ($r_0 = 1,2 \cdot 10^{-13}$ см) — радиус ядра и A — массовое число. При энергии нейтронов $E \sim 100$ Мэв сечение рассеяния $\bar{\sigma} \approx 8,3 \cdot 10^{-26}$ см² [9]. Если взять $A = 100$, то мы получим $L \approx 4,5 \cdot 10^{-13}$ см и $R = 6 \cdot 10^{-13}$ см. Таким образом, в области энергий порядка 100 Мэв длина свободного пробега нейтронов в ядерном веществе становится сравнимой с размерами ядра. В этих условиях ядро уже нельзя рассматривать как абсолютно черное тело, а необходимо считать полупрозрачным [9]. Ядерное вещество при таких энергиях можно характеризовать коэффициентом поглощения

$$b = \frac{1}{L} = \bar{\sigma} n,$$

где n — плотность частиц в ядре и $\bar{\sigma}$ — среднее значение сечения рассеяния падающей частицы (нейтрона) ядерными нуклонами

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{A} (Z\sigma_{np} + (A-Z)\sigma_{nn})$$

(σ_{np} и σ_{nn} — сечения рассеяния нейтрона протоном и нейтрона нейтроном)¹. Поскольку плотность частиц в ядре спадает от центра к периферии ядра, то b является функцией точки. Среднее значение коэффициента поглощения равно

$$\bar{b} = \frac{3A\bar{\sigma}}{4\pi R^3}.$$

¹ Эти величины имеют, конечно, качественный характер.

Из приведенных выше оценок следует, что в области энергий $E \sim \sim 100 \text{ Мэв}$ для тяжелых ядер ($A \sim 200$) среднее значение коэффициента поглощения составляет $\bar{b} \approx 2,4 \cdot 10^{+12} \text{ см}^{-1}$.

При исследовании рассеяния нуклонов ядрами нужно учитывать не только поглощение, но и преломление нуклонной волны в ядерном веществе. Поэтому ядерное вещество следует характеризовать комплексным коэффициентом поглощения B , вещественная часть которого равна b , а мнимая часть b' связана с коэффициентом преломления. Если v — коэффициент преломления, то

$$b' = 2(v - 1)K,$$

где K — волновой вектор падающей частицы и

$$B = b - i(v - 1)K. \quad (16)$$

Покажем теперь, как следует учитывать полупрозрачность ядра при исследовании дифракционных явлений.

Так как длина волны падающей частицы предполагается малой по сравнению с размерами ядра, то прохождение нуклонов через ядро можно сравнивать с распространением нуклонной волны в веществе с комплексным коэффициентом поглощения B [9, 8]. Направление распространения волны совпадает при этом с направлением движения частицы, которое мы можем считать прямолинейным. Выбирая направление движения частицы в качестве оси x и обозначая путь, пройденный в ядре, через $2s$, получим следующее выражение для отношения амплитуды нуклонной волны по

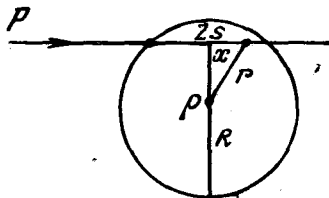


Рис. 1

выходе частицы из ядра к амплитуде падающей волны:

$$A = e^{-\int_0^s B(x) dx}$$

Интегрирование в экспоненте производится здесь в интервале $(0, s)$, а не $(0, 2s)$, так как речь идет об амплитуде нуклонной волны, а не об ее интенсивности, пропорциональной $|A|^2$. При этом фаза волны учитывается правильно, так как формула для b' содержит добавочный множитель 2.

Величиной A мы должны, очевидно, заменить $\Omega(\rho)$ при $\rho < R$. Замечая, что $x = \sqrt{r^2 - \rho^2}$ (см. рис. 1), можно представить $\Omega(\rho)$ в виде

$$\Omega_B(\rho) = e^{-\int_{\rho}^{\infty} B(r) \frac{dx}{dr} dr} = e^{-\int_{\rho}^{\infty} \sqrt{r^2 - \rho^2} B'(r) dr} \quad (17)$$

Верхний предел в экспоненте положен равным бесконечности, чтобы учесть диффузность края ядра.

Для резкого края ядра

$$B'(r) = B\delta(r - R)$$

и $\Omega(\rho)$ приобретает вид

$$\Omega_B(\rho) = \begin{cases} e^{-B\sqrt{R^2 - \rho^2}} & \text{при } \rho \leq R, \\ 1 & \text{при } \rho > R. \end{cases} \quad (18)$$

Входящую в выражение для $\Omega(\rho)$ экспоненту можно вычислить, если задаться зависимостью плотности ядерных частиц от рассеяния до центра ядра. Обычно принимается [8], что распределение плотности определяется формулой

$$n(r) = n_0 \frac{1}{2} \left(1 - \text{th} \frac{r - R}{d} \right), \quad (19)$$

где n_0 — плотность частиц в центре ядра и d — толщина диффуз-

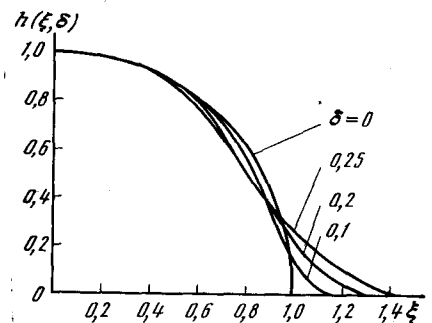


Рис. 2

ного края ядра. При таком предположении экспонента приобретает вид [8].

$$\int_0^s B dx = 2RB_0 \int_{\xi}^{\infty} dv \sqrt{v^2 - \xi^2} \sec^2 h^2 \frac{v-1}{\delta} \equiv 2RB_0 h(\xi, \delta), \quad (20)$$

где B_0 — значение B в центре ядра, $\xi = \frac{\rho}{R}$, $v = \frac{r}{R}$, $\delta = \frac{d}{R}$. На рис. 2 представлен вид функции $h(\xi, \delta)$ для различных значений δ [8].

Определим теперь сечение упругого дифракционного рассеяния нейтронов ядрами. Используя указанные выше формулы (4) и (17), получим следующее выражение для амплитуды рассеяния:

$$f(\theta) = iK \int_0^{\infty} \left\{ 1 - e^{-\int_0^{\rho} \sqrt{r^2 - \rho^2} B'(r) dr} \right\} J_0(\kappa \rho) \rho d\rho, \quad \kappa = K\theta. \quad (21)$$

Если считать, что ядро имеет резкий край, то справедлива формула (18) и

$$f(\theta) = iK \int_0^R (1 - e^{-B \sqrt{R^2 - \rho^2}}) J_0(\kappa \rho) \rho d\rho, \quad d = 0. \quad (22)$$

В предельных случаях большого и малого поглощения эта формула сильно упрощается

$$\left. \begin{aligned} f(\theta) &= iK \left\{ \frac{RJ_1(\kappa R)}{\kappa} - \frac{J_0(\kappa R)}{B^2} \right\}, \quad \kappa \ll R |B|^2, \\ f(\theta) &= iK \frac{RB}{\kappa^2} \left\{ \frac{\sin \kappa R}{\kappa R} - \cos \kappa R \right\}, \quad \kappa \gg R |B|^2. \end{aligned} \right\} \quad (22')$$

Полное сечение упругого рассеяния равно

$$\sigma_e = \int |1 - \Omega(\rho)|^2 d\rho. \quad (23)$$

Считая край ядра резким, мы получим отсюда в случае сильного поглощения [9]

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \pi R^2 \left\{ 1 + \frac{1 - (1 + 2bR) e^{-2bR}}{2b^2 R^2} - \frac{4}{(b^2 + b'^2) R^2} [b^2 - b'^2 + \right. \\ &+ \{2bb' + b'R(b^2 + b'^2)\} e^{-bR} \sin b'R - (b^2 - b'^2 + bR(b^2 + \\ &+ b'^2)\} e^{-bR} \cos b'R] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (23')$$

Интегральное сечение для всех процессов (рассеяния и поглощения) может быть определено с помощью оптической теоремы [10]

$$\sigma_t = 4\pi\lambda \operatorname{Im} f(0).$$

При резком крае ядра и в случае сильного поглощения эта формула дает

$$\begin{aligned} \sigma_t &= 2\pi R^2 \left\{ 1 - \frac{2}{(b^2 + b'^2) R^2} [b^2 - b'^2 + (2bb' + b'R(b^2 + b'^2)) \times \right. \\ &\times e^{-bR} \sin b'R - [b^2 - b'^2 + b'R(b^2 + b'^2) e^{-bR} \cos b'R] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Заметим, что поскольку граница ядра всегда размыта, то формулы (23'), (24), выведенные в предположении резкости границы, справедливы, строго говоря, если $d \ll R$.

4. Влияние кулоновского поля ядра

Выясним теперь, какое влияние оказывает кулоновское поле ядра на дифракционное рассеяние заряженных частиц. Будем сперва предполагать ядро абсолютно поглощающим и имеющим резкую границу. Тогда, если $\rho \ll R$ и энергия частицы E превосходит высоту кулоновского барьера $E_B = \frac{Ze^2}{R}$, то величина $\Omega(\rho)$ будет по-прежнему равна нулю. Если же параметр столкновения ρ будет больше R , то частица будет рассеиваться так же, как и в чисто кулоновском поле точечного ядра. Поэтому при $\rho > R$ мы можем положить

$$\Omega(\rho) = e^{2i\eta(\rho)}, \quad \rho > R,$$

где $\eta(\rho)$ — фаза на бесконечности в кулоновском поле ядра, равная при $KR \gg 1$

$$\eta(\rho) = n \ln K\rho, \quad n = \frac{Ze^2}{\hbar v}$$

v — скорость частицы на бесконечности).

Таким образом, для учета в дифракционных явлениях кулоновского поля ядра, предполагаемого абсолютно черным, нужно считать $\Omega(\rho)$ равным

$$\Omega^z(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho \leq R, \\ e^{2i\eta(\rho)} & \text{при } \rho > R. \end{cases} \quad (25)$$

В случае полупрозрачного ядра это выражение должно быть заменено, согласно (17) на

$$\Omega_B^z(\rho) = \begin{cases} -\int_0^{R'} \sqrt{r^2 - \rho^2} B'(r) dr & \text{при } \rho \leq R', \\ e^{2i\eta(\rho)} & \text{при } \rho > R', \end{cases} \quad (26)$$

где под R' следует понимать некоторый эффективный радиус взаимодействия, несколько превышающий радиус ядра.

Если ширина диффузности края ядра мала по сравнению с радиусом ядра, то справедлива формула (18) и поэтому

$$\Omega_B^z(\rho) = \begin{cases} e^{-B \sqrt{R^2 - \rho^2}} & \text{при } \rho \leq R, \\ e^{2i\eta(\rho)} & \text{при } \rho > R. \end{cases} \quad (27)$$

Определим теперь сечение упругого рассеяния заряженных точечных частиц поглощающим ядром, которое мы будем предполагать абсолютно черным. Найдем прежде всего амплитуду рассея-

ния. Подставляя в (4) вместо $\Omega(\rho)$ выражение (25), получим

$$f(\vartheta) = \frac{iK}{2\pi} \int e^{-i\kappa\rho} \{1 - \Omega^2(\rho)\} = -iK \int_R^\infty e^{2in(\rho)} J_0(\kappa\rho) \rho d\rho, \quad (28)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя.

Интегрируя по частям, можно представить это выражение в виде [10]

$$f(\vartheta) = i\lambda \left\{ l_0^{2in+1} \frac{J_1(l_0\vartheta)}{\vartheta} + in\vartheta^{-2in-2} \int_{l_0\vartheta}^\infty J_1(\zeta) \zeta^{2in} d\zeta \right\}, \quad (28')$$

где $l_0 = KR \gg 1$.

Дифференциальное сечение рассеяния связано с $f(\vartheta)$ соотношением

$$d\sigma_e = |f(\vartheta)|^2 d\vartheta \equiv \sigma_e(\vartheta) d\vartheta,$$

где

$$\sigma_e(\vartheta) = \left| \frac{RJ_1(KR\vartheta)}{\vartheta} + \frac{2in}{\vartheta} R \int_1^\infty J_1(KR\vartheta\zeta) \zeta^{2in} d\zeta \right|^2. \quad (29)$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи. Если $n \ll \zeta$, то

$$f(\vartheta) = iK \left\{ \frac{RJ_1(\kappa R)}{\kappa} + 2in \frac{J_0(\kappa R)}{\kappa^2} \right\}$$

и

$$\sigma_e(\vartheta) = R^2 \frac{J_1^2(KR\vartheta)}{\vartheta^2} + \frac{4n^2 J_0^2(KR\vartheta)}{K^2 \vartheta^4}. \quad (30)$$

Первое слагаемое в последнем выражении описывает дифракционное рассеяние частиц абсолютно черным ядром, а второе — рассеяние, обусловленное кулоновским полем ядра. Мы видим, что при $n \ll 1$ интерференция между обоими видами рассеяния отсутствует.

Отметим, что при $R = 0$ второе слагаемое в (30) переходит в сечение Резерфордского рассеяния точечным ядром.

Легко показать [10, 25], что при $n \ll 1$ и углах рассеяния $\vartheta \lesssim \sqrt{2n}/l_0$ главную роль играет кулоновское рассеяние, а при углах $\vartheta > \sqrt{2n}/l_0$ — дифракционное рассеяние. Таким образом, величина $\sqrt{2n}/l_0$ при $n \ll 1$ разграничивает области углов с разными законами рассеяния.

Если $n \gg 1$, то при углах $\vartheta \lesssim \frac{2n}{l_0}$ главную роль играет кулоновское рассеяние, а при углах $\vartheta > \frac{2n}{l_0}$ — дифракционное рассеяние.

Сечение рассеяния в разных областях углов определяется следующими формулами

$$\sigma_e(\vartheta) = \frac{4n^2}{K^2 \vartheta^4}, \quad KR\vartheta \ll 2n, \quad (31)$$

$$\sigma_e(\vartheta) = \frac{R^2 J_1^2(KR\vartheta)}{\vartheta^2}, \quad KR\vartheta \gg 2n.$$

Заметим, что при $n \ll 1$ амплитуда кулоновского и дифракционного рассеяния совпадают по порядку величины при $\vartheta \sim \sim \sqrt{2n}/l_0$. Если же $n \gg 1$, то эти амплитуды при $\vartheta \sim 2n/l_0$ не совпадают, причем отношение амплитуд кулоновского и дифракционного рассеяния по порядку величины равно \sqrt{n} . Равенство амплитуд имеет место при $\vartheta \sim \frac{4n^2}{l_0}$ и лишь при больших углах амплитуда дифракционного рассеяния становится больше амплитуды кулоновского рассеяния. При $\vartheta \sim \frac{2n}{l_0}$ происходит резкое уменьшение сечения рассеяния по порядку величины в n раз.

Так как сечение дифракционного рассеяния в среднем обратно пропорционально кубу угла рассеяния, а не четвертой степени, как это имеет место при рассеянии в чисто кулоновском поле, то можно сказать, что, благодаря наличию поглощающего ядра, рассеяние на большие углы становится более вероятным. В силу этого средний угол рассеяния оказывается значительно большим, чем в случае кулоновского рассеяния.

5. Принцип Гюйгенса

В предыдущих пунктах мы видели, что для определения сечений упругого рассеяния с учетом дифракционных эффектов фактически достаточно знания дифракционной картины в плоскости, перпендикулярной импульсу падающих частиц. Однако этой картины непосредственно уже недостаточно для определения сечения дифракционного излучения фотонов заряженными частицами, а также сечениями дифракционного образования пар, так как для вычисления соответствующих матричных элементов требуется знание волновых функций частиц. Но при больших энергиях частиц, которыми мы интересуемся, существенны малые передачи импульса ядру, т. е. большие прицельные параметры. Поэтому для вычисления матричных элементов достаточно знания волновых функций частиц вне ядра, в области волновой зоны. В этой области волновые функции могут быть найдены с помощью оптического принципа Гюйгенса, который мы теперь и сформулируем.

Принцип Гюйгенса устанавливает связь между значением волновой функции в некоторой точке \mathbf{r} и значениями волновой функции на замкнутой поверхности S , окружающей эту точку.

Рассмотрим прежде всего частицы со спином нуль. Принцип Гюйгенса для скалярного уравнения¹

$$\Delta\psi + p^2\psi = 0$$

может быть сформулирован следующим образом:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{p}{2\pi i} \int_S \frac{e^{ip(r-\rho)}}{|\mathbf{r}-\rho|} \psi(\rho) ds, \quad (32)$$

где ρ лежит на поверхности S (ds — элемент этой поверхности).

Мы будем всегда в дальнейшем выбирать в качестве S плоскость, проходящую через центр ядра и перпендикулярную импульсу p падающей частицы (см. рис. 3).

Предположим сначала ядро абсолютно черным. Тогда интегрирование в (32) должно производиться по плоскости S за вычетом круга радиуса R . Пусть волновая функция падающих частиц имеет вид

$$\psi_p(\mathbf{r}) = e^{ipr}.$$

Подставляя это выражение под знак интеграла в (32) и интегрируя по всей плоскости S , включая площадь круга радиуса R , мы получим, очевидно, функцию $\psi_p(\mathbf{r})$. Поэтому принцип Гюйгенса в случае абсолютно черного ядра можно сформулировать в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ipr} - \frac{p}{2\pi i} \int \frac{e^{ip|\mathbf{r}-\rho|}}{|\mathbf{r}-\rho|} \{1 - \Omega(\rho)\} d\rho, \quad (33)$$

где $\Omega(\rho)$ определяется формулой (1) и интегрирование производится по всей плоскости S .

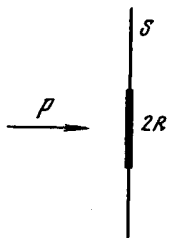


Рис. 3

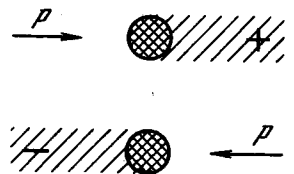


Рис. 4

Интеграл, входящий в это соотношение, представляет собой расходящуюся дифрагированную волну, амплитуда которой очень мала в области тени за ядром (эта область обозначена на рис. 4 через (+)).

¹ Мы пользуемся здесь и в дальнейшем системой единиц, в которой $c = \hbar = 1$; p обозначает импульс частицы.

На больших расстояниях от ядра функцию $\psi(\mathbf{r})$ можно представить в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ipr} + \frac{f(\vartheta)}{r} e^{ipr},$$

где

$$f(\vartheta) = \frac{ip}{2\pi} \int \{1 - \Omega(\rho)\} e^{-i(p'-p)\rho} d\rho \quad (34)$$

(p' — импульс рассеянной частицы). Эта величина представляет собой, очевидно, амплитуду упругого рассеяния. Она совпадает с полученным ранее иным способом выражением (4), если положить $L = 1$.

Формула (33) дает возможность учесть полупрозрачность и кулоновское поле ядра. Для этого следует заменить под знаком интеграла (33) величину $\Omega(\rho)$ на $\Omega_B^z(\rho)$:

$$\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}) = e^{ipr} - \frac{p}{2\pi i} \int \frac{e^{ip|\mathbf{r}-\rho|}}{|\mathbf{r}-\rho|} \{1 - \Omega_B^z(\rho)\} d\rho. \quad (35)$$

Мы обозначили здесь волновую функцию через $\psi_p^{(+)}(\mathbf{r})$ для того, чтобы подчеркнуть, что на больших расстояниях от ядра она представляет собой суперпозицию плоской падающей и расходящейся дифрагированной волны.

Такой асимптотикой, как известно [26, 27], должна обладать волновая функция частицы, исчезающей в процессе рассеяния. В частности, в процессе тормозного излучения такой асимптотикой должна обладать волновая функция начального состояния.

Если в процессе рассеяния частица возникает, то ее волновая функция должна асимптотически на больших расстояниях от ядра иметь вид суперпозиции падающей плоской и сходящейся сферической волн.

Заметим, что характер этой асимптотики допускает простую физическую интерпретацию. Если разложить плоскую волну на сходящиеся и расходящиеся волны, то в функции начального состояния при $r \rightarrow \infty$ только сходящиеся волны будут иметь амплитуды, не зависящие от природы рассеивателя, расходящиеся же волны будут полностью определяться силовым полем рассеивателя. Это соответствует тому, что частицы в начальном состоянии падают на рассеиватель. Аналогичным образом в функциях конечного состояния при $r \rightarrow \infty$ только расходящиеся волны могут иметь амплитуды, не зависящие от природы рассеивателя, сходящиеся же волны должны определяться силовым полем рассеивателя.

Приведем необходимое для дальнейшего выражение для волновой функции, дифрагированной от ядра и описывающей частицу, возникающую в результате рассеяния:

$$\psi_p^{(-)}(\mathbf{r}) = e^{ipr} + \frac{p}{2\pi i} \int \{1 - \Omega_B^z(\rho)\} \frac{e^{-ip|\mathbf{r}-\rho|}}{|\mathbf{r}-\rho|} d\rho. \quad (36)$$

Эта функция отличается от $\psi_p^{(+)}$ тем, что под знаком интеграла здесь входит не $e^{ip|r-\rho|}$, а $e^{-ip|r-\rho|}$, кроме того, сюда входит не Ω_B^z , а Ω_B^{z*} . На больших расстояниях эта функция представляет собой суперпозицию падающей плоской и сходящейся сферической волн (с учетом полупрозрачности и кулоновского поля ядра).

Легко убедиться, что область тени для функции $\psi_p^{(-)}$ лежит перед ядром, как изображено на рис. 4 (область (-)).

Выражениями (35) и (36) формулируется обобщенный принцип Гюйгенса для скалярных частиц. Сформулируем теперь принцип Гюйгенса для частиц со спином, равным половине [4].

Покажем, что для монохроматических спинорных волн, удовлетворяющих уравнению Дирака

$$\left(\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \gamma_4 E + m\right) \psi(\mathbf{r}) = 0,$$

где m — масса частицы и γ_i — матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = 2\delta_{ik},$$

имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \gamma_4 E - m\right) \frac{e^{ip|r-r'|}}{|r-r'|} \mathbf{n} \psi(\mathbf{r}') ds' \equiv \\ &\equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{S(p)} \int \left(ip_\mu \gamma_\mu - m\right) \frac{e^{ip(r-r')}}{p^2 + m^2 - E^2} \boldsymbol{\gamma} \mathbf{n} \psi(\mathbf{r}') dp ds', \end{aligned} \quad (37)$$

где $p = \sqrt{E^2 - m^2}$ и \mathbf{n} — единичный вектор в направлении внешней нормали к S .

Преобразуем для этого поверхностный интеграл в объемный и воспользуемся тем, что

$$\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \psi(\mathbf{r}') = (E\gamma_4 - m) \psi(\mathbf{r}').$$

Правая часть (37) приобретает при этом вид

$$\begin{aligned} X &\equiv -\frac{1}{4\pi} \left(\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} + \gamma_4 E + m\right) \left(\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} + \gamma_4 E - m\right) \frac{e^{ip|r-r'|}}{|r-r'|} \times \\ &\times \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = -\frac{1}{4\pi} \int (\Delta_r + p^2) \frac{e^{ip|r-r'|}}{|r-r'|} \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \end{aligned}$$

но

$$(\Delta_r + p^2) \frac{e^{ipr}}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

Поэтому

$$X = \psi(\mathbf{r}).$$

Соотношение (37) представляет собой принцип Гюйгенса для спинорных волн.

Перепишем (37) в виде, аналогичном (33). Пусть на абсолютно черное ядро падает спинорная волна

$$\psi(\mathbf{r}) = u_p e^{ipr},$$

где u_p — спинорная амплитуда, удовлетворяющая условию нормировки

$$u_p^* u_p = 1.$$

Тогда принцип Гюйгенса (37) дает

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \gamma_4 E - m\right) \boldsymbol{\gamma} \mathbf{n} \frac{e^{ip|r-\rho|}}{|r-\rho|} \Omega(\rho) u_p e^{ip\rho} d\rho,$$

где интегрирование производится по всей плоскости S , перпендикулярной \mathbf{p} и проходящей через центр ядра. Это выражение можно переписать в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = u_p e^{ipr} = \frac{1}{4\pi} \int \left(\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \gamma_4 E - m\right) \boldsymbol{\gamma} \mathbf{n} \frac{e^{ip|r-\rho|}}{|r-\rho|} \{1 - \Omega(\rho)\} u_p d\rho. \quad (38)$$

Второе слагаемое в последней формуле представляет собой диффракционированную около ядра волну. На больших расстояниях от ядра $\psi(\mathbf{r})$ имеет вид суммы плоской и расходящейся сферической волн

$$\psi(\mathbf{r}) = u_p e^{ipr} + \frac{e^{ipr}}{r} u_p f(\vartheta),$$

где

$$f(\vartheta) = \frac{ip}{2\pi} u_p^* u_p \int \{1 - \Omega(\rho)\} e^{i(p-r)\rho} d\rho. \quad (39)$$

Эта величина представляет собой амплитуду упругого дифракционного рассеяния частиц со спином $1/2$. Дифференциальное сечение упругого рассеяния связано с $f(\vartheta)$ соотношением (9).

Просуммируем квадрат модуля $f(\vartheta)$ по конечным состояниям спина частицы и усредним по начальным состояниям. Это может быть сделано с помощью формулы

$$\frac{1}{2} \sum |u_p^* u_p|^2 = 1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

В результате мы получим следующее выражение для сечения упругого дифракционного рассеяния спинорных частиц абсолютно черным ядром [11]

$$d\sigma_e = \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right) \left| \int_0^\infty \{1 - \Omega(\rho)\} J_0(p\rho \sin \vartheta) \rho d\rho \right|^2 p^2 d\vartheta. \quad (40)$$

Это выражение отличается множителем $1 - v^2 \partial^2$ от сечения рассеяния скалярных частиц.

Если в формуле (38) заменить $\Omega(\rho)$ на $\Omega_B^z(\rho)$, то мы получим формулировку принципа Гюйгенса для спинорных заряженных частиц, в которой учитывается как полупрозрачность, так и кулоновское поле ядра:

$$\psi^{(+)}(\mathbf{r}) = u_p e^{i p r} - \frac{1}{4\pi} \int \left(\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \gamma_4 E - m \right) \frac{e^{i p |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|}}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|} \{1 - \Omega_B^z(\rho)\} \boldsymbol{\gamma} n u_p d\rho. \quad (41)$$

Асимптотически при больших r эта функция представляет собой суперпозицию падающей плоской и расходящейся дифрагированной сферической волн.

Аналогично (41) можно написать также выражение для волновой функции $\psi^{(-)}(\mathbf{r})$, представляющей собой на больших расстояниях от ядра суперпозицию падающей плоской и сходящейся дифрагированной сферической волн:

$$\psi^{(-)}(\mathbf{r}) = u_p e^{i p r} - \frac{1}{4\pi} \int \left(\boldsymbol{\gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \gamma_4 E m \right) \frac{e^{-i p |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|}}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|} \{1 - \Omega_B^*(\rho)\} \boldsymbol{\gamma} n u_p d\rho. \quad (42)$$

Такого типа функцией должно описываться конечное состояние протона в процессе дифракционного излучения фотона протоном, а также состояния протона и антипротона в процессе дифракционного образования фотоном пар протон — антипротон.

6. Дифракционное излучение фотонов π -мезонами

Мы перейдем теперь к рассмотрению дифракционных процессов, в которых участвуют фотоны. Начнем с рассмотрения дифракционного излучения фотона скалярной заряженной частицей π -мезоном [1]. Этот процесс можно исследовать с помощью теории возмущений, считая возмущением взаимодействие между π -мезоном и электромагнитным полем.

Если пользоваться «точными» волновыми функциями частицы, то, как известно, излучение фотона представляет собой эффект первого приближения теории возмущений. При исследовании тормозного излучения фотона электроном в кулоновском поле ядра такими функциями являются волновые функции электрона в кулоновском поле ядра, относящиеся к непрерывному спектру. В рассматриваемом нами случае «точными» функциями являются функции вида (35) и (36), учитывающие как дифракцию волн около поглощающего ядра, так и его кулоновское поле.

Матрица рассеяния первого приближения имеет, как известно, вид [27]

$$S^{(1)} = i \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^4x,$$

где $j_\mu(x)$ — оператор плотности тока частицы и $A_\mu(x)$ — оператор потенциала электромагнитного поля. Для скалярных частиц плотность тока связана с оператором поля соотношением [27]

$$j_\mu(x) = ie \left(\psi \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^\mu} - \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \right). \quad (43)$$

Мы будем рассматривать сопровождаемый излучением фотона переход π -мезона из состояния с импульсом p и энергией E в состояние с импульсом p' и энергией E' . Волновые функции этих состояний согласно результатам п. 5 имеют вид

$$\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2E}} \left\{ e^{i p r} - \frac{r}{2\pi i} \int (1 - \Omega(\rho)) \frac{e^{i p |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|}}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|} d\rho \right\}, \quad (44)$$

$$\psi_p^{(-)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2E'}} \left\{ e^{i p' r} + \frac{r'}{2\pi i} \int (1 - \Omega^*(\rho)) \frac{e^{-i p' |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|}}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|} d\rho \right\}. \quad (44')$$

Первая функция представляет собой при $r \rightarrow \infty$ суперпозицию плоской падающей и сферической расходящейся волн, а вторая — суперпозицию плоской и сферической сходящейся волн. Такая асимптотика соответствует исчезновению частицы в начальном и появлению частицы в конечном состояниях.

Функции нормированы таким образом, чтобы в единичном объеме находился один мезон (по этой причине перед плоской волной стоит множитель $\frac{1}{\sqrt{2E}}$).

В качестве $A_\mu(x)$ нужно подставить в выражение $S^{(1)}$ потенциал, соответствующий излучению фотона. Если обозначить через ω , \mathbf{k} и ϵ_μ частоту, импульс и поляризацию фотона, то

$$A_\mu(x) = \frac{e_\mu}{\sqrt{2\omega}} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \quad (45)$$

(нормировочный объем предполагается равным единице).

Замечая, далее, что ток, связанный с переходом $\psi_p^+(\mathbf{r}) \rightarrow \psi_p^{(-)}(\mathbf{r})$, равен согласно (43)

$$j_\mu(x) = -2ie \psi_p^{(-)*} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi_p^{(+)},$$

получим после интегрирования по t следующее выражение для матричного элемента перехода:

$$S_{i \rightarrow f}^{(1)} = 2\pi i U_{i \rightarrow f} \delta(E - E' - \omega),$$

где

$$U_{i \rightarrow f} = \frac{2e}{\sqrt{2\omega}} \int \psi_p^{(-)*}(\mathbf{r}) (\mathbf{e} \nabla) \psi_p^{(+)}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (46)$$

Вероятность перехода в единицу времени равна

$$w = 2\pi |U_{i \rightarrow f}|^2 \delta(E - E' - \omega).$$

Умножая это выражение на $\frac{dkdp'}{(2\pi)^6}$ и устраняя δ -функцию интегрированием по энергии мезона в конечном состоянии, получим, после деления на плотность потока мезонов в начальном состоянии $v = \frac{p}{E}$, дифференциальное сечение излучения фотона π -мезоном:

$$d\sigma_{\gamma}^0 = \frac{e^2}{2\omega} \frac{p'}{p} \left| \int \psi_p^{(-)*}(\mathbf{r})(e\nabla)\psi_p^{(+)}(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}d\mathbf{r} \right|^2 \frac{\omega^2 d\omega}{(2\pi)^5} d\omega_\gamma d\omega', \quad (47)$$

где $d\omega_\gamma$ и $d\omega'$ — элементы телесных углов, в которых лежат \mathbf{k} и \mathbf{p}' .

При вычислении входящего сюда интеграла следует иметь в виду, что, как было разъяснено в предыдущих пунктах, дифракционное рассмотрение законно только в области малых углов рассеяния. В рассматриваемом случае должны быть малыми угол между импульсами π -мезона в начальном и конечном состояниях и угол между импульсом фотона и начальным импульсом π -мезона. При этих условиях интеграл от произведения дифрагированных волн в (47) (вторые слагаемые в (44) и (44')) обращается в нуль. Действительно, области тени в функциях $\psi_p^{(-)}(\mathbf{r})$ и $\psi_p^{(+)}(\mathbf{r})$ при малых углах не перекрываются. Поэтому дифрагированные функции отличны от нуля в разных областях (не заштрихованных на рис. 4) и интеграл от их произведения равен нулю.

Далее обращается в нуль интеграл от произведения плоских волн, так как такой интеграл отличается от нуля только в том случае, если $\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k} = 0$, но это условие не может, очевидно, выполняться из-за передачи импульса ядру. Таким образом, интеграл в (47) сводится к

$$\begin{aligned} M &\equiv \int \psi_p^{(-)*}(\mathbf{r})(e\nabla)\psi_p^{(+)}(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}d\mathbf{r} = \\ &= \frac{i}{2\pi} \left\{ p' \iint \frac{e^{ip'|\mathbf{r}-\rho|}}{|\mathbf{r}-\rho|} (1 - \Omega(\rho))(e\nabla)e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{r}} d\rho d\mathbf{r} - \right. \\ &\left. - p \iint \frac{e^{ip|\mathbf{r}-\rho|}}{|\mathbf{r}-\rho|} (1 - \Omega(\rho))(e\nabla)e^{-i(\mathbf{p}'+\mathbf{k})\mathbf{r}} d\rho d\mathbf{r} \right\}. \quad (47') \end{aligned}$$

Используя соотношение

$$\int \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}}{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d\mathbf{r} = -\frac{2\pi}{p} \frac{1}{p-q}, \quad (48)$$

можно переписать M в виде

$$\begin{aligned} M &= \frac{ep'}{p - |\mathbf{p}' + \mathbf{k}|} \int e^{-i(\mathbf{p}'+\mathbf{k})\rho} \{1 - \Omega(\rho)\} d\rho + \\ &+ \frac{ep}{p' - |\mathbf{p} - \mathbf{k}|} \int e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\rho} \{1 - \Omega(\rho)\} d\rho. \quad (49) \end{aligned}$$

Будем считать ядро абсолютно черным заряженным шариком. Воспользовавшись выражением (25) для $\Omega(\rho)$ и учитывая малость углов между \mathbf{p} , \mathbf{k} и \mathbf{p}' , получим следующее выражение для M [11]:

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{ep'}{p - |\mathbf{p}' + \mathbf{k}|} + \frac{ep}{p' - |\mathbf{p} - \mathbf{k}|} \right) \left\{ \frac{RJ_1(|\mathbf{p}'\boldsymbol{\vartheta}' + \mathbf{k}\boldsymbol{\vartheta}|R)}{|\mathbf{p}'\boldsymbol{\vartheta}' + \mathbf{k}\boldsymbol{\vartheta}|} e^{2in(R)} + \right. \\ &\left. + \frac{2in}{|\mathbf{p}'\boldsymbol{\vartheta}' + \mathbf{k}\boldsymbol{\vartheta}|} \int_0^\infty e^{2in(R)} J_1(|\mathbf{p}'\boldsymbol{\vartheta}' + \mathbf{k}\boldsymbol{\vartheta}|\rho) d\rho \right\}, \quad (49') \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\vartheta}$ и $\boldsymbol{\vartheta}'$ — двумерные угловые векторы, определяемые с помощью соотношений

$$\mathbf{p}' = \frac{p'\mathbf{p}}{p^2} \mathbf{p} + p'\boldsymbol{\vartheta}',$$

$$\mathbf{k} = \frac{k\mathbf{p}}{p^2} \mathbf{p} + k\boldsymbol{\vartheta}.$$

Просуммированное по поляризациям фотона сечение дифракционного излучения равно [11]

$$\begin{aligned} d\sigma_{\gamma}^0 &= \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{p'}{p} \left| \frac{RJ_1(\mu|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|R)}{|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|} + \frac{2in}{|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|} \int_0^\infty e^{2i(\eta(\rho) - \eta(R))} \times \right. \\ &\left. \times J_1(\mu|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|\rho) d\rho \right|^2 \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{1 + \boldsymbol{\xi}^2} + \frac{\boldsymbol{\eta}}{1 + \boldsymbol{\eta}^2} \right)^2 \frac{d\omega}{\omega} d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\eta}, \quad (50) \end{aligned}$$

где μ — масса мезона и

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{E}{\mu} \boldsymbol{\vartheta}, \quad \boldsymbol{\eta} = \frac{E'}{\mu} (\boldsymbol{\vartheta}' - \boldsymbol{\vartheta}).$$

Выясним теперь условия применимости этой формулы. Оценим для этого область эффективных расстояний от ядра, вносящих основной вклад в интеграл M .

Из формулы (48) следует, что эффективными в (47') являются расстояния порядка

$$r_{\text{eff}} \sim \frac{1}{p - |\mathbf{p}' + \mathbf{k}|}.$$

Воспользовавшись законом сохранения энергии, можно представить это выражение в виде

$$r_{\text{eff}} \approx \frac{2pp'}{k(\mu^2 + p^2\boldsymbol{\vartheta}^2)}, \quad (51)$$

где μ — масса π -мезона. Отсюда следует, что если $E \gg \mu$ и $\boldsymbol{\vartheta} \lesssim \mu/E$, то $r_{\text{eff}} \gg E/\mu^2 \gg R$. Это оправдывает пренебрежение областью внутри ядра или нуклона. Заметим, что нуклон можно считать черным при $E \gg \mu$.

Выражение для сечения дифракционного излучения получено нами в предположении, что π -мезон является точечной частицей.

При этом формфактор будет зависеть только от $\omega\vartheta^2$:

$$F_\pi = F_\pi \left(\frac{E\omega\vartheta^2}{2\mu^2} \right). \quad (55)$$

Если условие (53) не выполнено, то простое понятие формфактора теряет смысл и вместо него в формулы для интенсивности излучения будет входить более сложная величина, связанная с двумя инвариантными частотами фотона и учитывающая влияние ускорения, т. е. содержащая еще инвариант

$$\frac{\omega^2}{2EE'} + \frac{EE'\vartheta'^2}{2\mu^2}.$$

Таким образом, при выполнении условий (53), (53'), (54) сечение излучения должно вместо (50) определяться следующей формулой [1, 11]

$$\begin{aligned} d\sigma_\gamma = & \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{p'}{p} \left| F_\pi \left(\frac{E\omega - \mathbf{pk}}{\mu^2} \right) \right|^2 \left| \frac{RJ_1(\mu|\xi + \eta|R)}{|\xi + \eta|} \right| + \\ & + \frac{2in}{|\xi + \eta|} \int_R^\infty \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2in} J_1(\mu|\xi - \eta|\rho) d\rho \left| \left(\frac{\xi}{1 + \xi^2} + \frac{\eta}{1 + \eta^2} \right)^2 \right| \times \\ & \times \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (56)$$

Полагая здесь $n = 0$, мы получим чисто дифракционное излучение [1] (без формфактора)

$$d\sigma_\gamma^\vartheta = \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{p'}{p} \frac{R^2 J_1^2(\mu|\xi + \eta|R)}{|\xi + \eta|^2} \left(\frac{\xi}{1 + \xi^2} + \frac{\eta}{1 + \eta^2} \right)^2 \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta. \quad (57)$$

Если же положить $R = 0$, то, учитывая формулу

$$\int_0^\infty e^{2in(\rho)} J_1(\mu|\xi + \eta|\rho) d\rho = \frac{2^{2in} p^{2in}}{(\mu|\xi + \eta|)^{2in+1}} \frac{\Gamma(1+in)}{\Gamma(1-in)},$$

мы получим известное выражение для сечения излучения фотона ультрарелятивистским π -мезоном в кулоновском поле ядра (при малых углах рассеяния) [28]

$$d\sigma_\gamma^c = \frac{e^2 n^2}{\pi^3} \frac{p'}{p} \frac{1}{\mu^2 |\xi + \eta|^4} \left(\frac{\xi}{1 + \xi^2} + \frac{\eta}{1 + \eta^2} \right)^2 \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta. \quad (58)$$

Мы видим таким образом, что обобщенный принцип Гюйгенса, справедливый, строго говоря, при $R \gg \lambda$, приводит к правильному значению сечения излучения фотона в чисто кулоновском поле точечного ядра ($R = 0$) в области ультрарелятивистских энергий и малых углов рассеяния. Это связано с тем обстоятельством, что при малых углах рассеяния излучение происходит вдали от ядра,

Между тем сильное взаимодействие π -мезона с нуклонным фоном должно приводить к «размазыванию» заряда π -мезона по области, имеющей размеры порядка или меньше чем $1/\mu$. При выполнении условия $r_{\text{eff}} \gg R$ излучение происходит на больших расстояниях от ядра. Поэтому влияние электрических «размеров» π -мезона на излучение фотона должно в этих условиях приводить к появлению формфактора π -мезона [1]. Этот формфактор, который мы будем обозначать через F_π , является функцией инвариантной частоты фотона в системе покоя π -мезона

$$F_\pi = F_\pi \left(\frac{E\omega - \mathbf{pk}}{\mu^2} \right). \quad (52)$$

Если $E \gg \mu$, $\vartheta \ll 1$, то

$$F_\pi = F_\pi \left(\frac{\omega}{2E} + \frac{E\omega}{2\mu^2} \vartheta^2 \right). \quad (52')$$

При малых значениях аргумента формфактор равен единице; при больших значениях аргумента он стремится к нулю.

При введении формфактора необходимо иметь в виду следующие обстоятельства [1]:

1) излучение фотона не зависит от деталей, характеризующих столкновение π -мезона с ядром. Существенным является только знание волновой функции π -мезона вдали от ядра; поэтому ядро не может оказать серьезного влияния на свойства нуклонного вакуума, окружающего π -мезон и, следовательно, в излучении проявляется структура невозмущенной частицы;

2) в случае дифракционного излучения необходимо, чтобы инвариантные частоты фотона в системах покоя, связанных с падающим и дифрагированным мезоном, мало отличались друг от друга. Это приводит при малых углах к условию

$$\left| \vartheta^2 E - (\vartheta - \vartheta')^2 E' - \frac{\mu^2 \omega}{EE'} \right| \frac{\omega}{2\mu^2} \ll 1; \quad (53)$$

3) необходимо, наконец, предполагать, чтобы в процессе дифракции мезоны не испытывали слишком больших ускорений, так как в противном случае это ускорение сможет повлиять на форму π -мезона. Отсюда можно заключить, что введение формфактора налагает условие

$$\frac{\omega^2}{2EE'} + \frac{EE'}{2\mu^2} \vartheta'^2 \ll 1. \quad (53')$$

Это условие вместе с условием (53) показывает, что для введения формфактора должны выполняться неравенства

$$\omega \ll E, \quad \vartheta' < \frac{\mu}{2E}, \quad \vartheta \ll \frac{\mu^2}{E\omega\vartheta'}. \quad (54)$$

а в этой области волновые функции практически могут быть определены из рассмотрения дифракционной картины с помощью принципа Гюйгенса.

Так как излучение происходит вдали от ядра, то при вычислении матричного элемента M можно с самого начала пользоваться асимптотическими выражениями для функций $\psi_p^+(\mathbf{r})$ и $\psi_p^-(\mathbf{r})$ при $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\psi_p^{(+)}(\mathbf{r}) &\sim \frac{1}{\sqrt{2E}} \left\{ e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} + \frac{f^+(\mathbf{p})}{r} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \right\}, \\ \psi_p^{(-)}(\mathbf{r}) &\sim \frac{1}{\sqrt{2E'}} \left\{ e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}} + \frac{f^-(\mathbf{p}')}{r} e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}} \right\},\end{aligned}$$

где $f^+(\mathbf{p})$ и $f^-(\mathbf{p}')$ представляют собой, очевидно, амплитуды упругого рассеяния мезонов. Вычислив M с такими функциями, получим с учетом формфактора F_π следующее выражение для сечения излучения фотона [7]:

$$d\sigma_\gamma = \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{p'}{p} |F_\pi|^2 \left| \frac{\xi}{1+\xi^2} f^-(\mathbf{p}') + \frac{\eta}{1+\eta^2} f^+(\mathbf{p}) \right|^2 \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta. \quad (59)$$

Это выражение показывает, что сечение излучения фотона по существу определяется амплитудой упругого рассеяния (и, конечно, формфактором мезона).

Сравним сечение излучения (50) с сечением упругого рассеяния мезонов. Представив последнее в виде

$$d\sigma_e = \sigma_e(\zeta) d\zeta, \quad \zeta = \frac{p}{\mu} \Phi,$$

где

$$\sigma_e(\zeta) = \left| \frac{RJ_1(\mu\zeta R)}{\zeta} + \frac{2in}{\zeta} \int_0^\infty \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2in} J_1(\mu\xi\rho) d\rho \right|^2, \quad (60)$$

мы видим, что

$$d\sigma_\gamma^0 = \sigma_e(\xi + \eta) \frac{e^2 p'}{4\pi^3 p} \left(\frac{\xi}{1+\xi^2} + \frac{\eta}{1+\eta^2} \right)^2 \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta. \quad (61)$$

Таким образом, сечение излучения отличается от сечения упругого рассеяния множителем

$$dN = \frac{e^2 p'}{4\pi^3 p} \left(\frac{\xi}{1+\xi^2} + \frac{\eta}{1+\eta^2} \right)^2 \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta. \quad (62)$$

Подчеркнем еще раз, что соотношение (61), связывающее сечения упругого рассеяния и рассеяния с излучением фотона, справедливо при ультрарелятивистских энергиях и малых углах рассеяния. Далее мы увидим, что соотношение такого же типа справедливо и для частиц со спином $\frac{1}{2}$.

Перейдем теперь к определению спектрального распределения дифракционного излучения. Проинтегрируем для этого (56) по ξ

и η . Если предполагать, что формфактор не отличается от единицы, то в результате интегрирования мы получим [11]

$$\begin{aligned}d\sigma_\gamma(\omega) &= \frac{e^2}{\pi} \frac{p'}{p} \frac{d\omega}{\omega} \int_0^\infty \varphi(q) \left| \frac{RJ_1(2\mu Rq)}{q} + \frac{in}{\mu} \frac{(2\mu Rq)^{-2in}}{q^2} \right| \times \\ &\times \int_{2\mu Rq}^\infty J_1(\zeta) \zeta^{2in} d\zeta \Big|^2 q dq, \quad (63)\end{aligned}$$

где

$$\varphi(q) = \frac{2q^2 + 1}{q \sqrt{1+q^2}} \ln(q + \sqrt{1+q^2}) - 1.$$

В предельном случае $n \ll 1$ это сечение имеет вид суммы сечения чисто дифракционного излучения ($d\sigma_\gamma^0(\omega)$) и сечения торозного излучения в кулоновском поле протяженного ядра ($d\sigma_\gamma^c(\omega)$)

$$d\sigma_\gamma(\omega) = d\sigma_\gamma^0(\omega) + d\sigma_\gamma^c(\omega), \quad n \ll 1, \quad (64)$$

где

$$\begin{aligned}d\sigma_\gamma^0(\omega) &= \frac{e^2 R^2}{\pi} \frac{p'}{p} \frac{d\omega}{\omega} \int_0^\infty J_1^2(2\mu Rq) \frac{\varphi(q)}{q} dq \equiv \\ &\equiv \frac{e^2}{\pi} \frac{p'}{p} \frac{d\omega}{\omega} R n^\delta(\mu R), \quad (65)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\sigma_\gamma^c(\omega) &= \frac{e^2 n^2}{\pi \mu^2} \frac{p'}{p} \frac{d\omega}{\omega} \int_{q_m}^\infty J_0^2(2\mu Rq) \frac{\varphi(q)}{q^3} dq \equiv \\ &\equiv \frac{e^2}{\pi} \frac{p'}{p} \frac{d\omega}{\omega} \frac{n^2}{\mu^2} n^c(\mu R, q_m).\end{aligned}$$

Интегрирование в последней формуле производится от некоторого минимального значения $q_m = \frac{\mu\omega}{4EE'}$, определяемого из законов сохранения. В случае полного экранирования поля ядра электронами в качестве нижнего предела следует взять $q_m = Z^2 m_e / 137\mu$ (m_e — масса электрона). При этом величина $n^c(\mu R, q_m)$ не будет зависеть от ω . Интегральное сечение излучения фотона с частотой, большей ω , будет равно в этом случае

$$\int_0^E d\sigma_\gamma(\omega) = \frac{e^2}{\pi} \left(R^2 n^\delta + \frac{n^2}{\mu^2} n^c \right) \left(\ln \frac{E}{e\omega} + \frac{\omega}{E} \right), \quad (66)$$

а полная потеря энергии частицей определится формулой

$$\int_0^E \omega d\sigma_\gamma(\omega) = \frac{e^2}{2\pi} E \left(R^2 n^\delta + \frac{n^2}{\mu^2} n^c \right). \quad (67)$$

В предельном случае $R\mu \gg 1$ (для тяжелых ядер) приведенные выражения сильно упрощаются:

$$d\sigma_{\gamma}^{\theta}(\omega) = \frac{2,3}{4\pi} \frac{e^2 R}{\mu} \frac{p'}{p} \frac{d\omega}{\omega}, \quad (68)$$

$$d\sigma_{\gamma}^c(\omega) = \frac{4e^2 n^2}{3\mu^2} \frac{p'}{p} \ln \frac{2EE'}{\mu^2 R\omega} \frac{d\omega}{\omega}.$$

При полном экранировании поля ядра электронами интегральное сечение излучения фотона с частотой, превосходящей ω , равно

$$\int_{\omega}^E d\sigma_{\gamma}(\omega) = \frac{2,3}{4\pi} \frac{e^2 R}{\mu} \left(1 + 2,4 \frac{n^2}{\mu R} \ln \frac{137}{2m_e R Z^3} \right) \left(\ln \frac{E}{e\omega} + \frac{\omega}{E} \right). \quad (69)$$

Приведенные формулы для сечения излучения выведены в предположении абсолютно черного ядра. Для того чтобы учесть полупрозрачность ядра, нужно, как уже разъяснялось ранее при формулировке принципа Гюйгенса, пользоваться функцией $\Omega_B(\rho)$ вместо $\Omega(\rho)$. Если ядро можно считать имеющим резкую границу, то $\Omega_B(\rho)$ определяется формулой (18).

В этом случае результат замены $\Omega(\rho)$ на $\Omega_B(\rho)$ сводится к замене в (63) величины $RJ_1(2\mu Rq)/q$ на

$$2\mu R^2 \int_0^1 (1 - e^{-BR\sqrt{1-y^2}}) J_0(2\mu Rqy) y dy.$$

Мы не будем рассматривать более подробно это выражение.

7. Излучение фотона, связанное с поглощением π -мезона ядром или нуклоном

Наряду с дифракционным излучением фотона π -мезоном, проходящим вдали от ядра, существует второй механизм излучения, связанный с непосредственным захватом π -мезона нуклоном или ядром. Такое излучение мы будем называть излучением остановки [1].

Для определения вероятности излучения остановки нельзя пользоваться методами обычной теории возмущений, так как в конечном состоянии π -мезон поглощается ядром. Поэтому нахождение этой вероятности требует специального рассмотрения. Оно может быть проведено следующим образом [1].

Будем исходить из уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \mu^2 \right) \psi = -2ieA\nabla\psi, \quad (70)$$

описывающего состояние π -мезона (вне ядра) при наличии электромагнитного поля A . В качестве A мы возьмем потенциал, соответствующий излученному фотону с волновым вектором \mathbf{k} , частотой ω и поляризацией ϵ и определяемый формулой (45). Так как заряд $e \ll 1$, то в члене, содержащем электромагнитное поле, можно заменить ψ на волновую функцию падающего π -мезона:

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2E}} e^{i(p\mathbf{r}-Et)}.$$

Таким образом, мы получим неоднородное уравнение для определения функции $\psi = \Phi(\mathbf{r})e^{-iE't}$, $E' = E - \omega$

$$(-E'^2 + \mu^2 + \Delta)\Phi(\mathbf{r}) = -ie \frac{\epsilon\mathbf{p}}{\sqrt{E\omega}} e^{i(p-\mathbf{k})\mathbf{r}}. \quad (70')$$

Замечая, что функция Грина уравнения $(p'^2 + \Delta)\Phi(\mathbf{r}) = 0$ имеет вид

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ip'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

получим, используя (48), следующее решение (70')

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= -\frac{ie}{4\pi} \frac{\epsilon\mathbf{p}}{\sqrt{E\omega}} \int \frac{e^{ip'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{i(p-\mathbf{k})\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' = \\ &= \frac{ie}{2} \frac{\epsilon\mathbf{p}}{\sqrt{E\omega}} \frac{p'}{p' - |\mathbf{p}-\mathbf{k}|} e^{i(p-\mathbf{k})\mathbf{r}}, \quad p' = \sqrt{(E-\omega)^2 - \mu^2}. \end{aligned} \quad (71)$$

Найдя $\Phi(\mathbf{r})$ на поверхности ядра, которое мы будем предполагать абсолютно черным, можно определить поток π -мезонов, поглощаемых ядром, когда на бесконечности имеется один фотон. Этот поток определяется формулой (43) (без множителя e) и равен

$$J = \pi R^2 \frac{e^2}{2} \frac{(\epsilon\mathbf{p})^2}{E\omega p'^2} \frac{p'}{(p' - |\mathbf{p}-\mathbf{k}|)^2}.$$

Разделив его на плотность потока падающих π -мезонов, равную $v = \frac{p}{E}$, и суммируя по поляризациям фотона, найдем дифференциальное сечение излучения остановки

$$d\sigma_{\gamma}^S = \frac{e^2}{\pi} R^2 \frac{\vartheta^2}{\left(\frac{\mu^2}{E^2} + \vartheta^2\right)^2} \frac{E-\omega}{E} F_{\pi} \left(\frac{E\omega\vartheta^2}{2\mu^2} \right) \frac{d\omega}{\omega} d\vartheta, \quad (72)$$

причем по тем же соображениям, которые были приведены при рассмотрении дифракционного излучения, мы ввели формфактор π -мезона $F_{\pi} \left(\frac{E\omega\vartheta^2}{2\mu} \right)$ (ϑ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{p}).

Если $\omega \ll E$, то это выражение соответствует классическому остановочному излучению, возникающему при внезапной остановке заряда, когда время остановки мало.

Проинтегрировав (72) по частотам ω , превосходящим некоторую минимальную частоту ω_m , и по углам, меньшим некоторого максимального значения ϑ_M , получим

$$\sigma_{\gamma, \omega \geq \omega_m}^S = e^2 R^2 \left(\ln \frac{E}{\omega_m} - 1 \right) \ln \frac{E^2 \vartheta_M^2}{e \mu^2}. \quad (73)$$

В отличие от дифракционного излучения, в котором главную роль играют углы ϑ порядка μ/E , в излучении остановки область эффективных углов гораздо больше, но при $\vartheta > \sqrt{\frac{2\mu^2}{E\omega}}$ формфактор может значительно уменьшить сечение. Поэтому для получения полной вероятности излучения остановки с частотой фотона, превосходящей ω_m , нужно проинтегрировать (72) по ϑ при $F_\pi = 1$ от $\vartheta = 0$ до $\vartheta \sim \sqrt{\frac{2\mu^2}{E\omega}}$ и по ω от ω_m до E :

$$\sigma_{\gamma, \omega_m \leq \omega}^S = \int_{\omega=\omega_m}^E \int_{\vartheta=0}^{\sqrt{2\mu^2/E\omega}} d\sigma_\gamma^S = \frac{1}{2} R^2 e^2 \ln^2 \frac{E}{\omega_m}. \quad (74)$$

Сравнение этого выражения с (69) показывает, что остановочное излучение несколько больше дифракционного.

Полная излученная энергия равна [1]

$$E_\gamma = \int_{\omega=0}^E \omega d\sigma_\gamma^S = e^2 R^2 E. \quad (75)$$

При столкновении быстрого π -мезона с нуклоном или ядром наряду с излучением фотона может происходить также образование электронно-позитронной пары. Сечение такого процесса по порядку величины в $1/\alpha = 137$ раз меньше сечения излучения фотона. Однако рассмотрение этого эффекта представляет определенный интерес, так как регистрация фотонов может оказаться более сложной, чем регистрация пар. Мы приведем здесь окончательный результат для интегрального сечения дифракционного образования электронно-позитронных пар в случае тяжелых ядер, когда $\mu R \gg 1$ [23]

$$\sigma_{\pm}^{\partial} = \frac{e^4 R^2}{3\pi} \frac{2,6}{\mu R} \left(\ln \frac{E}{m_e} \right)^2 \left[1 - \frac{11}{3 \ln \frac{E}{m}} \right], \quad (76)$$

где m_e — масса электрона.

Кроме дифракционного образования электронно-позитронной пары π -мезоном, может происходить также образование таких

пар при поглощении π -мезона ядром. Этот процесс можно назвать остановочным образованием пары. Сечение процесса определяется формулой [23]

$$\sigma_{\pm}^S = \frac{2}{3\pi} e^4 R^2 \ln \frac{E}{\mu} \left(\ln \frac{E}{m} \right)^2 \left(1 - \frac{11}{3 \ln \frac{E}{m_e}} \right) \left(1 - \frac{1}{\ln \frac{E}{\mu}} \right). \quad (77)$$

8. Дифракционное образование фотоном π -мезонных пар

Перейдем теперь к рассмотрению дифракционного образования фотоном π -мезонных пар [2, 12, 7]. При больших энергиях фотонов образование пары происходит на больших расстояниях от ядра, поэтому мы, так же как и при рассмотрении дифракционного излучения, можем в качестве волновых функций π^+ - и π^- -мезонов взять функции, получаемые с помощью принципа Гюйгенса и учитывающие как поглощение мезонов ядрами, так и кулоновское поле ядра.

Пользуясь теорией возмущений, легко получить следующее выражение для матричного элемента образования фотоном пары π^+ и π^- :

$$M_{\pm} = ie \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} \int \{ \psi_+^*(eV) \psi_-^* - \psi_-^*(eV) \psi_+^* \} e^{ikr} dr, \quad (78)$$

где \mathbf{k} , ω , \mathbf{e} — волновой вектор, частота и поляризация фотона ψ_+ и ψ_- — волновые функции π^+ - и π^- -мезонов. Так как обе эти частицы образуются в результате процесса рассеяния, то асимптотически на больших расстояниях от ядра функции ψ_+ и ψ_- должны представляться суммами плоской падающей и сходящейся сферической волн. Согласно (36) функции с такой асимптотикой имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_+(r) &= \frac{1}{\sqrt{2E_+}} \left\{ e^{ip_+r} + \frac{p_+}{2\pi i} \int \frac{e^{-ip_+|r-\rho|}}{|r-\rho|} \{1 - \Omega_B^*(\rho)\} d\rho, \right. \\ \psi_-(r) &= \frac{1}{\sqrt{2E_-}} \left\{ e^{ip_-r} + \frac{p_-}{2\pi i} \int \frac{e^{-ip_-|r-\rho|}}{|r-\rho|} \{1 - \Omega_B^*(\rho)\} d\rho. \right. \end{aligned} \quad (78')$$

Легко убедиться, что главную роль в интеграле M_{\pm} играют большие расстояния, порядка $r_{eff} \sim \frac{2p_+p_-}{\mu^2\omega} \gg R$. Иными словами, образование пары происходит вдали от ядра. Поэтому при вычислении матричного элемента M_{\pm} можно сразу пользоваться асимптотическими выражениями для $\psi_+(r)$ и $\psi_-(r)$, справедливыми при $r \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \psi_+(r) &= \frac{1}{\sqrt{2E_+}} \left\{ e^{ip_+r} + f_+(p_+) \frac{e^{ip_+r}}{r} \right\}, \\ \psi_-(r) &= \frac{1}{\sqrt{2E_-}} \left\{ e^{ip_-r} + f_-(p_-) \frac{e^{ip_-r}}{r} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $f_+(p_+)$ и $f_-(p_-)$ — амплитуды упругого рассеяния π^+ - и π^- -мезонов, определяемые общей формулой (28)

$$f_+(p_+) = ip_+ \int_0^\infty \{1 - \Omega_B^{+\pm}(\rho)\} J_0(p_+\vartheta\rho) \rho d\rho, \quad (79)$$

$$f_-(p_-) = ip_- \int_0^\infty \{1 - \Omega_B^{-\pm}(\rho)\} J_0(p_-\vartheta\rho) \rho d\rho.$$

Предполагая ядро абсолютно черным, мы должны положить здесь

$$\Omega^{\pm z}(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho \leq R, \\ e^{2in_{\pm}(\rho)} & \text{при } \rho > R, \end{cases}$$

где

$$\eta_{\pm}(\rho) = n_{\pm} \ln p_{\pm}\rho, \quad n_{\pm} = \pm \frac{Ze^2 E_{\pm}}{p_{\pm}}.$$

Если $|n_{\pm}| \ll 1$, то мы получим в области ультрарелятивистских энергий и малых углов рассеяния следующее выражение для M_{\pm} :

$$M_{\pm} = ie \sqrt{8\pi^3 p_+ p_- / \omega^3} \left(\frac{e\xi}{1+\xi^2} - \frac{e\eta}{1+\eta^2} \right) \frac{R}{2\mu^2 q} J_1(2\mu Rq) +$$

$$+ e \sqrt{8\pi^3 p_+ p_- / \omega^3} \frac{n^2}{\mu^3 q^3} \left\{ \frac{e\xi}{1+\xi^2} [J_0(2\mu Rq) + \right.$$

$$+ 2\mu Rq J_1(2\mu Rq) \ln p_- R] +$$

$$\left. + \frac{e\eta}{1+\eta^2} [J_0(2\mu Rq) + 2\mu Rq J_1(2\mu Rq) \ln p_+ R] \right\}, \quad (80)$$

где ξ и η определяются соотношениями

$$p_+ = p_+ (1 - \xi^2 \mu^2 / 2p_+^2) \frac{k}{\omega} + \mu \xi, \quad k\xi = 0,$$

$$p_- = p_- (1 - \eta^2 \mu^2 / 2p_-^2) \frac{k}{\omega} + \mu \eta, \quad k\eta = 0$$

и

$$q = \frac{1}{2} (\xi + \eta).$$

Усредненное по поляризациям фотона с учетом формфактора мезона сечение образования пары равно [27,12]

$$d\sigma_{\pm} = \frac{e^2 p_+ p_-}{32\pi^2 \omega^3} \left\{ \frac{R^2 J_1^2(2\mu Rq)}{q^2} \left[\frac{\xi}{1+\xi^2} - \frac{\eta}{1+\eta^2} \right]^2 + \right.$$

$$+ \frac{4n^2}{\mu^2 q^4} \left[\frac{\xi}{1+\xi^2} (J_0(2\mu Rq) + 2\mu Rq J_1(2\mu Rq) \ln p_- R) + \right.$$

$$\left. + \frac{\eta}{1+\eta^2} (J_0(2\mu Rq) + 2\mu Rq J_1(2\mu Rq) \ln p_+ R) \right]^2 \left. \right\} \times$$

$$\times |F_{\pi}|^2 dE_+ d\xi d\eta. \quad (81)$$

Первое слагаемое в этой формуле определяет сечение чисто дифракционного образования пар ($d\sigma_{\pm}^{\partial}$), а второе — сечение образования пар в кулоновском поле ядра ($d\sigma_{\pm}^c$). Интерференция между обоими механизмами при образовании пары при $n \ll 1$ отсутствует.

Полагая $F_{\pi} = 1$ и интегрируя по ξ и η , получим при $\mu R \gg 1$ следующие выражения для $d\sigma_{\pm}^{\partial}$ и $d\sigma_{\pm}^c$:

$$d\sigma_{\pm}^{\partial} = \frac{e^2 R^2}{2} \varepsilon (1 - \varepsilon) d\varepsilon \left[\ln \frac{1 + \xi_{\max}^2}{e} + \frac{1}{1 + \xi_{\max}^2} \right],$$

$$d\sigma_{\pm}^c = \frac{2e^2 n^2}{\mu^2} \varepsilon (1 - \varepsilon) d\varepsilon \int_{q_{\min}}^{\infty} \frac{J_0^2(2\mu Rq)}{q^3} \varphi(q) dq, \quad (82)$$

где

$$\varphi(q) = \frac{2q^2 + 1}{q} (1 + q^2)^{-\frac{1}{2}} \ln(q + \sqrt{1 + q^2}) - 1,$$

$$\varepsilon = \frac{E_+}{\omega}, \quad q_{\min} = \frac{\mu}{4\varepsilon(1 - \varepsilon)\omega}.$$

Максимальные значения $\xi_{\max} = \eta_{\max}$ определяются характером взаимодействия мезонов с ядром, а величина q_{\min} — законами сохранения.

Интегральные сечения σ_{\pm}^{∂} и σ_{\pm}^c равны

$$\sigma_{\pm}^{\partial} = \frac{e^2 R^2}{12} \left\{ \ln \frac{1}{e} (1 + \xi_{\max}^2) + \frac{1}{1 + \xi_{\max}^2} \right\},$$

$$\sigma_{\pm}^c = \frac{4}{9} \frac{e^2 n^2}{\mu^2} \ln \frac{2\omega}{\mu^2 R}. \quad (83)$$

Мы видим, что сечение дифракционного образования пары π^+ и π^- , не сопровождающегося возбуждением ядра, в крайне релятивистском случае не зависит от энергии фотона и оказывается пропорциональным квадрату радиуса ядра. По порядку величины оно равно

$$\sigma_{\pm}^{\partial} \sim \frac{e^2}{10} R^2. \quad (83')$$

При больших Z сечение образования пары π^+ и π^- под действием кулоновского поля ядра всего лишь в несколько раз меньше сечения σ_{\pm}^{∂} .

Полученные соотношения справедливы для абсолютно черного ядра. Полупрозрачность ядра уменьшает упругое рассеяние, а следовательно, и сечение образования пар. Соответствующие формулы, однако, очень сложны, и мы их здесь не приводим.

Заметим в заключение, что виртуально родившаяся пара π^+ и π^- не может превратиться в два π^0 -мезона [2]. Это связано с законом сохранения зарядовой четности. Действительно, система,

состоящая из двух π^0 -мезонов, зарядово-четна, а фотон — зарядово-нечетен. Что же касается ядра, то оно выполняет только функции черного тела, и должно считаться зарядово-четным. Поэтому процесс $\gamma \rightarrow 2\pi^0$ не может иметь места в рассматриваемых условиях, т. е. при $E \gg \mu$, и в предположении, что ядро является абсолютно черным. Отсюда следует, что вероятность процесса $\gamma \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ значительно больше вероятности процесса $\gamma \rightarrow 2\pi^0$.

До сих пор мы рассматривали дифракционное образование π -мезонных пар фотоном. Однако дифракционное образование π -мезонных, а также и нуклонных пар может иметь место и при рассеянии ядром быстрых π -мезонов и нуклонов (с энергиями $E > 10^9$ эв) [3]. Такие частицы сильно поглощаются ядром, в результате чего возникают дифрагированные волны. Дифракционное же рассеяние может сопровождаться испусканием π -мезонов, а возможно, и нуклонных пар. Так как при этом генерация новых частиц осуществляется частицей, не проникающей внутрь ядра, то этот процесс можно назвать внешней генерацией.

Импульс, передаваемый в таком процессе ядру, относительно мал, порядка или меньше μ (μ — масса мезона); поэтому ядро не возбуждается, и в процессе генерации не должно возникать медленных нуклонов. Возникающие частицы должны в основном двигаться вдоль направления скорости первичной частицы.

Если первичная частица с массой M генерирует мезон с энергией E , то ее энергия должна значительно превосходить величину $A^{1/2}M^2/\mu$. По порядку величины сечение образования пары составляет

$$\sigma_{\pm} \sim g^2 A^{1/2}/M^2,$$

где g — константа псевдоскалярной связи.

9. Дифракционное излучение фотонов частицами со спином $1/2$.

Дифракционное образование фотоном нуклонных пар

Перейдем теперь к рассмотрению дифракционного и остановочного излучения фотона частицей со спином $1/2$ [4]. Такой процесс может иметь место в случае протонов, рассеиваемых и поглощаемых ядрами. Мы будем предполагать, что протоны подчиняются уравнению Дирака, причем вначале не будем учитывать аномального магнитного момента протона.

Для определения сечения дифракционного излучения фотонов протонами можно воспользоваться тем же методом, с помощью которого изучалось дифракционное излучение фотонов π -мезонами. При этом волновую функцию протона в начальном состоянии следует взять, как было разъяснено в п. 5, в виде (41), а волновую функцию конечного состояния в виде (42). Ядро будем предполагать абсолютно черным заряженным шариком.

Матричный элемент, соответствующий излучению фотона, может быть записан в виде

$$S_{i \rightarrow f}^{(1)} = -2\pi i U_{i \rightarrow f} \delta(E - E' - \omega),$$

где

$$U_{i \rightarrow f} = \frac{e}{\sqrt{2\omega}} \int \bar{\psi}_p^{(-)}(\mathbf{r}) \hat{e} e^{-ikr} \psi_p^{(+)}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

и \mathbf{p} и \mathbf{p}' — импульсы протона в начальном и конечном состояниях.

В релятивистском случае, который мы рассматриваем, главную роль играют малые углы между \mathbf{p} и \mathbf{k} и \mathbf{p} и \mathbf{p}' . При этом выражение для $U_{i \rightarrow f}$ сильно упрощается:

$$U_{i \rightarrow f} = \frac{e}{\sqrt{2\omega}} \int_0^{\infty} (1 - e^{2in(\rho)}) J_0(|k\boldsymbol{\theta} + \mathbf{p}'\boldsymbol{\theta}'|\rho) \rho d\rho \times \\ \times \bar{u}_{p'} \left\{ \frac{\hat{e}(i\hat{f}' - m)\hat{n}}{p^2 - f'^2} + \frac{\hat{n}'(i\hat{f} - m)\hat{e}}{p'^2 - f^2} \right\} u_p,$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$, $\mathbf{n}' = \mathbf{p}'/p'$, $f = p - k$, $f' = p' + k$, а двумерные угловые векторы $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\theta}'$ определяются соотношениями

$$\mathbf{p}' = (p'\mathbf{n})\mathbf{n} + p'\boldsymbol{\theta}', \quad \mathbf{k} = (k\mathbf{n})\mathbf{n} + k\boldsymbol{\theta}.$$

Дифференциальное сечение излучения фотона равно

$$d\sigma_{\gamma} = \frac{2\pi}{v} |U_{i \rightarrow f}|^2 \delta(E - E' - \omega) \frac{d\mathbf{p}' d\mathbf{k}}{(2\pi)^3},$$

где v — скорость падающего протона.

Усредняя сечение излучения по ориентациям спина протона в начальном состоянии и суммируя по ориентациям спина в конечном состоянии, получим [11]

$$d\sigma_{\gamma} = \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{p'}{p} \left| m \int_0^{\infty} (1 - e^{2in(\rho)}) J_0(m|\xi + \eta|\rho) \rho d\rho \right|^2 \times \\ \times \left\{ \left(\frac{\xi}{1 + \xi^2} + \frac{\eta}{1 + \eta^2} \right)^2 + \frac{\omega}{2pp'} \frac{(\xi + \eta)^2}{(1 + \xi^2)(1 + \eta^2)} \right\} \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta, \quad (84)$$

где

$$\xi = \frac{p}{m} \boldsymbol{\theta}, \quad \eta = \frac{p'}{m} (\boldsymbol{\theta}' - \boldsymbol{\theta}).$$

При $n \ll 1$ это выражение приобретает вид

$$d\sigma_{\gamma} = d\sigma_{\gamma}^{\theta} + d\sigma_{\gamma}^c,$$

где

$$d\sigma_{\gamma}^{\theta} = \frac{e^2 p'}{4\pi^3 p} \frac{R^2 J_1^2(m|\xi + \eta|R)}{|\xi + \eta|^2} \left\{ \left(\frac{\xi}{1 + \xi^2} + \frac{\eta}{1 + \eta^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\omega^2}{2pp'} \frac{|\xi + \eta|}{(1 + \xi^2)(1 + \eta^2)} \right\} \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta, \quad (85)$$

$$d\sigma_{\gamma}^c = \frac{e^2 n^2}{\pi^2 m^3} \frac{p'}{p} \frac{J_0^2(m|\xi + \eta|R)}{|\xi + \eta|^4} \left\{ \left(\frac{\xi}{1 + \xi^2} + \frac{\eta}{1 + \eta^2} \right)^2 + \frac{\omega^2}{2pp'} \frac{|\xi + \eta|^2}{(1 + \xi^2)(1 + \eta^2)} \right\} \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta. \quad (86)$$

Величина $d\sigma_{\gamma}^{\delta}$ представляет собой сечение дифракционного излучения, а $d\sigma_{\gamma}^c$ — сечение излучения в кулоновском поле ядра.

Таким образом, при $n \ll 1$ процессы дифракционного излучения и излучения в кулоновском поле не интерферируют и соответствующие им сечения складываются.

Сравнение выражения для $d\sigma_{\gamma}^{\delta}$ с выражением (57) для сечения дифракционного излучения фотона скалярной частицей показывает, что в $d\sigma_{\gamma}^{\delta}$ по сравнению с (57) входит добавочный член

$$\frac{e^2}{4\pi^3} \frac{p'}{p} \frac{\omega^2}{2pp'} \frac{(\xi + \eta)^2}{(1 + \xi^2)(1 + \eta^2)}.$$

Мы видим, что влияние спина сказывается только в области больших частот. Однако при этом частицу (протон) нельзя, строго говоря, рассматривать как точечную и необходимо учитывать ее «размазанность», обусловленную взаимодействием протона с мезонным вакуумом. Как мы видели в предыдущих пунктах, влияние размеров частицы в некоторых условиях приводит к появлению формфактора F_p , зависящего от инвариантной частоты $\frac{1}{m}(E\omega - \mathbf{pk})$.

Предполагая, что размеры протона порядка $1/\mu$ (μ — масса мезона), мы можем рассматривать протон как точечную частицу только в том случае, если $\frac{1}{m\mu}(E\omega - \mathbf{pk}) \ll 1$, т. е. если $\omega \ll \frac{\mu}{m} E$. С учетом формфактора протона выражение (84) должно быть умножено на $|F_p|^2$.

Проинтегрированное по углам сечение излучения $d\sigma_{\gamma}^{\delta}$ без фактора $|F_p|^2$ равно

$$d\sigma_{\gamma}^{\delta}(\omega) = d\sigma_{\gamma}^{\delta_0}(\omega) + \frac{e^2}{\pi} R^2 \frac{\omega d\omega}{p^2} \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(2mRx)}{\sqrt{1+x^2}} \ln \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{-x + \sqrt{1+x^2}} dx, \quad (87)$$

где $d\sigma_{\gamma}^{\delta_0}$ — сечение дифракционного излучения фотона частицей со спином нуль.

Мы считали ядро абсолютно черным. «Серость» ядра может быть учтена заменой множителя $\frac{R}{|\xi + \eta|} J_1(mR|\xi + \eta|)$ в (85) выражением

$$R^2 m \int_1^{\infty} (1 - e^{-(b-2i(\nu-1)K)(RV\sqrt{1-z^2})}) J_0(mR|\xi + \eta|z) z dz. \quad (85')$$

Отметим, что независимость сечений от деталей диффузности края ядра имеет место только в том случае, если передаваемый ядру импульс не превосходит по порядку величины $1/\mu$. Поэтому диффузность края ядра в процессах с участием нуклонов имеет более важное значение, чем в процессах с учетом π -мезонов.

Положив в (85') радиус ядра R равным нулю, мы получим формулу Бете — Гайтлера для сечения тормозного излучения фотона протоном в чисто кулоновском поле ядра в области ультрарелятивистских энергий и малых углов рассеяния

$$d\sigma_{\gamma}^{BH} = \frac{e^2 n^2 p'}{\pi^3 m^2 p} \frac{1}{|\xi + \eta|^4} \left\{ \left(\frac{\xi}{1 + \xi^2} + \frac{\eta}{1 + \eta^2} \right)^2 + \frac{\omega^2}{2pp'} \frac{(\xi + \eta)^2}{(1 + \xi^2)(1 + \eta^2)} \right\} \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta. \quad (86')$$

То обстоятельство, что, используя при вычислении $d\sigma_{\gamma}$ волновые функции протона, определяемые обобщенным принципом Гюйгенса, мы получаем в области больших энергий и малых углов рассеяния правильную формулу Бете—Гайтлера, связано с тем, что излучение фотона происходит вдали от ядра, где волновые функции практически могут быть заменены своими асимптотическими представлениями.

Сечение излучения фотона в области больших энергий и малых углов рассеяния фактически определяется амплитудой упругого рассеяния. Легко связать сечение излучения фотона с сечением упругого рассеяния $d\sigma_e$. Положив

$$d\sigma_e = \sigma_e(\zeta) d\zeta, \quad \zeta = \frac{p}{m} \theta,$$

можно представить $d\sigma_{\gamma}$ в виде [13]

$$d\sigma_{\gamma} = \sigma_e(\xi + \eta) \frac{e^2 p'}{4\pi^3 p} \left\{ \left(\frac{\xi}{1 + \xi^2} + \frac{\eta}{1 + \eta^2} \right)^2 + \frac{\omega^2}{2pp'} \frac{(\xi + \eta)^2}{(1 + \xi^2)(1 + \eta^2)} \right\} \frac{d\omega}{\omega} d\xi d\eta. \quad (88)$$

Интегрируя $d\sigma_{\gamma}$ по углам ξ и η , найдем спектральное распределение излучения:

$$d\sigma_{\gamma}(\omega) = \frac{4e^2 p' d\omega}{\pi p \omega} \int_{q_0}^{\infty} \sigma_e(2q) \left(\frac{2q^2 + 1}{q \sqrt{1 + q^2}} \ln(q + \sqrt{1 + q^2}) - 1 + \frac{\omega^2}{pp'} \frac{q}{\sqrt{1 + q^2}} \ln(q + \sqrt{1 + q^2}) \right) q dq, \quad (88')$$

где $q = \frac{1}{2} |\xi + \eta|$ и минимальное значение q определяется из законов сохранения: $q_0 = \frac{m\omega}{4EE'}$.

Наряду с дифракционным излучением фотона протоном может происходить процесс дифракционного образования фотоном пар протон — антипротон [22]. Матричный элемент этого процесса равен

$$S_{i \rightarrow f}^{(1)} = -\frac{e}{\sqrt{2\omega}} \int \bar{\psi}_p^{(-)}(\mathbf{y}e) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \psi_{p'}^{(-)} d^4x,$$

где $\psi_p^{(-)}$ и $\psi_{p'}^{(-)}$ — волновые функции протона и антипротона с импульсами p и p' . Так как обе эти частицы образуются, то асимптотически на больших расстояниях от ядра функции $\psi_p^{(-)}$ и $\psi_{p'}^{(-)}$ должны иметь вид суммы плоской и сходящейся волн.

Мы приведем здесь только результат вычисления сечения образования пары в случае малых углов между p и k и p' и k и ультрарелятивистских энергий частиц, $E, E' \gg m$ (m — масса протона); ядро предполагается абсолютно черным [22]:

$$d\sigma_{pp} = \frac{e^2}{32\pi^3} \frac{EE'}{\omega^3} \frac{R^2 J_1^2(mR|\xi + \eta|)}{|\xi + \eta|^2} \left\{ \frac{2(\xi + \eta)^2}{(1 + \xi^2)(1 + \eta^2)} + \frac{\omega^2}{EE'} \left(\frac{\xi}{1 + \xi^2} - \frac{\eta}{1 + \eta^2} \right)^2 + \left(2 + \frac{\omega^2}{EE'} \right) \left(\frac{1}{1 + \xi^2} + \frac{1}{1 + \eta^2} \right)^2 \right\} dE' d\xi d\eta, \quad (89)$$

где ξ и η связаны с p и p' соотношениями

$$\begin{aligned} p &= (p\mathbf{x})\mathbf{x} + m\xi, & p' &= (p'\mathbf{x})\mathbf{x} + m\eta; \\ \mathbf{x} &= \frac{\mathbf{k}}{k}, & \xi\mathbf{x} &= \eta\mathbf{x} = 0; \\ d\xi &= \left(\frac{E}{m}\right)^2 d\omega, & d\eta &= \left(\frac{E'}{m}\right)^2 d\omega' \end{aligned}$$

($d\omega$ и $d\omega'$ — телесные углы, в которых лежат p и p').

10. Остановочное излучение фотонов частицами со спином $1/2$

Рассмотрим теперь излучение фотонов, сопровождающееся непосредственным поглощением быстрых протонов ядрами [5, 6]. Будем по-прежнему предполагать, что для оценки вероятности излучения остановки протон можно описывать уравнением Дирака, однако теперь мы будем учитывать аномальный магнитный момент протона μ'

$$\left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - ie\gamma_\nu A_\nu - i\mu' \gamma_\nu \gamma_\rho F_{\nu\rho} + m \right) \psi = 0.$$

Здесь $F_{\nu\rho}$ — тензор электромагнитного поля и A_ν — потенциал поля, связанный с излучением фотона k . Так же, как и при рассмотрении излучения остановки в случае π -мезона, мы заменим

в членах, содержащих поле, ψ на $\psi_0 = ue^{i(p\mathbf{r} - Et)}$, где u — спинорная амплитуда падающей протонной волны. Таким образом мы получим неоднородное уравнение для $\psi = \Phi(\mathbf{r})e^{-iE't}$, имеющее вид

$$\left(\gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \gamma_4 E' + m \right) \Phi = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (ie\hat{e} + 2\mu'\hat{k}\hat{e}) \Phi_0(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

где

$$E' = E - \omega, \quad \Phi_0(\mathbf{r}) = ue^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}, \quad \hat{a} = \gamma_\nu a_\nu.$$

Найдя из этого уравнения $\Phi(\mathbf{r})$ на поверхности ядра, которое мы предполагаем абсолютно черным, можно определить поток протонов, поглощаемых ядром, когда на бесконечности имеется один фотон. Плотность этого потока определяется выражением

$$j = \left(\bar{\Phi} \frac{\gamma p}{p} \Phi \right)_{r=R}, \quad \hat{\Phi} = \Phi^* \gamma_4,$$

а сечение излучения остановки равно

$$d\sigma_{\gamma}^S = \frac{j\pi R^2}{v} \frac{\omega^2 d\omega d^2\theta}{(2\pi)^3},$$

где v — скорость протонов и $d\theta$ — элемент телесного угла, в котором испускается фотон.

Решение уравнения для $\Phi(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\sqrt{2\omega}} \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (ie\hat{e} + 2\mu'\hat{k}\hat{e}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Phi_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

где $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — функция Грина уравнения Дирака

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \gamma_4 E' - m \right) \frac{e^{i\mathbf{p}'\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad p' = \sqrt{E'^2 - m^2}.$$

Используя это выражение, получим

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{2}{2\sqrt{2\omega}} [i(p - \mathbf{k})\gamma - E'\gamma_4 - m] [ie\hat{e} + 2\mu'\hat{k}\hat{e}] \times \\ &\times u \frac{e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}}}{p'(p' - |\mathbf{p}-\mathbf{k}|)}. \end{aligned}$$

Приведем результат вычислений дифференциального сечения излучения остановки [6]

$$d\sigma_{\gamma}^S = \frac{R^2}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{\omega} \frac{p^2}{(m^2 + p^2\theta^2)^2} \left\{ e^2 \left[p(p - \omega)\theta^2 + \frac{\omega^2}{2p^2} (m^2 + p^2\theta^2) \right] + 2\mu'^2 \frac{\omega^2}{p^2} (m^2 + p^2\theta^2) - me\mu' \frac{\omega^2}{p^2} (m^2 + p^2\theta^2) \right\} d^2\theta. \quad (90)$$

Здесь первое слагаемое в квадратных скобках определяет излучение остановки для частиц со спином нуль, а второе обуслов-

лено спином протона. Последние два слагаемых связаны с наличием аномального магнитного момента протона.

Мы видим, что влияние спина и аномального магнитного момента существенно только в области больших частот. При этом, как уже отмечалось, выше, протон нельзя, строго говоря, рассматривать как точечный заряд, и необходимо учитывать формфактор протона F_p .

Сечение излучения с учетом формфактора протона определяется произведением (90) на $|F_p|^2$. Величина F_p является функцией инвариантной частоты фотона

$$F_p = F_p \left(\frac{E\omega - \mathbf{pk}}{m\mu} \right) = F_p \left[\frac{\omega}{2E} \left(1 + \frac{E^2\theta^2}{m^2} \right) \frac{m}{\mu} \right]. \quad (90')$$

Отметим в заключение, что изучение излучения фотона протоном так же, как и π -мезоном, может дать важные сведения о формфакторах частиц, т. е. об их структуре.

11. Дифракционные явления при рассеянии быстрых дейтронов ядрами

Мы рассматривали до сих пор дифракционные явления, в которых участвовали точечные частицы. Как указывалось во введении, специфическими особенностями должно отличаться дифракционное рассеяние слабо связанных сложных частиц, таких, например, как дейтроны.

Помимо чисто упругого рассеяния дейтронов, аналогичного дифракционному рассеянию точечных частиц, в случае дейтронов должно иметь место еще дифракционное расщепление, происходящее вдали от ядра [15—17]. Этот эффект обусловлен малой энергией связи дейтрона, благодаря чему сравнительно небольшое изменение импульса дейтрона при рассеянии может привести к его развалу.

Дифракционное рассеяние и расщепление дейтрона может быть исследовано аналогично исследованию дифракционного рассеяния точечных частиц.

Пусть на ядро падают дейтроны с волновым вектором \mathbf{K} . Движение центра инерции дейтрона в плоскости, перпендикулярной \mathbf{K} (ось z), описывается функцией

$$\psi_{\mathbf{x}}(\rho_{\mathbf{d}}) = e^{i\mathbf{x}\rho_{\mathbf{d}}},$$

где \mathbf{x} и $\rho_{\mathbf{d}}$ — проекции волнового вектора рассеянного дейтрона и радиус-вектора центра инерции дейтрона на плоскость, перпендикулярную \mathbf{x} (нормировочную длину мы предполагаем здесь и в дальнейшем равной единице). Падающим дейтронам соответствует волновая функция

$$\psi_0(\rho_{\mathbf{d}}) = 1.$$

Для исследования дифракции дейтронов нужно, кроме движения центра инерции, учитывать еще относительное движение нейтрона и протона в дейтроне.

Связанное состояние дейтрона описывается функцией

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad \alpha = \frac{1}{2R_{\mathbf{d}}},$$

где $R_{\mathbf{d}}$ — радиус дейтрона.

Относительное движение нейтрона и протона, освобождающихся в результате расщепления, может быть описано функциями

$$\varphi_{\mathbf{f}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{f}\mathbf{r}} + \frac{a}{r} e^{-i\mathbf{f}\mathbf{r}},$$

где $\hbar\mathbf{f}$ — импульс относительного движения частиц и $a = -1/\alpha - i\mathbf{f}$ — длина рассеяния нейтрона протоном в S -состоянии (предполагается, что взаимодействие между нейтроном и протоном имеет место только в S -состоянии; сумма плоской и сходящейся сферической волн соответствует рождению частиц). Функции $\varphi_{\mathbf{f}}(\mathbf{r})$ вместе с функцией $\varphi_0(\mathbf{r})$, описывающей связанное состояние системы, образуют полную систему ортонормированных функций, удовлетворяющих соотношению

$$\varphi_0(\mathbf{r})\varphi_0(\mathbf{r}') + \int \varphi_{\mathbf{f}}^*(\mathbf{r})\varphi_{\mathbf{f}}(\mathbf{r}') \frac{d\mathbf{f}}{(2\pi)^3} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Так как дейтрон представляет собой слабо связанную систему, в которой нейтрон и протон проводят большую часть времени вне области действия ядерных сил, то картина дифракции дейтронов на абсолютно черном ядре определяется разложением функции

$$\Psi = \Omega(\rho_{\mathbf{n}})\Omega(\rho_{\mathbf{p}})\varphi_0(\mathbf{r})\psi_0(\rho_{\mathbf{d}}),$$

описывающей дейтрон при наличии поглощающего ядра, по полной системе функций $\psi_{\mathbf{x}}(\rho_{\mathbf{d}})\varphi_0(\mathbf{r})$, $\psi_{\mathbf{x}}(\rho_{\mathbf{d}})\varphi_{\mathbf{f}}(\mathbf{r})$. При этом множители $\Omega(\rho_{\mathbf{n}}) \equiv \Omega_{\mathbf{n}}$ и $\Omega(\rho_{\mathbf{p}}) \equiv \Omega_{\mathbf{p}}$, где $\rho_{\mathbf{n}}$ и $\rho_{\mathbf{p}}$ — проекции радиус-векторов нейтрона и протона на плоскость, перпендикулярную оси z учитывают «исчезновение» дейтрона как целого, если по крайней мере одна из частиц, т. е. нейтрон или протон, попадает в сферу действия ядра.

Коэффициенты $A_{\mathbf{x}}$ и $A_{\mathbf{x}\mathbf{f}}$ этого разложения

$$\Psi = \sum_{\mathbf{x}} A_{\mathbf{x}}\psi_{\mathbf{x}}(\rho_{\mathbf{d}})\varphi_0(\mathbf{r}) + \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{f}} A_{\mathbf{x}\mathbf{f}}\psi_{\mathbf{x}}(\rho_{\mathbf{d}})\varphi_{\mathbf{f}}(\mathbf{r})$$

имеют смысл амплитуд вероятности дифракционного рассеяния и дифракционного расщепления дейтрона.

Так как функции ψ_n и ψ_p образуют ортонормированные системы функций, то

$$A_n = \iint \varphi_0(r) \psi_n^*(\rho_d) \Omega_n \Omega_p \psi_0(\rho_d) \varphi_0(r) d\rho_d dr, \quad (91)$$

$$A_{nf} = \iint \varphi_f^*(r) \psi_n^*(\rho_d) \Omega_n \Omega_p \psi_0(\rho_d) \varphi_0(r) d\rho_d dr. \quad (91')$$

Амплитуда упругого рассеяния связана с A_n соотношением (8). Ее можно представить в виде

$$f(\theta) = iK \left\{ 2 \frac{4\alpha}{\kappa} \operatorname{arctg} \frac{\kappa}{4\alpha} \frac{RJ_1(\kappa R)}{\chi} - \frac{1}{2\pi} \int \frac{4\alpha}{|2g - \kappa|} \operatorname{arctg} \frac{|2g - \kappa|}{4\alpha} \frac{RJ_1(gR)}{g} \frac{RJ_1(|\kappa - g|R)}{|\kappa - g|} dg \right\}. \quad (92)$$

Легко убедиться на основании (91), что амплитуда рассеяния на нулевой угол равна

$$f(0) = i \frac{K}{2\pi} \iint \varphi_0^2(r) \{\omega_n + \omega_p - \omega_n \omega_p\} d\rho_d dr, \quad (92')$$

где

$$\omega_n = 1 - \Omega_n, \quad \omega_p = 1 - \Omega_p.$$

Зная эту величину, можно найти полное сечение всех процессов взаимодействия дейтрона с ядром, а именно: упругого рассеяния, дифракционного расщепления, реакции срыва протона и нейтрона и, наконец, поглощения дейтрона ядром. Это полное сечение связано с $f(0)$ соотношением $\sigma_t = 4\pi\lambda \operatorname{Im} f(0)$, где λ — длина волны дейтрона.

Подставляя в (92') выражение для $\varphi_0(r)$, можно показать, что

$$\sigma_t = 4\pi R^2 \left\{ 1 - \int_0^\infty \frac{p}{\xi} \operatorname{arctg} \frac{\xi}{p} \frac{J_1^2(\xi)}{\xi} d\xi \right\}, \quad (93)$$

где $p = \frac{R}{R_d}$. При $p \rightarrow \infty$ суммарное сечение, как и следовало ожидать, равно

$$\sigma_t = 2\pi R^2, \quad p \rightarrow \infty.$$

С учетом членов порядка $1/p$ сечение σ_t равно

$$\sigma_t = 2\pi R^2 + \pi R R_d, \quad R \gg R_d. \quad (93')$$

При любом значении p имеют место соотношения

$$\sigma_e + \sigma_d = \frac{1}{2} \sigma_t,$$

$$\sigma_n + \sigma_p + \sigma_a = \frac{1}{2} \sigma_t,$$

где σ_n и σ_p — сечения срыва нейтрона и протона, σ_a — сечение поглощения обеих частиц ядром и σ_d — сечение дифракционного расщепления.

12. Сечения упругого рассеяния и дифракционного расщепления дейтронов. Сечения реакций срыва при высоких энергиях

Приведем выражения для сечений различных процессов взаимодействия быстрых дейтронов с ядрами [17].

Дифференциальное сечение дифракционного упругого рассеяния быстрых дейтронов при $p \gg 1$ в предположении, что ядро является абсолютно черным, равно

$$d\sigma_e = 2\pi R^2 \left\{ \left(\frac{2p}{\kappa'} \operatorname{arctg} \frac{\kappa'}{2p} \right)^2 \frac{J_1^2(\kappa')}{\kappa'} + \frac{1}{2p} J_1(\kappa') J_0(\kappa') \right\} d\kappa', \quad \kappa' \ll p, \quad (95)$$

где $\kappa' = \kappa R$.

Интегральное сечение упругого дифракционного рассеяния при $p \gg 1$ равно

$$\sigma_e = \pi R^2 + \frac{2\pi}{3} (1 - \ln 2) R R_d, \quad R_d \gg R. \quad (95')$$

Дифференциальное сечение дифракционного расщепления дейтрона связано с A_{nf} соотношением

$$d\sigma_d = |A_{nf}|^2 \frac{d\kappa d\xi}{(2\pi)^5}.$$

Предполагая, что ядро является абсолютно черным, и считая $p \gg 1$, получим следующее выражение для полного сечения дифракционного расщепления дейтрона:

$$\sigma_d = \frac{\pi}{3} \left(2 \ln 2 - \frac{1}{2} \right) R R_d, \quad R_d \ll R, \quad \lambda \ll R_d. \quad (96)$$

Распределение продуктов расщепления по энергиям в этих же предположениях имеет следующий вид:

$$\sigma_d = \frac{2}{3} R R_d \int_0^\infty u F(u) du, \quad u = \frac{1}{\alpha},$$

$$F(u) = \frac{3}{(1+u^2)^2} \left\{ 1 + \frac{2u}{1+u^2} \arcsin \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \right\} - 16(1 - \ln 2) \frac{u}{(1-u^2)^3}. \quad (97)$$

Как указывалось выше, помимо упругого рассеяния и дифракционного расщепления дейтрона возможны также реакции срыва нейтрона и протона, а также поглощение обеих частиц ядром.

Рассмотрим прежде всего реакцию, в результате которой нейтрон освобождается, а протон поглощается ядром. Этот процесс можно описать волновой функцией $\Psi = \Omega_n \psi_0(\rho_n) \varphi_0(r)$, где $\varphi_0(r)$ — волновая функция основного состояния дейтрона, $\psi_0(\rho_n)$ — часть волновой функции, описывающая движение центра тяжести дейтрона в плоскости, перпендикулярной импульсу падающего дейтрона.

Разложив Ψ в интервал Фурье по функциям e^{-ikr_n} (r_n — радиус-вектор нейтрона), найдем амплитуду вероятности $a_k(r_p)$ того, что нейтрон будет обладать волновым вектором k , а протон будет находиться в точке r_p :

$$a_k(r_p) = \int e^{-ikr_n} \Omega_n \varphi_0(r) dr_n.$$

Интегрируя $|a_k(r_p)|^2$ по $d\rho_p$ в пределах от $\rho_p = 0$ до $\rho_p = R$, найдем дифференциальное сечение срыва, при котором волновой вектор нейтрона лежит в интервале dk [21]

$$d\sigma_n = \frac{dk}{(2\pi)^3} \int_{\rho_p} |a_k(\rho_p)|^2 d\rho_p = \frac{dk}{(2\pi)^3} \int d\rho_p (1 - |\Omega_p|^2) |a_k(\rho_p)|^2, \quad (98)$$

где $\Omega_p = \Omega(\rho_p)$.

Полное сечение срыва равно [21]

$$\sigma_n = \iint d\rho_p dr_n (2 - |\Omega_p|^2) |\Omega_n|^2 \varphi_0^2(r). \quad (98')$$

Разлагая $1 - |\Omega(\rho)|^2$ в интеграл Фурье

$$1 - |\Omega(\rho)|^2 = \int \frac{RJ_1(gR)}{2\pi g} e^{ig\rho} dg,$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя, найдем

$$\sigma_n = \pi R^2 \left\{ 1 - 2 \int_0^\infty \frac{p}{\xi} \operatorname{arctg} \frac{\xi}{p} \frac{J_1^2(\xi)}{\xi} d\xi \right\}. \quad (99)$$

В предельном случае больших p эта формула переходит в формулу Сербера

$$\sigma_n = \pi \frac{RR_n}{2}, \quad R_n \ll R. \quad (99')$$

Зависимость σ_n от p представлена на рис. 5. В случае свинца $p = 4,2$ и формула (99) дает $\sigma_n = 3,2 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$, в то время как формула Сербера дает $\sigma_n = 2,7 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$. При $p = 1$

$$\sigma_n = 5,8 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2 \text{ и } \sigma_n' = 6,9 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2.$$

Формулой (99) определяется также сечение срыва протона σ_p . Чтобы найти распределение освобождающихся нейтронов по энер-

гиям, нужно проинтегрировать (98) по перпендикулярным составляющим вектора k :

$$d\sigma_n(k_z) = \frac{dk_z}{2\pi} \int \frac{d\kappa}{(2\pi)^2} \int d\rho_p \{1 - |\Omega_p|^2\} \times \\ \times \left| \int d\rho_n e^{-i\kappa\rho_n} \Omega_n \int dz e^{ik_z z} \varphi_0(r) \right|^2, \quad (100)$$

где κ — проекция вектора k на плоскость, перпендикулярную p_0 . Используя полноту функций $e^{i\kappa\rho_n}$ и раскладывая $|\Omega_n|^2$, $|\Omega_p|^2$ в интегралы Фурье, получим окончательно

$$d\sigma_n(k_z) = F(k_z) dk_z, \quad k_z = \frac{E - \frac{E_0}{2}}{\hbar \sqrt{\frac{E_0}{M}}}, \quad (100')$$

$$F(k_z) = \frac{8pR^3}{\pi} \int_0^1 K_0^2 \left(p \sqrt{1 + \frac{k_z^2}{\alpha^2}} \zeta \right) (\operatorname{arcsin} \zeta + \zeta \sqrt{1 - \zeta^2}) \zeta d\zeta,$$

где $K_0(\zeta)$ — модифицированная функция Бесселя, E_0 — энергия падающего дейтрона и M — масса нейтрона.

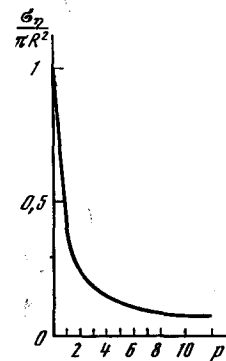


Рис. 5

В предельном случае $p \gg 1$ эта формула переходит в формулу Сербера

$$d\sigma_n'(k_z) = \frac{\pi}{4} RR_n \frac{\alpha^2 dk_z}{(\alpha^2 + k_z^2)^{3/2}}. \quad (101)$$

Определим теперь сечение поглощения дейтрона σ_a . Так как

$$\sigma_a + \sigma_n + \sigma_p = \frac{1}{2} \sigma_t,$$

то, используя (93) и (99), мы получим

$$\sigma_a = 2\pi R^2 \int_0^\infty \frac{p}{\xi} \operatorname{arctg} \frac{\xi}{p} \frac{J_1^2(\xi)}{\xi} d\xi. \quad (102)$$

При $p \gg 1$

$$\sigma_a = \pi R^2 - \pi \frac{RR_p}{2}. \quad (102')$$

Учтем теперь влияние кулоновского поля ядра на рассеяние и расщепление дейтрона. Для этого нужно заменить в формулах (91), (91') $\Omega(\rho_p)$ на $\Omega_B^z(\rho_p)$.

Если ядро считать по-прежнему абсолютно черным, то дифференциальное сечение упругого рассеяния дейтронов, энергия которых значительно больше высоты кулоновского барьера, определяется следующей общей формулой:

$$d\sigma_e = |f(\vartheta)|^2 d\vartheta,$$

$$f(\vartheta) = -iK \left\{ \frac{4\alpha}{\kappa} \operatorname{arctg} \frac{\kappa}{4\alpha} \int_R^\infty e^{2in(\rho)} J_0(\kappa\rho) \rho d\rho - \frac{RJ_0(\kappa R)}{8\alpha} e^{2in(R)} \right\}, \quad (103)$$

где $\kappa = K\vartheta$. При этом предполагается, что $E \gg \frac{Ze^2}{R}$, $p \gg 1$.

Приведем некоторые асимптотические формулы [17].

Если $n \ll 1$ и $1 \ll p \ll l_0 \equiv KR$, то

$$\begin{aligned} \sigma(\vartheta) &\equiv |f(\vartheta)|^2 = \frac{4n^2\lambda^2}{\vartheta^4}, \quad \vartheta \ll \frac{\sqrt{2n}}{l_0}, \\ \sigma(\vartheta) &= l\lambda^2 \frac{J_1^2(l_0\vartheta)}{\vartheta^2}, \quad \frac{\sqrt{2n}}{l_0} \ll \vartheta \ll \frac{2p}{l_0}, \\ \sigma(\vartheta) &= \frac{l_0^3\lambda^2}{8\pi p^2} \frac{\cos^2\left(l_0\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)}{\vartheta}, \quad \frac{2p}{l_0} \ll \vartheta \ll 1. \end{aligned} \quad (104)$$

Таким образом, в случае $n \ll 1$ и $1 \ll p \ll l_0$ чисто кулоновское рассеяние имеет место только в области углов $\vartheta \ll \frac{\sqrt{2n}}{l_0}$.

В области углов $\frac{\sqrt{2n}}{l_0} \ll \vartheta \ll \frac{2p}{l_0}$ рассеяние дейтронов носит такой же характер, как и дифракционное рассеяние нейтральных частиц. Наконец, в области углов $\frac{2p}{l_0} \ll \vartheta \ll 1$ в дифракционном рассеянии дейтронов проявляется их пространственная структура.

Если $n \gg 1$ и $n \ll p \ll l_0$, то

$$\begin{aligned} \sigma(\vartheta) &= \frac{4\pi^2\lambda^2}{\vartheta^4}, \quad \vartheta \ll \frac{2n}{l_0}, \\ \sigma(\vartheta) &= \frac{2}{\pi} l\lambda^2 = \frac{\sin^2\left(l_0\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)}{\vartheta^2}, \quad \frac{2n}{l_0} \ll \vartheta \ll \frac{2p}{l_0}, \\ \sigma(\vartheta) &= \frac{l_0^3\lambda^2}{8\pi p^2} \frac{\cos^2\left(l_0\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)}{\vartheta}, \quad \frac{2p}{l_0} \ll \vartheta \ll 1. \end{aligned} \quad (105)$$

Таким образом, в этом случае область чисто кулоновского рассеяния расширяется по сравнению с предыдущим случаем вплоть до углов порядка $2n/l_0$. При $\vartheta \sim \frac{2n}{l_0}$ происходит резкое уменьшение сечения рассеяния по порядку величины в n раз. В интервале углов $\frac{2n}{l_0} \ll \vartheta \ll \frac{2p}{l_0}$ рассеяние дейтронов носит характер дифракционного рассеяния точечных нейтральных частиц. Пространственная структура дейтрона проявляется в области углов $\frac{2p}{l_0} \ll \vartheta \ll 1$.

Если, наконец, $1 \ll p \ll n \ll l_0$, то

$$\begin{aligned} \sigma(\vartheta) &= \frac{4\pi^2\lambda^2}{\vartheta^4}, \quad \vartheta \ll \frac{2p}{l_0}, \\ \sigma(\vartheta) &= \frac{4\pi^2 p^2 n^2 \lambda^2}{l_0^2 \vartheta^6}, \quad \frac{2p}{l_0} \ll \vartheta \ll \frac{2(\pi^3 n^2 p^4)^{\frac{1}{5}}}{l_0}, \\ \sigma(\vartheta) &= \frac{l_0^3 \lambda^2}{8\pi p^2} \frac{\cos^2\left(l_0\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)}{\vartheta}, \quad \frac{2(\pi^3 n^2 p^4)^{\frac{1}{5}}}{l_0} \ll \vartheta \ll 1. \end{aligned} \quad (106)$$

Мы видим, что в этом случае область кулоновского рассеяния простирается не до углов $2n/l_0$, а до углов порядка $2p/l_0$. Область дифракционного рассеяния точечных частиц вообще исчезает. Конечные размеры дейтрона начинают сказываться при углах

порядка $2p/l_0$. В интервале углов $2p/l_0 \ll \vartheta \ll \frac{2(\pi^3 n^2 p^4)^{\frac{1}{5}}}{l_0}$ сечение убывает, как $1/\vartheta^6$, а затем изменяется, как $1/\vartheta$.

Перейдем теперь к рассмотрению расщепления дейтона.

Полное сечение расщепления дейтрона с учетом кулоновского взаимодействия имеет вид

$$\sigma_t = \sigma_d + \sigma_c + \sigma',$$

где σ_d — сечение чисто дифракционного расщепления, определяемое формулой (96), σ_c — сечение расщепления, обусловленного кулоновским полем ядра, и σ' — часть сечения расщепления, обусловленного интерференцией дифракционного и кулоновского рассеяния.

Сечение σ_c определяется формулой

$$\sigma_c = 8\pi n^2 R^2 p^2 \int_{p z_m}^{\infty} \left\{ \frac{x^2}{p^2} - 4 \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{2p} \right)^2 \right\} \left| \int_x^{\infty} J_1(\zeta) \zeta^{2in} d\zeta \right|^2 \frac{dx}{x^5}, \quad (107)$$

где $z_m \sim \frac{\alpha}{K}$, а σ' — формулой

$$\sigma' = 4\pi R^2 p^2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{x^2}{p^2} - 4 \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{2p} \right)^2 \right\} \frac{J_1(x)}{x} 2in x^{-2in-2} \times \\ \times \int_x^{\infty} J_1(\zeta) \zeta^{2in} d\zeta \frac{dx}{x}.$$

Если $p \gg 1$, то интерференционным слагаемым можно пренебречь, так как области, в которых эффективны оба процесса рассеяния, практически не перекрываются.

При $p \gg 1$ и $n \ll 1$ сечение σ_c имеет вид

$$\sigma_c = \frac{4\pi}{3} n^2 R_n^2 \ln \frac{R_n^2}{R\lambda}, \quad n \ll 1. \quad (108)$$

(Это выражение было получено Данковым с помощью теории возмущений [19, 20].)

При $n \gg 1$ сечение σ_c равно

$$\sigma_c \approx \frac{4\pi}{3} n^2 R_n^2 \ln \frac{R_n}{\lambda}. \quad (109)$$

В этом случае $\sigma_c \gg \sigma_d$, в то время как при $n \ll 1$ справедливо обратное неравенство $\sigma_c \ll \sigma_d$.

Приведем, наконец, формулы, учитывающие «серость» ядра по отношению к падающим на него дейтронам.

Обозначим через $B = B_n + B_p = B_1 - iB_2$ комплексный коэффициент поглощения дейтронов ядерным веществом (B_n и B_p — комплексные коэффициенты поглощения нейтрона и протона). Тогда, если можно пренебречь диффузностью края ядра, то в случае большого поглощения частиц ($|B_n|^2 R^2 \gg p$, $|B_p|^2 R^2 \gg p$) полное сечение всех процессов и сечение упругого рассеяния и дифракционного расщепления дейтрона определяются следующими формулами:

$$\sigma_t = 2\pi R^2 \left\{ 1 - 2 \frac{B_1^2 - B_2^2}{(B_1^2 + B_2^2)^2 R^2} \right\} + \pi R R_d, \\ \sigma_e = \pi R^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2R_1^2 R^2} - \frac{4(B_1^2 - B_2^2)}{(B_1^2 + B_2^2)^2 R^2} \right\} + \frac{2\pi}{3} (1 - \ln 2) R R_d, \quad (110) \\ \sigma_d = \frac{\pi}{3} \left(2 \ln 2 - \frac{1}{2} \right) R R_d.$$

В случае малого поглощения ($|B_n|^2 R^2 \ll p$, $|B_p|^2 R^2 \ll p$) справедливы формулы

$$\sigma_t = \sigma_t^0 + \frac{2\pi}{3} R_n^2 \operatorname{Re}(B_n B_p) R^2 \ln \frac{R}{R_d}, \quad \sigma_t^0 = \frac{4\pi}{3} R^3 B_1, \\ \sigma_e = \sigma_e^0 - \frac{\pi}{6} R_n^2 |B|^2 R^2 \ln \frac{R}{R_d}, \quad \sigma_e^0 = \frac{\pi}{2} R^4 |B|^2, \quad (111) \\ \sigma_d = \frac{\pi}{6} R^2 |B|^2 R_n^2 \ln \frac{R}{R_d},$$

где σ_t^0 — полное сечение всех процессов взаимодействия быстрой точечной частицы с ядром, комплексный коэффициент поглощения которого равен сумме комплексных коэффициентов поглощения нейтрона и протона и σ_e^0 — сечение упругого рассеяния точечной частицы ядром с таким же коэффициентом поглощения.

Академия наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Ландау, И. Померанчук. ЖЭТФ, 1953, 24, 505 (Собр. трудов, № 97).
2. И. Померанчук. ДАН СССР, 1954, 96, 265, 481 (Собр. трудов, № 100, 101).
3. И. Померанчук, Е. Фейнберг. ДАН СССР, 1953, 93, 439 (Собр. трудов, № 98).
4. А. Ахиезер. ДАН СССР, 1954, 94, 651.
5. А. Ахиезер, И. Померанчук. ДАН СССР, 1954, 94, 821 (Собр. трудов, № 99).
6. А. Ахиезер, И. Померанчук. ЖЭТФ, 1956, 30, 201 (Собр. трудов, № 102).
7. Ю. Вдовин. ДАН СССР, 1955, 105, 947.
8. С. Porter. Phys. Rev., 1955, 99, 1400.
9. S. Fernbach, R. Serber, T. Taylor. Phys. Rev., 1949, 75, 1352.
10. А. Ахиезер, И. Померанчук. ЖЭТФ, 1946, 16, 396 (Собр. трудов, № 96).
11. А. Ситенко. ДАН СССР, 1956, 109, 1119.
12. А. Ситенко. ЖЭТФ, 1956, 31, 348.
13. А. Ситенко. ЖЭТФ, 1957, 32, 1506.
14. Е. Фейнберг. УФН, 1956, 58, 193.
15. R. Glauber. Phys. Rev., 1955, 99, 1515.
16. Е. Фейнберг. ЖЭТФ, 1955, 29, 115.
17. А. Ахиезер, А. Ситенко. ЖЭТФ, 1957, 32, 794.
18. R. Serber. Phys. Rev., 72, 1947, 1008.
19. S. Dancoff. Phys. Rev., 72, 1947, 1017.
20. C. Mullin, E. Guth. Phys. Rev., 1951, 82, 141.
21. А. Ахиезер, А. Ситенко. ЖЭТФ, 1957, 33, 1040.
22. А. Ситенко, Л. Ровенцевейс. ЖЭТФ, 1957, 32, 383.
23. Е. Рабинович, ЖЭТФ, 1957, 32, 1583.
24. В. Липпманн, J. Schwinger. Phys. Rev., 1950, 79, 481.
25. А. Ахиезер, И. Померанчук. Некоторые вопросы теории ядра. Гостехиздат, 1951.
26. Л. Ландау, Е. Лифшиц. Квантовая механика. Гостехиздат, 1948.
27. А. Ахиезер, В. Берестецкий. Квантовая электродинамика. Гостехиздат, 1954.
28. R. Christy, S. Kusaka. Phys. Rev., 1941, 59, 414.

$j = j_n(t)$ не зависит от масс частиц, где

$$j_n(t) = n\alpha(t/n^2) - n + 1. \quad (1)$$

Эти особенности соответствуют образованию n -реджионов с траекторией $\alpha(t)$. Замечательным свойством этой формулы является то, что положение особенностей при $n \rightarrow \infty$ определяется только величиной $\alpha(0)$. Если $\alpha(0) < 1$, то при $n \rightarrow \infty$ $j_n \rightarrow -\infty$, если же $\alpha(0) > 1$, то $j_n \rightarrow +\infty$. В первом случае все точки ветвления расположены слева от полюса и не существенны в асимптотике, во втором случае амплитуда должна расти при данном t с ростом s быстрее любой степени s . Последнее, очевидно, недопустимо. Таким образом, даже независимо от теоремы Фруассара [11] необходимо, чтобы $\alpha(0) \leq 1$. Только в случае $\alpha(0) = 1$ (отвечающем вакуумному полюсу) точки ветвления существенны для асимптотического поведения. В этом случае точки ветвления сгущаются к $j = 1$ при $t \rightarrow 0$ и формула (1) при малых t принимает вид

$$j_n(t) = 1 + \alpha'(0) \frac{t}{n}, \quad (2)$$

как это было показано Амати, Фубини, Стангеллини [12] (см. также [13]).

Сгущение особенностей при $j = 1$ может иметь прямое отношение к данным, полученным недавно Фоли и др. [14], обнаружившим неуниверсальность хода дифференциальных сечений и отсутствие сокращения дифракционного конуса в упругом рассеянии π^+ , π^- , K^- и \bar{p} на протонах. В случае, когда асимптотика амплитуды определяется не одной, а рядом особенностей, необходимо, чтобы были выполнены специальные условия для того, чтобы обеспечить универсальное поведение сечений. Анализ особенностей (2) показывает, что эти условия, вообще говоря, не выполнены в указанных выше экспериментах [14].

В настоящей заметке приведены результаты анализа этих особенностей, основанного на использовании многочастичных членов условия унитарности в t -канале, продолженных в комплексную j -плоскость.

При определенных предположениях о характере этого аналитического продолжения можно прийти к следующим выводам (мы не обсуждаем здесь сам метод аналитического продолжения).

В первую очередь подтверждается вывод Мандельштама [7] о наличии особенностей $f_j(t)$ в j -плоскости в точках, указанных выше. Другие особенности, обнаруженные Мандельштамом, типа $j = \alpha[(\sqrt{t} - \mu)^2] - 1$, при малых t оказываются на нефизических листах j -плоскости (связанных с особенностями (1)) и не оказывают влияния на асимптотику $A(s, t)$.

Показано, что особенности (1) с данным n имеют следующий характер:

$$f_j(t) = C_n (j - j_n)^{2n-3} \ln^n(j - j_n) \quad (3)$$

при $j \rightarrow j_n$.

Наличие этих особенностей радикально меняет аналитические свойства амплитуды $f_j(t)$ в t -плоскости. Помимо разрезов, связанных с порогами образования обычных частиц, в t -плоскости появляются точки ветвления при

$$t = t_j^{(n)},$$

где $t_j^{(n)}$ — решение уравнения $j = j_n(t)$, а $j_n(t)$ определяется формулами (1) или (2) (если $j \rightarrow 1$, то $\alpha' t_j^{(n)} = n(j - 1)$). Получено, что скачки $\delta f_j(t)$ на разрезах, соответствующих этим особенностям, имеют структуру, аналогичную обычным условиям унитарности. Скачок $\delta_n f_j(t)$ на n -реджионной особенности определяется вполне определенными интегралами от произведения амплитуды образования n -реджионов над разрезом на ее значение под разрезом.

Так как положение $t_j^{(n)}$ всех особенностей (1) — (3) в t -плоскости при $j = 1$ совпадает друг с другом (и с полюсом $t = t_j^{(1)}$), то точка $j = 1$ в j -плоскости оказывается особой при любом t .

Положение точек ветвления (2) и полюса при $t < 0$ указано на рис. 1. Для однозначного определения функции $f_j(t)$ все точки ветвления должны быть соединены разрезом с точкой $j = 1$, как это указано на рис. 1. Важно знать, является ли парциальная волна $f_j(t)$ вещественной на действительной оси рис. 1, левее точки $j = j_2(t)$ или, иначе говоря, кончается ли разрез левее этой точки. Если разрез не кончается, то полюс будет, вообще говоря, расположен на разрезе (в некотором интервале t). Такая ситуация (полюс на разрезе) заведомо запрещена в случае порогов образования обычных частиц. Реджионные условия унитарности, по-видимому, также запрещают существование полюса на разрезе. В результате

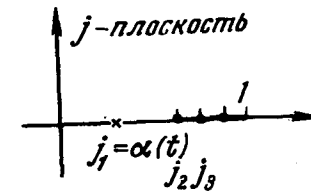


Рис. 1

функция $f_j(t)$ является вещественной при $j < j_2(t)$. Мы не смогли показать это в общем виде. Однако главные члены $f_j(t)$ (которые можно вычислить) обладают этим свойством при малых t .

Возможность вычисления этих главных членов $f_j(t)$ возникает из-за того, что при малых t полюса и точки ветвления в j -плоскости (рис. 1) близки друг к другу. Поэтому основной вклад дает процесс образования n -реджионов следующего типа: сначала две частицы образуют однореджионное состояние, этот реджион

затем распадается на два, два превращаются в три реджиона и т. д. Таким процессам отвечают реджионные диаграммы, изображенные на рис. 2, которые аналогичны диаграммам для функции Грина частицы в теории поля со взаимодействием $\lambda\phi^3$. Реджионные условия унитарности позволяют сопоставить каждой из этих диаграмм определенную величину. Проблема суммирования вклада всех диаграмм типа изображенных на рис. 2 может быть решена с помощью уравнений Швингера — Дайсона, которые в нашем случае имеют вид

$$f_j(t) = \frac{g^2}{t} \beta(x), \quad x = \frac{i-1}{\alpha't}, \quad \alpha' = \alpha'(0),$$

$$\beta^{-1}(x) = x - 1 + \Sigma(x),$$

$$\Sigma(x) = \frac{r^2}{\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ [x(x_1+x_2) - x_1x_2] \ln \frac{x(x_1+x_2) - x_1x_2}{x(x_1+x_2 - x_1x_2)} - \right.$$

$$\left. - x_1x_2(x-1) \right\} \left(\frac{2}{x_1+x_2} \right)^2 \Delta\beta(x_1) \Delta\beta(x_2) dx_1 dx_2, \quad (4)$$

где

$$\Delta\beta = -\pi\delta(x-1) + \Delta'\beta(x),$$

а

$$\beta(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{\pi} \int_0^{1/2} \frac{\Delta'\beta(x') dx'}{x' - x}.$$

Здесь g^2 — вычет вакуумного полюса (при $t=0$), а r — вещественная константа, отвечающая переходу одного реджиона в два¹.

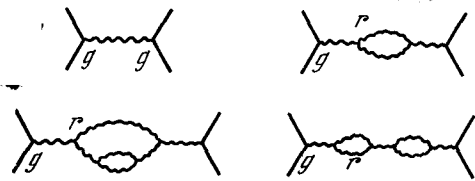


Рис. 2

Это уравнение может быть легко проанализировано в различных предельных случаях. Так $\beta(x) = \{-1/[a + b \ln(e^{ix}/x)]\}$, если $x \rightarrow 0$ и $\beta(x) = A/x$ при $x \rightarrow \infty$. В промежуточной области оно может быть решено численно. Подстановка $f_j(t)$ полученного из (4) в интеграл Редже — Зоммерфельда — Ватсона позволяет определить асимптотику амплитуды при малых t .

¹ При написании уравнения (4) возникает неоднозначность типа указанной Далитцем и др. [15]. Однако можно показать, что эта неоднозначность не меняет общих результатов, указанных ниже.

В случае упругого рассеяния частиц «а» на частицах «b» эта асимптотическая форма амплитуды имеет вид

$$A_{ab}(s, t) \simeq g_a g_b [i f_0(\xi\tau) - \tau f_0'(\xi\tau)], \quad (5)$$

где g_a и g_b — константы связи частиц a и b с вакуумным полюсом, $\xi = \ln \frac{s}{s_0}$, s_0 — некоторая постоянная, а $\tau = -\alpha't$ — пропорциональна квадрату переданного импульса. Кроме того, $f_0(\xi\tau) = \int_0^1 \exp(-\xi\tau x) \Delta\beta(x) dx$ — универсальная функция, одинаковая для всех процессов упругого рассеяния (при малых t). Она имеет следующие предельные значения:

$$f_0(\xi\tau) \simeq \begin{cases} A, & \xi\tau \ll 1 \\ -\frac{b}{\xi\tau} \frac{1}{\pi^2 b^2 + (a + b \ln \xi\tau)^2}, & \xi\tau \gg 1, \end{cases}$$

отсюда

$$\frac{d\sigma_{ab}}{dt} = g_a^2 g_b^2 |f_0(\xi\tau)|^2.$$

Из этой формулы и формулы (5) следует, что между полными сечениями взаимодействия и дифференциальными сечениями упругого рассеяния различных частиц существуют обычные [16] соотношения факторизации (типа $\sigma_{\pi\pi} \sigma_{KK} = \sigma_{\pi K}^2$). Согласно формуле (5) отношение вещественной части амплитуды к мнимой есть величина порядка τ при $\xi\tau < 1$ и порядка $1/\xi$ при $\xi\tau > 1$.

Используя асимптотику (5) можно вычислить полное сечение упругого рассеяния σ_{el} , величину среднего значения квадрата переданного импульса $\langle \tau \rangle$ и зависимость парциальных волн в s -канале $a(\rho, \xi)$ от прицельного параметра ρ и энергии. Эти величины имеют в основном те же свойства, что и в случае одного полюса Редже: $\sigma_{el} \sim \frac{\text{const}}{\xi}$, $\langle \tau \rangle \sim \frac{\text{const}}{\xi}$, $a(\rho, \xi) \approx 1/\xi \{1/[\alpha + \beta \ln(\rho^2/\xi\alpha')]\}$ при $\rho^2/\xi\alpha' \rightarrow 0$ и $a(\rho, \xi) \sim \frac{\text{const}}{\xi} \exp\{-\rho^2/4\alpha'\xi\}$ при $\rho^2/\alpha'\xi \gg 1$.

Характерным отличием полученного нами поведения амплитуды $A(s, t)$ при высоких энергиях (5) от случая одного полюса Редже является то, что мнимая часть (5) обращается в нуль при некотором значении $\xi\tau \simeq a_0$, где a_0 — величина порядка единицы. В связи с этим $d\sigma_{el}/dt$ должно иметь минимум при $\tau = \frac{a_0}{\xi}$. Этот минимум при исследованных в настоящее время энергиях, по-видимому, находится вне области применимости рассмотренной здесь теории.

Так как при малых t все процессы образования реджионов идут путем образования одного вакуумного реджиона (в промежуточном состоянии), то спиновая зависимость амплитуд рассеяния

частиц со спином при высоких энергиях такая же, как и в случае одного полюса Редже.

Точность утверждений, сформулированных выше, существенно зависит от того, кончается ли разрез на рис. 1 левее точки j_2 или нет.

Если разрез кончается в этой точке, то асимптотика, например $\text{Im } A_{ab}(s, t)$ (с учетом поправок), имеет следующую структуру

$$\frac{1}{s} \text{Im } A_{ab}(s, t) \simeq g_a g_b f_0(\xi\tau) + [\tau f_1(\xi\tau) + \tau^2 f_2(\xi\tau) + \dots + o(s^{\beta(0)-1})], \quad (6)$$

где функции f_1, f_2 и т. д. уже не являются универсальными, $o(s^{\beta(0)-1})$ — вклад других особенностей, расположенных на конечном расстоянии слева от точки $j = 1$. Таким образом, для полных сечений (т. е. для $\text{Im } A(s, 0)$) мы имеем ту же точность, что и в случае чисто полюсной асимптотики.

Если разрез не кончается в точке $j = j_2(t)$, то асимптотика амплитуды содержит поправки порядка $1/\xi$ даже при $\tau = 0$. Это, конечно, очень не утешительно с точки зрения возможностей существующих ускорителей. Проверка теории в этом случае требует существенно больших энергий (порядка сотен ГэВ).

Однако, даже в этом случае положение существенно улучшается, если рассматривать другие (неупругие) процессы: перезарядку, фоторождение, рассеяние π и K на нуклонах назад и т. д. Более подробно эти вопросы будут рассмотрены отдельно. Отметим здесь лишь следующее. Полные сечения таких процессов, которые могут проходить за счет обмена состояниями с одними и теми же квантовыми числами, должны убывать с ростом энергии, как одна и та же степень энергии.

Проверка этого утверждения, по нашему мнению, является первоочередной задачей экспериментальных исследований на современных ускорителях.

Если разрез в j -плоскости кончается при $j = j_2(t)$ (что в настоящее время представляется более вероятным), то проверка теории может быть проведена на существующих в настоящее время ускорителях также при исследовании упругого дифракционного рассеяния. Для этого необходимо получить подробные данные об упругом рассеянии (pp или πp и т. д.) в области малых $t \leq \mu^2$, где μ — масса пиона. Эти данные должны быть такими, чтобы меня независимо величины τ и $\xi = \ln \frac{s}{s_0}$, можно было в выражении для дифференциального сечения, которое следует из формул (5)–(6):

$$\frac{d\sigma_{ab}}{dt} = g_a^2 g_b^2 |f_0(\xi\tau)|^2 + \tau \Delta\sigma(\xi, \tau)$$

отделить члены порядка τ от основного члена. Здесь $\Delta\sigma(\xi, \tau) \simeq g_a g_b f_0(\xi\tau) f_1(\xi\tau)$. Для этого необходимо получить значения $d\sigma/dt$

в большом числе точек в области $\tau \leq \mu^2$ с точностью, по-видимому, на порядок большей, чем достигнутая в настоящее время.

Все результаты, приведенные выше, относятся к случаю, когда константа r не обращается в нуль. Эта константа является значением функции $r(t)$ при $t = 0$. Может случиться, что при $t = 0$ $r(t)$ стремится к нулю линейно по t : $r(t) \approx \gamma t$, где $\gamma = \text{const}$. В этом случае мы не можем получить явного выражения для асимптотики амплитуды $A(s, t)$. Однако можно показать, что даже в этом случае точка $j = 1$ продолжает оставаться особой и асимптотика остается пропорциональной s . Однако универсальность асимптотики $A(s, t)$ теряется даже в области малых t .

Если t не мало $-t \geq \mu^2$, то приведенные выше соображения о специальной роли полюсных диаграмм неправильны, хотя при очень больших t всегда существует особенность при $j = 1$. В этом случае поведение амплитуды при высоких энергиях может быть получено в «академическом» пределе $\xi = \ln\left(\ln \frac{s}{s_0}\right) \gg 1$.

При этом асимптотика имеет вид

$$\frac{1}{is} A(s, t) = \frac{\varphi_1(t)}{\xi \ln^2 \xi} + \frac{\varphi_2(t)}{\xi \ln^3 \xi} + \dots,$$

где функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \dots$ неизвестны и, вообще говоря, не универсальны.

Возвращаясь к практически важной области несверхвысоких энергий можно заметить следующее. Скачок парциальной волны вблизи $j = 1$ может оказаться быстро убывающей функцией t . В этом случае асимптотика при не очень высоких энергиях и больших t может определяться не особой точкой при $j = 1$, а другими особенностями, расположенными левее. Не исключено, что в этих условиях вклад вакуумного полюса в асимптотику амплитуды $A(s, t)$ опять окажется наиболее существенным.

Возможность убывания скачка при $j = 1$ может быть обусловлена, например, следующими причинами:

1) если величины типа g и r быстро убывают с ростом t , то двухреджонный обмен будет давать вклад второго порядка малости, а трехреджонный — третьего порядка и т. д., по сравнению с однореджонным обменом;

2) скачок парциальной волны около $j = 1$ может оказаться малым из-за знакопеременности скачков на различных реджонных особенностях (которая, как можно показать, фактически имеет место).

Эти соображения могут иметь отношение к экспериментальным данным о pp -рассеянии на большие углы [17], из которых следует, что при больших t имеет место сильное сокращение дифракционного конуса. Однако нам не удалось доказать, что какая-либо из указанных возможностей фактически реализуется.

ДВИГАЮЩИЕСЯ ВЕТВЛЕНИЯ В j -ПЛОСКОСТИ И РЕДЖИОННЫЕ УСЛОВИЯ УНИТАРНОСТИ¹

Совместно с В. Н. Грибовым и К. А. Тер-Мартirosяном

Получено
12 марта 1964 г.

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе
Академии наук СССР, Ленинград
Институт теоретической
и экспериментальной физики, Москва

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Regge. Nuovo Cim., 1959, 14, 951; 1960, 18, 947.
2. В. Н. Грибов. ЖЭТФ, 1961, 41, 667.
3. M. Froissart. La Jolla Conf., 1961 (unpublished).
4. В. Н. Грибов. ЖЭТФ, 1961, 41, 1962.
5. G. F. Chew. S. Frautschi. Phys. Rev. Lett., 1961, 7, 394; 1962, 8, 41.
6. S. C. Frautschi, M. Gell-Mann, F. Zachariasen. Phys. Rev., 1962, 126, 2204.
7. S. Mandelstam. Nuovo Cim., 1963, 30, 1113, 1127, 1148.
8. В. Н. Грибов, И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 1962, 43, 1556; Phys. Lett., 1962, 2, 239 (Собр. трудов, № 116).
9. Я. Азимов. ЖЭТФ, 1962, 43, 2321.
10. G. F. Chew. (частное сообщение).
11. M. Froissart. Phys. Rev., 1961, 123, 1053.
12. D. Amati, S. Fubini, A. Stanghellini. Phys. Lett., 1962, 1, 29.
13. Я. А. Вердиев, О. В. Канчели, С. Г. Маминян, А. М. Попова, К. А. Тер-Мартirosян. ЖЭТФ, 1964, 46, 1700.
14. K. J. Foley, S. J. Lindenbaum, W. A. Love, S. Ozaki, J. J. Russel, C. L. Yuan. Phys. Rev. Lett., 1963, 10, 376, 543; 1963, 11, 425, 503.
15. R. Dalitz, F. Dyson, L. Castellejo. Phys. Rev., 1956, 101, 453.
16. В. Н. Грибов, И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 1962, 42, 1682; Phys. Rev. Lett., 1962, 8, 343 (Собр. трудов, № 114).
17. G. Cocconi, V. T. Cocconi, A. D. Krish, J. Orear, R. Rubinstein, D. Scarl, W. F. Baker, E. W. Jenkins, A. L. Read. Phys. Rev. Lett., 1962, 11, 499.

Замечание к работе «Особенности парциальных волн вблизи $j = 1$ и поведение амплитуды упругого рассеяния при высоких энергиях» (Phys. Lett., 1964, 12, 153).

Наше письмо (Phys. Lett., 9, 269 (1964)) содержало некоторые результаты исследования движущихся точек ветвления в комплексной j -плоскости и их влияния на асимптотику амплитуды упругого рассеяния. Эти результаты существенно зависят от поведения амплитуды образования реджионов вблизи соответствующего реджионного порога. В письме предполагалось, что эта амплитуда постоянна около порога. Теперь у нас существуют серьезные основания считать, что эта амплитуда существенно меняется вблизи порога. Если это утверждение правильно, то оно меняет характер реджионных точек ветвления и асимптотику амплитуды упругого рассеяния. Результаты, относящиеся к положению особенностей, особенностям, зависящим от масс, которые уходят на другие листы, и к реджионным условиям унитарности, — не меняются.

Двигающиеся точки ветвления в j -плоскости исследованы на основе анализа многочастичных членов условия унитарности в t -канале. Использовано определенное предположение о виде аналитического продолжения этих членов на комплексные j . Показано, что при этом в j -плоскости возникают точки ветвления парциальной амплитуды $f_j(t)$, отвечающие порогам образования двух или нескольких реджионов с орбитальным моментом относительного движения, равным — 1.

В случае двух бесспиновых частиц в промежуточном состоянии парциальная волна имеет особенность при отрицательных целых значениях орбитального момента. Как было обнаружено ранее, эти особенности смещаются вправо, если частицы в промежуточном состоянии имеют спин, отличный от нуля. Точки ветвления в j -плоскости возникают в результате распространения этого смещения на всю реджевскую траекторию. Этот механизм появления точек ветвления был указан Мандельштамом на примере фейнмановских диаграмм определенного класса. Наличие этих точек ветвления $j = j_n(t)$, где $j_n(t) = n\alpha(t/n^2) - n + 1$, существенно изменяет аналитические свойства $f_j(t)$ в t -плоскости, приводя к появлению в этой плоскости точек ветвления, при $t = t_n(j)$, где $t_n(j)$ — решение уравнения $j = j_n(t)$.

Вычислена величина скачка $\delta_i^{(n)} f_j(t)$ амплитуды $f_j(t)$ на особенности $t = t_n(j)$, отвечающей порогу образования n реджионов (реджионные условия унитарности). Показано, что этот скачок имеет вид, сходный с обычным условием унитарности, причем $\delta_i^{(n)} f_j(t)$ определяется произведением амплитуд $N_{j,n}$ образования n реджионов, определенных над и под разрезом, проведенным в t -плоскости от точки $t = t_n(j)$. Величина скачка $\delta_i^{(n)} f_j(t)$ амплитуды $f_j(t)$ на разрезе, связанном с точкой ветвления $t = t_n(j)$, вычислена при $t \rightarrow t_n(j)$. Показано, что она имеет вид $[t - t_n(j)]^{n-2} \sim [j - j_n(t)]^{n-2}$. Это означает, что особенность $j = j_n(t)$ имеет логарифмический характер, т. е. вблизи нее $f_j(t) \approx A_n + B_n [j - j_n(t)]^{n-2} \ln [j - j_n(t)]$, где A_n и B_n не имеют особенностей при $j = j_n(t)$.

Полученные результаты могут быть использованы для анализа асимптотики амплитуды дифракционного рассеяния в области небольших значений величины $q^2 = -t$ переданного импульса.

¹ Ядерная физика, 1965, 2, 361; Phys. Rev., 1965, 139, 184.

1. Введение

В последние годы было выяснено, что асимптотика амплитуды упругого рассеяния $A(s, t)$ при $s \rightarrow \infty$ может определяться особенностями [1—3] парциальных амплитуд $f_j(t)$ как функции углового момента j . Анализ асимптотики основывался на гипотезе о вакуумном полюсе [4—6], траектория которого $\alpha(t)$ при $t = 0$ проходит через точку $j = 1$. Предположение о наличии двигающихся полюсов у $f_j(t)$, в частности вакуумного полюса, было естественным, поскольку при целых физических j амплитуда $f_j(t)$ имеет на нефизических листах t -плоскости полюса, отвечающие резонансным состояниям, положение которых зависит от j . Эти состояния и приводят к полюсам $f_j(t)$ в j -плоскости.

До последнего времени не было видно причин, в силу которых можно было ожидать появления в j -плоскости каких-либо иных движущихся особенностей, кроме полюсов. Однако недавно Мандельштам [7] привел соображения в пользу того, что в релятивистской теории могут возникнуть двигающиеся точки ветвления на базе особенностей при целых отрицательных значениях j [8] и их смещения [9] для частиц со спином. Эти особенности отвечают порогам образования нескольких резонансных состояний (реджионов) с целыми отрицательными орбитальными моментами $L = -1, -2, \dots$. Их можно рассматривать, как продолжение на комплексные j точек ветвления, которые при целых физических j расположены на нефизических листах t -плоскости и которые соответствуют порогам образования нескольких резонансов¹ с физическими значениями L .

Наличие движущихся точек ветвления, рассмотренных Мандельштамом, нельзя считать строго доказанным. Однако его аргументация [7] настолько серьезна, что нам представляется необходимым подробно исследовать эти точки ветвления и их влияние на асимптотику.

Настоящая работа является первой частью этого исследования. Точки ветвления были получены Мандельштамом на основе анализа асимптотик некоторого класса диаграмм теории возмущений. Из его работы [7] видно, что они связаны с многочастичными промежуточными состояниями. Поэтому изучение этих особенностей требует анализа многочастичных условий унитарности, аналитически продолженных в область комплексных j . Задача получения этого аналитического продолжения встречает значительные трудности и в настоящее время не решена.

В настоящей работе использовано определенное предположение о форме этого аналитического продолжения вблизи тех значений j , которые являются особыми для амплитуды $f_j(t)$. Для понимания структуры этого аналитического продолжения рассмотрим члены условия унитарности (для $\text{Im } f_j(t)$), отвечающие

образованию в промежуточном состоянии двух частиц, одна из которых имеет спин σ , не равный нулю (и массу M). Они могут быть записаны в виде

$$\sum_{m=-\sigma}^{\sigma} \frac{2p(t, M^2, \mu^2)}{\sqrt{t}} \frac{\Gamma(j-m+1)}{\Gamma(j+m+1)} f_{jm}(t) f_{jm}^*(t).$$

Здесь $f_{jm}(t)$ — спиральная парциальная амплитуда образования указанных двух частиц, $p = p(t, M^2, \mu^2)$ — импульс их относительного движения. Как было замечено Азимовым [9], это выражение имеет полюс при $m = j + 1$, в частности при $j = \sigma - 1$ (за счет полюса Γ -функции). Вблизи этого, самого правого полюса оно имеет вид

$$\frac{1}{\Gamma(2\sigma)} \frac{2p(t, M^2, \mu^2)}{\sqrt{t}} \frac{f_{j\sigma}(t) f_{j\sigma}^*(t)}{j+1-\sigma}.$$

С другой стороны, вклад от найденной Мандельштамом точки ветвления в условие унитарности для $\text{Im } f_j(t)$ представляется (как видно из его работы [7]) в виде

$$C \int_{(\sqrt{t}-\mu)^2}^{(\sqrt{t}+\mu)^2} \frac{2p(t, t_1, \mu^2)}{\sqrt{t}} \frac{dt_1}{j+1-\alpha(t_1)}, \quad (1)$$

где $p(t, t_1, \mu^2)$ — импульс относительного движения в промежуточном состоянии частицы и пары частиц, имеющих полюс Редже при $l = \alpha(t_1)$. Сравнивая два последних выражения, мы видим, что точка ветвления получается в результате интегрирования по массе $t_1 = M^2$ состояния пары частиц, имеющего переменный спин $\sigma = \alpha(t_1)$. Это обстоятельство можно понимать как то, что азимовская особенность имеет место вдоль всей траектории Редже.

Из приведенного сравнения можно понять, что именно существенно для исследования точек ветвления в многочастичных членах условия унитарности. Нужно знать ту часть этих членов, которые содержат амплитуды образования трех частиц при m , близких к $j + 1$, и при орбитальном моменте пары, равном m и близком к своему полюсному значению $l = m = \alpha(t_1)$. Сходная ситуация имеет место в случае образования не трех, а большего числа частиц. Соответственно этому в работе предложен и использован для исследования особенностей в j -плоскости способ аналитического продолжения условий унитарности на комплексные j , отвечающий форме (1) ответа. Мы не утверждаем, что этот способ является точным в общем случае, однако он правильно отражает механизм образования точек ветвления амплитуды $f_j(t)$, обнаруженных Мандельштамом и поэтому, по-видимому, точно воспроизводит сингулярную в j -плоскости часть $f_j(t)$.

С помощью предлагаемого способа аналитического продолжения можно найти положение точек ветвления и их характер. Будем рассматривать для простоты лишь те точки ветвления, которые

¹ Дж. Чу, частное сообщение.

возникают на основе вакуумного полюса. Элементарный анализ, проведенный ниже, показал, что при $t > 16 \mu^2$ в j -плоскости имеется большое число особенностей, положение части которых зависит от величин μ масс частиц. Однако при $t < 16 \mu^2$ на физическом листе j -плоскости остаются лишь особенности $j = j_n(t)$, где

$$j_n(t) = n\alpha(t/n^2) - n + 1, \quad n = 2, 3, 4 \quad (2)$$

(или смещенные влево по отношению к j_n на целые четные числа), положение которых зависит лишь от траектории полюса. Эти особенности были замечены Амати, Фубини и Стангеллини [10] (см. также [11]).

Двигающиеся точки ветвления в j -плоскости приводят к тому, что парциальная амплитуда $f_j(t)$ при фиксированном j как функция t имеет на физическом листе кроме обычных пороговых особенностей точки ветвления $t = t_n(j)$, положение которых зависит от j . Каждая из них является порогом образования определенного числа n -реджионов. В работе находятся условия унитарности, определяющие величины скачков $f_j(t)$ на этих особенностях. Эти «реджионные» члены условия унитарности имеют вид, аналогичный обычным в том смысле, что определяются интегралами от произведения амплитуды образования нескольких реджионов над разрезом на значении этой же амплитуды под разрезом (связанным с данной особенностью).

2. Многочастотные члены условия унитарности

Для получения реджионных особенностей парциальных амплитуд нам придется провести анализ многочастичных членов условия унитарности. Будем рассматривать парциальную амплитуду четыреххвостки, поделенную на $k_0^{2j} = (1/4 t - \mu^2)^j$ для того, чтобы при продолжении на комплексные j она была вещественной ниже порога $t = 4 \mu^2$. Обозначим ее через $f_j(t)$; всюду μ — масса частиц (которые мы считаем в дальнейшем тождественными).

Пороговые особенности амплитуды $f_j(t)$ при $t = t_n = (n\mu^2)$, где $n = 2, 3, 4 \dots$, указаны на рис. 1. Обозначим через $f_j^{(n)}(t)$ значение этой амплитуды после обхода в t -плоскости рис. 1 особенности $t_n = (n\mu^2)$, а через $\Delta_n f_j(t) = (1/2i) [f_j(t) - f_j^{(n)}(t)]$ — ее скачок на соответствующем разрезе. Условие унитарности определяет величину этого скачка в виде

$$\Delta_n f_j(t) = \sum \lambda_n \int f_{j;\lambda_n}(t; \tau_{n+}) f_{j;\lambda_n}^{(n)}(t; \tau_{n-}) \rho_{j;\lambda_n}(t; \tau_n) d\tau_n. \quad (3)$$

Здесь $f_{j;\lambda_n}(t; \tau_{n+})$ — амплитуда перехода двух частиц в n частиц, λ_n — угловые моменты, τ_n — энергии, характеризующие (помимо j и t) состояние n частиц, а $\rho_{j;\lambda_n}(t; \tau_n)$ — статистический вес этого состояния. Через $f_{j;\lambda_n}^{(n)}(t; \tau_{n-})$ обозначено значение

$f_{j;\lambda_n}(t; \tau_{n+})$ после обхода в t -плоскости особенности при $t = (n\mu)^2$ и изменении знака бесконечно малых мнимых добавок к энергиям τ_n .

Состояние системы n частиц можно определить [12—18], разделяя частицы произвольно на группы и определяя величины энергий, угловых моментов и спиральности этих групп. Например, состояние четырех частиц можно определить, разбив их произвольно на две пары и определяя величины:

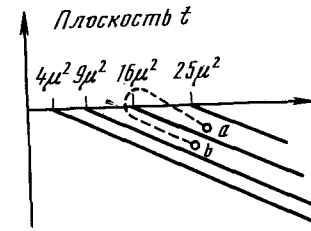


Рис. 1

1) l_1, m_1, t_1 — орбитального момента, его проекции и квадрата t_1 полной энергии первой пары в системе ее центра инерции; проекцию момента m_1 удобно определить на направление суммарного импульса p обеих частиц этой пары (определенного в общей с.ц.и.); такую проекцию обычно называют спиральностью;

2) l_2, m_2, t_2 — те же величины для второй пары; здесь m_2 — проекция момента l_2 на направление того же импульса p ; в этом случае спиральностью будет не m_2 , а $-m_2$;

3) j и t — величины полного момента и квадрата полной энергии всех четырех частиц.

Поэтому при $n = 4$ под λ_n в (3) следует понимать совокупность чисел l_1, m_1, l_2, m_2 , а под τ_n — энергий t_1 и t_2 , т. е.

$$f_{j;\lambda_n}(t; \tau_n) \equiv f_{j;l_1 m_1 l_2 m_2}(t; t_1, t_2).$$

Рассмотрим подробнее состояние с $n = 4$ и соответствующий член условия унитарности. Для $n = 4$ величина $\rho_{j;\lambda_n}(t; \tau_n)$ имеет вид

$$\rho_{j;\lambda_n}(t; \tau_n) = \frac{1}{4!} B_j(l_1 m_1; l_2 m_2) \frac{2p(t; t_1, t_2)}{\sqrt{t}} \frac{2k_1^{2l_1+1}}{\sqrt{t_1}} \frac{2k_2^{2l_2+1}}{\sqrt{t_2}}, \quad (4)$$

где¹

$$p(t; t_1, t_2) = \frac{1}{2\sqrt{t}} [t^2 - 2t(t_1 + t_2) + (t_1 - t_2)^2]^{1/2} \quad (5)$$

¹ В дальнейшем мы будем рассматривать промежуточные состояния с образованием тождественных частиц — π -мезонов, — не учитывая при этом изотопических перемешиваний. В связи с этим в (4) введен множитель $1/4!$ Вопросы, связанные с тождественностью частиц и симметрией по отношению к их перестановкам, подробно рассмотрены ниже.

— импульс относительного движения центров инерции обеих пар частиц, $k_1 = p(t_1; \mu^2, \mu^2)$ и $k_2 = p(t_2; \mu^2, \mu^2)$ — величины импульсов частиц в первой и второй парах, а

$$B_j(\lambda_4) \equiv B_j(l_1 m_1, l_2 m_2) = \frac{\Gamma(j - m_1 - m_2 + 1)}{\Gamma(j + m_1 + m_2 + 1)} \times \\ \times \frac{(2l_1 + 1) \Gamma(l_1 - m_1 + 1)}{\Gamma(l_1 + m_1 + 1)} \frac{(2l_2 + 1) \Gamma(l_2 - m_2 + 1)}{\Gamma(l_2 + m_2 + 1)}. \quad (6)$$

Этот вид статистического веса $\rho_{j; \lambda_4}$, в частности появление в (4) множителя $B_j(\lambda_4)$, есть результат выбора определенной нормировки [17] амплитуд $f_{j; \lambda}$. Именно величины $f_{j; \lambda}$ связаны с амплитудой $A(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{p}_0)$ образования четырех частиц с определенными значениями импульсов через интегралы вида [15, 17]

$$f_{j; \lambda_4}(t; t_1, t_2) = \int A(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{p}_0) P_{l_1 m_1}(\mathbf{n}_1) \times \\ \times P_{l_2 m_2}(\mathbf{n}_2) P_{j; m_1 + m_2}(\mathbf{n}_0) d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2 d\mathbf{n}_0,$$

где $\mathbf{n}_0 = \mathbf{p}_0/p_0$; $\mathbf{n}_i = \mathbf{k}_i/k_i$, $i = 1, 2$. Эти интегралы содержат присоединенные полиномы Лежандра $P_{lm}(\mathbf{n}) = P_{lm}(z) \exp(im\Phi)$ вместо нормированных шаровых функций $Y_{lm}(\mathbf{n})$, отличных от них на множитель

$$[(2l + 1) \Gamma(l - m + 1) / \Gamma(l + m + 1)]^{1/2}.$$

Если бы амплитуды $f_{j; \lambda}$ были определены через шаровые функции, то при продолжении в область комплексных j , l_1 и l_2 (которое будет ниже использовано) они имели бы корневые особенности по этим переменным чисто кинематической природы, обусловленные полюсами Γ -функций.

Из вида (4) $\rho_{j; \lambda_4}$ можно также заметить, что при определении амплитуд $f_{j; \lambda}$ были выделены множители $k_i^{l_i} = (t_i/4 - \mu^2)^{l_i/2}$, где $i = 1, 2$. Сумма по λ_n и интеграл $\int d\tau_n$ в (3) при $n = 4$ означают

$$\sum_{\lambda_4} \int d\tau_4 = \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} \sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{m_2=-l_2}^{l_2} \int_{4\mu^2}^{(t_1/2 - 2\mu)^2} dt_2 \int_{4\mu^2}^{(t_1/2 - i^{1/2})^2} dt_1. \quad (7)$$

Амплитуда $f_{j; \lambda_4}(t; t_1, t_2)$ удовлетворяет условиям унитарности не только в t , но и в t_1 - и t_2 -каналах; последние отвечают взаимодействию образующихся пар частиц с моментами l_1 или l_2 . В t_2 -канале условие унитарности (двухчастичное) имеет вид

$$\frac{1}{2i} [f_{j; \lambda_4}(t; t_1, t_2) - f_{j; \lambda_4}(t; t_1^{(2)}, t_2)] = \\ = \frac{k_1^{2l_1+1}}{\sqrt{t_1}} f_{j; \lambda_4}(t; t_1^{(2)}, t_2) f_{l_1}(t_1), \quad (8)$$

где через $f_{j; \lambda_4}(t; t_1^{(2)}, t_2)$ обозначена величина амплитуды $f_{j; \lambda_4}(t; t_1, t_2)$ после обхода в t_1 -плоскости особенности при $t_1 = 4\mu^2$. $f_{l_1}(t_1)$ — парциальная амплитуда рассеяния двух образующихся частиц. Она удовлетворяет условию унитарности такого же вида:

$$\Delta_2 f_{l_1}(t_1) \equiv \frac{1}{2i} [f_{l_1}(t_1) - f_{l_1}^{(2)}(t_1)] = \frac{1}{2} \frac{2k_1^{2l_1+1}}{t_1^{1/2}} f_{l_1}^{(2)}(t_1) f_{l_1}(t_1),$$

которое можно также записать в виде

$$\frac{1}{2i} [D_{l_1}(t_1) - D_{l_1}^{(2)}(t_1)] = \frac{1}{2} \frac{2k_1^{2l_1+1}}{t_1^{1/2}}, \quad (9)$$

если ввести обозначение

$$f_{l_1}(t_1) = -1/D_{l_1}(t_1); \quad (10)$$

множитель $1/2$ в (9) возникает из-за тождественности частиц.

Учитывая равенство (8) и такое же условие унитарности по t_2 -каналу, замечаем, что $f_{j; \lambda_4}$ можно записать в виде

$$f_{j; \lambda_4}(t; t_1, t_2) = \frac{G_{j; \lambda_4}(t; t_1, t_2)}{D_{l_1}^{(2)}(t_1) D_{l_2}^{(2)}(t_2)}, \quad (11)$$

где $G_{j; \lambda_4}$ не имеет особенностей при $t_1 = 4\mu^2$ и при $t_2 = 4\mu^2$. Точно так же

$$f_{j; \lambda_4}^{(4)}(t; t_1, t_2) = \frac{G_{j; \lambda_4}^{(4)}(t; t_1, t_2)}{D_{l_1}^{(2)}(t_1) D_{l_2}^{(2)}(t_2)}. \quad (12)$$

Подставляя (11), (12) и (4) в интеграл (3), (7) и замечая, что в силу (9)

$$\frac{1}{D_{l_1}^{(2)}(t_1) D_{l_2}^{(2)}(t_2)} \frac{1}{D_{l_1}^{(2)}(t_1) D_{l_2}^{(2)}(t_2)} \frac{2k_1^{2l_1+1}}{t_1^{1/2}} \frac{2k_2^{2l_2+1}}{t_2^{1/2}} = \\ = \frac{2^2}{(2i)^2} \left(\frac{1}{D_{l_1}(t_1)} - \frac{1}{D_{l_1}^{(2)}(t_1)} \right) \left(\frac{1}{D_{l_2}(t_2)} - \frac{1}{D_{l_2}^{(2)}(t_2)} \right), \quad (13)$$

запишем правую часть (3) при $n = 4$ в виде, аналогичном использованному Мандельштамом [7]:

$$\Delta_4 f_j(t) = \frac{2^2}{4!} \sum_{\lambda_4} B_j(\lambda_4) \int_{C_2} \frac{dt_2}{2i} \int_{C_1} \frac{dt_1}{2i} \times \\ \times \frac{G_{j; \lambda_4}(t; t_1, t_2) G_{j; \lambda_4}^{(4)}(t; t_1, t_2) 2p(t; t_1, t_2)}{D_{l_1}(t_1) D_{l_2}(t_2) t^{1/2}}, \quad (14)$$

где C_2 и C_1 — контуры, указанные ¹ на рис. 2, 3.

Поясним общий принцип введения квантовых чисел и форму условия (3) унитарности на случаях $n = 6$ и $n = 8$ (нечетные чис-

ла n , кроме $n = 3$, в дальнейшем не будут нас интересовать). Состояние шести частиц можно определить, задавая, кроме j и t , величины угловых моментов и энергий какой-либо четверки и пары частиц. Обозначим их через l_{12}, m_{12}, t_{12} и l_3, m_3, t_3 . Для определения состояния четырех частиц необходимо, как это было сделано выше (для $n = 4$), разбить их на две пары и определить квантовые числа l_1, m_1, t_1 и l_2, m_2, t_2 каждой пары. Поэтому в случае $n = 6$

$$\lambda_6 = \{l_1 m_1, l_2 m_2, l_{12} m_{12}, l_3 m_3\}, \quad \tau_6 = \{t_1, t_2, t_{12}, t_3\}.$$

Состояние восьми частиц можно определить, разбив их на две четверки и определяя, кроме j и t , квантовые числа l_{12}, m_{12}, t_{12} и l_{34}, m_{34}, t_{34} обеих четверок частиц. Кроме того, следует задать квантовые числа l_a, m_a, t_a ($a = 1, 2, 3, 4$) тех пар частиц, из которых состоят первая и вторая четверки. Другой способ описания состояния восьми частиц можно получить, разбив их на группы из шести и двух частиц и определяя $j; t$ и квантовые числа $l_{123}, m_{123}, t_{123}$ шестерки и l_4, m_4, t_4 — пары частиц. Кроме того, для описания

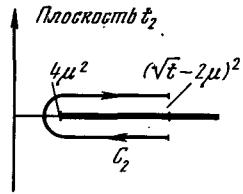


Рис. 2

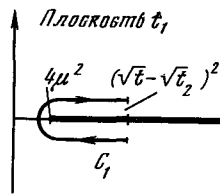


Рис. 3

состояния шести частиц (в их с.ц.и.) следует ввести еще те же квантовые числа, что и в случае $n = 6$, т. е. λ_6 и τ_6 . Амплитуды $f_j; \lambda_6$ и $f_j; \lambda_6$ можно записать аналогично (11) в виде

$$f_j; \lambda_6 = \frac{G_j; \lambda_6(t; t_{12}, t_1, t_2, t_3)}{D_{l_1}(t_1) D_{l_2}(t_2) D_{l_3}(t_3)}, \quad f_j; \lambda_6 = \frac{G_j; \lambda_6}{\prod_{a=1}^4 D_{l_a}(t_a)}, \quad (11a)$$

причем $G_j; \lambda_6$ и $G_j; \lambda_6$ не имеют особенностей при $t_a = 4\mu^2$, где $a = 1, 2, 3$ или $a = 1, 2, 3, 4$. Используя нормировку этих амплитуд

¹ Как заметил авторам Я. Азимов, подынтегральная функция в отдельном члене суммы по λ_4 в (14) не может быть записана в виде единой аналитической функции во всей области изменения t_1 и t_2 . Однако для нас это не существенно, так как величину, стоящую в правой части (14), мы определяем следующим образом. Будем полагать, что сначала в (14) проводится суммирование по всем значениям угловых моментов (по $\lambda_4 = l_1 m_1, l_2 m_2$), а после этого полученная функция (которая уже будет аналитической по t_1 и t_2) интегрируется по комплексным контурам C_1 и C_2 .

такую же, как в случае $n = 4$, получим для $\rho_j; \lambda_6$ значение

$$\rho_j; \lambda_6 = \frac{1}{6!} B_j(l_{12}, m_{12}, l_3 m_3) B_{l_{12}}(l_1 m_1, l_2 m_2) \times \times \frac{2p(t; t_{12}, t_3)}{t^{1/2}} \frac{2p(t_{12}; t_1, t_2)}{t_{12}^{1/2}} \frac{2k_1^{2l_1+1}}{t_1^{1/2}} \frac{2k_2^{2l_2+1}}{t_2^{1/2}} \frac{2k_3^{2l_3+1}}{t_3^{1/2}}. \quad (15)$$

Поэтому для $n = 6$ условие унитарности (3) имеет вид

$$\Delta_6 f_j(t) = \sum_{\lambda_6} \frac{2^3}{6!} B_j B_{l_{12}} \frac{1}{(2i)^3} \int_{C_3} \int_{C_2} \int_{C_1} dt_a dt_{12} \frac{G_j; \lambda_6 G_j; \lambda_6^{(6)}}{D_{l_1}(t_1) D_{l_2}(t_2) D_{l_3}(t_3)} \times \times \frac{2p(t; t_{12}, t_3)}{t^{1/2}} \frac{2p(t_{12}; t_1, t_2)}{t_{12}^{1/2}}, \quad (16)$$

$$dt_a = dt_1 dt_2 dt_3,$$

где

$$\sum_{\lambda_6} = \sum_{l_{12} m_{12}} \sum_{l_1 m_1} \sum_{l_2 m_2} \sum_{l_3 m_3}.$$

Интегрирование по t_{12} в (16) производится в пределах

$$(t_1^{1/2} + t_2^{1/2})^2 < t_{12} < (t_1^{1/2} - t_2^{1/2})^2, \quad (17a)$$

а по t_1, t_2, t_3 — по контурам, подобным C_1 и C_2 рис. 2, 3, окружающим точку $t_a = 4\mu^2$ до точек (расположенных, как на рис. 2, 3, на обоих берегах разреза):

$$\begin{aligned} \text{по } t_3 & \text{ до } t_3 = (t_1^{1/2} - 4\mu)^2, \\ \text{по } t_2 & \text{ до } t_2 = (t_1^{1/2} - t_3^{1/2} - 2\mu)^2, \\ \text{по } t_1 & \text{ до } t_1 = (t_1^{1/2} - t_3^{1/2} - t_2^{1/2})^2. \end{aligned} \quad (17b)$$

В общем случае произвольного четного числа частиц $2n$ условие унитарности (3) может быть записано в виде совершенно таком же, как (14), (16):

$$\Delta_{2n} f_j(t) = \sum_{\lambda_n} \frac{2^n}{(2n)!} B_j(\lambda_{2n}) \frac{1}{(2i)^n} \int_{C_n} K_j; n(\tau_n) \frac{G_j; \lambda_n G_j; \lambda_n^{(2n)}}{\prod_{a=1}^n D_{l_a}(t_a)} d\tau_n, \quad (18)$$

где $K_j; n$ — произведение $(n-1)$ множителей вида $2p(t_{ab}; t_a, t_b)/t_{ab}^{1/2}$ — по одному на каждое соединение двух групп частиц с энергиями t_a, t_b в группу с энергией t_{ab} . Точно так же $B_j(\lambda_{2n})$ есть произведение $(n-1)$ множителей (6) — по одному на каждое такое соединение. Интегрирование $\int_{C_n} d\tau_n$ по всем переменным t_a ,

t_{ab}, t_{abc} и т. д. производится по области типа (17a), (17b), отвечающей законам сохранения, причем интегралы по t_a (по энергиям

пар частиц) берутся не по отрезкам вещественной оси, а по контурам, подобным рис. 2, 3, окружающим эти отрезки и обходящие точки $t_a = 4\mu^2$.

3. Трудности аналитического продолжения в j -плоскости

Условие унитарности (14), (16) или (18) записано для целых значений j . Продолжение его в область комплексных j представляет собой сложную задачу, решение которой требует знания аналитических свойств амплитуд $f_j; \lambda_n$ неупругих процессов.

Рассмотрим, для определенности, четырехчастичный член (14) условия унитарности. Даже в том случае, когда аналитические свойства амплитуд $f_j; \lambda_i = f_j; l_1 m_1, l_2 m_2$ таковы, что при целых $l_1 m_1$ и $l_2 m_2$ возможно построить однозначно их аналитическое продолжение в j -плоскость, возникает следующая трудность¹. Так как величина $m_1 + m_2$ в сумме (14) — (17) изменяется от 0 до ∞ , пробогая все целые значения, то функция $\Gamma[j + 1 - (m_1 + m_2)]$, входящая множителем в коэффициент $B_j(\lambda_4)$ (6) в правой части (14), имеет полюса при всех целых положительных значениях j . Эти полюса никак не проявлялись бы, если бы амплитуды $f_j; \lambda_i$ (или $G_j; \lambda_i$) имели непосредственное физическое значение для всех целых j , так как при этом $G_j; \lambda_i$ должны были бы быть равными нулю для всех тех целых j , для которых $|m_1 + m_2| \geq j + 1$.

Однако аналитическое продолжение в j -плоскость (как амплитуд $f_j(t)$, так и $f_j; \lambda_n$) требует, во всяком случае, введения сигнатуры. Иначе говоря, аналитическое продолжение $f_j; l_1 m_1, l_2 m_2$ имеет смысл физической амплитуды только при четных или только при нечетных j . Поэтому при целых j «чужой» сигнатуры (нечетных

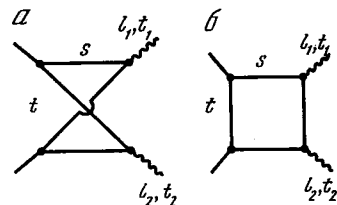


Рис. 4

для положительной сигнатуры и четных для отрицательной) функция $f_j; \lambda_i = G_j; \lambda_i / D_{l_1} D_{l_2}$ не обязана обращаться в нуль.

Более детальный анализ некоторых диаграмм теории возмущений показывает, что парциальная амплитуда $f_j; \lambda_i$, соответствующая этим диаграммам, в точках «чужой» сигнатуры действительно

но не равна нулю. Она, например, отлична от нуля для случая тех диаграмм Фейнмана, которые, будучи рассматриваемы как амплитуды образования двух частиц со спинами l_1, l_2 (и массами $t_1^{1/2}$ и $t_2^{1/2}$), имеют отличную от нуля спектральную функцию $\rho(s, u)$. Одна из таких диаграмм указана на рис. 4, а (в случае же диаграммы рис. 4, б, которая имеет отличную от нуля лишь спектральную функцию $\rho(s, t)$, амплитуда $f_j; \lambda_i$ обращается в нуль не только при всех целых j , для которых $j + 1 \leq |m_1 + m_2|$, но и в том случае [17], если j и $m = m_1 + m_2$ — не целые числа, но их разность $|m_1 + m_2| - j - 1$ — целое положительное число).

Таким образом, в виде (14) (с суммой (7) по m_1 и m_2 , распространенной от $-\infty$ до ∞) условие унитарности заведомо не может быть продолжено в область комплексных j , так как правая часть (14) при этом будет иметь бесконечное число полюсов при всех целых положительных значениях $j = n$ «чужой» сигнатуры¹.

Чтобы обойти эту трудность, попытаемся определить аналитическое продолжение на комплексные j правой части (14) не в виде суммы по целым $l_1 m_1, l_2 m_2$, как в (7), а в виде контурных интегралов по этим переменным.

4. Аналитическое продолжение трехчастичного условия унитарности

Чтобы не загромождать изложение, поясним сначала способ перехода к контурным интегралам по l и m на примере члена условия унитарности, отвечающего образованию трех бесспиновых частиц в промежуточном состоянии. Полагаем, что две из этих частиц образуются в состоянии с определенным угловым моментом l и спиральностью m . Соответствующий член условия унитарности для $f_j(t)$ имеет вид, аналогичный (14):

$$\Delta_3 f_j(t) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \frac{2}{3!} B_j(l, m; 0; 0) \frac{1}{2i} \int_{C_1} dt_1 \times \\ \times \frac{G_{j; lm}(t^2; t_1) G_{j; lm}^{(3)}(t^2; t_1) 2p(t; t_1 \mu^2)}{D_l(t_1) t^{1/2}}, \quad (19)$$

$$B_j(l, m; 0, 0) = \frac{\Gamma(j - m + 1) (2l + 1) \Gamma(l - m + 1)}{\Gamma(j + m + 1) \Gamma(l + m + 1)},$$

причем контур C_1 — точно такой же, как на рис. 3, но оканчивается в точке $t_1 = (t^{1/2} - \mu)^2$. При записи (19) было учтено, что произведение $B_j G_{j; lm} G_{j; lm}$ не изменяется [18] при замене m на $-m$,

т. е. что сумму $\sum_{l=j}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l}$ можно записать в виде $2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty}$, где

¹ Авторы благодарны Я. И. Азимову, Г. С. Данилову и И. Т. Дятлову, обратившим их внимание на это обстоятельство.

¹ Это противоречит тому хорошо известному факту, что парциальная амплитуда $f_j(t)$ не имеет никаких особенностей в правой части j -плоскости.

штрих над знаком суммы означает, что член с $m = 0$ берется со множителем $1/2$. Для амплитуды $f_j; \lambda_s = f_j, l_m(t; t_1)$ образования трех частей (см. рис. 7) в (19) было подставлено значение, аналогичное (11):

$$f_j; l_m(t; t_1) = G_j; l_m(t; t_1)/D_l(t_1) \quad (20)$$

и для $D_l(t_1)$ использовано соотношение (9).

Для аналитического продолжения правой части (19) на комплексные j попытаемся записать сумму по l, m в виде контурных интегралов:

$$\sum_{lm} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \rightarrow \frac{2}{(2i)^2} \int_M \frac{dm}{\operatorname{tg} \pi m} \int_L \frac{dl}{\operatorname{tg} [\pi(l-m)]}. \quad (21)$$

Контур L и M указаны на рис. 5, 6; контур L охватывает точки $l = m, m + 1, \dots$, контур M охватывает не только полюса $1/\operatorname{tg} \pi m$ (при $m = 0, 1, 2, \dots$; член с $m = 0$ воспроизводится правой частью (21) без множителя $1/2$; однако этот член совершенно не существен для дальнейшего), но также и полюса функции $\Gamma(j - m + 1)/\Gamma(j + m + 1)$, входящей в $B_j(lm, 00)$. Последнее необходимо для того, чтобы интеграл (21) не имел особенностей при сколь угодно больших положительных целых j , при которых полюса функции $\Gamma(j + 1 - m)$, указанные кружками на рис. 6 (в точках $m = j + 1 + v, v = 0, 1, 2, \dots$), совпадают с полюсами $1/\operatorname{tg} \pi m$.

Попытка продолжения (19) непосредственно в виде суммы по целым l, m соответствует записи (21) с таким контуром M' , который не охватывает полюса $\Gamma(j + 1 - m)$ (см. рис. 6). При этом интеграл (21) будет иметь указанные выше особенности — полюса при целых j , так как при $j \rightarrow n$ особенности $\Gamma(j + 1 - m)$ и $1/\operatorname{tg} \pi m$ будут сжимать контур M' .

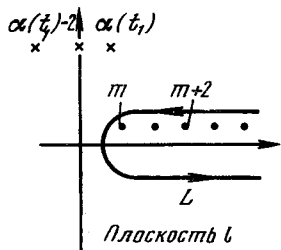


Рис. 5

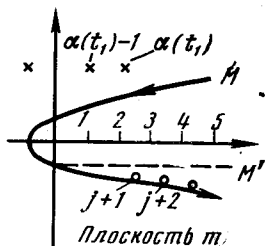


Рис. 6

Отметим, что благодаря тому, что контур интегрирования M по m в (21) охватывает полюса $\Gamma(j + 1 - m)$, запись условия унитарности (19) в виде (21) неоднозначна. Действительно, если $1/\operatorname{tg} \pi m$ в (21) заменять на $1/\operatorname{tg} \pi m + \chi(j; lm)$, где $\chi(j; lm)$ — любая

¹ Добавление в (21) аналогичного слагаемого к $1/\operatorname{tg} [\pi(l-m)]$ величину интеграла (19), (21) не изменяет.

функция $j; lm$, не имеющая особенностей внутри контуров L, M на рис. 5, 6, то интеграл (21) изменится¹ за счет вклада полюсов функции $\Gamma(j + 1 - m)$. Функцию $\chi(j; lm)$ фактически необходимо учитывать в правой части (21), причем вид ее однозначно определяется условием ограниченности роста интеграла (21) в комплексной j -плоскости. Для получения явного вида $\chi(j; lm)$ необходимо знать аналитические свойства функций в правой части (19) в плоскостях переменных j, l, m . Нас, однако, в дальнейшем будет интересовать лишь особая часть интеграла (21) как функции j . Поэтому возможность (или необходимость) добавления $\chi(j; lm)$ к $\operatorname{ctg} \pi m$ ниже мы не будем учитывать, полагая, что множитель $[1 + \chi(j; lm) \operatorname{tg} \pi m]^{1/2}$ включен в (19) в определение функций $G_j; l_m$.

Продемонстрируем как из (19), (21) следует та особенность $f_j(t)$, которая была обнаружена Мандельштамом [7]. Предположим, что при $l = \alpha(t_1)$ функция $D_l(t_1)$ обращается в нуль, т. е.

$$D_l(t_1) = -[1/g^2(t_1)][l - \alpha(t_1)] \quad (22)$$

при $l \rightarrow \alpha(t_1)$. Это соответствует полюсу Редже амплитуды пятихвостки (рис. 7) в канале t_1 (рис. 8) и отвечает обычному виду амплитуды (10) упругого рассеяния

$$f_l(t_1) = g^2(t_1)/[l - \alpha(t_1)] \quad (23)$$

— вкладу от полюса Редже (рис. 9).

Как ясно из рис. 5, интеграл (21) по l имеет полюса по переменной m в точках $m = \alpha(t_1), \alpha(t_1) - 1, \alpha(t_1) - 2, \dots$ (указанных крестиками на рис. 6) из-за совпадения в (19), (21) нулей $\operatorname{tg} [\pi(l-m)]$ с нулями $D_l(t_1)$. При последующем интегрировании по m необходимо учитывать эти полюса. В частности, полюса функции $\Gamma(j + 1 - m)$ могут при изменении j в комплексной плоскости совпасть с этими полюсами. Это приведет к тому, что двойной

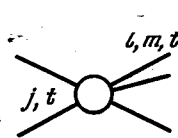


Рис. 7

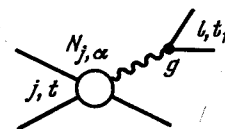


Рис. 8

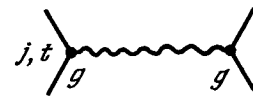


Рис. 9

интеграл (21) по l и m будет иметь полюса в j -плоскости в точках

$$j = \alpha(t_1) - 1 - k,$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$

Рассмотрим наиболее правую особенность интеграла (19), (21) в j -плоскости, соответствующую $k = 0$. Подставляя (22) в (19), (21), легко вычислить сингулярную часть интегралов по l и m ,

возникающую за счет полюсов (крестики на рис. 5 и 6) подынтегральных функций при $m = \alpha(t_1)$, $l = \alpha(t_1)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i} \int_L \frac{dl}{\operatorname{tg}[\pi(l-m)]} \frac{G_{j;lm} G_{j;lm}^{(3)}}{D_l(t_1)} \frac{(2l+1)\Gamma(l-m+1)}{\Gamma(l+m+1)} = \\ & = \frac{g^2}{\alpha(t_1)-m} (2\alpha+1)\Gamma(\alpha-m+1) \frac{G_{j;\alpha m} G_{j;\alpha m}^{(3)}}{\Gamma(\alpha+m+1)}, \\ & \frac{2}{2i} \int_M \frac{dm}{\operatorname{tg} \pi m} \frac{g^2 G_{j;\alpha m} G_{j;\alpha m}^{(3)}}{\alpha(t_1)-m} \frac{(2\alpha+1)\Gamma(\alpha-m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} \frac{\Gamma(j-m+1)}{\Gamma(j+m+1)} = \\ & = \Lambda^2(j, \alpha) \frac{g^2 G_{j;\alpha\alpha} G_{j;\alpha\alpha}^{(3)}}{j+1-\alpha(t_1)}, \end{aligned}$$

где

$$\Lambda^2 = \frac{(2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} \frac{\Gamma(j-\alpha+1)}{\Gamma(j+\alpha+1)} \frac{2\pi}{\operatorname{tg} \pi \alpha(t_1)}$$

— функция, не имеющая особенностей в области $\alpha \neq 0$, $j+1 \approx \approx \alpha(t_1)$, существенной в дальнейшем.

Пользуясь этим результатом, запишем интересующую нас сингулярную часть $\Delta_{3f_j}(t)$ в виде

$$\Delta_{3f_j}(t) = \frac{2}{3!} \int_{C_1} \frac{\Lambda^2(j; \alpha) (g G_{j;\alpha}) (g G_{j;\alpha}^{(3)})}{j+1-\alpha(t_1)} \frac{2p(t; t_1 \mu^2) dt_1}{t^{1/2} 2i}, \quad (24)$$

где для краткости вместо $G_{j;\alpha\alpha}$ записано $G_{j;\alpha}$.

Заметим, что величина $G_{j;\alpha}$ имеет смысл амплитуды перехода двух частиц в реджион и частицу. Действительно, если процесс образования трех частиц рассматривать как идущий через виртуальное реджионное состояние, то ему естественно сопоставить диаграмму рис. 8 и величину

$$N'_{j;\alpha} \frac{1}{l-\alpha(t_1)} g(t_1), \quad (25)$$

где $N'_{j;\alpha}$ — амплитуда рождения реджиона и частицы.

С другой стороны, при $l \rightarrow \alpha(t_1)$ амплитуда $f_{j;\lambda_3}$ как раз имеет, согласно (20) и (22), вид (25) с $N'_{j;\alpha} = -g G_{j;\alpha}$. Поэтому, если в правую часть (24) ввести амплитуду

$$N_{j;\alpha} = \Lambda(j, \alpha) g G_{j;\alpha}, \quad (26)$$

отличную от $N'_{j;\alpha}$ лишь на стандартный множитель $\Lambda(j, \alpha)$, то константа $g(t_1)$ распада реджиона на две частицы в промежуточном состоянии вообще выпадает из правой части выражения для $\Delta'_{3f_j}(t)$

$$\Delta'_{3f_j}(t) = \frac{2}{3!} \frac{1}{2i} \int_{C_1} \frac{N_{j;\alpha} N_{j;\alpha}^{(3)}}{j+1-\alpha(t_1)} \frac{2p(t; t_1, \mu^2)}{t^{1/2}} dt_1. \quad (27)$$

Нетрудно заметить, что после интегрирования по t_1 правая часть (27) оказывается сингулярной функцией переменной j . Точка ветвления по j интеграла (27) возникает в результате совпадения нуля знаменателя с особенностью $p(t; t_1, \mu^2)$ при $t_1 = (t^{1/2} - \mu)^2$ (с верхним пределом интеграла по t_1), т. е. при $j = \alpha[(t^{1/2} - \mu)^2] - 1$. Эта точка ветвления была обнаружена Мандельштамом [7] (вопрос о характере этой особенности подробно рассмотрен в работе Симонова [19]).

В заключение этого раздела обсудим следующий вопрос. Мы обнаружили лишь одну точку ветвления, возникающую за счет полюса Редже в амплитуде взаимодействия одной лишь пары частиц (обозначим их через 1 и 2). Ясно, что точно такие же точки ветвления должны возникать из-за полюсов Редже в амплитудах взаимодействия частиц 1, 3 или 2, 3. Однако при нашей записи условия унитарности в виде (19), (21), при которой состояние трех частиц характеризуется в частности моментом l и спиральностью m пары частиц 1 и 2, этих особенностей не видно.

Для понимания ситуации заметим, что аналогичный вопрос возникает и при целых j , если мы захотим найти вклад в трехчастичное условие унитарности от реальных физических резонансных взаимодействий не только частиц 1, 2, но и 1, 3 и 2, 3. Ясно, что если мы выбрали в качестве переменных момент и спиральность одной из пар, например l_{12} , m_{12} , частиц 1, 2, то резонанс в состоянии этой пары со спином s_{12} проявится лишь в определенных членах суммы по l_{12} и m_{12} , в тех, для которых $l_{12} = s_{12}$, $-s_{12} \leq m_{12} \leq \leq s_{12}$.

Остальные резонансные взаимодействия проявятся в том, что сумма по l_{12} окажется расходящейся, если энергию частиц 1, 3 или 2, 3 стремить к комплексным значениям, отвечающим ее резонансным значениям. Это ясно, хотя бы из того, что запись условий унитарности в виде суммы по l_{12} соответствует разложению амплитуды образования трех частиц в ряд по переменным t_{13} и t_{23} при фиксированных t , t_{12} . При этом особенности по t_{13} и t_{23} (резонансы) должны проявляться в виде расходимости суммы.

Вместо исследования расходимости сумм удобнее найти вклад от всех резонансов, переписывая условие унитарности всеми возможными (в данном случае тремя) способами, и результаты сложить. Эти соображения полностью относятся и к случаю, когда мы интересуемся вкладом полюсов Редже в амплитудах взаимодействия той или иной пары частиц в промежуточном состоянии в особую часть величины $\Delta_{3f_j; \lambda_3}$.

Таким образом, в случае тождественных частиц, для учета вклада от всех трех взаимодействий пар 1, 2; 1, 3 и 2, 3, правую часть (27) следует помножить на 3. При этом множитель $2/3!$ в правой части (27) заменится на единицу.

5. Аналитическое продолжение
четырёхчастичных членов условия унитарности

Будем строить аналитическое продолжение четырехчастичных членов (14) условия унитарности в форме, аналогичной (21), заменяя в (14) суммирование по λ_4 (т. е. по $l_1 m_1, l_2 m_2$) интегрированием. Чтобы это сделать, запишем сумму (7) по λ_4 в виде

$$\sum_{l_1 m_1 l_2 m_2} \equiv 2 \sum'_{m_1 m_2 > 0} \sum_{l_1=m_1}^{\infty} \sum_{l_2=m_2}^{\infty} + 2 \sum_{m_1 > 0, m_2 < 0} \sum_{l_1=m_1}^{\infty} \sum_{l_2=-m_2}^{\infty}, \quad (28)$$

где так же, как и в (21), учтено, что выражение в (14) под знаком суммы по λ_4 не изменяется [18] при замене m_1, m_2 одновременно на $-m_1$ и $-m_2$.

Формулы, полученные далее для четырехчастичного случая, будут иметь для нас реальное, а не иллюстративное (как в трехчастичном случае) значение. Поэтому следует учесть, что амплитуды $f_{j, \lambda_4} = f_{j, l_1 m_1, l_2 m_2}$ во всяком случае не могут быть продолжены как функции l_1 и l_2 со всех целых значений l_1 и l_2 и необходимо ввести сигнатуру по этим переменным. В дальнейшем как по l_1 , так и по l_2 нас будет интересовать лишь вакуумный полюс, который имеется только в состоянии с положительной сигнатурой. Поэтому будем рассматривать ту часть сумм (28), в которых l_1 и l_2 — четные числа. При этом сумму, например, по l_1 и m_1 в первом члене в (28) можно представить в виде

$$\sum_{m_1 > 0} \sum_{l_1 = \text{четн}, l_1 \geq m_1}^{\infty} \equiv \sum_{m_1 = 0, 2, 4, \dots}^{\infty} \sum_{l_1 = m_1, m_1 + 2, \dots}^{\infty} + \sum_{m_1 = 1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{l_1 = m_1 + 1, m_1 + 3, \dots}^{\infty}$$

или, при переходе к контурным интегралам, как в (21), запишем в виде

$$\frac{1}{(4i)^2} \int_{M_1} \frac{dm_1}{\text{tg}^{1/2} \pi m_1} \int_{L_1} \frac{dl_1}{\text{tg}^{1/2} \pi (l_1 - m_1)} + \frac{1}{(4i)^2} \int_{M_1} \frac{dm_1}{\text{ctg}^{1/2} \pi m_1} \int_{L_1} \frac{dl_1}{\text{ctg}^{1/2} \pi (l_1 - m_1)}, \quad (29)$$

где M_1 и L_1 — контуры такие же, как на рис. 5 и 6.

Как мы видели выше (в предыдущем разделе), особенность всего интеграла возникает от значений l , близких к m . Во втором члене величина l_1 всегда по крайней мере на единицу больше m_1 . Учитывая это, можно заметить (если провести с этим членом все те же действия, что ниже проведены для первого), что этот член имеет особенность по j , смещенную в j -плоскости на единицу влево, по сравнению с особенностью первого члена. Такие особенности нас интересовать не будут и поэтому второй член в (29) мы вовсе опустим. Точно так же можно не учитывать и весь второй член в (28), так как (как показано подробно в Приложении 1) он не приводит к особенностям, существенным в дальнейшем.

Таким образом, запишем условие унитарности (14) в виде

$$\Delta' f_j(t) = \frac{2^2}{4!} \frac{1}{(4i)^4} \int_{M_1} \frac{dm_1}{\text{tg}^{1/2} \pi m_1} \int_{L_2} \frac{dl_1}{\text{tg}^{1/2} \pi (l_1 - m_1)} \int_{M_2} \frac{dm_2}{\text{tg}^{1/2} \pi m_2} \times \\ \times \int_{L_2} \frac{dl_2}{\text{tg}^{1/2} \pi (l_2 - m_2)} 2B_j(l_1 m_1, l_2 m_2) \frac{1}{2i} \times \\ \times \int_{C_2} dt_2 \int_{C_1} dt_1 \frac{G_{j, \lambda_4}(t; t_1, t_2) G_{j, \lambda_4}^{(4)}(t; t_1, t_2) 2p(t; t_1, t_2)}{D_{l_1}(t_1) D_{l_2}(t_2) t^{1/2}}, \quad (30)$$

где множитель $B_j(l_1 m_1, l_2 m_2)$ был определен выше (см. (6)), контуры L_1 и L_2 совпадают с контуром рис. 5, а контур M_2 включает особенности функции $\Gamma(j+1-m_1-m_2)$, которая содержится в $B_j(l_1 m_1, l_2 m_2)$ (рис. 10).

Повторяя рассуждения предыдущего раздела, мы приходим к заключению, что после интегрирования по l_1, l_2 и m_2 , которое следует провести с учетом полюсов Редже по l_1 и l_2 (т. е. нулей $D_{l_1}(t_1)$ и $D_{l_2}(t_2)$ при $l_1 = \alpha(t_1), l_2 = \alpha(t_2)$), подынтегральная функция в интеграле по m_1 будет иметь полюса в точках:

- 1) $m_1 = 0, 2, 4, \dots$ — из-за нулей $\text{tg}^{1/2} \pi m_1$;
- 2) $m_1 = \alpha(t_1), \alpha(t_1) - 2, \dots$ и т. д., возникающие от интегрирования по l_1 ;
- 3) $m_1 = j+1 - \alpha(t_1) + k$ ($k = 0, 1, 2$) — от интегрирования по l_2 и m_2 .

Механизм появления этих полюсов совершенно аналогичен рассмотренному подробно в предыдущем разделе. Они возникают при учете полюсов функции $\Gamma(j+1-m_1-m_2)$, которая содержится множителем в коэффициенте (6).

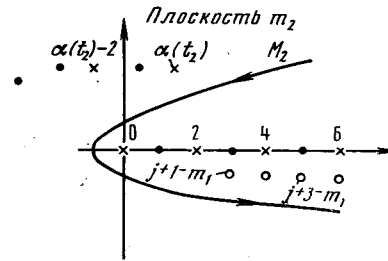


Рис. 10

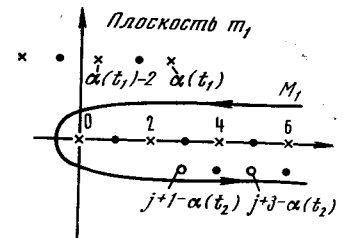


Рис. 11

Все эти особенности указаны на рис. 11. Контур интегрирования M_1 обязательно должен быть выбран так, чтобы полюса третьего типа находились внутри контура, как это указано на рис. 11. В противном случае правая часть (30) будет иметь особенности (полюса) при сколь угодно большом j за счет совпадения полюсов третьего типа с особенностями $\text{ctg}^{1/2} \pi m_1$. Следует отметить, что возможность прибавления функции χ к $\text{ctg}^{1/2} \pi m$, обсуждавшаяся

в предыдущем разделе, здесь имеет место как для $\text{ctg } 1/2 \pi m_1$, так и $\text{ctg } 1/2 \pi m_2$.

Последнее интегрирование в (30) по контуру M_1 рис. 10 приводит к особенности из-за совпадения полюсов второго и третьего типов при следующих значениях j : $j = \alpha(t_1) + \alpha(t_2) - 1 + k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Если траектория $\alpha(t)$ при некотором $t = m_0^2$ проходит через физическое значение (например, $\alpha(m_0^2) = 0$), то последняя формула отвечает азимовскому смещению [9] особенности при $j = -1$ [8].

Однако в том случае, когда амплитуда образования частицы удовлетворяет мандельштамовскому представлению, известно [9], что число k может иметь лишь значения: $k = 0, 2, 4 \dots$ в силу свойств симметрии $\rho(s, u)$ по отношению к замене s на u . Если симметрия такого типа имеет место и для амплитуд образования реджионов, то коэффициенты при особенности будут равны нулю при нечетных k . Если думать, что это в действительности имеет место, то можно, воспользовавшись неоднозначностью аналитического продолжения (добавление χ), написать последнее так, чтобы явно фигурировали только четные k . Это можно сделать, например, заменив $\text{ctg } 1/2 \pi m_1$, $\text{ctg } 1/2 \pi m_2$ на выражение $\sin [1/2 \pi (j - m_1 - m_2)] / \sin 1/2 \pi m_1 \sin 1/2 \pi m_2 \sin 1/2 \pi j$, которое в остальном не хуже исходного. В дальнейшем мы так и будем поступать.

Нас будет интересовать лишь самая правая особенность, отвечающая $k = 0$. Особую часть интегралов по m_1, m_2, l_1, l_2 вычислим точно так же, как это было сделано в предыдущем разделе, используя для $D_{l_1}(t_1)$ и $D_{l_2}(t_2)$ вблизи полюса значение (23):

$$\frac{1}{(4i)^4} \int_{M_1} \frac{dm_1}{\sin 1/2 \pi m_1} \int_{M_2} \frac{dm_2}{\sin 1/2 \pi m_2} \int_{L_1} \frac{dl_1}{\text{tg } 1/2 \pi (l_1 - m_1)} \int_{L_2} \frac{dl_2}{\text{tg } 1/2 \pi (l_2 - m_2)} \times$$

$$\times \frac{2b(l_1 m_1, l_2 m_2)}{[l_1 - \alpha(t_1)][l_2 - \alpha(t_2)]} \frac{\Gamma(j+1 - m_1 - m_2)}{\Gamma(j+1 + m_1 + m_2)} \frac{\sin 1/2 \pi (j - m_1 - m_2)}{\sin 1/2 \pi j} =$$

$$= \frac{\Lambda^2(j; \alpha_1, \alpha_2)}{j+1 - \alpha(t_1) - \alpha(t_2)},$$

$$j+1 \rightarrow \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\Lambda^2(j; \alpha_1, \alpha_2) = - \frac{2\pi^2}{\sin(1/2 \pi j) \Gamma(2j+1)} \frac{2\alpha_1 + 1}{\sin(1/2 \pi \alpha_1) \Gamma(2\alpha_1 + 1)} \times$$

$$\times \frac{2\alpha_2 + 1}{\sin(1/2 \pi \alpha_2) \Gamma(2\alpha_2 + 1)}$$

— функция, не имеющая особенностей в области значений j , близких к $\alpha_1 + \alpha_2 - 1$ ($\alpha_1 = \alpha(t_1)$, $\alpha_2 = \alpha(t_2)$). Через $b(l_1 m_1, l_2 m_2)$ в интеграле обозначены все множители в (6), кроме

$$\Gamma(j+1 - m_1 - m_2) / \Gamma(j+1 + m_1 + m_2),$$

причем

$$b(\alpha_1 \alpha_1, \alpha_2 \alpha_2) = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) / \Gamma(2\alpha_1 + 1) \Gamma(2\alpha_2 + 1).$$

Отсюда для сингулярной части (30) получим

$$\Delta' f_j(t) = \frac{1}{2!} \frac{1}{(2i)^3} \int_{C_2} dt_2 \int_{C_1} dt_1 \frac{N_{j; \alpha_1 \alpha_2}(t; t_1, t_2) N_{j; \alpha_1 \alpha_2}^{(4)}(t; t_1, t_2) 2p(t; t_1, t_2)}{j+1 - \alpha(t_1) - \alpha(t_2) t^{1/2}}, \quad (31)$$

причем

$$N_{j; \alpha_1 \alpha_2}(t; t_1, t_2) = \Lambda(j; \alpha_1 \alpha_2) g_1(t_1) g_2(t_2) G_{j; \alpha_1 \alpha_2}(t; t_1 t_2) \quad (32)$$

имеет смысл амплитуды образования двух реджионов. Последнее можно заменить, рассматривая процесс образования четырех частиц как идущий через два виртуальных реджионных состояния (рис. 12). Его амплитуда в области $l_1 \rightarrow \alpha_1$, $l_2 \rightarrow \alpha_2$ будет иметь вид $f_{j; \alpha_2} \simeq N'_{j; \alpha_1 \alpha_2} \frac{1}{(l_1 - \alpha_1)(l_2 - \alpha_2)} g_1 g_2$, где $N_{j; \alpha_1 \alpha_2}$ — амплитуда перехода двух частиц в два реджиона.

Согласно (11) и (23), $N_{j; \alpha_1 \alpha_2} = g_1 g_2 G_{j; \alpha_1 \alpha_2}$, т. е. $N_{j; \alpha_1 \alpha_2}$ лишь на множитель (стандартно зависящий от t_1, t_2 и j) отличается от амплитуды $N'_{j; \alpha_1 \alpha_2}$. Следовательно, как и в трехчастичном случае, константы g_1 и g_2 распада обоих реджионов на частицы вовсе выпали из ответа (31). Это обстоятельство является общим свойством релятивистской теории, в которой «реджионы» выступают как реальные частицы.

При записи (31) был учтен тот факт, что четыре частицы можно тремя различными способами сгруппировать в две пары с определенными $l_1 m_1$ и $l_2 m_2$. Поскольку все частицы тождественны, то (так же как и в трехчастичном случае) все способы дают один и тот же вклад, и поэтому в (31) был введен множитель 3. При этом вместо коэффициента $2^2/4!$ в (30), в (31) появился множитель $1/2 = 3 \cdot 2^2/4!$. Множитель $1/2$ в (31) соответствует тождественности обоих реджионов.

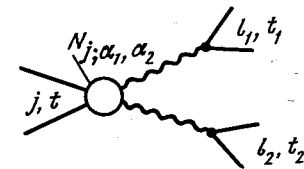


Рис. 12

Интеграл (31) имеет несколько типов особенностей. Интеграл по t_1 по контуру C_1 (рис. 3), который мы обозначим через $\Phi_j(t_1, t_2)$ при фиксированном t_2 , может иметь особенности, если нуль знаменателя в (31) совпадает с краями интегрирования $t_1 = 4\mu^2$ и $t_1 = (t^{1/2} - t_2^{1/2})^2$. Иначе говоря, условиями возникновения особенности этого интеграла будут

$$j+1 = \alpha(4\mu^2) + \alpha(t_2) \quad (33)$$

и

$$j + 1 = \alpha [(t^{1/2} - t_2^{1/2})^2] + \alpha(t_2). \quad (34)$$

При втором интегрировании по t_2 особенности интеграла $\Phi_j(t, t_2)$ могут совпасть либо с краями $t_2 = (t^{1/2} - 2\mu)^2$ и $t_2 = 4\mu^2$ интегрирования, либо сжать с двух сторон контур C_1 интегрирования. Поэтому особенности первых двух типов интеграла (31) вида

$$\frac{1}{2i} \int_{C_1} dt_2 \Phi_j(t, t_2)$$

будут определяться¹ условиями

$$j = 2\alpha(4\mu^2) - 1, \quad (35)$$

$$j = \alpha[t^{1/2} - 2\mu]^2 + \alpha(4\mu^2) - 1. \quad (36)$$

Наибольший интерес представляют особенности третьего типа, потому что при уменьшении t и переходе к области отрицательных t только эти особенности и останутся в j -плоскости. Положение этих особенностей определяется тем значением j , при котором два решения $t_2 = t_2^{(+)}$ и $t_2 = t_2^{(-)}$ уравнения (34) относительно t_2 совпадают. Условием этого совпадения является обращение в нуль производной по t_2 от правой части (34)

$$\alpha'(t_2) = \alpha'[(t^{1/2} - t_2^{1/2})^2] (t^{1/2}/t_2^{1/2} - 1). \quad (37)$$

Это уравнение имеет, во всяком случае, решение

$$t_2^{1/2} = t^{1/2}/2, \quad (38)$$

подстановка которого в (34) определяет положение соответствующей особенности

$$j = j_2(t) = 2\alpha(t/4) - 1. \quad (39)$$

Вопрос о возможности других решений требует специального исследования свойств траектории $\alpha(t)$.

Можно убедиться в том, что существует такой путь движения в j -плоскости (от области больших значений j , где $\Delta_4 f_j$ не имеет особенностей), при котором два решения $t_2^{(+)}$ и $t_2^{(-)}$ действительно сжимают контур C_2 в t_2 -плоскости при j , стремящемся к значению (39). При $t = 16\mu^2$ все три особенности (35), (36) и (39) функции $\Delta_4 f_j(t)$ совпадают. При уменьшении t и прохождении через точку $t = 16\mu^2$, особенности (36) и (39), двигаясь в j -плоскости, обходят друг друга. Мы покажем в Приложении 2, что функция $f_j(t)$ не имеет особенностей (35), (36) при $t < 16\mu^2$, если разрез от особен-

¹ Кроме этих точек, величина (31) имеет особенности также и в комплексно-сопряженных точках.

ности (39) в j -плоскости проведен влево вдоль вещественной оси (особенности (35), (36) оказываются на другом листе, связанном с этим разрезом). Более подробно вопрос о движении особенностей (35), (36) и (2) при изменении j рассмотрен Симоновым [19].

Вычислим скачок $\delta_j f_j(t)$ функции $f_j(t)$ на интересующем нас разрезе на особенности (39) в j -плоскости. Поскольку особенности $f_j^{(+)}(t)$ не совпадают с особенностями $f_j(t)$, то

$$\delta_j \Delta_4 f_j(t) \equiv \delta_j \frac{1}{2i} [f_j(t) - f_j^{(+)}(t)] = \frac{1}{2i} \delta_j f_j(t).$$

Поэтому достаточно найти величину скачка интеграла (31)

$$\Delta_4 f_j(t) = \frac{1}{2i} \int_{C_2} \Phi_j(t, t_2) dt_2. \quad (40)$$

Последний возникает оттого, что две особенности $t_2 = t_2^{(+)}$ и $t_2^{(-)}$ функции $\Phi_j(t, t_2)$,

$$\Phi_j(t, t_2) = \frac{1}{4i} \int_{C_1} \frac{N_j; \alpha, \alpha_2 N_j^{(4)}; \alpha, \alpha_2}{j + 1 - \alpha(t_1) - \alpha(t_2)} \frac{2p(t; t_1, t_2)}{t^{1/2}} dt_1, \quad (41)$$

подходя в плоскости t_2 к контуру C_2 (рис. 2), различным образом деформируют его, в зависимости от способа обхода в j -плоскости (рис. 13) точки $j = j_2(t)$ (пока мы не будем учитывать члены в $\delta_j f_j$, обусловленные зависимостью от j самих амплитуд $N_j; \alpha, \alpha_2$ и $N_j^{(4)}; \alpha, \alpha_2$; (см. об этом в следующем разделе).

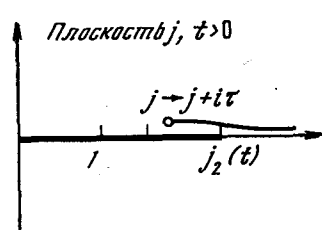


Рис. 13

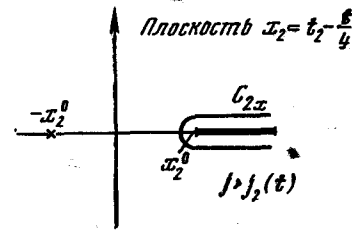


Рис. 14

Вычисляя скачок интеграла (40), получим для $\delta_j f_j(t)$ следующее значение (см. рис. 14—16):

$$\delta_j f_j(t) = \int_{t_2^{(-)}}^{t_2^{(+)}} \Delta_{t_2} \Phi_j(t, t_2) dt_2, \quad (42)$$

где $t_2^{(+)}$ — та из двух особых точек функции (41), которая при $j < j_2$ (и j , близком к j_2) имеет положительную мнимую часть. Здесь

$\Delta_{t_2} \Phi_j(t, t_2)$ — скачок интеграла (41) на контуре, проведенном между точками $t_2^{(+)}$ и $t_2^{(-)}$ (т. е. разность его значений с обеих сторон контура, поделенная на $2i$). Этот скачок с точностью до множителя $2i$ равен величине интеграла (41), взятому по контуру C_1^0 , окружающему в отрицательном направлении (соответственно рис. 3) точку $t_1 = t_1^0$, в которой знаменатель в (41) обращается в нуль:

$$2i\Delta_{t_2} \Phi_j(t, t_2) = \frac{1}{4i} \int_{C_1^0} \frac{N_{j; \alpha_1 \alpha_2} N_{j; \alpha_1 \alpha_2}^{(4)}}{j+1-\alpha(t_1)-\alpha(t_2)} \times \\ \times \frac{2p(t; t_1, t_2)}{t^{1/2}} dt_1 = \frac{\pi}{2\alpha'(t_2^0)} N_{j; \alpha_1 \alpha_2} N_{j; \alpha_1 \alpha_2}^{(4)} \frac{2p(t; t_1, t_2^0)}{t^{1/2}}. \quad (43)$$

Это значение удобно символически записывать в виде

$$\Delta_{t_2} \Phi_j = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2i} \int N_{j; \alpha_1 \alpha_2} N_{j; \alpha_1 \alpha_2}^{(4)} \frac{2p(t; t_1 t_2)}{t^{1/2}} \delta(j+1-\alpha(t_1)-\alpha(t_2)) dt_1,$$

предполагая, что контур интегрирования в комплексной t_1 -плоскости выбран так, что аргумент δ -функции, принимая вещественные значения, проходит через нуль. Такая запись значения (43) удобна (хотя и необязательна) для дальнейшего. Таким образом,

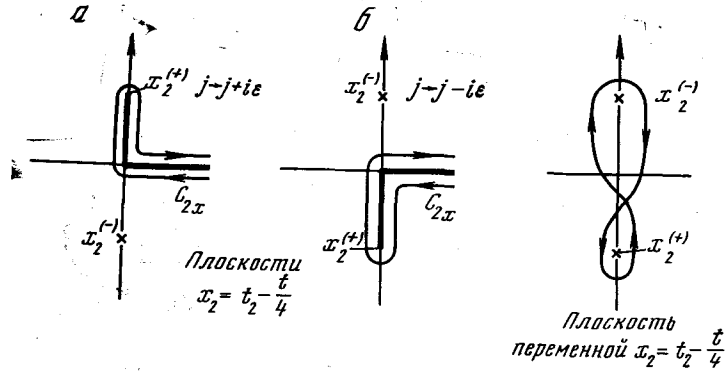


Рис. 15

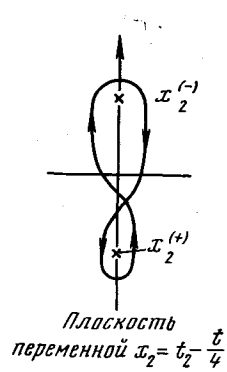


Рис. 16

величину скачка $f_j(t)$ на двухреджионной особенности можно представить в виде

$$\delta f_j(t) = \frac{\pi}{4i} \int_{t_2^{(-)}}^{t_2^{(+)}} dt_2 \int dt_1 N_{j; \alpha_1 \alpha_2} N_{j; \alpha_1 \alpha_2}^{(4)} \times \\ \times \frac{2p(t; t_1, t_2)}{t^{1/2}} \delta(j+1-\alpha(t_1)-\alpha(t_2)), \quad (44)$$

где, как уже было сказано, $t_2^{(+)}$ и $t_2^{(-)}$ — корни уравнения (34), которое можно рассматривать как результат двух условий: $j+1-\alpha(t_1)-\alpha(t_2)=0$, $p(t; t_1, t_2)=0$. (Второе равенство более правильно было бы писать в виде $t^{1/2} = t_1^{1/2} + t_2^{1/2}$).

В этих условиях амплитуду $N_{j; \alpha_1 \alpha_2}$ нельзя считать постоянной (несмотря на то, что при $j \rightarrow j_2$ области интегрирования по t_1 и t_2 стремятся к нулю), так как при $p = p(t, t_1, t_2) \rightarrow 0$ $N_{j; \alpha_1 \alpha_2}$ имеет пороговую особенность вида $N_{j; \alpha_1 \alpha_2} = C_j p^L$. Здесь $L = j - \alpha_1 - \alpha_2$ — минимальное значение орбитального момента орбитального движения двух реджионов. В интеграле (44) величина $L = -1$ и, следовательно,

$$N_{j; \alpha_1 \alpha_2} = C_j(t)/2p, \quad (45)$$

т. е. стремится к бесконечности при $p \rightarrow 0$.

Следует отметить, что амплитуда образования двух частиц $N_{j; l_1 l_2}(t, \mu_1, \mu_2)$ (а не двух реджионов) при $p \rightarrow 0$, в силу условий унитарности, не может стремиться к бесконечности как $1/p$. Ее правильное пороговое поведение определяется [8] формулой

$$N_{j; l_1 l_2}(t, \mu_1, \mu_2) = k^L \left(\Lambda + i \frac{k^{2L+1}}{\sin \pi L} e^{i\pi L} \right),$$

где $k = p(t, \mu_1^2, \mu_2^2)$, причем μ_1 и μ_2 — массы двух реальных частиц. При $L = j - l_1 - l_2 = -1$, и при $k \rightarrow 0$ амплитуда $N_{j; l_1 l_2}(t, \mu_1, \mu_2)$ стремится к константе, а не к $1/k$. Компенсирующий множитель $k^{2L+1} \approx 1/k$ (при $L \approx -1$) в знаменателе возникает от суммирования диаграмм с двумя частицами (с массами μ_1 и μ_2) в промежуточном состоянии. Каждая из этих диаграмм имеет особенность при $k = 0$, т. е. при $t^{1/2} = \mu_1 + \mu_2$.

В случае амплитуды образования двух реджионов соответствующая компенсация множителя $p^L(t, t_1, t_2)$ могла бы произойти только за счет многочастичных промежуточных состояний. Однако вклад таких состояний содержит интегрирование по энергиям групп частиц, образующихся в промежуточном состоянии, и имеет особенность только при реальных порогах ($t = 16\mu^2, 36\mu^2$ и т. д.). Поэтому они не могут компенсировать особенность при $t^{1/2} = t_1^{1/2} + t_2^{1/2}$, где t_1 и t_2 — произвольные энергии групп частиц в конечном состоянии.

Подставляя $N_{j; \alpha_1 \alpha_2}$ в интеграл (44) в виде (45), вычислим интеграл по t_1 и t_2 при $j \rightarrow j_2(t)$. Для этого, полагая $t_1 = 1/4 t + x_1$, $t_2 = 1/4 t + x_2$, разложим величины $\alpha(t_1)$ и $\alpha(t_2)$ в ряды

$$\alpha(t_i) = \alpha\left(\frac{1}{4}\right) + \alpha' x_i + \frac{\alpha''}{2} x_i^2, \quad i = 1, 2,$$

и подставим значение x_1 , определенное из условия

$$j - j_2(t) = (x_1 + x_2) \alpha' + \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \alpha'',$$

$$p(t; t_1, t_2) = \frac{1}{2t^{1/2}} [(x_1 - x_2)^2 - 2t(x_1 + x_2)]^{1/2}.$$

При этом получим (см. рис. 14–16)

$$\delta_j f_j(t) = C_j C_j^{(4)} \pi B_2, \quad (46)$$

где

$$B_2 = -\frac{\pi}{8} \frac{1}{[\alpha_0'(\alpha_0' + 1/2 \alpha_0'' t)]^{1/2}}$$

не зависит от j при $j \rightarrow j_2(t)$. Если бы величина C_j при $j \rightarrow j_2$ не имела особенностей (что мы до сих пор предполагали), то из (46) следовало бы, что $f_j(t)$ при $j \rightarrow j_2(t)$ имеет логарифмическую особенность вида

$$f_j(t) = A - B_2 C_j C_j^{(4)} \ln(j - j_2(t)). \quad (47)$$

В следующем разделе будет показано, как можно учесть особенности C_j . Ввиду того, что (47) при $j \rightarrow j_2(t)$ стремится к бесконечности, учет особенности C_j существенно изменит характер особенности $f_j(t)$.

Наличие этой (и других аналогичных) особенности кардинально меняет аналитические свойства $f_j(t)$ в t -плоскости. Помимо разрывов, указанных на рис. 1 и связанных с порогами образования обычных частиц в t -плоскости должна, очевидно, появиться точка ветвления логарифмического типа при $t = t_2(j)$, где $t_2(j)$ — реше-

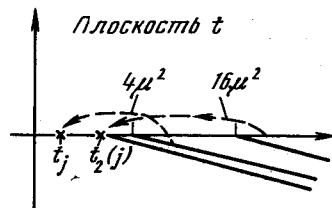


Рис. 17

ние уравнения $j = j_2(t)$. Поэтому, кроме разрывов, указанных на рис. 1, для однозначного определения $f_j(t)$ в t -плоскости следует провести также разрыв, указанный на рис. 17, от точки $t = t_2(j)$. Полагая в (47) при малых t , что $j_2(t) \approx 1 + 1/2 \alpha_0' t$, легко заметить, что скачок $\delta_i^{(2)} f_j(t)$ на этом разрыве отличается от $\delta_j^{(2)} f_j(t)$ лишь знаком:

$$\delta_i^{(2)} f_j(t) = -\delta_j^{(2)} f_j(t). \quad (48)$$

Поэтому, зная величину $\delta_j f_j(t)$, можно восстановить амплитуду $f_j(t)$ при помощи дисперсионного интеграла

$$f_j(t) = \frac{1}{\pi} \int_{t_2(j)}^{\infty} \frac{\delta_i^{(2)} f_j(t') dt'}{t' - t} + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\Delta_2 f_j(t') dt'}{t' - t} + \frac{1}{\pi} \int_{16\mu^2}^{\infty} \frac{\Delta_4 f_j(t') dt'}{t' - t} + \dots \quad (49)$$

Для учета в t -плоскости не только двухреджионной, но и всех многореджионных (трех, четырех и т. д. реджионных) особенностей, в (49) следует включить добавочные члены вида¹

$$\frac{1}{\pi} \int_{t_n(j)}^{\infty} \frac{\delta_j^{(n)} f_j(t') dt'}{t' - t}.$$

6. Условие унитарности из двухреджионной особенности

До сих пор при изучении особенностей $f_j(t)$ мы не учитывали того, что амплитуды $N_{j; \alpha}$ и $N_{j; \alpha_1 \alpha_2}$ образования реджионов, входящие в $\Delta_3 f_j$ или $\Delta_4 f_j$, сами могут иметь особенности в тех же точках, что и $f_j(t)$. Фактически, в силу условий унитарности, эти особенности должны присутствовать во всех амплитудах.

Покажем, что учет этого изменяет полученное ранее значение $\delta_j f_j(t) = -\delta_i^{(2)} f_j(t)$ и приводит к тому, что точное условие унитарности, определяющее величину скачка $\delta_j f_j(t)$ амплитуды $f_j(t)$ на двухреджионной особенности $t = t_2(j)$ в t -плоскости имеет вид

$$\delta_i^{(2)} f_j(t) = \frac{\pi}{4i} \int_{t_2^{(-)}}^{t_2^{(+)}} dt_2 \int dt_1 N_{j^+; \alpha_1 \alpha_2} N_{j^-; \alpha_1 \alpha_2} \times \times \frac{2p(t; t_1 t_2)}{t^{1/2}} \delta(j + 1 - \alpha(t_1) - \alpha(t_2)), \quad (50)$$

где $N_{j^{\pm}; \alpha_1 \alpha_2} = N_{j^{\pm} i \epsilon; \alpha_1 \alpha_2}(t; t_1 t_2) = N_{j; \alpha_1 \alpha_2}(t \pm i \epsilon, t_1, t_2)$ — амплитуды образования двух реджионов на обоих берегах разреза $t > t_2(j)$ (см. рис. 17). Необходимо подчеркнуть, что обе величины $N_{j^+; \alpha_1 \alpha_2}$ и $N_{j^-; \alpha_1 \alpha_2}$, входящие в эту формулу, определены на одном и том же физическом листе t -плоскости (по отношению к порогам образования обычных частиц) в противоположность формуле (44), содержащей амплитуды $N_{j; \alpha_1 \alpha_2}$ на нефизическом листе.

¹ Из (2) следует, что при вещественном j особенность $t = t_j^{(n)}$ появляется на физическом листе (см. рис. 1) t -плоскости лишь для таких n , для которых $j_n^{(0)} > j$, где $j_n^{(0)} = j_n [(2n\mu^2)] = n[\alpha(4\mu^2) - 1] + 1$, причем $1 \leq \alpha(4\mu^2) \leq 2$.

Соотношение (50) можно понимать как двухреджионное условие унитарности в следующем смысле. Точка ветвления $t = t_2(j)$ выходит на физический лист t -плоскости из-под разреза, идущего от $t = 16\mu^2$, и при уменьшении j (вдоль вещественной оси от больших значений, при которых $f_j(t)$ не имеет особенности $t = t_2(j)$ на физическом листе) движется так, как указано пунктиром на рис. 17. Поскольку особенность при $t = t_2(j)$ можно рассматривать как пороговую особенность, отвечающую образованию двух реджионов, то соотношение (50), правая часть которого содержит амплитуды $N_{j\pm; \alpha_1\alpha_2} \equiv N_{j; \alpha_1\alpha_2}(t \mp i\varepsilon; t_1, t_2)$ образования двух реджионов на обоих берегах разреза, связанного с этой же особенностью, совершенно аналогично обычному условию унитарности.

Чтобы не утомлять читателя большим количеством индексов, дадим доказательство формулы (50) в символически-операторном виде. Состояние четырех частиц будем характеризовать квантовым числом ν , включающим величины угловых моментов и спиральностей $l_1 m_1$ и $l_2 m_2$ двух пар частиц и их энергий $t_1^{1/2}$ и $t_2^{1/2}$. Нам понадобятся условия унитарности для амплитуд перехода двух частиц в две и в четыре $f_j(t)$ и $f_{j; \nu} = f_{j; l_1 m_1 l_2 m_2}(t, t_1, t_2)$ и для амплитуды перехода четырех частиц в четыре $f_{j; \nu\nu'}$. Амплитуды $f_{j; \nu}$ и $f_{j; \nu\nu'}$ будем записывать в виде, аналогичном (10) и (11):

$$f_{j; \nu} = \frac{G_{j\nu}}{D_{l_1}(t_1) D_{l_2}(t_2)},$$

$$f_{j; \nu\nu'} = \frac{H_{j; \nu\nu'}}{D_{l_1}(t_1) D_{l_2}(t_2) D'_{l_1}(t_1') D'_{l_2}(t_2')}. \quad (51)$$

Здесь $H_{j; \nu\nu'}$ (так же, как и $G_{j\nu}$) не имеет особенностей на двухчас-

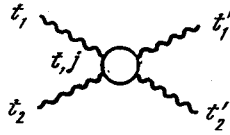


Рис. 18

тичных порогах по переменным t_1, t_2 и t_1', t_2' . При этом можно ввести величину $M_{j; \nu_0 \nu_0'}$, пропорциональную $H_{j; \nu_0 \nu_0'}$

$$M_{j; \nu_0 \nu_0'} = g_1 g_2 g_1' g_2' H_{j; \nu_0 \nu_0'} \Lambda(j; \alpha_1 \alpha_2) \Lambda(j; \alpha_1' \alpha_2'), \quad (52)$$

где

$$g_i = g(t_i), \quad g_i' = g(t_i'), \quad \alpha_i = \alpha(t_i), \quad \alpha_i' = \alpha(t_i'), \quad i = 1, 2$$

(ν_0, ν_0' — состояния с $l_i = m_i = \alpha(t_i)$; $l_i' = m_i' = \alpha(t_i')$), которая будет иметь смысл амплитуды перехода двух реджионов с массами $t_1^{1/2}$ и $t_2^{1/2}$ в два реджиона с массами $t_1'^{1/2}$ и $t_2'^{1/2}$ (рис. 18).

В этих обозначениях четырехчастичные условия унитарности для амплитуд $f_j, f_{j; \nu}$ и $f_{j; \nu\nu'}$ могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{1}{2i} (f_{j+} - f_j^{(4)}) = (G_{j+} \Gamma_{j+} G_j^{(4)}), \quad (53a)$$

$$\frac{1}{2i} (G_{j+} - G_j^{(4)}) = (G_{j+} \Gamma_{j+} H_j^{(4)}) = (G_j^{(4)} \Gamma_{j+} H_{j+}), \quad (53б)$$

$$\frac{1}{2i} (H_{j+} - H_j^{(4)}) = (H_{j+} \Gamma_{j+} H_j^{(4)}), \quad (53в)$$

где

$$j^\pm = j \pm i\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Здесь через

$$(G_j \Gamma_j G_j^{(4)}) = \Sigma_{\nu'} (G_{j\nu'} \Gamma_{j\nu'} G_{j\nu'}^{(4)})$$

обозначена символически правая часть (31), (32). Точно так же через

$$(G_j \Gamma_j H_j^{(4)}) = \Sigma_{\nu'} (G_{j\nu'} \Gamma_{j\nu'} H_{j; \nu\nu'}), \quad (H_j \Gamma_j H_j^{(4)}) = \Sigma_{\nu''} (H_{j; \nu\nu''} \Gamma_{j\nu''} H_{j; \nu\nu''})$$

обозначены такие же интегралы, в которых $G_{j\nu'}$ и $G_{j\nu'}^{(4)}$ заменены на $H_{j; \nu\nu'}$ и $H_{j; \nu\nu''}$. Величина $\Gamma_{j\nu}$ содержит все сингулярные множители, входящие в (31).

Вычисляя скачок по j от обеих частей равенств (53) на особенности $j = j_2(t)$, получим

$$\frac{1}{2i} \delta_j f_j = (G_j - \delta \Gamma_j G_j^{(4)}) + (\delta G_j \Gamma_{j+} G_j^{(4)}), \quad (54a)$$

$$\frac{1}{2i} \delta_j G_j = (G_j - \delta \Gamma_j H_j^{(4)}) + (\delta G_j \Gamma_{j+} H_j^{(4)}), \quad (54б)$$

$$\frac{1}{2i} \delta_j H_j = (H_j - \delta \Gamma_j H_j^{(4)}) + (\delta H_j \Gamma_{j+} H_j^{(4)}), \quad (54в)$$

где $j^\pm = j \pm i\varepsilon$ означает, что величины в правой части берутся на верхнем или нижнем берегу разреза (см. рис. 13), соответствующего особенности $j = j_2(t)$. Вторые члены в правых частях этих равенств являются как раз теми скачками интегралов вида (31), один из которых (первый в правой части равенства (54a)) был вычислен выше в (44).

Сравнивая второй член в правой части (54a) с (44) и (32), замечаем, что ¹

$$\delta_j \Gamma_{j\nu} = \frac{\pi \Lambda^2(j; \alpha_1 \alpha_2)}{(2i)^2} g_1^2 g_2^2 \frac{2p(t; t_1 t_2)}{t^{1/2}} \times \delta(j + 1 - \alpha_1 - \alpha_2) \times$$

$$\times \delta(l_1 - \alpha_1) \delta(m_1 - \alpha_1) \delta(l_2 - \alpha_2) \delta(m_2 - \alpha_2).$$

¹ Запись правой части этой формулы через δ -функции означает символически, что в выражении вида (14) вместо сумм по l_1, m_1 и l_2, m_2 следует рассмотреть лишь один член с $l_1 = m_1 = \alpha(t_1)$; $l_2 = m_2 = \alpha(t_2)$, а вместо множителя $B_j(\lambda_4)$, входящего в (14), надо подставить единицу.

Равенство (54в) является уравнением относительно $\delta_j H_j$; сравнивая его с (53в), рассматриваемым как уравнение относительно H_{j+} ,

$$\frac{1}{2i} H_{j+} = \frac{1}{2i} H_j^{(4)} + (H_{j+} \Gamma_{j+} H_j^{(4)}), \quad (55)$$

замечаем, что решением уравнения (54в) будет

$$\frac{1}{2i} \delta_j H_j = (H_j - \delta \Gamma_j H_{j+}) \quad (56)$$

(так как при применении оператора $2iH_j - \delta \Gamma_j$ к обеим частям (55) полученное уравнение тождественно совпадает с (54в) при условии (56)).

Равенство (56) является условием унитарности для амплитуды (52) перехода двух реджионов в два реджиона. Точно так же, сравнивая (55) с (54б), замечаем, что

$$\frac{1}{2i} \delta_j G_j = (G_j - \delta \Gamma_j H_{j+}). \quad (57)$$

Подставляя это значение в (54) и учитывая второе равенство (53а), получим

$$\frac{1}{2i} \delta_j f_j = (G_j - \delta \Gamma_j G_{j+}). \quad (58)$$

Это равенство является, согласно (44), тем условием унитарности (50), которое требовалось доказать.

Умножая обе части (57) на величину $\Lambda(j; \alpha_1 \alpha_2) g_1 g_2$, а (56) — на $(\Lambda g_1 g_2) (\Lambda' g_1 g_2)$ и используя наши обозначения, замечаем, что эти равенства являются условиями унитарности для амплитуд (32) и (52) перехода двух частиц в два реджиона и двух реджионов в два реджиона. Совершенно аналогично (50) их можно представить в виде

$$\delta_t N_{j; \alpha_1 \alpha_2} = \frac{\pi}{2} \int_{i_2^{(-)}}^{i_2^{(+)}} \frac{dt_2'}{2i} \int dt_1' \frac{2p(t; t_1', t_2')}{t'^{1/2}} \times \\ \times N_{j; \alpha_1 \alpha_2}^- \cdot N_{j; \alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2}^+ \delta(j+1 - \alpha_1' - \alpha_2'), \quad (59)$$

$$\delta_t M_{j; \alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2} = \frac{\pi}{2} \int_{i_2^{(-)}}^{i_2^{(+)}} \frac{dt_2''}{2i} \int dt_1'' \frac{2p(t; t_1'', t_2'')}{t''^{1/2}} \times \\ \times M_{j; \alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2}^- \cdot M_{j; \alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2}^+ \delta(j+1 - \alpha_1'' - \alpha_2''), \quad (60)$$

где N_j^+ и M_j^+ отличны от N_j , M_j знаком мнимой добавки к j . Формулы (50), (59) и (60) позволяют определить характер особенностей амплитуд $f_j(t)$, N_j и M_j при $j \rightarrow j_2(t)$.

Подставляя в правые части этих формул (при $t_1 \rightarrow 1/4 t$ и $t_2 \rightarrow 1/4 t$) амплитуду N_j в виде

$$N_j = C_j/p(t; t_1, t_2)$$

(см. (45)) и аналогично (при $j - \alpha_1 - \alpha_2 = -1$ и $j - \alpha_1' - \alpha_2' = -1$)

$$M_{j; \alpha_1 \alpha_2, \alpha_1' \alpha_2'} = d_j/p(t, t_1, t_2) p(t, t_1', t_2'),$$

получим

$$\delta_j^{(2)} d_j = \pi B_2 d_j^+, \quad \delta_j^{(2)} C_j = \pi B_2 C_j^+, \quad \delta_j^{(2)} f_j = \pi B_2 C_j^+.$$

Из первого равенства следует, что

$$\delta_j^{(2)} (1/d_j) = -\pi B_2,$$

откуда

$$d_j = 1/[A - B_2 \ln(j - j_2)].$$

Из второго и третьего равенств получаем

$$C_j \approx \nu/[A - B_2 \ln(j - j_2)],$$

$$f_j(t) \approx \frac{\nu^2}{A - B_2 \ln(j - j_2)} + f_0,$$

где A , ν и f_0 не имеют особенностей при $j \rightarrow j_2(t)$.

7. Трехреджионные и многореджионные состояния

Полюса Редже амплитуды $f_j; \lambda_i$ (см. рис. 12) перехода двух частиц в четыре по моментам l_1 и l_2 пар образующихся частиц возникли как результат взаимодействия этих пар частиц. Как было обнаружено в предыдущем разделе, в результате этого же взаимодействия в плоскости углового момента возникают точки ветвления типа (47). Нетрудно заметить, что учет новых особенностей амплитуд $f_j; \lambda_i = f_j; l_1 m_1, l_2 m_2$ по переменным l_1 и l_2 в интегралах типа (30) приведет к серии точек ветвления при $j = j_n(t)$, где $j_n(t)$ определено в (2). Из этой формулы следует, что точка ветвления становится комплексной при $t = (2\mu n)^2$. Поэтому следует ожидать, что n -я точка этой серии связана $2n$ -частичным условием унитарности или, точнее, что она появится в t -плоскости (при уменьшении j от больших значений вдоль вещественной оси) с нефизического листа (см. рис. 1), обусловленного образованием $2n$ частиц.

Поэтому естественно для изучения n -й особенности (2) рассматривать $2n$ -частичное условие унитарности (18). Однако до перехода к общему случаю нам придется кратко остановиться на шестичастичном (трехреджионном) условии унитарности (16). Рассмотрим его аналитическое продолжение на комплексные j . Если это продолжение записать в виде контурных интегралов вида (30) по

$l_1 m_1, l_2 m_2, l_{12} m_{12}, l_3 m_3$ и учесть полюса Редже по l_1, l_2 и l_3 , то при вычислении особой части интеграла возникает лишь следующее отличие от рассмотренного выше двухреджионного случая (см. раздел 5).

Для возникновения особенности существенны две Γ -функции, входящие в $B_j(l_{12} m_{12}, l_3 m_3)$ и $B_{l_{12}}(l_1 m_1, l_2 m_2)$ в (15):

$$\Gamma(j+1-m_{12}-m_3), \quad \Gamma(l_{12}+1-m_1-m_2).$$

Особенность $\Delta_{6f_j}(t)$ возникает от следующих точек в контурных интегралах по $l_1 m_1, l_{12}, m_{12}$ вида (30):

$$l_1 = m_1 = \alpha(t_1), \quad l_2 = m_2 = \alpha(t_2), \quad l_3 = m_3 = \alpha(t_3)$$

и

$$l_{12} = m_{12} = \alpha(t_1) + \alpha(t_2) - 1.$$

При этом для сингулярной части интеграла получается выражение, аналогичное (31):

$$\Delta_{6f_j}(t) = \frac{1}{2} \int \frac{dt_a}{(2i)^3} dt_{12} \frac{2p(t; t_{12}, t_3)}{t^{1/2}} \times \\ \times \frac{2p(t_{12}; t_1, t_2)}{t^{1/2}} \frac{N_{j; \alpha_a \alpha_{12}} N_{j; \alpha_a \alpha_{12}}^{(6)}}{j+2-\alpha(t_1)-\alpha(t_2)-\alpha(t_3)}, \quad (61)$$

где $N_{j; \alpha_a \alpha_{12}}$ — амплитуда образования трех реджионов в состоянии с моментом l_{12} одной пары из них, равным $\alpha(t_1) + \alpha(t_2) - 1$. Она связана с величиной $G_{j; \alpha_a \alpha_{12}}(t; t_a, t_{12})$, определенной согласно (11а) соотношением

$$N_{j; \alpha_a \alpha_{12}} = \Lambda(j, l_{12}, \alpha_3) \Lambda(l_{12}; \alpha_1 \alpha_2) g_1 g_2 g_3 G_{j; \alpha_a \alpha_{12}}(t; t_a, t_{12}). \quad (61a)$$

При выбранной в (16) нормировке перед интегралом фактически появляется множитель $2^3/6!$, который содержится в (15). Однако следует учесть, что в этом случае кроме $6!/2^3 \cdot 3! = 15$ способов распределения шести частиц по трем парам с определенными значениями угловых моментов существует еще три способа группировки двух из трех реджионов в пару с определенным l_{12} . Поэтому коэффициент $2^3/6!$ следует еще умножить на $3 \cdot 6!/2^3 \cdot 3!$, что и дает в (61) множитель $1/2$ (отвечающий тождественности двух реджионов, образующих состояние с заданным l_{12}).

Особенности интеграла (61) обусловлены нулями знаменателя подынтегрального выражения, не зависящего от t_{12} . Поэтому будем считать, что интегрирование по t_{12} выполнено (в пределах $(t_1^{1/2} + t_2^{1/2})^2 < t_{12} < (t_1^{1/2} - t_2^{1/2})^2$), а интегрирование по $t_a, a = 1, 2, 3$, производится по контурам C_a , указанным в (16) в пределах (17). Особенность интеграла возникает при совпадении нуля знаменателя с краями интегрирования. В случае совпадения нуля знаменателя с нижним пределом $4\mu^2$ одной из переменных t_1 возникнут

особенности типа (35), (36), положение которых зависит от масс частиц. Эти особенности нас не будут интересовать, потому что, как показывает анализ, так же как и в двухреджионном случае, при малом t они оказываются на нефизических листах j -плоскости.

Особенность, не зависящая от масс частиц, возникает от совпадения нулей знаменателя с верхней границей интегрирования по t_a , которая определяется условием

$$\chi(t_1, t_2, t_3, t) = t_1^{1/2} + t_2^{1/2} + t_3^{1/2} - t^{1/2} = 0. \quad (62)$$

Чтобы интеграл (61) реально имел особенность в j -плоскости, необходимо, чтобы при каждом последующем интегрировании особенности предыдущего интеграла сжимали бы контур интегрирования.

Рассматривая последовательно интегралы по t_1, t_2 и t_3 , можно заметить, что для этого необходимо (как и в случае более простого интеграла (31)), чтобы знаменатель в (61)

$$\square(t_1, t_2, t_3; j) = j + 2 - \alpha(t_1) - \alpha(t_2) - \alpha(t_3) \quad (63)$$

имел экстремум при условии (62). Поэтому положение особенности может быть определено из условия абсолютного экстремума функции

$$\square' = \square(t_1, t_2, t_3; j) - \lambda \chi(t_1, t_2, t_3; t), \quad (64)$$

условия

$$\square(t_1, t_2, t_3, t) = 0 \quad (65)$$

и условия (62). Условие экстремума приводит к соотношениям $\alpha'(t_a) = \lambda/2t_a^{1/2}$, $a = 1, 2, 3$.

Обозначим через t_0 решение этого уравнения; тогда из требования $\chi = 0$ получим $t_0 = t/9$, откуда из условия (65) для положения особенности $j = j_3(t)$ следует значение (2) с $n = 3$.

Найдем скачок $\delta_j^3 \Delta_{3f_j} = (1/2 i) \delta_j^3 f_j(t)$ на этой особенности (при $t > 0, j < j_3(t)$), не учитывая пока особенности $N_{j; \alpha_a, \alpha_{12}}$. Совершенно аналогично (42) получим

$$\delta_j^3 f_j(t) = \int_{t_3^{(+)}}^{t_3^{(-)}} \Delta_{t_3} \Phi_j^{(3)}(t, t_3) dt_3, \quad (66)$$

где $\Delta_{t_3} \Phi_j^{(3)}$ — скачок интеграла

$$\Phi_j^{(3)}(t, t_3) = \frac{1}{2} \int_{C_2} \frac{dt_2}{2i} \int \frac{dt_1}{2i} \frac{N_{j; \alpha_a, \alpha_{12}} N_{j; \alpha_a, \alpha_{12}}^{(6)}}{j+2-\alpha(t_1)-\alpha(t_2)-\alpha(t_3)} I_3(t_a; t) \quad (67)$$

на контуре в t_3 -плоскости, проведенном между его двумя особенностями $t_3^{(+)}$ и $t_3^{(-)}$ (особенность $t_3^{(+)}$ более правая; при $j < j_3(t)$ она уходит в верхнюю полуплоскость, если j , уменьшаясь, обходит точку $j = j_3$ сверху). Через $I_3(t_a; t)$ в (67) обозначена величина полного фазового объема системы трех частиц с массами $t_1^{1/2}$, $t_2^{1/2}$, $t_3^{1/2}$ и с энергией $t^{1/2}$:

$$I_3(t_a; t) = \int_{(t_1^{1/2} + t_2^{1/2})^2}^{(t_1^{1/2} - t_2^{1/2})^2} \frac{2p(t, t_{12}, t_3)}{t^{1/2}} \frac{2p(t_{12}, t_1, t_2)}{t_{12}^{1/2}} dt_{12},$$

нерелятивистское значение которого (при $\chi \rightarrow 0$) пропорционально χ^2 .

Положение особенностей $t_3^{(+)}$ и $t_3^{(-)}$ интеграла (67) определяется как решение уравнения (65) при тех значениях t_1 и t_2 , при которых величина $\square(t_i; j)$ имеет экстремум на верхнем пределе интегрирования, т. е. при $\chi(t_i; t) = 0$. Иначе говоря, значения $t_1 = t_1(t, t_3)$ и $t_2 = t_2(t, t_3)$, которых следует подставить в (65), могут быть найдены из уравнений

$$\frac{\partial \square}{\partial t_1} = \lambda \frac{\partial \chi}{\partial t_1}, \quad \frac{\partial \square}{\partial t_2} = \lambda \frac{\partial \chi}{\partial t_2}, \quad (68)$$

причем параметр Лагранжа λ определяется из условия $\chi(t_1, t_2, t_3; t) = 0$.

Скачок интеграла (67) на контуре между $t_3^{(+)}$ и $t_3^{(-)}$ может быть вычислен так же, как ранее (раздел 5) был вычислен скачок интеграла (51). Подставляя его значение в (67), получим для $\delta_i^{(3)} f_j(t) = -\delta_j^{(3)} f_j(t)$:

$$\delta_i^{(3)} f_j(t) = \frac{\pi}{2} \int_{t_3^{(-)}}^{t_3^{(+)}} \frac{dt_3}{2i} \int_{t_2^{(-)}}^{t_2^{(+)}} \frac{dt_2}{2i} \int dt_1 \int_{(t_1^{1/2} + t_2^{1/2})^2}^{(t_1^{1/2} - t_2^{1/2})^2} dt_{12} \times \\ \times \frac{2p}{t^{1/2}} \frac{2p_{12}}{t_{12}^{1/2}} N_{j, \alpha_a, \alpha_{12}} N_{j, \alpha_a, \alpha_{12}}^{(6)} \delta(j+2 - \alpha(t_1) - \alpha(t_2) - \alpha(t_3)), \quad (69)$$

где $t_2^{(+)}$ и $t_2^{(-)}$ определяются при данном t_3 (при $t > 0$ и $j < j_3(t)$) как два решения уравнений

$$\square(t_1, t_2, t_3; j) = 0, \\ \chi(t_1, t_2, t_3; t) = 0.$$

Эти уравнения определяют также и значение t_1 , существенное в (69).

Проводя рассмотрение, аналогичное проделанному в предыдущем разделе, получим при учете особенности $N_{j, \alpha_a, \alpha_{12}}$ трехреджионное условие унитарности в следующем виде:

$$\delta_i^{(3)} f_j(t) = \frac{\pi}{2} \int_{t_3^{(-)}}^{t_3^{(+)}} \frac{dt_3}{2i} \int_{t_2^{(-)}}^{t_2^{(+)}} \frac{dt_2}{2i} \int dt_1 \times \\ \times \int_{(t_1^{1/2} + t_2^{1/2})^2}^{(t_1^{1/2} - t_2^{1/2})^2} dt_{12} N_{j, \alpha_a, \alpha_{12}} N_{j, \alpha_a, \alpha_{12}}^+ \frac{2p}{t^{1/2}} \frac{2p_{12}}{t_{12}^{1/2}} \delta(\square). \quad (70)$$

Для вычисления характера особенности при $j \rightarrow j_3(t)$ учтем, что в области $t_1^{\pm} \rightarrow 1/9 t$, $t_2^{\pm} \rightarrow 1/9 t$ и $t_3^{\pm} \rightarrow 1/9 t$, существенной при $j \rightarrow j_3(t)$ в интеграле (70), величины $p(t_{12}; t_1, t_2)$ и $p(t, t_{12}, t_3)$ обращаются в нуль. При этом пороговое поведение амплитуд $N_{j, \alpha_a, \alpha_{12}}$ имеет вид, аналогичный (45)

$$N_{j, \alpha_a, \alpha_{12}} \simeq C_j / p(t, t_{12}, t_3) p(t_{12}, t_1, t_2).$$

Подставляя $N_{j, \alpha_a, \alpha_{12}}$ в этом виде в (70) и вычисляя интеграл при $j \rightarrow j_3(t)$, получим

$$\delta_j^{(3)} f_j(t) = \pi(j - j_3) C_j C_j^+ B_3 = \pi(j - j_3) B_3',$$

где B_3 — некоторая постоянная. Отсюда

$$f_j(t) = A_3 + B_3'(j - j_3) \ln(j - j_3),$$

где $B_3' = B_3 C_j C_j^+$. Особенность C_j при $j = j_3$ в этом случае учитывать не нужно, так как вклад от этой особенности при $j \rightarrow j_3$ стремится к нулю.

Перейдем к общему n -реджионному случаю. Если число реджионов больше трех, то необходимо учитывать следующее. Как уже мы подчеркивали несколько раз, для получения вклада от данной особенности необходимо рассмотреть все способы группировки частиц (и групп частиц) в состоянии с определенными угловыми моментами и затем сложить полученные результаты. До сих пор, рассматривая тождественные частицы, мы получали от всех таких конфигураций одинаковые вклады и поэтому дело сводилось к умножению правой части условий унитарности на определенное число.

Начиная с четырехреджионного случая, появляются группировки реджионов разных типов, вклад которых различен. В четырехреджионном случае возможны две различные группировки реджионов (см. раздел 2), которые соответственно приводят к

Как легко убедиться, решением этих уравнений будет

$$t_a = t/n^2, \quad a = 1, 2, \dots, n,$$

а для положения n -й особенности следует значение (2):

$$j_n(t) = n\alpha(t/n^2) - n + 1.$$

Функция $\delta(\square_n)$ в (71) имеет такой же символический смысл, как и в трех- и двухреджионных случаях (как в (70) или в (50)), так как интегрирование в (71) производится по комплексным контурам. Первое интегрирование в (71) по t_1 при фиксированных энергиях t_2, t_3, \dots, t_n всех остальных реджионов приводит к подстановке значения подынтегральной функции в точке, в которой

$$\square_n(t_1, t_2, \dots, t_n; j) = 0. \quad (72)$$

Пределы $t_2^{(-)}$ и $t_2^{(+)}$ второго интегрирования (по t_2 , при фиксированных t_3, t_4, \dots, t_n) являются двумя решениями (72), в которое подставлено значение t_1 из равенства

$$\chi_n(t_1, t_2, \dots, t_n; t) = 0. \quad (73)$$

Пределы последующих интегрирований в (71) по t_3, t_4, \dots, t_n , например по t_i при фиксированных $t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n$, определяются как пара решений $t_i^{(\pm)} = f_i^{(\pm)}(t_{i+1}, \dots, t_n; t)$ уравнения (72) относительно t_i , в которое значения t_1, t_2, \dots, t_{i-1} подставлены из равенств

$$\frac{\partial \square_n}{\partial t_k} = \lambda \frac{\partial \chi_n}{\partial t_k}; \quad k = 1, 2, \dots, i-1, \quad (74)$$

а параметр λ определен из (73). Как несложно проверить, в области $j \rightarrow j_n$ уравнение (72) действительно имеет пару комплексно-сопряженных корней $t_i^{(\pm)}$.

Пользуясь этими правилами, легко определить зависимость $\delta_j^{(n)} f_j(t)$ от j в области $j < j_n, j \rightarrow j_n$ (т. е. найти характер особенности j_n).

Вблизи особенности пределы интегрирования по всем $t_a, t_{ab}, t_{abc}, \dots$, по энергиям отдельных реджионов, сжимаются (совпадая при $j = j_n$), и все импульсы относительного движения $p(t_{ab}; t_a, t_b)$ стремятся к нулю. Пороговое поведение амплитуд $N_{j; n, k}$ в этих условиях имеет вид

$$N_{j; n, k} = \frac{C_{j; n, k}}{\prod_{a, b} p(t_{ab}; t_a, t_b)}.$$

Вынося $C_{j; n, k}$ за знак интеграла, мы приходим к интегралу вида

$$\delta_i^{(n, k)} f_j(t) = \sum_k \frac{\pi}{2^{\nu_k}} C_{j; n, k} C_{j; n, k}^{\pm} \frac{1}{(2t)^{n-1}} \times \\ \times \int \delta(\square_n) \prod_{a, b} \frac{2dt_a dt_b}{\sqrt{t_{ab} p(t_{ab}; t_a, t_b)}}.$$

появлению двух разных членов в реджионном условии унитарности. Один из них содержит амплитуду $N(jl_{12}l_{34}; l_{12}\alpha_1\alpha_2; l_{34}\alpha_3\alpha_4)$ образования четырех реджионов в состоянии с определенными моментами двух пар из них: $l_{12} = \alpha(t_1) + \alpha(t_2) - 1, l_{34} = \alpha(t_3) + \alpha(t_4) - 1$, а другой — амплитуду $N(jl_{123}\alpha_4; l_{123}l_{12}\alpha_3; l_{12}\alpha_1\alpha_2)$ образования этих же реджионов в состоянии с определенным угловым моментом пары $l_{12} = \alpha(t_1) + \alpha(t_2) - 1$ и моментом тройки реджионов $l_{123} = \alpha(t_1) + \alpha(t_2) + \alpha(t_3) - 2$. С ростом числа реджионов число разных конфигураций растет.

Условие унитарности для скачка $f_j(t)$ на n -реджионной особенности $t = t_n(j)$ имеет вид

$$\delta_i^{(n)} f_j(t) = \sum_k (\pi/2^{\nu_k}) \int N_{j^+; n, k} N_{j^-; n, k} \times \\ \times \prod_{a, b} \frac{p(t_{ab}; t_a, t_b)}{t_{ab}^{1/2}} \delta(\square_n) \frac{dt_a dt_b}{(2i)^{n-1}}, \quad (71)$$

где через $N_{j; n, k}$ обозначен k -й тип амплитуды процесса образования n реджионов, отвечающий определенной группировке их в состояние с заданными значениями угловых моментов l_a, l_b ($t_a^{1/2}$ и $t_b^{1/2}$ — энергии этих состояний). Полный скачок $\delta_i^{(n)} f_j(t)$ равен сумме $\delta_i^{n, k} f_j(t)$ по всем типам таких группировок. Множитель $1/2^{\nu_k}$ является результатом умножения исходного коэффициента $2n/(2n)!$ в (18) на число способов распределения частиц и реджионов $[(2n)! / 2^n n!]$ ($n! / 2^{\nu_k}$), при которых может осуществляться данная конфигурация. Здесь $(2n)! / 2^n n!$ — число способов распределения $2n$ частиц по n парам, а $n! / 2^{\nu_k}$ — число способов группировки n реджионов в данную конфигурацию.

Величина ν_k зависит от вида конфигурации и может быть легко найдена (2^{ν_k} есть число перестановок реджионов, в результате которых вид конфигурации не изменяется). Например, в четырехреджионном случае для первой из двух указанных выше конфигураций $\nu_1 = 3$, а для второй $\nu_2 = 1$. Через \square_n обозначена величина, аналогичная (64):

$$\square_n = j + n - 1 - \sum_{a=1}^n \alpha(t_a).$$

Положение n -реджионной особенности в j -плоскости определяется аналогично двух- и трехреджионным случаям из условия экстремума функции

$$\square'_n = \square_n - \lambda \chi_n, \quad \text{где } \chi_n = \sum_{a=1}^n t_a^{1/2} - t^{1/2}$$

при условии $\chi_n = 0$ и $\square_n = 0$.

Интеграл по энергиям $t_{ab}t_{abc}\dots$ пар и групп реджионов при фиксированных значениях масс реджионов t_1, t_2, \dots, t_n может быть легко вычислен. Он содержит $(n-2)$ интегрирования по этим энергиям (например, одно интегрирование в трехреджионном случае, два в четырехреджионном и т. д.), и $(n-1)$ множителей $1/p(t_{ab}, t_a; t_b)$. Области интегрирования по всем энергиям t_{ab}, t_{abc}, \dots стремятся к нулю при $t^{1/2} \rightarrow \sum_{a=1}^n t_a^{1/2}$ и каждая из них —

величина порядка $t^{1/2} - \sum_{a=1}^n t_a^{1/2}$. Величина каждого из импульсов

порядка $(t^{1/2} - \sum_{a=1}^n t_a^{1/2})^{1/2}$. Поэтому интегрирование по относительным энергиям дает величину

$$a_n \left(t^{1/2} - \sum_{a=1}^n t_a^{1/2} \right)^{n/2},$$

где a_n — величина, не имеющая особенностей при $t_a = t/n^2$. При этом (71) можно записать в виде

$$\delta_i^{(n)} f_j(t) = \pi A_n \int \left(\frac{n^2}{4t} \sum_{a=1}^n x_a^2 - \sum_{a=1}^n x_a \right)^{(n-3)/2} \times \\ \times \delta \left(j_n - j + \alpha' \sum_{a=1}^n x_a + \frac{\alpha''}{2} \sum_{a=1}^n x_a^2 \right) \frac{(dx_a)^n}{(2i)^{n-1}},$$

где было учтено, что энергии всех реджионов изменяются при $j \rightarrow j_n$ в малой области вблизи $t_a = t/n^2$, и поэтому величины $x_a = t_a - t/n^2$ малы по сравнению с t_a . Через A_n обозначена некоторая постоянная, значение которой для дальнейшего не существенно.

Легко видеть непосредственно из последнего значения $\delta_j^{(n)} f_j(t)$, что в области вблизи особенности величины x_a^2 и $(\sum_{a=1}^n x_a)^2$ одного

порядка малости, порядка $j_n - j$ (скачок $\delta_j^{(n)} f_j(t)$ отличен от нуля лишь в области $j < j_n$). Учитывая это, пренебрегая при $j \rightarrow j_n$ членами более высокого порядка, чем x_k^2 , и вычисляя интеграл по x_1 , получим

$$\delta_j^{(n)} f_j(t) = \frac{\pi A_n}{(\alpha')^{(n-3)/2}} \int \left[\frac{\gamma}{2} \sum_{a=1}^n x_a^2 + (j_n - j) \right]^{(n-3)/2} \prod_{a=2}^n \frac{dx_a}{2i},$$

где

$$\gamma = \frac{n^2}{2x't} \left(\alpha' + \frac{2a''}{n} t \right).$$

Учитывая сказанное и подставляя $x_1 = -\sum_{a=1}^n x_a$, запишем $\sum_{a=1}^n x_a^2$ в виде

$$\sum_{a=1}^n x_a^2 = \left(\sum_{a=2}^n x_a \right)^2 + \sum_{a=2}^n x_a^2 = 2 \sum_{a>a'\geq 2} x_a x_{a'}.$$

Производя над переменными x_a линейное преобразование

$x_a = \sum_{a'=2}^n \eta_{aa'} \rho_{a'}$, легко подобрать коэффициенты $\eta_{aa'}$ так, чтобы

форму $\sum_{a>a'\geq 2} x_a x_{a'}$ привести к главным осям:

$$2 \sum_{a>a'\geq 2} x_a x_{a'} = \frac{2}{\gamma} \sum_{a=2}^n \rho_a^2 = -\frac{2}{\gamma} \sum_{a=2}^n \xi_a^2, \quad \text{где } \rho_a = i\xi_a.$$

Учитывая, что

$$\prod_{a=2}^n \frac{dx_a}{2i} = \frac{D_n}{2^{n-1}} \prod_{a=2}^n \frac{d\rho_a}{i} = \frac{\nu}{2^{n-1}} \prod_{a=2}^n d\xi_a,$$

где D_n — детерминант произведенного выше линейного преобразования, и, записывая пределы интегрирования по ξ_a , получим

$$\delta_i^{(n)} f_j(t) = \pi B'_n \int_{-(j_n-j)^{1/2}}^{(j_n-j)^{1/2}} d\xi_n \int_{-(j_n-j-\xi_n^2)^{1/2}}^{(j_n-j-\xi_n^2)^{1/2}} d\xi_{n-1} \dots \\ \dots \int_{-(j_n-j-\sum_{a=3}^n \xi_a^2)^{1/2}}^{(j_n-j-\sum_{a=3}^n \xi_a^2)^{1/2}} d\xi_2 \left[j_n - j - \sum_{a=2}^{\infty} \xi_a \right]^{(n-3)/2} = \pi B_n (j_n - j)^{n-2},$$

где B'_n и B_n — некоторые коэффициенты¹.

¹ Они отличны друг от друга лишь на числовой множитель

$$I_n = \int_{-1}^{+1} du_n \int_{-(1-u_n^2)^{1/2}}^{(1-u_n^2)^{1/2}} du_{n-1} \int_{-(1-u_n^2-u_{n-1}^2)^{1/2}}^{(1-u_n^2-u_{n-1}^2)^{1/2}} \dots \\ \dots \int_{-(1-u_n^2-u_{n-1}^2-u_{n-2}^2)^{1/2}}^{(1-u_n^2-u_{n-1}^2-u_{n-2}^2)^{1/2}} du_2 (1-u_2^2-u_3^2-\dots-u_n^2)^{(n-3)/2} \\ \dots \int_{-(1-u_n^2-u_{n-1}^2-u_{n-2}^2-u_{n-3}^2)^{1/2}}^{(1-u_n^2-u_{n-1}^2-u_{n-2}^2-u_{n-3}^2)^{1/2}} du_1 (1-u_1^2-u_2^2-\dots-u_n^2)^{(n-3)/2}.$$

Так как $\delta_i^{(n)} f_j(t) = -\delta_j^{(n)} f_i(t)$, то при $j \rightarrow j_n(t)$ имеем $\delta_j f_j = \pi B_n (j - j_n)^{n-2}$, и если $n \geq 3$, то $f_j(t) = A_n + B_n (j - j_n)^{n-2} \times \ln(j - j_n)$, где A_n не имеет особенностей при $j \rightarrow j_n$.

Таким образом, вблизи n -реджонной особенности сингулярная часть $f_j(t)$ тем меньше, чем больше n .

В заключение нам хочется выразить искреннюю признательность Я. И. Азимову, А. А. Ансельму, Г. С. Данилову, И. Т. Дятлову, Ю. А. Симонову за интересные дискуссии и ряд важных замечаний по вопросам, рассмотренным в настоящей работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Покажем, что второй член в сумме (28), в котором m_1 и m_2 имеют разные знаки, не приводит к особенностям $f_j(t)$, существенным для асимптотики амплитуды. Запишем его в виде интегралов (29), (30) по контурам L_1, L_2 и M_1, M_2 — типа указанных на рис. 5, 10, 11. Его вклад будет отличен от (30) лишь знаком m_2 , т. е. определится после интегрирования по L_1 и L_2 интегралом вида

$$\int_{M_1} \frac{dm_1}{\text{tg } 1/2 \pi m_1} \int_{M_2} \frac{dm_2}{\text{tg } 1/2 \pi m_2} \frac{\Gamma(j+1-m_1-m_2)}{D_{m_1}(t_1) D_{m_2}(t_2)}, \quad (1.1)$$

где через m_2 обозначена величина $|m_2|$.

Контур M_2 на рис. 10 был проведен так, что включал полюса Γ -функции, для того чтобы совпадение их с нулями $\text{tg } 1/2 \pi m_2$ (при сколь угодно большом j) не приводило к особенностям интеграла (30) по m_2 . В случае (1.1) полюса Γ -функции расположены в точках

$$m_2 = m_1 - j - 1 - n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

которые при увеличении j смещаются не вправо, как в (30), а влево. Поэтому при достаточно большом j они не могут совпасть с нулями $\text{tg } 1/2 \pi m_2$ (при $m_2 = 0, 2, 4, \dots$) и контур M_2 следует провести так, чтобы эти полюса (указанные кружками на рис. 10) были вне контура. Напоминаем, что особенность интеграла (30) возникла от совпадения в (30) в плоскости m_2 полюса Γ -функции с нулем $D_{t_2}(t_2)$ (при $L_2 = m_2$).

Если и полюса Γ -функции и нули $D_{m_2}(t_2)$ расположены вне контура M_2 , то от такого совпадения особенность интеграла (1.1) не возникнет. Поэтому интеграл (П.1), в отличие от (30), не имеет особенностей при $m_1 = \alpha(t_1), m_2 = \alpha(t_2)$ и $j - m_1 + m_2 + 1 = 0$.

Отметим, что интеграл (1.1) может иметь особенности другого типа, возникающие от совпадения полюсов Γ -функции и нулей $\text{tg } 1/2 \pi m_2$. В результате последующего интегрирования по t_1 и t_2 при этом возникают особенности вида $j = \alpha[(t^{1/2} - 2\mu)^2] - 1 - n$ ($n = 0, 2, \dots$), которые для асимптотики амплитуды не существенны. Эти особенности зависят от массы частиц и при $t < 16\mu^2$ уходит через разрез, связанный с особенностью $j = j_2(t)$, на нефизический лист (аналогично особенностям вида (35), (36), рассмотренным в работе).

Авторы благодарны Я. Азимову, обратившему их внимание на рассмотренный здесь вопрос.

Покажем, что при малом t вклад от четырехчастичного члена условия унитарности в $f_j(t)$

$$f'_j(t) = \frac{1}{\pi} \int_{16\mu^2}^{\infty} dt' \frac{\Delta_4 f_j(t')}{t' - t} \quad (2.1)$$

не имеет особенностей (35), (36).

Подставляя (45) в (31), а (31) в этот интеграл, опуская для простоты в (31) множитель $C_j(t) C_j^{(A)}(t)$ и меняя порядок интегрирования, получим

$$f'_j(t) = \frac{1}{2!} \int_{C_2} \frac{dt_2}{2i} \int_{C_1} \frac{dt_1}{2i} \frac{F(t; t_1, t_2)}{j+1-\alpha(t_1)-\alpha(t_2)}, \quad (2.2)$$

$$F(t; t_1, t_2) = \frac{1}{\pi} \int_{(t_1^{1/2}+t_2^{1/2})^2}^{\infty} dt' / [2t'^{1/2} p(t', t_1, t_2) (t' - t)]. \quad (2.3)$$

Контур C'_1 и C'_2 (рис. 19, 20) отличаются от изображенных на рис. 2, 3 тем, что они продолжены до ∞ .

Функция $F(t; t_1, t_2)$ имеет особенности при $t^{1/2} = t_1^{1/2} + t_2^{1/2}, t_1 = 0, t_2 = 0$. Если $\text{Re } t_2^{1/2} > \text{Re } t_1^{1/2}$, то особенность $t_1^{1/2} = t^{1/2} - t_2^{1/2}$ функции $F(t; t_1, t_2)$ отсутствует на физическом листе плоскости, изображенной на рис. 19, так как

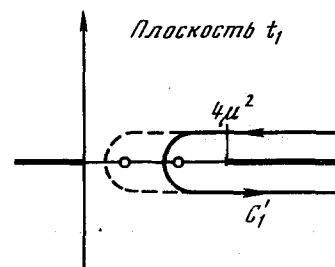


Рис. 19

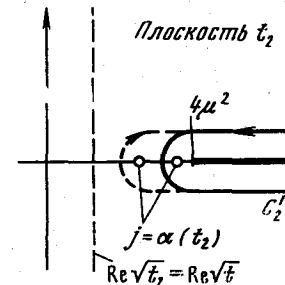


Рис. 20

точка t_1 , для которой $\text{Re } t_1^{1/2} < 0$, находится под разрезом, проведенным на рис. 19 влево от особой точки $t_1 = 0$. Поэтому при $\text{Re } t^{1/2} = \text{Re } t_2^{1/2}$ особенность интеграла по t_1

$$\Phi_j(t, t_2) = \frac{1}{2} \int_{C_1} \frac{dt_1}{2i} \frac{F(t; t_1, t_2)}{j+1-\alpha(t_1)-\alpha(t_2)}$$

возникнет только при таких j, t и t_2 , при которых нуль знаменателя, появляющийся на разрезе $t_1 > 4\mu^2$ и деформирующий контур C'_1 интегрирования,

совпадает с точкой $t_1 = 0$. Эта особенность, определяемая условием

$$j + 1 = \alpha(t_2) + \alpha(t_1),$$

т. е. при $j = \alpha(t_2)$, появляется на разрезе плоскости t_2 , деформирует контур (как это указано на рис. 20) и, доходя до линии $\text{Re } t_2^{1/2} = \text{Re } t_1^{1/2}$, не приводит к особенности интеграла (2.2)

$$f_j(t) = \frac{1}{2i} \int_{C_2} \Phi_j(t, t_2) dt_2. \quad (2.4)$$

Это означает, что особенность этого интеграла возникает лишь от области малых (или комплексных) t_2 , $t_2 \ll t$. Так как t мало, то величина $t_1^{1/2} = t^{1/2} - t_2^{1/2}$ также мала (или, если не мала, то комплексна). В обоих случаях массы частиц не могут войти в выражение, определяющее положение особенности. Фактически особенность интеграла (2.2), (2.4) возникает от точки $t_1 = t_2 = 1/4t$.

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе
Академии наук СССР, Ленинград
Институт теоретической
и экспериментальной физики, Москва

Получено
23 января 1965 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Regge. Nuovo Cim., 1959, 14, 951; 1960, 18, 947.
2. В. Н. Грибов. ЖЭТФ, 1961, 41, 1962.
3. M. Froissart. Proc. La Jolla Conf., 1961.
4. В. Н. Грибов. ЖЭТФ, 1964, 41, 667.
5. G. F. Chew, S. C. Frautschi. Phys. Rev. Lett., 1961, 7, 394.
6. S. C. Frautschi, M. Gell-Mann, F. Zachariasen. Phys. Rev., 1962, 126, 2204.
7. S. Mandelstam. Nuovo Cim., 1963, 30, 1113, 1127, 1143.
8. В. Н. Грибов, И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 1962, 43, 1556. Phys. Lett., 1962, 2, 239 (Собр. трудов, № 116).
9. Я. Азимов. ЖЭТФ, 1962, 43, 2321.
10. D. Amati, S. Fubini, A. Stanghellini. Phys. Lett., 1962, 1, 29.
11. И. А. Вердиев, О. В. Канчели, С. Г. Матинян, А. М. Попова, К. А. Тер-Мартirosyan. ЖЭТФ, 1964, 46, 1700.
12. М. И. Широков. ЖЭТФ, 1960, 39, 633.
13. A. J. MacFarlane. Rev. Mod. Phys., 1962, 34, 41.
14. G. C. Wick. Ann. Phys., 1962, 18, 65.
15. К. А. Тер-Мартirosyan. Rept. on High Energy Phys. Conf. Geneva, 1962.
16. К. А. Тер-Мартirosyan. ЖЭТФ, 1963, 44, 341.
17. А. М. Ророва, К. А. Тер-Мартirosyan. Nucl. Phys., 1964, 58, 107.
18. M. Jacob, G. C. Wick. Ann. Phys., 1959, 7, 404.
19. Ю. А. Симонов. ЖЭТФ, 1965, 48, 242.

НА КАКИХ РАССТОЯНИЯХ ПРОИСХОДИТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ?¹

Совместно с В. Н. Грибовым и В. Л. Иоффе

Выяснить, на каких расстояниях происходит упругое или неупругое рассеяние при высоких энергиях, можно, исследуя экспериментально испускание мягких квантов, сопровождающих данный процесс рассеяния. При этом, если окажется, что область применимости обычных формул сопровождающего излучения уменьшается с ростом энергии налетающей частицы ε , то это будет означать, что эффективные продольные расстояния, на которых происходит взаимодействие, при высоких энергиях растут с ростом ε .

Введение

Одним из интересных вопросов физики высоких энергий является вопрос о том, на каких расстояниях происходит взаимодействие в процессах упругого и неупругого рассеяния при высоких энергиях. Чтобы сформулировать проблему, а также четко определить, что мы понимаем под «расстоянием», рассмотрим какой-нибудь конкретный случай, например упругое рассеяние π -мезонов на нуклонах. Амплитуда упругого рассеяния π^\pm -мезонов на протонах может быть записана в виде

$$F_{\pm}(q', p', q, p) = i \int d^4x e^{i(q+q')(x/2)} \langle p' | T \left[j_{\mp} \left(\frac{x}{2} \right), j_{\pm} \left(-\frac{x}{2} \right) \right] - \delta(t) \left[j_{\mp} \left(\frac{x}{2} \right), \phi_{\pm} \left(-\frac{x}{2} \right) \right] | p \rangle, \quad (1)$$

где q, q' и p, p' — начальные и конечные импульсы π -мезона и протона, $j_{\pm}(x)$ — π^\pm -мезонный ток. Под расстояниями (интервалами времени), на которых происходит взаимодействие, мы будем понимать область значений $|x|$ (или времени t), дающих существенный вклад в интеграл (1). Такое определение области взаимодействия вполне соответствует физической картине, поскольку, как видно из (1), можно считать, что падающий мезон «вошел» в область взаимодействия в точке $-x/2$, а рассеянный «вышел» из точки $x/2$.

Рассмотрим сначала рассеяние вперед. Будем работать в лабораторной системе. В этом случае, записав экспоненту в (1) в виде

$$\exp i \{ \varepsilon(t-x) - [(\varepsilon^2 - \mu^2)^{1/2} - \varepsilon] x \} \quad (2)$$

¹ Ядерная физика, 1967, 2, 768.

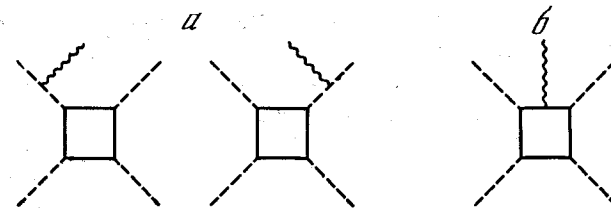
ε — энергия π -мезона, ось x направлена по его импульсу), нетрудно увидеть следующее: чтобы амплитуда рассеяния при высоких энергиях линейно росла с ростом ε (что соответствует постоянному сечению рассеяния), необходимо, чтобы в интеграле (1) существенную роль играла область малых пространственно-временных интервалов $t - x \sim 1/\varepsilon$. Таким образом, в случае амплитуды упругого рассеяния вперед при $\varepsilon \rightarrow \infty$ эффективная область взаимодействия стремится к поверхности светового конуса $t - r \rightarrow 0$.

Стремление $t - r$ к нулю может, однако, происходить по-разному. Первая возможность состоит в том, что при $t - r \rightarrow 0$ как t , так и r стремятся к нулю (или к постоянному пределу) и при больших энергиях играют роль малые (или конечные) расстояния. В этом случае, поскольку x мало, в выражении для экспоненты (2) можно пренебречь членом $[(\varepsilon^2 - \mu^2)^{1/2} - \varepsilon] x \approx -(\mu^2/2\varepsilon) \times x \rightarrow 0$, и, следовательно, амплитуда рассеяния вперед при высоких энергиях не должна зависеть от массы рассеивающейся частицы. Другая, в некотором смысле противоположная, возможность заключается в том, что при $t - r \rightarrow 0$ как t , так и r достаточно быстро стремятся к бесконечности (пропорционально ε или как ε^γ с положительным и не малым значением γ) и при больших энергиях играют роль большие, растущие с ростом энергии продольные расстояния. При x , растущих пропорционально ε , членом $[(\varepsilon^2 - \mu^2)^{1/2} - \varepsilon] x \approx -(\mu^2/2\varepsilon) x$ в (2) уже пренебречь нельзя, т. е. амплитуда рассеяния при высоких энергиях должна, вообще говоря, зависеть от массы рассеивающейся частицы. Эта вторая возможность представляется весьма интересной, поскольку наличие растущих пропорционально ε продольных расстояний приводит к любопытной физической картине, в которой, например, при весьма высоких энергиях ($\varepsilon \gtrsim 10^{13}$ эв) размеры области взаимодействия будут превышать размеры атома. Таким образом, можно было бы выделить наиболее интересную с точки зрения физических выводов вторую возможность, если бы удалось выяснить, зависит ли амплитуда рассеяния при высоких энергиях от масс рассеивающихся частиц.

У авторов нет теоретических аргументов в пользу той или иной возможности. Хотя рассмотрение диаграмм теории возмущений говорит скорее в пользу того, что нет оснований ожидать отсутствия зависимости амплитуды рассеяния от масс рассеивающихся частиц при высоких энергиях, но, поскольку мы не знаем, какая совокупность диаграмм существенна при высоких энергиях, этот довод нельзя считать достаточно убедительным. Рассматривая чисто формально математические выражения для матричного элемента в (1), нетрудно построить как такие примеры, в которых была бы существенна область малых расстояний, так и такие, в которых основную роль играли бы продольные расстояния, линейно растущие с ростом ε .

Вопрос о том, существенны ли во взаимодействии при высоких

энергиях расстояния $x \sim \varepsilon/\mu^2$, можно, однако выяснить экспериментально при энергиях, достижимых на современных ускорителях, и целью настоящей заметки является обратить внимание на такую возможность. Выяснить, зависит ли амплитуда рассеяния при высоких энергиях от масс рассеивающихся частиц, можно, изучая дифференциальное сечение рождения мягких квантов, сопровождающих данный процесс. В самом деле, излучение



Излучение мягких квантов при рассеянии π -мезонов на нейтронах
Нижние пунктирные — нейтронные, верхние пунктирные — пионные, волнистая — фотонная линии

мягких квантов происходит в основном до и после процесса рассеяния за счет диаграмм, изображенных на рисунке (случай а). При этом сечения испускания таких квантов будут выражаться через амплитуды рассеяния при значениях квадратов масс внешних линий

$$(q - k)^2 = \mu^2 - 2qk, \quad (q' + k)^2 = \mu^2 + 2q'k$$

(k — импульс кванта). Если k мало, но $q'k$ велико ($q'k \gtrsim \mu^2$, что возможно при больших ε), то появляется возможность выделить зависимость амплитуды рассеяния от масс рассеивающихся частиц. В следующем разделе будут выведены соответствующие формулы и показано, при каких энергиях квантов поправки за счет испускания квантов из «ящичка» (случай б на рисунке) еще несущественны.

Все сказанное выше основывалось на рассмотрении амплитуды рассеяния вперед. Рассматривая амплитуду рассеяния $F(\varepsilon, \Delta)$ на ненулевой угол как функцию ε при фиксированном квадрате передаваемого импульса $\Delta = (p' - p)^2$, можно получить те же выводы. В самом деле, работая в брейтовской системе координат, экспоненту в (1) можно записать в виде

$$\exp i \{ \varepsilon (t - nr) - nr [(\varepsilon^2 - \mu^2 + \Delta/4)^{1/2} - \varepsilon] \}, \quad (3)$$

где n — некоторый единичный вектор. Из (3) видно, если только $\Delta/4$ не близко к ε^2 , то зависимость амплитуды от μ^2 может возникнуть лишь в случае, когда $r \sim \varepsilon/\mu^2$ (при этом, правда, если Δ столь велико, что амплитуда убывает с ростом ε , то нельзя уже утверж-

В (5) амплитуда πn -рассеяния записана как

$$F = \bar{u}(p') T u(p) = \bar{u}(p') \{ M + \frac{1}{2} (\hat{q} + \hat{q}') N \} u(p), \quad (6)$$

m — масса нуклона, κ_n — аномальный магнитный момент нейтрона, $\kappa_n = -1,91$. Оценивая матричный элемент $M_{\mu}^{(1)} e_{\mu}$ (e_{μ} — поляризация кванта), находим, что при $\sqrt{|\Delta|} \ll \varepsilon$

$$M_{\mu}^{(1)} e_{\mu} \sim (\sqrt{|\Delta|}/qk) F.$$

В то же время различные члены в фигурных скобках в (5) имеют порядок F/m , $(\omega/qk) F$ или F/ε и ими можно пренебречь, если $\omega \ll \sqrt{|\Delta|}$ и $qk \ll m \sqrt{|\Delta|}$.

Допустим теперь, что в амплитуде рассеяния при высоких энергиях существенны не растущие (или медленно растущие) с ростом энергии расстояния. Тогда амплитуда рассеяния не зависит от μ_1^2 и μ_2^2 , и членами в квадратных скобках в (5) также можно пренебречь. Нам остается теперь только предположить, что члены более высоких порядков в разложении по степеням ω не превосходят членов первого порядка. Такое предположение означает, что в разложении по степеням ω диаграмм с испусканием кванта из «ящика» (случай б) при высоких энергиях параметром является величина ω , а не $\varepsilon\omega$, т. е. что эффективный размер области, из которой происходит испускание кванта, не растет с ростом ε . Считая, что и в испускании квантов из «ящика» играют роль не растущие с ε расстояния, мы приходим к условию $\omega R \ll 1$, где R — эффективный размер области, из которой происходит испускание кванта (по-видимому, можно считать, что $R \lesssim 1/\mu$)¹.

Более точно можно рассуждать следующим образом. Как показано Лоу [1], члены в квадратных скобках в (5) точно сокращаются с членами первого порядка, возникающими от разложения $M_{\mu}^{(1)}$ (см. (4)) по степеням qk и $q'k$. Если при больших ε расстояния x в (2) растут как ε^x , то члены второго порядка по степеням qk и $q'k$

¹ В классической теории амплитуда испускания кванта при рассеянии пропорциональна

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\mathbf{r} j(\mathbf{r}, t) e^{i(k\mathbf{r} - \omega t)}.$$

Разбивая интеграл по t на три интеграла: от $-\infty$ до $-\tau/2$, от $-\tau/2$ до $\tau/2$ и от $\tau/2$ до ∞ , где τ — время столкновения ($j = eV\delta(\mathbf{r} - Vt)$ при $|t| > \tau/2$) легко видеть, что амплитуде испускания кванта из «ящика» отвечает в классике амплитуда, описываемая интегралом

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt \int d\mathbf{r} j(\mathbf{r}, t) e^{i(k\mathbf{r} - \omega t)}.$$

В этом выражении зависимость от энергии кванта ω содержится только в экспоненте, так что параметром разложения при малых ω является величина ωR .

дать, что $t - r \sim 1/\varepsilon$). Аналогичные выводы можно получить и для амплитуд неупругих двухчастичных процессов, например для амплитуды перезарядки $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$.

Сечения излучения мягких квантов

Рассмотрим сначала простейший с теоретической точки зрения случай — рассеяние π^{\pm} -мезонов на нейтроне. Матричный элемент M_{μ} процесса $\pi^{\pm} + n \rightarrow \pi^{\pm} + n + \gamma$ удобно записать в виде суммы двух членов $M_{\mu} = M_{\mu}^{(1)} + M_{\mu}^{(2)}$, причем $M_{\mu}^{(1)}$ отвечает вкладу всех диаграмм, в которых квант испускается π -мезоном до или после рассеяния (случай а), а $M_{\mu}^{(2)}$ соответствует совокупности диаграмм случая б с испусканием кванта из «ящика», а также диаграммам, в которых квант испускается нейтроном до или после рассеяния. Лоу [1] показал, что $M_{\mu}^{(1)}$ может быть записан в виде

$$M_{\mu}^{(1)} = \pm \left[-\frac{q_{\mu}}{qk} F_{\pm}(\mu^2 - 2qk, \mu^2, s_1, \Delta) + \frac{q'_{\mu}}{q'k} F_{\pm}(\mu^2, \mu^2 + 2q'k, s, \Delta) \right], \quad (4)$$

где верхний знак относится к рассеянию π^+ , а нижний — π^- -мезонов, $s = (q + p)^2$, $s_1 = (q + p - k)^2$ и $F_{\pm}(\mu_1^2, \mu_2^2, s, \Delta)$ — амплитуда рассеяния π^{\pm} -мезонов на нейтроне, рассматриваемая как функция четырех инвариантов: квадратов масс начального и конечного пионов, s и Δ . Выражение (4) является точным и следует из теоремы Уорда без каких-либо приближений.

Выберем теперь энергию фотона ω такой, чтобы, несмотря на малость ω , величины $2qk$ и $2q'k$ были порядка μ^2 или больше. Тогда, если мы при этом сможем выбрать значения ω так, чтобы член $M_{\mu}^{(2)}$ был мал, то сечение испускания таких фотонов будет выражаться через значения амплитуды πn -рассеяния вне массовой поверхности, причем отход от массовой поверхности может быть сделан достаточно большим. Для того чтобы убедиться в том, что это возможно и найти область допустимых значений ω , вычислим член нулевого порядка в разложении $M_{\mu}^{(2)}$ по степеням ω (обозначим его $\tilde{M}_{\mu}^{(2)}$). Мы включим в $\tilde{M}_{\mu}^{(2)}$ также члены, возникающие от разложения по k величины s_1 в (4), и в дальнейшем будем понимать под $M_{\mu}^{(1)}$ выражение (4) с заменой $s_1 \rightarrow s$. $\tilde{M}_{\mu}^{(2)}$ легко находится по методу Лоу [1] и записывается в виде

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{\mu}^{(2)} = & \bar{u}(p') \left\{ -\frac{\kappa_n}{2m} \sigma_{\mu\nu} k_{\nu} \frac{\hat{p}' + m}{2p'k} T + T \frac{\hat{p} + m}{2pk} \frac{\kappa_n}{2m} \sigma_{\mu\nu} k_{\nu} \pm \right. \\ & \pm \left(\frac{q'_{\mu}}{q'k} \hat{k} + \frac{q_{\mu}}{qk} \hat{k} - \gamma_{\mu} \right) N + \frac{q_{\mu}}{qk} 2k(q \mp p) \left[\frac{\partial M}{\partial s} + \frac{1}{2} (\hat{q} + \right. \\ & \left. \left. + \hat{q}') \frac{\partial N}{\partial s} \right] \right\} u(p) \mp 2 \left[q_{\mu} \frac{\partial F}{\partial \mu_1^2} + q'_{\mu} \frac{\partial F}{\partial \mu_2^2} \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

будут иметь порядок

$$e_{\mu} (q'_{\mu} - q_{\mu}) \partial^2 F / (\partial \mu^2)^2 (qk),$$

причем

$$\partial^2 F / (\partial \mu^2)^2 \sim (1/m_0^4) (m_0/\varepsilon)^{2(1-\gamma)},$$

где m_0 — некоторая масса. Условие малости этих членов по сравнению с основным членом $M_{\mu}^{(1)} e_{\mu}$, следовательно, будет $qk \ll \ll m_0^2 (\varepsilon/m_0)^{1-\gamma}$. При $\gamma = 1$ (растущие пропорционально ε расстояния) мы имеем $qk \ll m_0^2$, т. е. допустим лишь малый отход от массовой поверхности. При $\gamma = 0$ $qk \ll m_0 \varepsilon$, и условие за счет этих членов оказывается весьма слабым. Таким образом, в том случае, когда амплитуда рассеяния не зависит от μ^2 , т. е. эффективные расстояния не растут пропорционально ε , матричный элемент процесса $\pi^{\pm} + n \rightarrow \pi^{\pm} + n + \gamma$ описывается обычной формулой для сопровождающего излучения

$$M_{\mu} = \pm \left(\frac{q'_{\mu}}{q'k} - \frac{q_{\mu}}{qk} \right) F_{\pm}(s, \Delta) \quad (7)$$

для любых достаточно больших значений эффективных масс $\mu_1^2 = \mu^2 - 2qk$ и $\mu_2^2 = \mu^2 + 2q'k$, если только выполнены условия

$$\omega \ll \sqrt{|\Delta|}, \quad qk \ll m \sqrt{|\Delta|}, \quad q'k \ll m \sqrt{|\Delta|}, \quad \omega R \ll 1. \quad (8)$$

С помощью (7) легко найти дифференциальное сечение данного процесса, выразив его через дифференциальное сечение упругого рассеяния с заданной передачей импульса. После возведения M_{μ} в квадрат, суммирования по поляризациям и интегрирования по азимутальному углу между направлениями вылета кванта и нейтрона отдачи (фиксирован угол между направлениями вылета кванта и рассеянного мезона θ' , т. е. величина $\mu_2^2 = \mu^2 + 2q'k$) находим:

$$d\sigma_{\text{изл}} = - \frac{d\sigma_{\text{расс}}(s, \Delta)}{d\Delta} d\Delta \frac{e^2}{4\pi} \frac{d\omega}{\omega^2} \frac{d\mu_2^2}{\varepsilon'} \left\{ \frac{\mu^2}{u'^2} - 2 \frac{\mu^2}{u'} A' + \right. \\ \left. + \mu^2 \left[u' \left(1 - \frac{\Delta}{2m\varepsilon'} \right) - \frac{\Delta}{2\varepsilon'} \cos \theta' \right] A'^3 + \frac{\Delta}{u'} A' \right\}, \quad (9)$$

где

$$A' = \left[\varepsilon'^2 (1 - \cos \theta')^2 + \Delta (1 - \cos \theta') \left(1 - \frac{\Delta}{2m\varepsilon'} \right) + \frac{\Delta^2}{4\varepsilon'^2} \right]^{-1/2},$$

$$u' = \varepsilon' (1 - \cos \theta'),$$

ε' — энергия рассеянного π -мезона, $\varepsilon' = \varepsilon + \Delta/2m$, $\mu_2^2 = \mu^2 + 2\omega u'$ (членами порядка $\mu^2/\varepsilon^2 (1 - \cos \theta')$ пренебрежено).

В случае не очень больших передаваемых импульсов $|\Delta| \ll \ll m\varepsilon'$ (но $|\Delta| \gg \mu^2$) и не очень малых углов θ' ($\varepsilon'^2 (1 - \cos \theta') \gg$

$\gg |\Delta|$) выражение (9) упрощается:

$$d\sigma_{\text{изл}} = - \frac{d\sigma_{\text{расс}}(s, \Delta)}{d\Delta} d\Delta \frac{e^2}{4\pi} \frac{d\omega}{\omega^2} \frac{d\mu_1^2}{\varepsilon'} \frac{\Delta}{u'^2}. \quad (10)$$

Вместо спектра по μ_2^2 можно получить также спектр по μ_1^2 . Интегрирование дает

$$d\sigma_{\text{изл}} = - \frac{d\sigma_{\text{расс}}(s, \Delta)}{d\Delta} d\Delta \frac{e^2}{4\pi} \frac{d\omega}{\omega^2} \frac{d\mu_1^2}{\varepsilon} \left\{ \frac{\mu^2}{u^2} - 2 \frac{\mu^2}{u} A + \right. \\ \left. + \mu^2 \left[\left(1 + \frac{\Delta}{2m\varepsilon} \right) u - \frac{\Delta}{2\varepsilon} \cos \theta \right] A^3 + \frac{\Delta}{u} A \right\}, \quad (11)$$

$$A = \left[\varepsilon'^2 (1 - \cos \theta)^2 + \Delta (1 - \cos \theta) \left(1 + \frac{\Delta}{2m\varepsilon} \right) + \frac{\Delta^2}{4\varepsilon^2} \right]^{-1/2},$$

$$u = \varepsilon (1 - \cos \theta), \quad \mu_1^2 = \mu^2 - 2\omega u.$$

При

$$\mu^2 \ll |\Delta| \ll m\varepsilon, \quad \varepsilon'^2 (1 - \cos \theta) \gg |\Delta|$$

вместо (11) имеем

$$d\sigma_{\text{изл}} = - \frac{d\sigma_{\text{расс}}(s, \Delta)}{d\Delta} d\Delta \frac{e^2}{4\pi} \frac{d\omega}{\omega^2} \frac{d\mu_1^2}{\varepsilon} \frac{\Delta}{u^2}. \quad (12)$$

Оценим величину сечения излучения квантов в интересующей нас области эффективных масс. Пусть, например, нас интересует область $\mu_2^2 > a\mu^2$, где a — некоторое число порядка 5—10. В результате интегрирования (10) по μ_2^2 и ω получим

$$d\sigma_{\text{изл}} = d\sigma_{\text{расс}} \frac{e^2}{\pi} \frac{|\Delta| \omega_{\text{max}}}{(a-1)\mu^2 \varepsilon'}, \quad (13)$$

причем величина ω_{max} должна быть выбрана так, чтобы во всей области интегрирования были выполнены неравенства (8). Численно, при $\varepsilon \sim 10$ Гэв, $a \sim 5$, $\sqrt{|\Delta|} \sim 1$ Гэв, $\omega_{\text{max}} = 100$ Мэв, получаем $d\sigma_{\text{изл}} \sim 5 \cdot 10^{-4} d\sigma_{\text{расс}}$.

Рассеяние π^+ -мезонов на протонах с испусканием мягкого фотона может быть рассмотрено аналогичным образом. Единственное отличие состоит в том, что в матричном элементе теперь присутствуют члены, соответствующие испусканию кванта протоном до и после π^{\pm} -рассеяния. Матричный элемент для сопровождающего излучения при π^{\pm} -рассеянии имеет вид

$$M_{\mu}^{(p)} = \left[\pm \left(\frac{q'_{\mu}}{q'k} - \frac{q_{\mu}}{qk} \right) + \frac{P'_{\mu}}{p'k} - \frac{P_{\mu}}{pk} \right] F_{\pm}(s, \Delta), \quad (14)$$

в то время как следующий член в разложении по степеням ω записывается как

$$M_{\mu}^{(p)'} = M'_{\mu} + \bar{u}(p') \left\{ \frac{1}{2p'k} \gamma_{\mu} k T + T \hat{k} \gamma_{\mu} \frac{1}{2pk} + \right. \\ \left. + \frac{p_{\mu}}{pk} 2k(q \mp p) \left[\frac{\partial M}{\partial s} + \frac{1}{2} (\hat{q} + \hat{q}') \frac{\partial N}{\partial s} \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{p'_{\mu}}{p'k} - \frac{p_{\mu}}{pk} \right) 2(p' - p) k \left[\frac{\partial M}{\partial \Delta} + \frac{1}{2} (\hat{q} + \hat{q}') \frac{\partial N}{\partial \Delta} \right] \right\} u(p), \quad (15)$$

где M'_{μ} определено согласно (5) (с заменой $\kappa_n \rightarrow \kappa_p = 2,79$). Если в (14) вклад членов, соответствующих испускающему γ -квантов протоном, будет значительно больше вклада первых двух членов, когда γ -квант испускается мезоном, то интересующий нас эффект окажется практически ненаблюдаемым. Вклад этих членов имеет порядок

$$\frac{p'e}{p'k} - \frac{pe}{pk} \sim \frac{V|\Delta|}{m\omega},$$

в то время как

$$(q'e/q'k) - (qe/qk) \sim \sqrt{|\Delta|}/qk \quad (\text{при } \sqrt{|\Delta|} \ll \epsilon).$$

Поэтому мы должны потребовать, чтобы было $qk \lesssim m\omega$ или $\epsilon(1 - \cos \theta) \lesssim m$, т. е. следует изучать только γ -кванты, вылетающие под небольшими углами к направлению падающего (или рассеянного) π -мезона.

Отметим, что в случае излучения γ -квантов при π^+p -рассеянии неравенство $\omega R \sim \omega/\mu \ll 1$ возникает непосредственно из требования, чтобы можно было изучать только влияние изменения эффективной массы π -мезона, а влияние изменения эффективной массы протона было несущественным. Для этого нужно потребовать, чтобы $(p-k)^2 - m^2$ и $(p'+k)^2 - m^2$ было значительно меньше тех квадратов масс M^2 , на которых заметно меняется функция Грина протона. Беря в качестве M^2 величину $(m + \mu)^2$, приходим к условию $\omega \ll \mu$. Другое условие возникает из-за того, что в матричный элемент $M_{\mu}^{(p)'}$ вошел дополнительный по сравнению с (5) член, содержащий производную амплитуды рассеяния по квадрату переданного импульса Δ . Если принять, что $\partial F/\partial \Delta \sim (\alpha/m^2)F$, причем, согласно экспериментальным данным [2], $\alpha \sim 5$, то вклад этого члена будет порядка $\alpha|\Delta|^{1/2}/m^4$. Таким образом, кроме (8) возникают еще два условия, ограничивающие применимость наших формул:

$$q'k \sim qk \ll \frac{1}{\alpha} \frac{m^4}{|\Delta|} \quad (qk \lesssim m\omega). \quad (16)$$

Считая эти условия выполненными, найдем дифференциальное сечение процесса $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p + \gamma$ при фиксированном угле

θ' между направлениями вылета кванта и рассеянного мезона

$$d\sigma_{\text{изл}} = - \frac{d\sigma_{\text{расс}}(s, \Delta)}{d\Delta} d\Delta \frac{e^2}{4\pi} \frac{d\omega}{\omega^2} \frac{d\mu_2^2}{\epsilon'} \left\{ \frac{\mu^2}{u'^2} - 2 \frac{\mu^2}{u'} A' + \right. \\ \left. + \mu^2 A'^3 \left[u' \left(1 - \frac{\Delta}{2m\epsilon'} \right) - \frac{\Delta}{2\epsilon'} \cos \theta' \right] + \frac{\Delta}{u'} A' + 1 - 2mB' + \right. \\ \left. + m^2 \left[m - \frac{\Delta u'}{2m\epsilon'} - \frac{\Delta}{2\epsilon'} \cos \theta' \right] B'^3 + \left(\frac{\Delta}{m} \pm \frac{2m\epsilon}{u'} \right) B' \mp \right. \\ \left. \mp 2 \frac{\epsilon' m}{u' - m} (B' - A') \pm 2\epsilon A' \mp \frac{2\epsilon'}{u'} \right\}, \quad (17)$$

$$B' = \frac{1}{m} \left[1 + \frac{\Delta u'}{m^2 \epsilon'} \cos \theta' - \frac{\Delta}{m\epsilon'} \cos \theta' + \frac{\Delta^2 u'^2}{4m^4 \epsilon'^2} - \right. \\ \left. - \frac{\Delta^2 u'}{2m^3 \epsilon'^2} + \frac{\Delta^2}{4m^2 \epsilon'^2} \right]^{-1/2}.$$

Верхний знак относится к π^+ -мезону, нижний — к π^- -мезону. При $|\Delta| \ll m^2$ (17) переходит в

$$d\sigma_{\text{изл}} = - \frac{d\sigma_{\text{расс}}(s, \Delta)}{d\Delta} d\Delta \frac{e^2}{4\pi} \frac{d\omega}{\omega^2} \frac{d\mu_2^2}{\epsilon'} \left(\frac{1}{u'^2} + \frac{1}{m^2} \right) \Delta. \quad (18)$$

Спектр по μ_1^2 имеет вид

$$d\sigma_{\text{изл}} = - \frac{d\sigma_{\text{расс}}(s, \Delta)}{d\Delta} d\Delta \frac{e^2}{4\pi} \frac{d\omega}{\omega^2} \frac{d\mu_1^2}{\epsilon} \left\{ \frac{\mu^2}{u^2} - 2 \frac{\mu^2}{u} A + \right. \\ \left. + \mu^2 \left[u \left(1 + \frac{\Delta}{2m\epsilon} \right) - \frac{\Delta}{2\epsilon} \cos \theta \right] A^3 + \frac{\Delta}{m} B + \frac{\Delta}{u} A + 1 - \right. \\ \left. - 2mB + m^2 \left[m - \frac{\Delta u}{2m\epsilon} + \frac{\Delta}{2\epsilon} \cos \theta \right] B^3 \mp \frac{2m}{u} \left(\epsilon + \frac{\Delta}{2m} \right) B \pm \right. \\ \left. \pm \frac{2m\epsilon}{u+m} (A+B) \mp 2 \left(\epsilon + \frac{\Delta}{2m} \right) A \pm \frac{2\epsilon}{u} \right\}, \quad (19)$$

$$B = \frac{1}{m} \left[1 + \frac{\Delta u}{m^2 \epsilon} \cos \theta + \frac{\Delta}{m\epsilon} \cos \theta + \frac{\Delta^2 u^2}{4m^4 \epsilon^2} + \frac{\Delta^2 u}{2m^3 \epsilon^2} + \frac{\Delta^2}{4m^2 \epsilon^2} \right]^{-1/2}.$$

При $|\Delta| \ll m^2$ (19) переходит в (18) (заменой $d\mu_2^2 \rightarrow -d\mu_1^2$).

Приведем еще формулы для эффективного сечения излучения мягких квантов, сопровождающих процесс перезарядки $\pi^+ + p \rightarrow \pi^0 + n$.

Матричный элемент нулевого порядка по ω имеет вид

$$M_{\mu} = \left(\frac{q_{\mu}}{qk} - \frac{p_{\mu}}{pk} \right) F(s, \Delta), \quad (20)$$

тогда как матричный элемент первого порядка имеет ту же структуру, что и матричный элемент в упругом πp -рассеянии (15), за исключением коэффициента при члене $\partial T/\partial \Delta$, который теперь равняется $2 [p'_{\mu} - p_{\mu} (p'k)/(pk)]$. Условия применимости формул в

случае перезарядки следующие:

$$\omega \ll \mu, \quad qk \ll m\varepsilon, \quad \alpha(qk) \sqrt{|\lambda|} \ll m^2\varepsilon. \quad (21)$$

Дифференциальное сечение излучения оказывается равным

$$d\sigma_{\text{изл}} = d\sigma_{\text{перезар}} \frac{e^2}{4\pi} \frac{d\omega}{\omega^2} \frac{d\mu^2}{\varepsilon} \left[\frac{2}{1 - \cos \theta} - 1 - \frac{\mu^2}{\varepsilon^2 (1 - \cos \theta)^2} \right]. \quad (22)$$

Заключение

Выше было показано, что выяснить, зависит ли амплитуда рассеяния от масс рассеивающихся частиц, т. е. растут ли достаточно быстро с ростом энергии ε эффективные продольные расстояния, на которых происходит взаимодействие, можно путем изучения сечения рождения мягких квантов (с энергией порядка от одного до нескольких десятков мегаэлектронвольт), сопровождающих данный процесс. В случае рассеяния пионов на нуклонах лучше всего исследовать реакцию $\pi^+ + n \rightarrow \pi^+ + n + \gamma$, изучая рассеяние π -мезонов на дейтронах и отбирая такие случаи, когда протон в дейтроне не приобретает заметного импульса (в этом случае вероятность испускания протоном γ -кванта с $\omega \geq 10 \text{ Мэв}$ будет весьма мала¹). Сечение излучения таких квантов следует ожидать порядка $5 \cdot 10^{-4} d\sigma_{\text{расс}}$, где $d\sigma_{\text{расс}}$ — дифференциальное сечение упругого рассеяния при заданной величине передаваемого импульса. Можно думать, что если при высоких энергиях зависимость амплитуды рассеяния от массы пиона не исчезает, то при изменении $\mu_2^2 = \mu^2 + 2q'k$ в интервале от μ^2 до $10\mu^2$ следует ожидать относительного (по сравнению с теоретическими формулами) изменения сечения на несколько десятков процентов. При этом совпадение экспериментальных данных с теоретическими формулами (9) — (13) означало бы, что амплитуда рассеяния при высоких энергиях не зависит от массы пиона, т. е. эффективные расстояния не растут быстро с ростом энергии². Отличие же экспериментальных данных от теоретического предсказания можно было бы трактовать двояко: либо амплитуда рассеяния при высоких энергиях зависит от массы пиона, т. е. эффективные расстояния при упругом рассеянии быстро растут с ростом энергии, либо быстро растет с ростом энергии эффективная область, из которых происходит испускание γ -квантов.

¹ Матричный элемент испускания γ -кванта протоном в дейтроне $M_{\mu}^{(p)}$ должен быть порядка $(1/\omega) (\alpha^2/p^2) (p/m)$, где p — импульс протона, $\alpha = (m\varepsilon_0)^{1/2}$ средний импульс протона в дейтроне, ε_0 — энергия связи дейтрона (мы считаем, что $\alpha^2 \lesssim p^2$). Принимая, что $p^2/2m \sim \omega$, получаем $M_{\mu}^{(p)} \sim (\varepsilon_0/\omega) \times (m\omega)^{-1/2}$ и при $\omega \geq 10 \text{ Мэв}$ $M_{\mu}^{(p)}$ меньше или порядка $M_{\mu}^{(2)}$ (формула (5)).
² Если исключить маловероятную возможность сильной компенсации членов, содержащих зависимость от μ^2 в $M_{\mu}^{(1)}$ и членов с растущим с энергией эффективным радиусом области испускания квантов в $M_{\mu}^{(2)}$.

Изучение этой реакции на протоне менее удобно с теоретической точки зрения, поскольку интересующее нас сопровождающее излучение π -мезона в значительной степени маскируется большим излучением за счет протона. Это обстоятельство либо требует большей точности эксперимента, либо ограничивает возможный интервал изменения энергий кванта, т. е. μ_2^2 (что, в конечном итоге, опять-таки требует большей точности эксперимента). Интересно было бы при πp -рассеянии выяснить, зависит ли амплитуда рассеяния при больших энергиях от массы протона. Для выяснения этого вопроса необходимо, однако, экспериментально определить вклад аномального магнитного момента в сечение реакции $\pi^{\pm} + p \rightarrow \pi^{\pm} + p + \gamma$ и, кроме того, знать из опыта отдельно обе инвариантные части M и N в амплитуде πp -рассеяния (6). Теоретическое рассмотрение этого вопроса может быть проведено, следуя работам [1] и [3].

При испускании мягких квантов, сопровождающих процесс перезарядки $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$, вероятность излучения квантов интересующих нас энергий заметно больше, чем при упругом рассеянии: $d\sigma_{\text{изл}} \sim 5 \cdot 10^{-3} d\sigma_{\text{перезар}}$. Неудобством здесь, конечно, является малое сечение самого процесса перезарядки.

Институт теоретической
и экспериментальной физики, Москва

Получено
28 мая 1965 г.

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе
Академии наук СССР, Ленинград

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Low. Phys. Rev., 1958, 110, 974.
2. S. Brandt, V. T. Cocconi, D. R. O. Morrison, A. Wroblewski, P. Fleury, G. Kayas, F. Muller, C. Pelletier. Phys. Rev. Lett., 1963, 10, 413.
3. И. Я. Померанчук. ДАН СССР, 1955, 100, 41 (Собр. трудов, № 59).

О ПОЛНОМ СЕЧЕНИИ АННИГИЛЯЦИИ ЭЛЕКТРОННО-ПОЗИТРОННЫХ ПАР В АДРОНЫ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ¹

Совместно с В. Н. Грибовым и Б. Л. Иоффе

Исследуется асимптотическое поведение полного сечения процесса $e^+ + e^- \rightarrow$ адроны при высоких энергиях. Показано, что при больших E имеем $\sigma \sim \text{const}/E^2$, где E — энергии e^+ и e^- в с. ц. и.

В работе Бьеркена [1] была сделана попытка найти асимптотическое поведение полного сечения процесса $e^+ + e^- \rightarrow$ адроны (в первом приближении по e^2) при высоких энергиях на основе кварковой модели. В настоящей работе мы попытаемся решить эту проблему, основываясь на соотношениях коммутации между компонентами j_0 и j_i электромагнитного тока адронов и свойствах спектральных функций представления Челлена — Лемана. Полное сечение процесса $e^+ + e^- \rightarrow$ адроны может быть записано в виде

$$\sigma(E) = \frac{8\pi^2 e^4}{q^2} \rho(q^2), \quad (1)$$

где ρ определяется через матричные элементы тока $j_\mu(x)$ следующим образом:

$$\sum_n \langle 0 | j_\mu(0) | n \rangle \langle n | j_\nu(0) | 0 \rangle (2\pi)^4 \delta(p_n - q) = (q_\mu q_\nu - q^2 \delta_{\mu\nu}) \rho(q^2), \quad (2)$$

$q = p_+ + p_-$, p_+ и p_- — импульсы e^+ и e^- , $q = 4E^2$, E — энергия e^+ (или e^-) в с.ц.и.

Будем исследовать поведение $\rho(q^2)$ при больших $q^2 > 0$. Из (2) при $\mu = 0$, $\nu = i$ ($i = 1, 2, 3$) следует

$$\begin{aligned} 2q_i \int_0^\infty q_0 \rho(q^2) dq_0 &= \int_{-\infty}^\infty dq_0 \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | j_0(x), j_i(0) | 0 \rangle = \\ &= 2\pi \int dx e^{-iqx} \langle 0 | j_0(x), j_i(0) | 0 \rangle_{x_0=0}. \end{aligned} \quad (3)$$

Формула (3) связывает интеграл $\int dq^2 \rho(q^2)$ с одновременным коммутатором токов [2, 3]. Вычисляя одновременный коммутатор,

покажем, что $\int dq^2 \rho(q^2)$ квадратично расходится и, следовательно, $\rho(q^2) \rightarrow \text{const}$ при $q^2 \rightarrow \infty$.

Рассмотрим сначала случай, когда ток j_μ является током заряженных фермионов. Как показал Швингер [4], входящий в (3) одновременный коммутатор можно вычислить, рассматривая ток $j_\mu(x)$ как предел произведения операторов $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x')$, взятых в точках x и x' , разделенных бесконечно малым пространственным интервалом $\varepsilon^2 = (x - x')^2$. При этом

$$\langle 0 | [j_0(x), j_i(0)] | 0 \rangle_{x_0=0} = \frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Sp} (\hat{\varepsilon} G^{(+)}(-\varepsilon)) \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(x), \quad (4)$$

$$G_{\alpha\beta}^{(+)}(\varepsilon) = \langle 0 | \psi_\alpha\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \bar{\psi}_\beta\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) | 0 \rangle, \quad \hat{\varepsilon} = \varepsilon_\mu \gamma_\mu. \quad (5)$$

Подставляя (4) в (3), получаем

$$\int dq^2 \rho(q^2) = \frac{2\pi}{3} i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Sp} (\hat{\varepsilon} G^{(+)}(-\varepsilon)). \quad (6)$$

Запишем $G^{(+)}(-\varepsilon)$ в виде представления Челлена — Лемана [5]

$$G^{(+)}(\varepsilon) = \int_0^\infty [G_0^{(+)}(\varepsilon, \kappa) \eta_1(\kappa^2) + \Delta_0^{(+)}(\varepsilon, \kappa) \eta_2(\kappa^2)] d\kappa^2, \quad (7)$$

где $G_0^{(+)}(\varepsilon, \kappa)$ и $\Delta_0^{(+)}(\varepsilon, \kappa)$ — свободные функции Грина частиц с массой κ , причем

$$G_0^{(+)}(\varepsilon, \kappa) = - \left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon_\mu} + \kappa \right) \frac{\kappa^2}{4\pi^2} \frac{K_1(\varepsilon\kappa)}{\varepsilon\kappa}, \quad \varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2} \quad (8)$$

($K_1(x)$ — функция Макдональда).

Подставляя (7) и (8) в (6), получаем¹

$$\int \rho(q^2) dq^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{3\pi} \int_0^\infty \kappa^2 d\kappa^2 \eta_1(\kappa^2) K_2(\kappa\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4}{3\pi\varepsilon^2} \int_0^\infty \eta_1(\kappa^2) d\kappa^2. \quad (9)$$

Согласно Леману [5],

$$\int_0^\infty \eta_1(\kappa^2) d\kappa^2 = 1, \quad (10)$$

поскольку в (5) ψ являются неперенормированными операторами. Таким образом, $\int \rho(q^2) dq^2$ расходится квадратично.

¹ Соотношения подобного рода в теории нейтрального векторного мезона рассматривались Соколовым [6].

¹ Ядерная физика, 1967, 6, 587.

Пусть теперь ток j_μ является током заряженных бозонов со спином нуль. В этом случае вместо (4) мы имеем¹

$$\langle 0 | j_0(x), j_i(0) | 0 \rangle = -2i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\Delta^{(+)}(\varepsilon^2) + \frac{2}{3} \varepsilon^2 \frac{\partial \Delta^{(+)}(\varepsilon^2)}{\partial \varepsilon^2} \right] \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(x), \quad (11)$$

$$\Delta^{(+)}(\varepsilon^2) = \langle 0 | \varphi^+ \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \varphi \left(-\frac{\varepsilon}{2} \right) | 0 \rangle. \quad (12)$$

Повторяя те же рассуждения, что и выше, мы приходим к выводу, что так же, как и в фермионном случае, $\int \rho(q^2) dq^2$ квадратично расходится.

Ясно, что введение в ток любого числа частиц со спином 0 или $1/2$ не изменит этого результата.

Правая часть (4) получена путем коммутации гейзенберговских операторов ψ . Это соотношение можно, однако, получить из более общих соображений.

Действительно, предположим, что

$$\langle 0 | [\psi_\alpha^+(x_1, t), j_0(x_3, t)] \psi_\beta(x_2, t) | 0 \rangle = \delta(x_1 - x_3) C(x_1 - x_2, t),$$

где $C(x, t)$ — некоторая функция. Тогда, интегрируя по x_3 , получаем

$$C(x_1 - x_2, t) = \langle 0 | [\psi_\alpha^+(x_1, t), Q] \psi_\beta(x_2, t) | 0 \rangle = \\ = -\langle 0 | \psi_\alpha^+(x_1, t) \psi_\beta(x_2, t) | 0 \rangle,$$

где Q — оператор заряда. Отсюда, используя соотношение

$$[\psi_\alpha^+(x_1) \psi_\beta(x_2), j_0(x_3)] = [\psi_\alpha^+(x_1), j_0(x_3)] \psi_\beta(x_2) + \psi_\alpha^+(x_1) [\psi_\beta(x_2), j_0(x_3)]$$

легко прийти к формуле (4).

Отметим, что вопрос об асимптотическом поведении $\rho(q^2)$ можно связать с проблемой собственной массы фотона. Рассмотрим поляризационный оператор, обусловленный сильновзаимодействующими частицами в первом приближении по e^2 . Как впервые замечено Джонсоном [2], корректное выражение для поляризационного оператора имеет вид

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(q) - \frac{1}{2\pi} \delta_{\mu i} \delta_{\nu j} \delta_{ij} \int \rho(q^2) dq^2, \quad (13)$$

где

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ j_\mu(x), j_\nu(0) \} | 0 \rangle. \quad (14)$$

¹ Приведенное в работе Швингера [4] выражение для одновременного коммутатора в бозонном случае неправильно, так как при его выводе не было учтено, что и в этом случае необходимо вводить в ток малую нелокальность ε .

Последний член в (13) осуществляет вычитание квадратично расходящейся массы фотона и делает $\Pi_{\mu\nu}$ калибровочно и релятивистски инвариантным. В том случае, когда ток j_μ обусловлен фермионами, из (14) с помощью формального разложения в ряд теории возмущений следует выражение $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(q)$ через вершинную часть $\Gamma_\mu(k_1, k_1 - q; q)$ и функции Грина $G(k)$

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(q) = i \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \text{Sp} \{ \Gamma_\mu(k_1, k_1 - q) G(k_1) \gamma_\nu G(k_1 - q) \}. \quad (15)$$

То, что выражение (15) не является калибровочно инвариантным при произвольном обрезании, хорошо известно. Если вычислять (15), интегрируя сначала по k_{10} , а затем по \mathbf{k}_1 , что, по сути дела, предписывается правилами вычисления T -произведения, то это выражение будет также релятивистски инвариантным.

В силу градиентной инвариантности из (13) следует

$$q_\mu \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(q) = \frac{1}{2\pi} q_i \delta_{\nu i} \int \rho(q^2) dq^2. \quad (16)$$

С другой стороны, используя обобщенное тождество Уорда

$$q_\mu \Gamma_\mu(k_1, k_1 - q; q) = G^{-1}(k_1) - G^{-1}(k_1 - q), \quad (17)$$

из (15) получаем

$$-i \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \text{Sp} \{ \gamma_i [G(k_1 - q) - G(k_1)] \} = \frac{q_i}{2\pi} \int \rho(q^2) dq^2. \quad (18)$$

Подставляя в (18) разложение Челлена — Лемана для функций Грина (7), получаем квадратично расходящийся интеграл. Выполняя интегрирование по k_{10} и оставляя члены, содержащие высшую степень расходимости, имеем

$$\frac{4}{3\pi} \int d|\mathbf{k}|^2 \int d\kappa^2 \eta_1(\kappa^2) = \int \rho(q^2) dq^2. \quad (19)$$

Таким образом, мы видим, что из условия (16) вытекает соотношение, аналогичное (9).

Возвращаясь к формуле (9), отметим, что при ее выводе молчаливо предполагалось, что неперенормированная функция Грина $G = Z_2 G_{ren}$ имеет смысл. Однако если $Z_2 = 0$, то выражения, стоящие под знаком предела в (4) — (6), равны нулю при любом конечном ε .

Для того, чтобы придать смысл этим соотношениям, будем считать, что сильные взаимодействия обрезаются при достаточно больших импульсах порядка Λ . При этом Z_2 будет функцией $\Lambda: Z_2 = Z_2(\Lambda)$, интегрирование по κ^2 в спектральном представлении функции Грина (7) будет производиться до $\kappa^2 \sim \Lambda^2$ и $G(k_1) \approx G_0(k_1)$ при $k_1^2 \gg \Lambda^2$. Пространственно-подобный

вектор ε осуществляет обрезание электромагнитной вершины $\Gamma_\mu(k_1, k_2, q)$ при пространственных импульсах $k_1, k_2 \sim \Lambda_\varepsilon \sim 1/\varepsilon$. Условие градиентной инвариантности приводит к соотношению между Λ и $\Lambda_\varepsilon: \Lambda \lesssim \Lambda_\varepsilon$.

Действительно, в противном случае $\Lambda \gg \Lambda_\varepsilon$ при импульсах в области между Λ_ε и Λ левая часть (17) равна нулю, в то время как правая отлична от нуля. При $\Lambda \lesssim \Lambda_\varepsilon \sim 1/\varepsilon$ входящий в (9) интеграл

$$\int^{\Lambda^2} x^2 dx^2 \eta_1(x^2) K_2(x\varepsilon) \sim \Lambda_\varepsilon^2 \sim 1/\varepsilon^2$$

(рассмотренный выше случай $Z_2 \neq 0$ соответствует $\Lambda \ll \Lambda_\varepsilon$). Поэтому случай $Z_2 = 0$ не отличается от случая $Z_2 \neq 0$.

Мы показали, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\int \rho(q^2) dq^2 \sim 1/\varepsilon^2$. Покажем теперь, что отсюда вытекает асимптотическое поведение $\rho(q^2) \rightarrow \text{const}$ при $q^2 \rightarrow \infty$, т. е., что при фиксированном ε верхний предел L^2 в интеграле $\int_{L^2} \rho(q^2) dq^2$ должен быть порядка Λ_ε^2 .

Допустим противное, т. е. что $L^2 \gg \Lambda_\varepsilon^2$. Из (15), (16) и имеющего место в с.ц.и. равенства

$$q^2 = (\sqrt{k_1^2 + \mathbf{k}_1^2} + \sqrt{k_2^2 + \mathbf{k}_2^2})^2$$

следует, что значения $q^2 \gg \Lambda_\varepsilon^2$ могут возникать лишь при $k_1^2 \gg \Lambda_\varepsilon^2$ или $k_2^2 \gg \Lambda_\varepsilon^2$. Но при $k_1^2 \gg \Lambda_\varepsilon^2 \gg \Lambda^2$ или $k_2^2 \gg \Lambda_\varepsilon^2 \gg \Lambda^2$ $\Gamma_\mu(k_1, k_2, q)$ превращается в свободную вершинную функцию. Так как в функциях Грина спектр виртуальных масс ограничен значениями $x^2 < \Lambda^2$, то в $\rho(q^2) \sim \text{Im } \Pi(q^2)$ не могут войти значения k_1^2 или $k_2^2 \gg \Lambda_\varepsilon^2$ и, следовательно, $L^2 \sim \Lambda_\varepsilon^2$.

Мы приходим, таким образом, к выводу, что асимптотическое поведение полного сечения аннигиляции $e^+ + e^-$ в адроны при больших энергиях должно иметь вид $\sigma \sim \text{const}/E^2$, т. е. должна иметь место такая же зависимость от E , как, например, в случае процесса¹ $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ [3].

Все проведенное выше рассмотрение непосредственно может быть применено к исследованию зависимости полной вероятности

адронных распадов промежуточного W -бозона от его массы M (при больших M). При этом следует вывод о том, что при больших M отношение полных вероятностей адронных и лептонных распадов не зависит от M , т. е. не должно быть мало.

Выражаем глубокую благодарность И. Б. Хриповичу за полезное обсуждение.

*Институт теоретической и экспериментальной физики,
Москва*

*Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе
Академии наук СССР, Ленинград*

ЛИТЕРАТУРА

1. J. D. Bjorken. Phys. Rev., 1966, 148, 1467.
2. K. Johnson. Nucl. Phys., 1961, 25, 431.
3. S. Okubo. Nuovo Cim., 1966, 44A, 1015.
4. J. Schwinger. Phys. Rev. Lett., 1959, 3, 296.
5. H. Lehmann. Nuovo Cim., 1954, 11, 342.
6. В. В. Соколов. Ядерная физика, 1966, 3, 765.

¹ Интересно отметить, что при этом перенормировка электрического заряда за счет адронов

$$Z_3^{-1} - 1 = 2e^2 \int \rho(q^2) \frac{dq^2}{q^2} = \frac{1}{4\pi^2 e^2} \int \sigma(q^2) dq^2$$

логарифмически расходится.

ФОРМУЛА ОРИРА КАК СЛЕДСТВИЕ ВЕТВЛЕНИЙ В j -ПЛОСКОСТИ¹

Важным достижением теории комплексных моментов, развитой в последние годы [1,2], является установление связи между особенностями парциальной амплитуды t канала $\varphi(j, t)$ в плоскости комплексной переменной j -углового момента и асимптотикой амплитуды рассеяния $T(s, t)$ при высокой энергии, при $s \gg m^2$. Эта связь

$$T(s, t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \varphi(j, t) \eta(j) e^{j \ln s/m^2} \frac{dj}{2\pi i} \quad (1)$$

приводит к тому, что особой точке $\varphi(j, t)$ при $j = j_0(t)$ соответствует асимптотический ход $T(s, t)$ вида $T(s, t) \sim (s/m^2)^{j_0(t)}$.

Через $\eta(j) = i - \text{ctg} \frac{\pi j}{2}$ обозначен сигнатурный множитель, определяющий фазу амплитуды (рассматриваем кроссинг-симметричную часть амплитуды, не изменяющуюся при замене $s \rightleftharpoons u$).

Полюсу $\varphi(j, t) = \frac{r(t)}{j - \alpha(t)}$ в j -плоскости соответствует реджевская асимптотика $T_1(s, t) \sim r(t) \eta(\alpha) (s/m^2)^{\alpha(t)}$. Мандельстам [3] на примере графиков Фейнмана некоторого класса показал, что полюс при $j = \alpha(t)$ приводит к серии точек ветвлений парциальной амплитуды в точках $j_n(t) = n\alpha(t/n^2) - n + 1$. Особо интересная ситуация возникает в случае, если в природе существует полюс, траектория которого при $t = 0$ имеет наибольшее, совместимое с теоремой Фруассара [4], значение $\alpha(0) = 1$. Для него при малых t , $\alpha(t) = 1 + \alpha'(0)t$, причем [5] $\alpha'(0) > 0$. Такой полюс с квантовыми числами вакуума приводит к постоянной величине полных сечений взаимодействия частиц $\sigma_{tot} = \frac{1}{s} \text{Im} T(s, 0)$

при $s \rightarrow \infty$. Точки ветвления $j = j_n(t)$, генерированные этим вакуумным полюсом при $t < 0$ (в физической области рассеяния в s -канале) расположены правее полюса

$$\alpha(t) \simeq 1 + \alpha'(0)t, \quad j_n(t) \simeq 1 + \frac{\alpha'(0)}{n}t, \quad n = 2, 3, \dots$$

и сгущаются при $n \rightarrow \infty$ к $j = 1$ (рис. 1). Вклад их в асимптотику амплитуды (1), пропорциональный $(s/m^2)^{j_n(t)}$, может быть сколь угодно велик при $t \neq 0$, $t < 0$, по сравнению с реджевским членом $\sim (s/m^2)^{\alpha(t)}$.

Исследование многочастичных членов условия унитарности в t -канале [6] позволило в общем виде подтвердить вывод [3] о наличии точек ветвлений в j -плоскости. Оказалось [6], что они логарифмического типа, т. е. вблизи них $\varphi(j, t) \simeq A_n + B_n(j_n - j)^{n-2} \ln(j - j_n(t))$, т. е. скачок $\delta_n \varphi = \frac{1}{2i} [\varphi(j + it, t) - \varphi(j - it, t)]$ амплитуды на разрезе, связанном с ними (проведенном на рис. 1 влево от $j = j_n$) есть $\delta_n \varphi(j, t) = \pi B_n (j_n - j)^{n-2}$, где $B_n = \frac{(n-1) N_1 N_2}{(n!)^2 (-C)^{n-1}}$ — некоторый коэффициент (N_1 и N_2 — амплитуды образования в t -канале n реджионов из двух частиц, а $C = \sqrt{\alpha' \left(\alpha' - \frac{2t}{n^2} \alpha'' \right)} \simeq \alpha' > 0$).

При достаточно большом $\xi = \ln \frac{s}{m^2}$ вклад n -го ветвления (1):

$T_n(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{j_n(t)} \delta_n \varphi(j, t) \eta(j) e^{j \xi} dj$ определяется областью j , близких к j_n , поэтому, подставляя приведенное значение $\delta_n \varphi(j, t)$, получим: $T_n \simeq \frac{C_n(t)}{n \cdot n!} \eta(j_n) \frac{\exp[\alpha'(0)t\xi/n]}{(\alpha'\xi)^{n-1}} \frac{s}{m^2}$, $C_n(t) = (1)^{n-1} N_1 N_2$. Это значение следует сравнить с вкладом полюса Редже

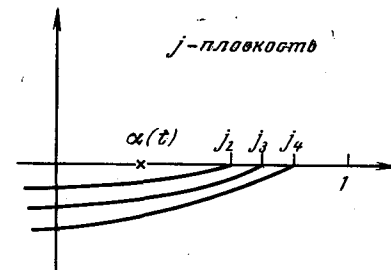


Рис. 1. Положение точек ветвления и разрезов в j -плоскости при $t < 0$

$T_1 \simeq r(t) \eta(\alpha) e^{\alpha'(0)t\xi} \frac{s}{m^2}$. Как видно в задаче о рассеянии при высокой энергии, при $\xi \gg 1$, важную роль играет параметр $x = \tau \xi$, где $\tau = -\alpha'(0)t$.

Область очень малых t , в которой $x \lesssim 1$ (т. е. $\tau \lesssim 1/\xi$), можно условно называть дифракционным конусом. Внутри него вклад полюса Редже $\sim e^{-x}$ велик (если $x = \xi \tau$ совсем мало) или — величина того же порядка, что и вклад ветвлений ($\sim e^{-x/n}$). В области вне конуса при $x > 1$ вклад полюса Редже экспоненциально

¹ Эта статья является изложением неопубликованной работы И. Я. Померанчука, выполненной им осенью 1966 г. незадолго до смерти. Статья написана К. А. Тер-Мартirosяном.

мал по сравнению с вкладом ветвлений. Однако с ростом n — номера ветвления (во всяком случае, при $n \sim \xi\tau$) экспонента $e^{-\xi\tau/n}$ перестает расти, а предэкспоненциальный множитель в T_n быстро убывает — если $C_n/(\alpha')^{n-1}$ не растет. Поэтому при большом $\xi\tau$ в суммарном вкладе полюса и всех ветвлений¹

$$T(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(s, t), \quad T_n \simeq \frac{s}{m^2} \frac{C_n/(\alpha')^{n-1}}{\xi^{n-1} n \cdot n!} e^{-\xi\tau/n} \quad (2)$$

важна лишь сравнительно узкая область больших значений n . Для вычисления суммы предположим, что при больших n

$$\frac{C_n(t)}{n \cdot n! (\alpha')^{n-1}} = C_1(t, n) e^{-a(t, n)n}, \quad C_1(t, n) \simeq \text{const},$$

где $a(t, n) = a_0(t) + \ln n/e$, если $C_n/(\alpha')^n \sim e^{-a_0 n}$ при больших n . Превратим сумму по n в интеграл и вычислим его методом перевала²

$$T(s, t) = \frac{s}{m^2} \left(i - \frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \int_0^{\infty} C_1(t, n) e^{-f(n)n} dn, \quad (3)$$

$$f(n) = an + \frac{\xi\tau}{n}, \quad f' = a - \frac{\xi\tau}{n^2}.$$

Точка перевала $n = n_0$ определяется условием $f'(n_0) = 0$, т. е. $n_0 = \sqrt{\frac{\xi\tau}{a}}$ действительно велико при достаточно большом $\xi\tau$ (мы всё время полагаем, что τ невелико, но $\xi\tau > 1$). Разлагая

$$f(n) = f(n_0) + \left(\frac{n - n_0}{n_0} \right)^2 \frac{n_0^2 f''(n_0)}{2}, \quad n_0 = \sqrt{\frac{\xi\tau}{a}},$$

имеем

$$f(n_0) = 2\sqrt{\xi\tau a}, \quad \frac{n_0^2 f''(n_0)}{2} = \frac{\xi\tau}{n} = \sqrt{a\xi\tau},$$

т. е.

$$T(s, t) = \frac{s}{m^2} \left(i - \frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) e^{-\sqrt{a\xi\tau}} \sqrt{\frac{\xi\tau}{a}} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{a\xi\tau} z^2} C_1(t, z) dz,$$

$$\text{где } z = \frac{n - n_0}{n_0}, \quad a \simeq a_0(t) + \ln \frac{n_0}{e} = a_0(t) + \frac{1}{2} \ln \frac{\xi\tau}{a_0 e^2}.$$

¹ При существенных в (1) f , близких к $f_n = 1$, множитель $\eta(f)$ можно записать в (1) в виде оператора $\hat{\eta} = i - \frac{\pi}{2} (\hat{f} - 1) = i - \frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \xi}$, действующего на $(m^2/s)T(s, t)$, и вынести за интеграл.

² Вычисления аналогичны проведенным в работе [7]. В этой работе, однако, авторы использовали графики Фейнмана, вклад [3] которых, фактически, не имеет точек ветвлений в f -плоскости.

При $\xi\tau > 1$ интеграл действительно имеет острый максимум при $n = n_0$, т. е. $z = 0$. Вынося $C_1(t, z)$ при $z = 0$ за интеграл, получим

$$T(s, t) = \frac{s}{m^2} C_0(t) \left(i - \frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (\xi\pi)^{1/4} e^{-2\sqrt{a\xi\tau}}. \quad (4)$$

Величина $\tau = -\alpha'(0)t$ пропорциональна квадрату поперечной составляющей импульса образующейся частицы после рассеяния $t = -p_{\perp}^2$, $\tau = \alpha'(0)p_{\perp}^2$ (все время речь идет о небольших углах рассеяния). Поэтому найденной амплитуде отвечает дифференциальное сечение вида

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim \left| \frac{T(s, t)}{s} \right|^2 \sim e^{-4\sqrt{a\alpha'(0)} \ln s/m^2 p_{\perp}}. \quad (5)$$

Распределение почти такого же вида было найдено недавно Ориром [8] чисто эмпирически. На основе данных о pp -рассеянии в области $E_{\text{лаб}} \sim 12-30 \text{ Гэв}$ при не малых переданных импульсах и больших энергиях [9] он получил $\frac{d\sigma}{dt} \sim \frac{1}{s} e^{-p_{\perp}/b}$, где $b \approx 0,16 \text{ Гэв}/c$.

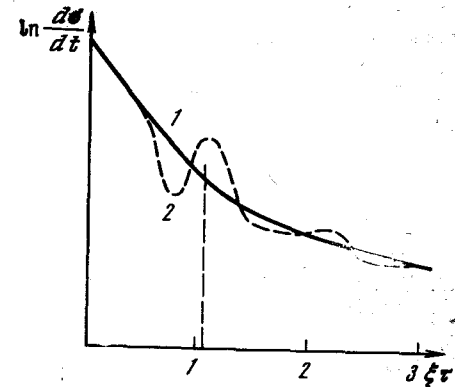


Рис. 2. Характер углового распределения при высоких энергиях

$\xi\tau \leq 1$ — область дифракционного конуса; $\xi\tau > 1$ — орирская область; 1 — идеализированная плавная кривая; 2 — реальная кривая. В области $\xi\tau \leq 1$ осцилляции возникают за счет интерференции вкладов полюса и точек ветвления различных порядков, в области $\xi\tau > 1$ осцилляции Ансельма—Дятлова [10]

Если a_0 мало, т. е. $a = a_0 + \frac{1}{2} \ln \frac{\xi\tau}{e^2 a}$ имеет значение около единицы, то (2), (3) дает почти такое же значение $(b)_{\text{теор}} = 1/4 \sqrt{a\alpha'(0) \ln s/m^2}$. Действительно, при $E_{\text{лаб}} \simeq 20 \text{ Гэв}$, $\ln \frac{s}{m_N^2} = \ln \frac{2E_{\text{лаб}}}{m_N} \simeq 3,5$ и если $\alpha'(0) \simeq 0,4$, то $(b)_{\text{теор}} = 1/(4 \cdot 1,2) \simeq 0,2$.

Отметим, что вместо дополнительного убывающего множителя $1/s$ в формуле Орира теория приводит к множителю $\sqrt{\ln s/m^2}$ в экспоненте.

Таким образом, учет вклада ветвлений существенно изменяет характер углового распределения: вместо реджевского, быстро

ОГРАНИЧЕНИЕ НА СКОРОСТЬ РОСТА СЕЧЕНИЙ СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ¹

спадающего с ростом τ распределения внутри конуса, в области очень малых $\tau \lesssim 1/\xi$ $\frac{d\delta}{dt} \sim e^{-2\tau\xi}$ мы получаем вне конуса при $\xi\tau > 1$ гораздо медленнее убывающее распределение орировского типа (5) рис. 2.

Теоретическая формула (5) приводит к выводу о сужении конуса орировского распределения, так как $b_{\text{теор}}$ убывает обратно пропорционально $\sqrt{\ln s/m^2}$. Представляется очень интересным обнаружить это сужение на опыте. Для этого, по-видимому, требуются энергии, большие, чем мы сейчас располагаем — порядка 200—1000 Гэв.

П р и м е ч а н и е. Рассматривая этот же вопрос уже после смерти Исаака Яковлевича, Ансельм и Дятлов [10] заметили, что существенна знакопеременность скачка $\delta_n\phi$ парциальной амплитуды на разрезе, связанном с n -ым ветвлением, т. е. следует учесть, что в (2) $C_n \sim (-1)^{n-1}$. Введя этот множитель в (3), они получили, вычисляя (3) методом перевала, амплитуду, отличную от (4), дополнительным, медленно осциллирующим множителем вида

$$1 + \lambda \cos(\sqrt{2\pi\xi\tau} \operatorname{tg} \phi/2 + \chi_0), \quad \lambda < 1,$$

где χ_0 — некоторая фаза, а $\operatorname{tg} \phi = \pi/a_0$. Кроме того, вместо величины a в экспоненте в (4) у них появился множитель $2\pi \operatorname{ctg} \phi/2$ (равный $\approx 2\pi$ при $a_0 \ll \pi$). Возможно, что именно осцилляции такого типа наблюдались недавно Аллаби и др. [11] в опытах по pp -рассеянию. На рис. 2 они указаны пунктиром.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. T. Regge. Nuovo Cim., 1951, 14, 951; 1960, 16, 947.
2. В. Н. Грибов. ЖЭТФ, 1961, 41, 1962; 41, 667.
3. S. Mandelstam. Nuovo Cim, 1963, 30, 1113, 1121, 1148.
4. M. Froissart. Phys. Rev., 1961, 123, 1053.
5. В. Н. Грибов, И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 1962, 43, 308. (Собр. трудов, № 112).
6. В. Н. Грибов, И. Я. Померанчук, К. А. Тер-Мартirosян. Ядерная физика, 1965, 2, 361. (Собр. трудов, № 119).
7. S. Fubini, A. Stangellini. Phys. Lett., 1962, 1, 29.
8. J. Orear, Phys. Rev. Lett., 1964, 12, 112; 1965, 13, 190.
9. G. Cocconi et al. Phys. Rev., 1965, 138B, 165.
10. А. А. Ансельм, И. Т. Дятлов. Ядерная физика, 1967, 6, 591, 603; Phys. Lett., 1967, 24B, 479.
11. J. W. Allaby et al. Phys. Lett., 1966, 23, 389.

Рассмотрены ограничения на скорость роста с энергией сечений слабых взаимодействий. При получении ограничений используется дисперсионное соотношение, условие унитарности и общий характер угловой зависимости сечений. Из рассмотрения амплитуды рассеяния вперед следует, что сечение слабого взаимодействия может стать порядка адронных сечений ($1/m_N^2$) при энергиях $\sqrt{s} > 1/Gm_N \sim 10^{14}$ эв. Из рассмотрения производной амплитуды по переданному импульсу следует более сильное ограничение: $\sqrt{s} \geq 1/(10 m_N^2 G^{3/2} \sim 3 \cdot 10^{15}$ эв.

1. Постановка задачи

Существующая теория слабого взаимодействия имеет смысл только в первом приближении теории возмущений. Хорошо известно, что при большой энергии такое приближение неприменимо. Это легко проверить на примере реакции $\nu + e \rightarrow \nu + e$, изображенной на рис. 1.

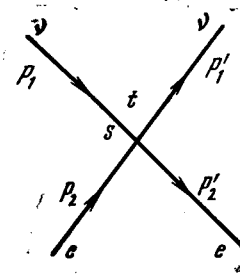


Рис. 1

Гамильтониан слабого взаимодействия, ответственного за такой процесс, имеет вид

$$\frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{\Psi}_e \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \Psi_\nu) (\bar{\Psi}_\nu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \Psi_e). \quad (1)$$

¹ Ядерная физика, 1970, 11. В этой статье излагается результат, который был получен И. Я. Померанчуком незадолго до смерти. Работа докладывалась им на семинаре, но опубликована не была. Статья написана В. Н. Грибовым и В. М. Шехтером при участии И. М. Шмушкевича и была опубликована уже после смерти И. Я. Померанчука.

Если пренебречь массой электрона, то все частицы становятся двухкомпонентными, и отличной от нуля оказывается лишь одна спиральная амплитуда $f_{-1/2, -1/2, -1/2, -1/2}$. В этом смысле частицы, описываемые двухкомпонентными спинорами, подобны скалярным частицам, рассеяние которых определяется одной амплитудой. Вводя обычные переменные $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_1')^2$, $u = (p_1 - p_2')^2$, принимая условие нормировки спиноров $\bar{u}u = 2m$ и опуская спиральные индексы, получаем

$$f_{\nu e} = 4\sqrt{2}Gs. \quad (2)$$

Если рассматривать рассеяние антинейтрино, описываемое рис. 1, с заменой ν на $\bar{\nu}$, то здесь отлична от нуля лишь спиральная амплитуда $f_{1/2, -1/2, 1/2, -1/2}$. На языке инвариантов s , t , u переход от νe - к $\bar{\nu} e$ -рассеянию дается преобразованием $s \leftrightarrow u$, $t \leftrightarrow t$. Поэтому

$$f_{\bar{\nu} e} = 4\sqrt{2}Gu = -4\sqrt{2}G(s+t). \quad (3)$$

Из (2) следует, что при большой энергии дифференциальное сечение рассеяния нейтрино на электроны, поляризованном параллельно импульсу нейтрино, становится постоянным

$$\frac{d\sigma_{\nu e}}{dt} = \left| \frac{f_{\nu e}}{s} \right|^2 \frac{1}{16\pi} = \frac{2G^2}{\pi}. \quad (4)$$

Отсутствие в (4) зависимости от t приводит к тому, что в рассеянии оказываются существенными большие переданные импульсы. С ростом s область допустимых значений t увеличивается. В результате возрастает и полное сечение

$$\sigma_{\nu e} = \frac{2G^2}{\pi} s. \quad (5)$$

С другой стороны, как это видно из (2), в первом порядке по слабому взаимодействию νe -рассеяние является чисто S -волновым. Поэтому сечение не может превосходить унитарный предел

$$\sigma_{\nu e} \lesssim 4\pi\lambda^2 = 16\pi/s. \quad (6)$$

Вместо (6) можно пользоваться эквивалентным ему неравенством $|f_{\nu e}| \leq 16\pi$, откуда сразу следует условие для s

$$s < 2\sqrt{2}\pi/G. \quad (7)$$

Неравенство (7) удовлетворяется при энергиях в с.ц.и. (\sqrt{s}), не превышающих 900 ГэВ . Принято не обращать внимание на численные коэффициенты и считать, что унитарный предел достигается при $s \sim 1/G$, т. е. $\sqrt{s} \sim 300 \text{ ГэВ}$.

Таким образом, существующая теория слабого взаимодействия заведомо неприменима, начиная с энергий порядка $\sqrt{2\pi/G} \cdot 10^{12} \text{ эВ}$.

При таких энергиях, как это следует из (5), сечение все еще мало: $\sigma_{\nu e} \sim G \sim 10^{-32} \text{ см}^2$. Это означает, что хотя слабое взаимодействие стало уже сильным в том смысле, что парциальная амплитуда достигла своего унитарного предела, радиус этого взаимодействия все еще мал. Поэтому высокие парциальные волны в рассеянии не участвуют, и полное сечение невелико. Диаграммы высших порядков, типа изображенной на рис. 2, конечно, могут приводить к слабому дальнему действию, однако эффективно такое дальнее действие роли не играет, ибо при отсутствии нейтральных токов вершина R , описывающая $\nu\nu$ -рассеяние, мала даже по сравнению с G . Говоря о радиусе слабого взаимодействия, мы будем иметь в виду радиус той же части, которая существенна для рассеяния.

Возникает вопрос, может ли вообще слабое взаимодействие стать полностью подобным сильному, с тем, чтобы слабые сечения, например, для νe -рассеяния стали порядка $1/m_N^2$, что характерно для адронных процессов? Такая постановка вопроса представляется разумной, потому что в области энергий выше 10^{12} эВ , где теории нет, радиус слабого взаимодействия может возрасти, в результате чего амплитуда станет существенно зависеть от t . При этом в реакции будет участвовать много парциальных волн, каждая из которых, конечно, не превосходит унитарного предела. Таким образом, проблема состоит в том, может ли радиус слабого взаимодействия стать большим.



Рис. 2

Ответить на этот вопрос мы не в состоянии до тех пор, пока не будет построена последовательная теория слабого взаимодействия. Проблему, однако, можно сформулировать иначе. Допустим, что при увеличении s радиус слабого взаимодействия действительно становится большим. При какой энергии это может произойти, хотя бы в принципе?

В этой работе делается попытка установить нижнюю границу для такой энергии. Идея состоит в использовании дисперсионных соотношений для амплитуды рассеяния, которые позволяют установить связь между процессами при малых и больших s . В разделе 2 будет показано, исходя из дисперсионного соотношения для амплитуды рассеяния вперед, что слабое взаимодействие может стать подобным сильному при такой энергии, что $s \geq \sigma_1/G^2$, где σ_1 — величина порядка адронных сечений. Если $\sigma_1 \sim 1/m_N^2$, то здесь $\sqrt{s} \geq 10^{14} \text{ эВ}$. В разделе 3 рассматриваются ограничения, которые могут быть получены с помощью дисперсионного соотношения для производной амплитуды по передаваемому импульсу. В этом случае ограничение на s оказывается более сильным:

$$s \geq \frac{1}{100G} \left(\frac{\sigma_1}{G} \right)^2, \quad (8)$$

так что

$$\sqrt{s} \gtrsim \frac{1}{10\sqrt{G}} \frac{\sigma_1}{G} \sim 3 \cdot 10^{15} \text{ эв.} \quad (9)$$

Это означает, что сечения слабого взаимодействия могут стать реально большими очень не скоро. В случае ve -рассеяния, например, приведенному значению s соответствует энергия нейтрино в лабораторной системе, превышающая 10^{26} эв. В разделе 4 содержится несколько замечаний по поводу утверждений, сделанных в разделах 2 и 3.

2. Дисперсионное соотношение для рассеяния вперед

Рассмотрим кроссинг-симметричную амплитуду

$$f(s, t) = \frac{1}{2} [f_{ve}(s, t) + f_{\bar{v}e}(s, t)] = \frac{1}{2} [f_{ve}(s, t) + f_{\bar{v}e}(s, t)]. \quad (10)$$

Напишем для нее дисперсионное соотношение, сделав вычитание в точке $s = 0$,

$$f(s, t) = f(0, t) + \frac{s}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} ds' \text{Im} f(s', t) \left[\frac{1}{s'(s' - s)} - \frac{1}{(s' + t)(s' + s + t)} \right]. \quad (11)$$

Здесь s_0 — то значение s , при котором амплитуда $f(s, t)$ становится комплексной из-за наличия реальных промежуточных состояний. Согласно (2) и (3), в первом порядке теории возмущений

$$f(0, t) = -2\sqrt{2}Gt.$$

Положим теперь в (11) $t = 0$. В нашем приближении $f(0, 0) = 0$, но на самом деле это равенство роли не играет. Существенно лишь то, что при $s \leq 1/G$ амплитуда $f(s, 0)$ невелика: $f(s, 0) < 1$. Следовательно, не должен быть большим и дисперсионный интеграл. По оптической теореме:

$$\text{Im} f(s', 0) = \frac{s'}{2} [\sigma_{ve}(s') + \sigma_{\bar{v}e}(s')] \equiv s' \sigma(s'), \quad (12)$$

так что дисперсионный интеграл сходится, если только при $s' \rightarrow \infty$ сечение $\sigma(s')$ не растет. Предположим, что начиная с некоторого значения $s' = s_1$ сечение $\sigma(s')$ становится порядка сечений сильного взаимодействия. Из сказанного в предыдущем разделе ясно, что $s_1 \gg \frac{1}{G}$. Для простоты можно положить $\sigma(s' > s_1) = \sigma_1 = \text{const}$, считая $\sigma_1 \sim 1/m_N^2$. (Если σ_1 слегка растет, то ограничение на s_1 окажется еще более сильным. Если же σ_1 убывает, скажем, обращается в нуль, начиная с $s_2 > s_1$, то все изменение сведется к замене в получаемых выражениях s_1 на $s_1 s_2 / (s_2 - s_1)$).

Разбивая область интегрирования на две части $s' < s_1$ и $s' > s_1$, получаем для $s \ll s_1$

$$f(s, 0) = \frac{2G^2}{\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds' \sigma(s')}{s'^2 - s^2} + \frac{2\sigma_1 s^2}{\pi s_1}. \quad (13)$$

Рассмотрим значение $s \sim 1/G$. В этом случае как $f(s, 0)$, так и вклад в интеграл от области $s' \leq s$ имеет порядок единицы. Такой же порядок поэтому должно иметь и остающееся выражение в правой части (13). Из-за положительности вклада от области $s' > s$ можно пренебречь вкладом от $s' < s_1$ и писать

$$1 \gtrsim \sigma_1 s^2 / s_1 \sim \sigma_1 / s_1 G^2, \quad (14)$$

откуда

$$s_1 \gtrsim \sigma_1 / G^2 \sim 10^{10} m_N^2. \quad (15)$$

Это означает, что слабое взаимодействие может сравниться с сильным не ранее, чем при энергии $\sim 10^{14}$ эв. Полученное условие достаточно жестко само по себе. Однако далее будет показано, что его можно сделать еще более сильным.

3. Ненулевые переданные импульсы

Дополнительное ограничение возникает вследствие того обстоятельства, что при малых s амплитуда является медленной функцией полинома, тогда как в случае больших s она должна быстро меняться при изменении t . Первое утверждение вытекает из формул (2) и (3), согласно которым в области применимости существующей теории слабого взаимодействия

$$\frac{df(s, t)}{dt} = -2\sqrt{2}G. \quad (16)$$

Это соответствует тому, что при не слишком больших энергиях ve -рассеяние содержит только S - и P -волны, в то время как $v\bar{e}$ -рассеяние является чисто S -волновым.

Что касается очень больших значений s , при которых радиус слабого взаимодействия становится большим, то здесь следует ожидать появления дифракционной картины обычного типа. В этом случае дифференциальное сечение существенно меняется при изменении t на величину $t_{\text{эф}}$, имеющую порядок обратного квадрата радиуса взаимодействия. Покажем, что при достаточно большом сечении рассеяния этот радиус не может быть слишком мал, т. е. $t_{\text{эф}}$ ограничено сверху.

Сечение упругого рассеяния можно записать в виде

$$\sigma_{\text{упр}} \sim \left(\frac{d\sigma_{\text{упр}}}{dt} \right)_{t=0} t_{\text{эф}} = \frac{t_{\text{эф}}}{16\pi} \left| \frac{f(s, 0)}{s} \right|^2 \quad (17)$$

или, используя оптическую теорему,

$$\sigma_{\text{упр}} \geq t_{\text{эф}} \sigma^2 / 16\pi, \quad (18)$$

откуда

$$t_{\text{эф}} < 16\pi \sigma_{\text{упр}} / \sigma^2 < 16\pi / \sigma. \quad (19)$$

Чтобы получить условие непротиворечивости неравенства (18) при больших s и малости выражения (15) при $s \leq 1/G$, воспользуемся дисперсионным соотношением (11) для $f(s, t)$, продифференцируем его по t и положим $t = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{df(s, t)}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{df(0, t)}{dt} \Big|_{t=0} + \frac{2s^2}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s'(s'^2 - s^2)} \frac{d}{dt} \text{Im}(s', t) \Big|_{t=0} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} ds' \left[\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{(s' + s)^2} \right] \text{Im} f(s', 0). \end{aligned} \quad (20)$$

Последнее слагаемое возникло в результате дифференцирования $1/(s' + t)(s' + s + t)$.

Рассмотрим равенство (20) при $s \sim 1/G$. В этом случае, как следует из (16), область $s' \leq s$ в интегралах дает вклад порядка G . Такой же порядок имеют $df(s, t)/dt$ и $df(0, t)/dt$, которые, впрочем, в первом приближении по G взаимно сокращаются. Поэтому вклад в дисперсионные интегралы (20) от области $s' > s$ также должен быть мал ($\sim G$). Поскольку $\frac{d}{dt} \text{Im} f(s', t) \Big|_{t=0} > 0$, то подынтегральное выражение в области $s' > s$ положительно. Если опустить второй интеграл, а в первом ограничиться областью $s' \geq s_1 \gg 1/G$, то все выражение только уменьшится. Поэтому

$$G \geq s^2 \int_{s_1}^{\infty} \frac{ds'}{s'^3} \frac{d}{dt} f(s', t) \Big|_{t=0}. \quad (21)$$

В области, где слабое взаимодействие становится сильным, можно воспользоваться соотношением (19), в соответствии с которым

$$\frac{d}{dt} \text{Im} f(s', t) \Big|_{t=0} \sim \frac{1}{t_{\text{эф}}} s' \sigma(s') \geq \frac{s' \sigma^2(s')}{16\pi}. \quad (22)$$

При более строгом выводе коэффициент $1/16\pi$ заменяется на $1/32\pi$ (см. следующий раздел). Полагая теперь, что для $s' > s_1$ сечение велико, так что $\sigma(s') = \sigma_1 \sim 1/m_N^2$, получаем из (21)

$$s_1 > \frac{\sigma_1^2}{G} \frac{s^2}{32\pi}. \quad (23)$$

При $s \sim 1/G$ отсюда следует неравенство (8).

При выводе неравенства (9) были использованы: дисперсионное соотношение, условие унитарности, а также то обстоятельство, что угловая зависимость амплитуды должна быть разной в областях, где взаимодействие слабое или сильное. В результате оказывается, что слабое взаимодействие может сравниться с сильным за счет увеличения эффективного радиуса только при сверхвысоких энергиях порядка 10^{16} эв.

Сделаем теперь несколько замечаний.

1. Все рассуждения в работе относились к частному случаю ве-рассеяния, однако по существу они носят общий характер и применимы к любым процессам слабого взаимодействия. В частности, не играет роли предположение об отличии от нуля только одной спиральной амплитуды. При ненулевых массах другие спиральные амплитуды, хотя и отличны от нуля, но вплоть до значений $s \leq 1/G$ они остаются меньше или порядка единицы. Поэтому, подобно рассмотренной выше амплитуде, они могут достигнуть величины порядка адронных амплитуд лишь при энергиях, удовлетворяющих неравенствам (8) и (15).

2. Соотношение (15) было получено в первом порядке по слабому взаимодействию. Не учитывалось то обстоятельство, что диаграммы типа рис. 2 имеют особенность при малых t . Сингулярная часть такой диаграммы конечна и с точностью до численного коэффициента ее вклад в кроссинг-симметричную амплитуду $f(s, t)$ имеет вид ($K \ll G$)

$$GKt^2 \ln t. \quad (24)$$

При $t = 0$ вклад от этого выражения в df/dt обращается в нуль, так что диаграммами типа рис. 2 действительно можно пренебречь. В более общем случае рассеяния лептонов с ненулевой массой к (24) может добавиться слагаемое типа

$$GRm^2 t \ln t. \quad (25)$$

Его вклад в df/dt обладает логарифмической особенностью при $t = 0$, тогда как в рассуждениях предыдущего раздела считалось, что $df/dt|_{t=0}$ мала. Чтобы обойти эту трудность, можно усреднить df/dt по некоторой области около $t_{\text{эф}} \sim 1/\sigma$, не переходя к слишком малым значениям t . Тогда вклад от (25) оказывается пренебрежимо малым, и все рассуждения раздела 3 сохраняют силу.

3. Приведем более строгий вывод ограничения снизу на $\frac{d}{dt} \text{Im} f(s, t) \Big|_{t=0}$. Напишем разложение для амплитуды по парциальным волнам:

$$f(s, t) = 16\pi \sum_l (2l + 1) a_l P_l \left(1 + \frac{2t}{s} \right). \quad (26)$$

¹ Этот вывод предложен Е. И. Малковым.

Из (26) следует

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Im} f(s, t) |_{t=0} = \frac{16\pi}{s} \sum_l (2l+1) l(l+1) \operatorname{Im} a_l. \quad (27)$$

Надо найти минимум (27) при заданном значении σ

$$\sigma = \frac{16\pi}{s} \sum_l (2l+1) \operatorname{Im} a_l \quad (28)$$

и условия

$$0 \leq |a_l|^2 \leq \operatorname{Im} a_l \leq 1. \quad (29)$$

Нетрудно видеть, что такой минимум имеет место, если для малых l вплоть до некоторого $l = L$ все a_l принимают максимальное значение, равное 1, тогда как при больших l все a_l равны нулю. Переходя от суммирования к интегрированию, находим из (28) значение L

$$\sigma = \frac{16\pi}{s} L^2, \quad (30)$$

после чего в (27)

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Im} f(s, t) |_{t=0} \geq \frac{16\pi}{s} \frac{L^2}{2} = \frac{s\sigma^2}{32\pi}. \quad (31)$$

Неравенство (31) представляет собой искомое ограничение для первой производной при $t = 0$. Аналогичное рассуждение позволяет получить ограничение и для более высоких производных амплитуды (при условии $n \ll L$)

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} \operatorname{Im} f(s, t) |_{t=0} &= \frac{16\pi}{s^n} \sum_l (2l+1) \frac{(l+n)!}{n!(l-n)!} \operatorname{Im} a_l \geq \\ &\geq \frac{16\pi}{s^n (n+1)!} L^{2(n+1)} = s\sigma \left(\frac{\sigma}{16\pi} \right)^n \frac{1}{(n+1)!}. \end{aligned} \quad (32)$$

СПИСОК НАУЧНЫХ РАБОТ

1936—1941

- О свойствах металлов при очень низких температурах. Совм. с Л. Ландау. ЖЭТФ, 1937, 7, 379; Phys. Zs. Sowjet., 1936, 10, 649.
- Рассеяние света светом. Совм. с А. И. Ахиезером и Л. Ландау, Nature, 1936, 138, 206.
- Когерентное рассеяние γ -лучей ядрами. Совм. с А. И. Ахиезером. ЖЭТФ, 1937, 7, 567; Phys. Zs. Sowjet., 1936, 10, 649.
- О рассеянии медленных нейтронов в кристаллической решетке. ЖЭТФ, 1937, 8, 894. Phys. Zs. Sowjet., 1938, 13, 65. ✓
- Критическое поле у сверхпроводников малых размеров. ЖЭТФ, 1938, 8, 1096. Максимальная энергия, которую могут иметь на поверхности земли первичные электроны космических лучей из-за излучения в земном магнитном поле. ЖЭТФ, 1939, 9, 915; J. Phys. USSR, 1940, 2, 65.
- О влиянии магнитного поля на электропроводность монокристаллов висмута при низких температурах. Совм. с Б. Давыдовым. ЖЭТФ, 1939, 9, 1294; J. Phys. USSR, 1940, 2, 147.
- О конце трека мезотрона в камере Вильсона. Совм. с А. Мигдалом. ДАН СССР, 1940, 27, 652; Phys. Rev., 1940, 57, 934.
- Теплопроводность парамагнитных диэлектриков при низких температурах. ЖЭТФ, 1941, 11, 226; J. Phys. USSR, 1941, 4, 356.
- О теплопроводности диэлектриков при температурах больше дебаевской. ЖЭТФ, 1941, 11, 246; J. Phys. USSR, 1941, 4, 259.
- О поглощении звука в диэлектрике. ЖЭТФ, 1941, 11, 455; J. Phys. USSR, 1941, 4, 529.
- Рождение мезонных пар при аннигиляции позитрона. J. Phys. USSR, 1941, 4, 277. ✓
- Рассеяние мезонов мезонами. J. Phys. USSR, 1941, 4, 277. ✓
- Ядерные реакции внутри звезд. J. Phys. USSR, 1941, 4, 285.
- Теплопроводности диэлектриков. Phys. Rev., 1941, 60, 820.

1942—1946

- О теплопроводности диэлектриков при температурах меньших дебаевской. ЖЭТФ, 1942, 12, 245; J. Phys. USSR, 1942, 6, 237.
- Теплопроводность диэлектриков при высоких температурах. ЖЭТФ, 1942, 12, 419; J. Phys. USSR, 1943, 7, 197.
- Зависимость поглощения звука в диэлектрике от частоты и температуры. J. Phys. USSR, 1943, 7, 266.
- Кулоновские силы и строение нейтрона. ДАН СССР, 1943, 41, 162.
- Спектр мягкой компоненты в воздухе при больших энергиях. Совм. с А. Кирпичевым. ДАН СССР, 1943, 41, 19.

- К теории переходных эффектов в космических лучах. Совм. с А. Кирпичевым. ДАН СССР, 1944, 42, 396.
- К теории поглощения инфракрасных лучей в кристаллах, обладающих центром симметрии. ЖЭТФ, 1943, 13, 428; J. Phys. USSR, 1943, 7, 262.
- Экранирование эффективных сечений для тормозного излучения и образования пар с помощью экспериментальных значений атомформфактора. Совм. с А. Кирпичевым. ДАН СССР, 1944, 45, 301.
- Рассеяние мезонов, сильно взаимодействующих с нуклонами. ДАН СССР, 1944, 44, 13.
- О теплопроводности солей в методе магнитного охлаждения. Совм. с А. Ахиезером. J. Phys. USSR, 1944, 8, 216.
- О тепловом равновесии между спинами и решеткой. Совм. с А. Ахиезером. ЖЭТФ, 1944, 14, 342; J. Phys. USSR, 1944, 8, 206.
- К интерпретации экспериментальных данных о больших лавинных ливнях. ЖЭТФ, 1944, 14, 252; J. Phys. USSR, 1944, 8, 17.
- Излучение быстрых электронов в магнитном поле. Совм. с А. Арцимовичем. ЖЭТФ, 1946, 16, 379; J. Phys. USSR, 1945, 9, 267.
- О максимальной энергии, достижимой в бетатроне. Совм. с Д. Д. Иваненко. ДАН СССР, 1944, 44, 343.
- Об уровнях энергии систем с $Z > 137$. Совм. с Я. Смородинским. J. Phys. USSR, 1945, 9, 97.
- О теплопроводности висмута. Совм. с А. Ахиезером. ЖЭТФ, 1945, 15, 587.
- Об упругом рассеянии ядрами быстрых заряженных частиц. Совм. с А. Ахиезером. ЖЭТФ, 1946, 16, 396; J. Phys. USSR, 1945, 9, 471.
- О рассеянии нейтронов с энергией несколько градусов в жидком гелии II. Совм. с А. Ахиезером. ЖЭТФ, 1946, 16, 391; J. Phys. USSR, 1945, 9, 461.
- Излучение релятивистских электронов в магнитном поле. Изв. АН СССР, серия физическая, 1946, 10, 316.

1947—1951

- О рассеянии медленных нейтронов в кристаллах. Совм. с А. Ахиезером. ЖЭТФ, 1947, 17, 769; J. Phys. USSR, 1947, 11, 167.
- Обобщение предельного λ -процесса и неоднозначность в устранении бесконечностей квантовой теории элементарных частиц. ЖЭТФ, 1947, 17, 667; Phys. Rev., 1949, 76, 298.
- К теории резонансного рассеяния частиц. Совм. с А. Ахиезером. ЖЭТФ, 1948, 18, 603.
- О рефракции нейтронов. Совм. с А. Ахиезером. ЖЭТФ, 1948, 18, 475.
- О движении посторонних частиц в гелии II. Совм. с Л. Д. Ландау. ДАН СССР, 1948, 59, 669.
- О флуктуациях ионизационных пробегов. ЖЭТФ, 1948, 18, 759.
- Введение в теорию нейтронных мультиплицирующих систем (реакторов). Совм. с А. И. Ахиезером. Отчет ИТЭФ, М., 1947 (См. Собр. Трудов, № 27).
- Правила отбора при аннигиляции электронов и позитронов. ДАН СССР, 1948, 60, 213.
- Некоторые вопросы теории ядра. Совм. с А. Ахиезером. М., Гостехиздат, 1948, 1950.
- Влияние примесей на термодинамические свойства и скорость второго звука в гелии II. ЖЭТФ, 1949, 19, 42.
- Замечание о рассеянии частиц с нулевой энергией. ЖЭТФ, 1948, 18, 1146.
- Время жизни медленных позитронов. ЖЭТФ, 1949, 19, 183.
- Излучение при столкновении быстрых нейтронов с протонами. Совм. с И. М. Шмушкевичем. ДАН СССР, 1949, 64, 499.
- К определению неэлектромагнитного взаимодействия между электронами и нейтронами. Совм. с А. И. Ахиезером. ЖЭТФ, 1949, 19, 558.
- О β -распаде нейтрона. Совм. с В. Б. Берестецким. ЖЭТФ, 1949, 19, 756.
- Электромагнитное излучение под действием обменных сил. Совм. с И. Шмушкевичем. ДАН СССР, 1950, 70, 33.
- К теории жидкого He^3 . ЖЭТФ, 1950, 20, 919.

- Обменные столкновения быстрых нуклонов с дейтронами I. ЖЭТФ, 1951, 21, 1113.
- Обменные столкновения быстрых нуклонов с дейтронами. ДАН СССР, 1951, 78, 249.
- О превращении заряженного π -мезона в нейтральный мезон при столкновении с протоном и дейт-зоном. Совм. с В. Б. Берестецким. ДАН СССР, 1951, 77, 803; ЖЭТФ, 1951, 21, 1313.
- К теории образования многих частиц в одном акте. ДАН СССР, 1951, 78, 889.
- Захват π -частиц в дейтроне. ДАН СССР, 1951, 80, 47.
- О столкновении π -мезонов с дейтроном. Совм. с В. Б. Берестецким. ДАН СССР, 1951, 81, 1019.
- Теплопроводность полностью ионизированного газа при высоких температурах. Совм. с В. Б. Берестецким и Б. Л. Иоффе, 1951 (Собр. Трудов, т. 1, стр. 345).

1952—1956

- К теории захвата π -частиц в дейтроне. ЖЭТФ, 1952, 22, 129.
- Обменные столкновения быстрых нуклонов с дейтронами II. ЖЭТФ, 1952, 22, 624.
- Об электронах, образующихся при захвате μ -мезонов на атомные уровни. Совм. с Б. Л. Иоффе. ЖЭТФ, 1952, 23, 123.
- О спектре μ -мезоводорода. Совм. с А. Д. Галаниным. ДАН СССР, 1952, 86, 251.
- Об испускании γ -квантов больших энергий при столкновении быстрых нейтронов с протонами. Совм. с И. М. Шмушкевичем. ДАН СССР, 1952, 87, 385.
- О парамагнитной дисперсии. Совм. с А. И. Ахиезером. ДАН СССР, 1952, 87, 917.
- Излучение γ -квантов при столкновении быстрых π -мезонов с нуклонами. Совм. с Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 1953, 24, 505; CERN Symposium, 1956, v. 2, p. 159.
- О внешней (дифракционной) генерации частиц при ядерных столкновениях. Совм. с Е. Л. Фейнбергом. ДАН СССР, 1953, 93, 439.
- Пределы применимости теории тормозного излучения электронов и образования пар при больших энергиях. Совм. с Л. Д. Ландау. ДАН СССР, 1953, 92, 535.
- Электронно-лавинные процессы при сверхвысоких энергиях. Совм. с Л. Д. Ландау. ДАН СССР, 1953, 92, 735.
- Излучение фотона, сопровождающееся захватом быстрого протона ядром. Совм. с А. И. Ахиезером. ДАН СССР, 1954, 94, 821.
- Перенормировка массы и заряда в ковариантных уравнениях квантовой теории поля. Совм. с А. Д. Галаниным и Б. Л. Иоффе. ДАН СССР, 1954, 98, 361.
- Полуфеноменологическая теория образования π -мезонных пар γ -квантами больших энергий. ДАН СССР, 1954, 96, 265.
- Образование π -мезонных пар γ -квантами в случае тяжелых ядер. ДАН СССР, 1954, 96, 481.
- Об асимптотике функций Грина нуклона и мезона в псевдоскалярной теории со слабым взаимодействием. Совм. с А. Д. Галаниным и Б. Л. Иоффе. ЖЭТФ, 1955, 29, 51.
- Обобщение теоремы Уорда на случай конечных длин волн света у частиц со спином 0. ДАН СССР, 1955, 100, 41.
- О точечном взаимодействии в квантовой электродинамике. Совм. с Л. Д. Ландау. ДАН СССР, 1955, 102, 489.
- Об излучении γ -квантов, сопровождающемся поглощением быстрых протонов ядрами. Совм. с А. И. Ахиезером. ЖЭТФ, 1956, 30, 201.
- Равенство нулю перенормированного заряда в квантовой электродинамике. ДАН СССР, 1955, 103, 1005.
- О перенормировке мезонного заряда в псевдоскалярной теории с псевдоскалярной связью. ДАН СССР, 1955, 104, 51.

- Об обращении в нуль перенормированного мезонного заряда в псевдоскалярной теории с псевдоскалярной связью. ДАН СССР, 1955, 105, 461.
- Решение уравнений псевдоскалярной мезонной теории с псевдоскалярной связью. ЖЭТФ, 1955, 29, 869.
- Образование μ -мезонной пары при аннигиляции позитрона. Совм. с В. Б. Берестецким. ЖЭТФ, 1955, 29, 869.
- Равенство нулю перенормированного заряда в электродинамике и в мезонной теории. Nuovo Cim., 1956, 3, 1186.
- Изотопическая инвариантность и рассеяние антинуклонов нуклонами. ЖЭТФ, 1956, 30, 423.
- Изотопическая инвариантность и сечения взаимодействия π -мезонов и нуклонов высокой энергии с нуклонами. Совм. с Л. Б. Окунем. ЖЭТФ, 1956, 30, 424.
- Теория резонансного поглощения в гетерогенных системах. Совм. с И. И. Гуревичем. Международная конференция по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1955, Изд-во АН СССР, 1955, стр. 557.
- Равенство нулю перенормированного заряда в теориях поля с точечным взаимодействием. Совм. с В. В. Судаковым и К. А. Тер-Мартirosяном. Phys. Rev., 1956, 103, 784.
- Корреляционные явления при захвате K -мезонов. Совм. с В. Б. Берестецким. ЖЭТФ, 1956, 31, 350.
- Дисперсионные соотношения для рассеяния π -мезонов на дейтронах. Совм. с Б. Л. Иоффе и А. П. Рудиком. ЖЭТФ, 1956, 31, 712.
- О числе различных типов K -мезонов. Совм. с Б. Л. Иоффе и Л. Б. Окунем. Nucl. Phys., 1956—1957, 2, 277.
- Замечание о числе различных типов K -мезонов. Nucl. Phys., 1956—1957, 2, 281.
- Неупругие дифракционные процессы при высоких энергиях. Совм. с Е. Л. Фейнбергом. Nuovo Cim., 1956, 3, Suppl. N 4, 652.

1957—1961

- О возможном дипольном моменте перехода у Λ -частиц. Совм. с Б. Л. Иоффе. ДАН СССР, 1957, 113, 1251.
- Равенство подных сечений взаимодействия нуклонов и антинуклонов при больших энергиях. ЖЭТФ, 1958, 34, 725.
- О взаимодействиях E -гиперонов с нуклонами и легкими ядрами. Совм. с Л. Б. Окунем и И. М. Шмушкевичем. ЖЭТФ, 1958, 34, 1246.
- Об определении четности K -мезона. Совм. с Л. Б. Окунем. ЖЭТФ, 1958, 34, 997.
- О возможности формулировки теории сильно взаимодействующих фермионов. Совм. с А. А. Абрикосовым, А. Д. Галаниным, Л. П. Горьковым, Л. Д. Ландау и К. А. Тер-Мартirosяном. Phys. Rev., 1958, 111, 321.
- Дифракционные явления при столкновениях быстрых частиц с ядрами. Совм. с А. И. Ахизером. УФН, 1958, 55, 593.
- Функции Грина в мезонных теориях. Совм. с А. А. Абрикосовым, А. Д. Галаниным, Б. Л. Иоффе и И. М. Халатниковым. Nuovo Cim., 1958, 8, 782.
- Об устойчивости фермиевской жидкости. ЖЭТФ, 1958, 35, 524.
- Изотопический эффект в остаточном электрическом сопротивлении металлов. ЖЭТФ, 1958, 35, 992.
- О взаимодействии между электронами проводимости в ферромагнетитах. Совм. с А. И. Ахизером. ЖЭТФ, 1959, 36, 859.
- О периферийных взаимодействиях элементарных частиц. Совм. с Л. Б. Окунем. ЖЭТФ, 1959, 36, 300; Nucl. Phys., 1959, 10, 492.
- β -взаимодействие и формфактор нуклона. Совм. с В. Б. Берестецким. ЖЭТФ, 1959, 36, 1321.
- О столкновении нуклонов с большими орбитальными моментами. Совм. с А. Д. Галаниным, А. Ф. Грашиным и Б. Л. Иоффе. ЖЭТФ, 1959, 37, 1663; Nucl. Phys., 1960, 17, 181.

- Рассеяние нуклона на нуклоне в двухмезонном приближении при больших орбитальных моментах. Совм. с А. Д. Галаниным, А. Ф. Грашиным и Б. Л. Иоффе. ЖЭТФ, 1960, 38, 475.
- О пределах применимости теории переходного излучения. Совм. с Г. М. Гарибьяном. ЖЭТФ, 1959, 37, 1828.
- Об асимптотической зависимости сечений при больших энергиях. Совм. с В. Б. Берестецким. ЖЭТФ, 1960, 39, 1078; Nucl. Phys., 1961, 22, 629.
- К теории рассеяния медленных нейтронов в ферми-жидкости. Совм. с А. И. Ахизером и И. А. Ахизером. ЖЭТФ, 1961, 41, 644.
- О процессах взаимодействия γ -квантов с нестабильными частицами. Совм. с И. М. Шмушкевичем. Nucl. Phys., 1961, 23, 452.
- Фазовый анализ $p - p$ -рассеяния при энергии 95 Мэв. Совм. с В. А. Боровиковым, И. М. Гельфандом и А. Ф. Грашиным. ЖЭТФ, 1961, 40, 1106.
- Об электромагнитном взаимодействии нейтрального векторного мезона. Совм. с И. Ю. Кобзаревым и Л. Б. Окунем. ЖЭТФ, 1961, 41, 495.
- Об образовании пучков π -мезонов большой энергии. Совм. с Ю. П. Никитиным и И. М. Шмушкевичем. ЖЭТФ, 1961, 41, 963.

1962—1966

- Асимптотическое поведение процессов аннигиляции и упругого рассеяния при высоких энергиях. Совм. с В. Н. Грибовым. Nucl. Phys., 1962, 33, 516; Internat. Conf. on Theoretical Aspects of Very High Energy Phenomena, CERN, 1961, p. 376; Препринт ИТЭФ — 61—15, Москва, 1961.
- Комплексные орбитальные моменты и соотношения между сечениями различных процессов при высоких энергиях. Совм. с В. Н. Грибовым. ЖЭТФ, 1962, 42, 1141; Phys. Rev. Lett., 1962, 8, 343.
- О некоторых свойствах амплитуды упругого рассеяния при больших энергиях. Совм. с В. Н. Грибовым. ЖЭТФ, 1962, 43, 308; Nucl. Phys., 1962, 38, 516.
- Некоторые следствия из гипотезы движущихся полюсов для процессов при больших энергиях. Совм. с В. Н. Грибовым, Б. Л. Иоффе и А. П. Рудиком. ЖЭТФ, 1962, 42, 1419.
- О рассеянии медленных нейтронов в ферми-жидкости. Совм. с А. И. Ахизером. Nucl. Phys., 1963, 40, 139.
- Спиновая структура амплитуд мезон-нуклонного и нуклон-нуклонного рассеяния при высоких энергиях. Совм. с В. Н. Грибовым. ЖЭТФ, 1962, 42, 1682; Phys. Rev. Lett., 1962, 8, 412.
- Полуса Редже и особенности Ландау. Совм. с В. Н. Грибовым. ЖЭТФ, 1962, 43, 1970; Phys. Rev. Lett., 1962, 9, 238; Proc. Int. Conf. High Energy Phys. Geneva, 1962, p. 543.
- Ограничение скорости убывания амплитуд различных процессов. Совм. с В. Н. Грибовым. ЖЭТФ, 1962, 43, 1556; Phys. Lett., 1962, 2, 239; Proc. Int. Conf. High Energy Phys. Geneva, 1962, p. 522.
- О процессах, определяемых фермионными полюсами Редже. Совм. с В. Н. Грибовым и Л. Б. Окунем. ЖЭТФ, 1963, 45, 114.
- Особенности парциальных волн вблизи $j = 1$ и поведение амплитуды упругого рассеяния при высоких энергиях. Совм. с В. Н. Грибовым и К. А. Тер-Мартirosяном. Phys. Lett., 1964, 9, 269.
- Замечание к работе «Особенности парциальных волн вблизи $j = 1$ и поведение амплитуды упругого рассеяния при высоких энергиях». Совм. с В. Н. Грибовым и К. А. Тер-Мартirosяном. Phys. Lett., 1964, 12, 153.
- Некоторые следствия из унитарной симметрии для процессов с участием ω -, ϕ - и f^0 -мезонов. Совм. с В. Л. Иоффе и И. Ю. Кобзаревым. ЖЭТФ, 1965, 48, 375.
- Двигающиеся ветвления в j -плоскости и реджионные условия унитарности. Совм. с В. Н. Грибовым и К. А. Тер-Мартirosяном, ЯФ, 1965, 2; 361; Phys. Rev., 1965, 139, 184; «Вопросы физики элементарных частиц»,

Ереван, 1964, стр. 167; «XII Международная конф. по физ. высоких энергий». Атомиздат, 1966, т. I, стр. 363.

Структура j -плоскости вблизи $j=1$ и дифракционное рассеяние при высоких энергиях. Совм. с В. Н. Грибовым и К. А. Тер-Мартirosяном. Препринт ИТЭФ № 238, Москва, 1964.

«Теневая Вселенная» и нейтринный опыт. Совм. с Л. Б. Окунем. Письма ЖЭТФ, 1965, 1, 28; Phys. Lett., 1965, 16, 338.

Электромагнитные разности массбарионов и $SU(6)$ -симметрия. Совм. с А. Д. Долговым, Л. Б. Окунем и В. В. Соловьевым. Ядерная физика, 1965, 1, 730; Phys. Lett., 1965, 15, 84.

На каких расстояниях происходит взаимодействие при высоких энергиях? Совм. с В. Н. Грибовым и Б. Л. Иоффе. Ядерная физика, 1965, 2, 768.

О возможности экспериментального обнаружения зеркальных частиц. Совм. с И. Ю. Кобзаревым и Л. Б. Окунем. Ядерная физика. 1966, 3, 1154.

О полном сечении аннигиляции электронно-позитронных пар в адроны при высоких энергиях. Совм. с В. Н. Грибовым и Б. Л. Иоффе. Ядерная физика, 1967, 6, 587.

Формула Орира как следствие ветвлений в j -плоскости (собр. трудов, № 122).

Ограничение на скорость роста сечений слабых взаимодействий. Ядерная физика, 1970, 11, 852.

СОДЕРЖАНИЕ

I

ПЕРИФЕРИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

80. Излучение при столкновении быстрых нейтронов с протонами (Совместно с И. М. Шмушкевичем). 1949	5
81. Электромагнитное излучение под действием обменных сил. (Совместно с И. М. Шмушкевичем). 1950	9
82. Обменные столкновения быстрых нуклонов с дейтронами. I 1951	14
83. Обменные столкновения быстрых нуклонов с дейтронами. 1951	26
84. О превращении заряженного π -мезона в нейтральный мезон при столкновении с протоном и дейтроном. (Совместно с В. Б. Берестецким). 1951.	28
85. К теории захвата π -частиц в дейтроне. 1952.	37
86. Захват π -частиц в дейтроне. 1951.	45
87. Обменные столкновения быстрых нуклонов с дейтронами. II. 1952	47
88. О столкновениях π -мезонов с дейтроном. (Совместно В. Б. Берестецким). 1951	51
89. Об испускании γ -квантов большой энергии при столкновениях быстрых нейтронов с протонами. (Совместно с И. М. Шмушкевичем). 1952.	54
90. Дисперсионные соотношения для рассеяния π -мезонов на дейтронах. (Совместно с Б. Л. Иоффе и А. П. Рудиком). 1956.	58
91. О периферийных взаимодействиях элементарных частиц. (Совместно с Л. Б. Окунем). 1959.	61
92. О столкновении нуклонов с большими орбитальными моментами. (Совместно с А. Д. Галаниным, А. Ф. Грашиным и Б. Л. Иоффе). 1959.	78
93. Рассеяние нуклона на нуклоне в двухмезонном приближении при больших орбитальных моментах. (Совместно с А. Д. Галаниным, А. Ф. Грашиным и Б. Л. Иоффе). 1960.	99
94. О процессах взаимодействия γ -квантов с нестабильными частицами. (Совместно с И. М. Шмушкевичем). 1961.	116
95. Об образовании пучков π -мезонов большой энергии. (Совместно с Ю. П. Никитиным и И. М. Шмушкевичем). 1961.	133

ДИФРАКЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

96. Об упругом рассеянии ядрами быстрых заряженных частиц. (Совместно с А. Ахиезером). 1945.	141
97. Излучение γ -квантов при столкновении быстрых π -мезонов с нуклонами. (Совместно с Л. Д. Ландау). 1953.	149
98. О внешней (дифракционной) генерации частиц при ядерных столкновениях. (Совместно с Е. Л. Фейнбергом). 1953.	162
99. Излучение фотона, сопровождающееся захватом быстрого протона ядром. (Совместно с А. И. Ахиезером). 1954.	166
100. Полуфеноменологическая теория образования π -мезонных пар γ -квантами больших энергий. 1954.	170
101. Образование π -мезонных пар γ -квантами в случае тяжелых ядер. 1954.	175
102. Об излучении γ -квантов, сопровождающемся поглощением быстрых протонов ядрами. (Совместно с А. И. Ахиезером). 1956.	178
103. Неупругие дифракционные процессы при высоких энергиях. (Совместно с Е. Л. Фейнбергом). 1956.	181
104. Дифракционные явления при столкновениях быстрых частиц с ядрами. (Совместно с А. И. Ахиезером). 1958.	201

СИЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ПРИ АСИМПТОТИЧЕСКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

105. К теории образования частиц в одном акте. 1951.	248
106. Изотопическая инвариантность и рассеяние антинуклонов нуклонами. 1956.	252
107. Изотопическая инвариантность и сечения взаимодействия π -мезонов и нуклонов высокой энергии с нуклонами. (Совместно с Л. Б. Окунем). 1956.	254
108. Равенство полных сечений взаимодействия нуклонов и антинуклонов при больших энергиях. 1958.	256
109. Об асимптотической зависимости сечений при больших энергиях. (Совместно с В. Б. Берестецким). 1960.	261
110. Асимптотическое поведение процессов аннигиляции и упругого рассеяния при высоких энергиях. (Совместно с В. Н. Грибовым). 1962.	272
111. Комплексные орбитальные моменты и соотношения между сечениями различных процессов при высоких энергиях. (Совместно с В. Н. Грибовым). 1962.	281
112. О некоторых свойствах амплитуды упругого рассеяния при больших энергиях. (Совместно с В. Н. Грибовым). 1962.	285
113. Некоторые следствия из гипотезы движущихся полюсов для процессов при больших энергиях. (Совместно с В. Н. Грибовым, Б. Л. Иоффе и А. П. Рудиком). 1962.	299

114. Спиновая структура амплитуд мезон-нуклонного и нуклон-нуклонного рассеяния при высоких энергиях. (Совместно с В. Н. Грибовым). 1962.	303
115. Полюса Редже и особенности Ландау. (Совместно с В. Н. Грибовым). 1962.	307
116. Ограничение скорости убывания амплитуд различных процессов. (Совместно с В. Н. Грибовым). 1962.	315
117. О процессах, определяемых фермионными полюсами Редже. (Совместно с В. Н. Грибовым и Л. Б. Окунем). 1963.	320
118. Особенности парциальных волн вблизи $j = 1$ и поведение амплитуды упругого рассеяния при высоких энергиях. (Совместно с В. Н. Грибовым и К. А. Тер-Мартirosяном). 1964.	333
119. Двигающиеся ветвления в j -плоскости и реджеонные условия унитарности. (Совместно с В. Н. Грибовым и К. А. Тер-Мартirosяном). 1965.	341
120. На каких расстояниях происходит взаимодействие при высоких энергиях? (Совместно с В. Н. Грибовым и Б. Л. Иоффе). 1965.	381
121. О полном сечении аннигиляции электронно-позитронных пар в адроны при высоких энергиях. (Совместно с В. Н. Грибовым и Б. Л. Иоффе). 1966.	392
122. Формула Орира как следствие ветвлений в j -плоскости. 1966.	398
123. Ограничение на скорость роста сечений слабых взаимодействий. 1966.	403

Список научных работ	411
--------------------------------	-----

96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200

ИСААК ЯКОВЛЕВИЧ ПОМЕРАНЧУК

Собрание научных трудов

Том III

Физика элементарных частиц
Сильные взаимодействия

*Утверждено к печати
Отделением ядерной физики
Академии наук СССР*

Редактор Л. А. Кондратьев
Редактор издательства Л. В. Кудрявцева
Художественный редактор Н. Н. Власик
Технический редактор Л. Н. Золотухина

Сдано в набор 25/II-1972 г. Подписано к печати 23/VI 1972 г.

Формат 60×90^{1/16}. Бумага № 1. Усл. печ. л. 26,57.

Уч.-изд. л. 26,94. Тираж 2700. Тип. зак. 395. Т-13651

Цена 2 р. 12 к.

Издательство «Наука», 103717 ГСП,
Москва К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука»,
Москва Г-99, Шубинский пер., 10