

Центральное здание ИТЭФ

В этом здании в кабинете
И.Я.Померанчука (второе окно
слева на 2-ом этаже) в 1947 г.
была написана эта книга.

A.I.Akhiezer and I.Ya. Pomeranchuk

Introduction into the theory
of neutron multiplying
systems (reactors)

Edited by Correspondent Member of the
Russian Academy of Sciences B.L.Ioffe
and Doctor of Technical Sciences A.S.Gerasimov

Moscow
IздАТ
2002

А.И.Ахиезер и И.Я.Померанчук

Введение в теорию нейтронных
мультиплицирующих систем
(реакторов)

Под редакцией члена-корреспондента РАН Б.Л.Иоффе
и доктора технических наук А.С.Герасимова

Москва
ИздАТ
2002



Исаак Яковлевич Померанчук



Александр Ильич Ахиезер

УДК 621.039.5

ББК 31.4

А 95

A 95 Александр Ильич Ахиезер и Исаак Яковлевич Померанчук
**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ НЕЙТРОННЫХ
МУЛЬТИПЛИЦИРУЮЩИХ СИСТЕМ (РЕАКТОРОВ)**
Под редакцией члена-корреспондента РАН Б.Л.Иоффе
и доктора технических наук А.С.Герасимова.
М., ИздАТ, 2002 — 368 с.

ISBN 5-86656-125-5

В книге изложены основы теории ядерных реакторов. Особое внимание удалено анализу используемых приближений, а также получению точных решений уравнений для замедления и распространения нейтронов. Авторы книги — выдающиеся советские ученые, крупнейшие специалисты в области ядерной физики, физики элементарных сред. Книга была написана в 1947 году и являлась первым руководством по теории ядерных реакторов в СССР, но не потеряла своей научной ценности до сих пор. Публикуется впервые.

Книга будет весьма полезна для инженеров, физиков и студентов, специализирующихся в области атомной энергетики и реакторостроения, а также для историков науки, как материал, характеризующий историю советского атомного проекта.

УДК 621.039.5
ББК 31.4

ISBN 5-86656-125-5

© Авторы, 2002
© Оформление ИздАТ, 2002

Оглавление

Предисловие редакторов	11
Глава I. Диффузия и замедления нейтронов	14
§1. Основное интегральное уравнение.	14
§2. Функция распределения в импульсном пространстве.	18
§3. Средний квадрат длины замедления нейтронов.	25
§4. Средний квадрат длины замедления для замедлителя, содержащего водород.	35
§5. Пространственное распределение нейтронов в диффузационной области.	42
§6. Граничные условия для быстрых нейтронов.	58
§7. Поле замедляющихся нейтронов.	59
§8. Поле тепловых нейтронов.	70
§9. Уравнение для тепловых нейтронов при наличии мультиплексии.	89
§10. Поле тепловых нейтронов в призме с мультиплексией (теория экспоненциальных опытов).	94
Глава II. Критические размеры однородных систем	100
§11. Основные соотношения.	100
§12. Критические размеры неизолированных мультиплексирующих систем.	112
§13. Примеры определения критических размеров изолированных и неизолированных систем.	122
§14. Критические размеры сложных систем.	142
§15. Регулирующие стержни.	155
§16. Малые возмущения мультиплексирующих систем.	163
§17. Граничные условия с учетом конечной длины замедления нейтронов.	174
§18. Общий приближенный метод определения критических размеров мультиплексирующих систем (метод многих групп).	192
§19. Критерий применимости метода многих групп.	201
§20. Пример определения критических размеров при реакции на быстрых нейтронах.	204

Contents

Глава III. Резонансное поглощение	211
§21. Основное интегральное уравнение.	211
§22. Резонансное поглощение в однородной системе с замедлителем, содержащим водород.	214
§23. Учет эффекта Допплера.	222
§24. Асимптотическое решение основного уравнения.	229
§25. Резонансное поглощение в однородной системе с неводородным замедлителем.	239
§26. Малые блоки.	244
Глава IV. Неоднородные системы	257
§27. Теория бесконечной решетки. Выбор оптимальных параметров.	257
§28. Усредненные уравнения.	277
§29. Большие блоки.	286
§30. Отклонения от диффузионности.	293
Глава V. Кинетика и температурный коэффициент реактора	301
§31. Глубина выработки активного изотопа.	301
§32. Замечания о влиянии температуры на работу реактора.	302
§33. Кинетика цепной реакции.	307
Глава VI. Точные решения кинетического уравнения в случае плоской границы двух сред	317
§34. Альбедо нейтронов от плоской границы.	317
§35. Условия на плоской границе с вакуумом.	335
Математическое приложение	341
§36. Однородное интегро-дифференциальное уравнение.	341
§37. Уравнение Винера-Гопфа.	351
§38. Исследование общего уравнения.	353
§39. Неоднородное интегро-дифференциальное уравнение.	361
Литература	366

Editors Foreword

Chapter I. Diffusion and slowing-down of neutrons	14
§1. Basic integral equation.	14
§2. Distribution function in momentum space.	18
§3. Mean square of neutron slowing-down length .	25
§4. Mean square of slowing-down length for hydrogen containing moderator.	35
§5. Space distribution of neutrons in diffusion case.	42
§6. Boundary conditions for fast neutrons .	58
§7. Field of slowing-down neutrons.	59
§8. Field of thermal neutrons.	70
§9. Equation for thermal neutrons with multiplications.	89
§10. Field of thermal neutrons in prism with multiplication (the theory of exponential experiment).	94
Chapter II. Critical dimensions of homogeneous systems	100
§11. Basic relations.	100
§12. Critical dimensions of nonisolated multiplicating systems.	112
§13. Examples of calculation of critical dimensions of isolated and nonisolated systems.	122
§14. Critical dimensions of complex systems.	142
§15. Control rods.	155
§16. Small perturbations of multiplication systems.	163
§17. Boundary conditions with account of finite neutron slowing-down length.	174
§18. General approximate calculation method of critical dimensions of multiplicating systems (many groups method).	192
§19. Criteria of applicability of many groups method.	201
§20. Example of calculation of critical dimensions for fast neutron reactor.	204

Chapter III. Resonance absorption	
§21. Basic integral equation.	211
§22. Resonance absorption in homogeneous system with hydrogen containing moderator.	211
§23. Account of Doppler effect.	214
§24. Asymptotic solution of the basic equation.	222
§25. Resonance absorption in homogeneous system with nonhydrogen moderator.	229
§26. Small blocks.	239

Chapter IV. Nonhomogeneous systems

§27. Theory of infinite lattice. The choice of optimal parameters.	257
§28. Averaged equations.	277
§29. Large blocks.	286
§30. Deviations from diffusion law.	293

Chapter V. Kinetics and temperature coefficient of a reactor

§31. Depth of burning of active nuclide.	301
§32. Notes on the temperature effect on the reactor operation.	301
§33. Kinetics of the chain reaction.	302

Chapter VI. Exact solutions of kinetic equation for the case of flat boundary of two media

§34. Neutrons Albedo in case of flat boundary.	317
§35. Conditions at the flat boundary with vacuum.	317

Mathematical appendix

§36. Uniform integral-differential equation.	341
§37. Wiener-Hopf equation.	341
§38. Investigation of general equation.	351
§39. Nonuniform integral-differential equation.	353

References

211
211
214
222
229
239
244
257
257
277
286
293
301
301
302
307
317
317
335
341
341
351
353
361
366

Предисловие редакторов

Предлагаемая книга представляет собой последовательное и достаточно полное изложение основ теории ядерных реакторов. Книга была написана в 1946–1947 гг. в Лаборатории № 3 (ныне Институт Теоретической и Экспериментальной Физики – ИТЭФ) и являлась первой не только в СССР, но и в мире книгой, в которой теория ядерных реакторов была бы изложена систематически и на высоком теоретическом уровне. В соответствующей по тематике книге, изданной в США в конце 1947 г. (The Science and Engineering of Nuclear Power, v. I, II, edited by Clark Goodman, MIT, 1947*), теория ядерных реакторов дана на элементарном уровне, а ряд сложных и тонких вопросов теории не рассмотрен вовсе. И даже в более поздних американских изданиях – книгах Судэка и Кэмпбелла, Глесстона и Эдлунда и Вайнберга и Вигнера, изданных соответственно в 1950, 1952 и 1956 гг. (см. список литературы) не был достигнут тот высокий теоретический уровень, который характерен для книги Ахиезера и Померанчука.

В частности, это относится к теории резонансного поглощения, созданной И.И.Гуревичем и И.Я.Померанчуком в 1943 году. В США в использовавшейся в 40-ые и 50-ые годы теории ядерных реакторов резонансное поглощение в цилиндрических блоках вычислялось на основе предложенной Вигнером формулы, описывающей известные тогда экспериментальные данные. В отличие от формулы Вигнера, теория Гуревича – Померанчука была настоящей физической теорией, что позволило в дальнейшем проводить ее уточнение и расширение (например, учет влияния эффекта Допплера, обобщение на случай блоков с замедлителем внутри). Другие вопросы, которые впервые были рассмотрены в книге Ахиезера и Померанчука, – это теория распространения нейтронов на основе точного кинетического уравнения, чему в книге удалено много внимания, и теория гетерогенного реактора.

В популярной литературе часто можно встретить утверждение, что советский атомный проект удалось реализовать

* Русский перевод: Научные и технические основы ядерной энергетики, под редакцией К.Гудмена, т. I, 1948, т. II, 1949, ГИИЛ, Москва.

благодаря информации, которая поступала из-за рубежа, из США, Англии и Канады через разведку. Книга Ахиезера и Померанчука доказывает, что в построении теории ядерных реакторов это было не так.

После своего написания в 1947 г. (точнее, в его процессе) книга была засекречена и хранилась в секретных архивах в 2–3 экземплярах в виде рукописи, частично отпечатанной на машинке, частично написанной от руки. Книга была рассекречена в 60-ые годы. Однако, к этому времени авторы утеряли к ней интерес, не стали ее опубликовывать, и книга затерялась в архивах. Недавно, одному из нас (Б.И.) удалось найти ее в архиве ИТЭФ. Мотивы для опубликования книги с полувековым запозданием таковы:

1. Первый мотив очевиден: книга, написанная двумя выдающимися физиками–теоретиками на заре атомной эры, представляет бесспорный исторический интерес, как для истории атомного проекта и истории физики, так и в свете биографий этих выдающихся ученых.

2. Книга сильно отличается от существующих монографий по теории ядерных реакторов. Теория ядерных реакторов рассматривается с позиций теоретической физики: много внимания уделено условиям применимости того или иного приближения, анализу возникающих неопределенностей. Авторы виртуозно используют аналитические методы решения задач (например, метод Винера–Хопфа для решения кинетического уравнения).

3. Нам представляется, что книга будет очень полезна для молодых людей, приступающих к изучению этого предмета (а, впрочем, и для немолодых): она приучает думать, а не механически пользоваться компьютерными программами.

В книге есть недостатки – не рассмотрены некоторые важные аспекты теории реакторов. Нет упоминания о плутонии, его роли в кинетике реактора, влиянии на температурный коэффициент. Ничего не говорится об отравлении реактора ксеноном–135, иодной яме. Из составляющих температурного коэффициента детально обсуждается лишь влияние Допплер-эффекта на резонансное поглощение. Остальные составляющие либо обсуждаются лишь вкратце, либо вовсе не рассматриваются (например, отклонения сечений делящихся элементов от закона $1/v$, температурный эффект за счет охлаждающей простой воды в реакторе с графитовым замедлителем и др.).

Возможно, что отсутствие даже упоминания о плутонии и об отравлении ксеноном связано с тем, что в то время – в 47 году – эти темы были сверхсекретны и о них нельзя было говорить в книге, которая не имела высшего грифа секретности. В силу указанных недостатков, человеку, желающему изучить теорию ядерных реакторов по книге Ахиезера и Померанчука будет необходимо пользоваться также другими источниками. (Список рекомендуемых монографий приведен в конце книги.)

После написания авторы не редактировали текст. Поэтому в рукописи оказалось заметное число описок, нестыковок текста в разных главах, погрешностей в стиле. Были даже и физические ошибки, хотя их было очень немного. Все эти недоработки пришлось исправлять при редактировании: в соответствующих местах сделаны редакторские примечания. При этом редакторы старались возможно бережнее относиться к авторскому тексту и не менять его без крайней необходимости, даже в тех случаях, когда литературный стиль им представлялся не самым лучшим.

Авторы не сопроводили текст систематизированным списком использованной литературы: нередко ссылки носят случайный характер, иногда дается ссылка, но не указана статья или книга, которая имеется в виду. Поэтому редакторы снабдили книгу списком литературы, исходя из своего знания того, какими источниками могли пользоваться авторы при написании книги.

Набирали книгу в LATEX по авторской рукописи сотрудники ИТЭФ М.Н.Маркина, Н.С.Либова, А.В.Самсонов и И.А.Шушпанов. Мы выражаем им глубокую благодарность за проделанную ими большую работу. Мы благодарны также В.Б.Краснухину и Л.И.Турусиной за помощь в розыске рукописи книги. Работа по подготовке книги в печать была частично профинансирована Американским фондом гражданских исследований и развития для независимых государств бывшего Советского Союза (CRDF, грант RP2-2247).

Б.Л.Иоффе, А.С.Герасимов
ИТЭФ, Москва, декабрь 2001 г.

ГЛАВА I

ДИФФУЗИЯ И ЗАМЕДЛЕНИЕ НЕЙТРОНОВ

§1. Основное интегральное уравнение

Рассмотрим некоторую среду, в которой находится источник или ряд источников быстрых нейтронов. Нейтроны, испускаемые источником, двигаясь в среде, испытывают столкновения с ядрами вещества и в результате этого замедляются. Замедление может вызываться как возбуждением ядер, так и передачей энергии при упругих столкновениях нейтронов с ядрами. Если энергия нейтрона меньше некоторой характерной для каждого сорта ядер величины, то возбуждение последних становится невозможным. Эта энергия для легких ядер, которые наиболее эффективно замедляют нейтроны, составляет около 1 МэВ.

Мы будем рассматривать далее тот случай, когда энергия недостаточна для возбуждения ядер. В этих условиях замедление нейтронов обуславливается только передачей энергии от нейтронов ядрам при их упругих столкновениях.

Заметим, что упругое рассеяние достаточно медленных нейтронов является сферически симметричным в системе координат, где находится центр инерции сталкивающихся нейтрона и ядра. Рассеяние будет сферически симметричным, если длина волн нейтрона значительно превосходит радиус ядра R . Энергия нейтрона должна быть при этом меньше, чем $\epsilon = \frac{\hbar^2}{2mR^2}$ (m - масса нейтрона). В случае тяжелых ядер эта энергия составляет около 200 кэВ, для ядер среднего атомного веса $\epsilon \sim 1$ МэВ, для легких ядер ϵ составляет несколько МэВ.

В лабораторной системе координат, в которой до столкновения ядро покоилось, нейtron после столкновения может обладать любым значением энергии от начальной E до ϵE , где

$$\epsilon = \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2$$

(M и m – соответственно массы ядра и нейтрона).

Задача, которой мы будем заниматься, состоит в нахождении функции распределения нейтронов, диффундирующих в среде и теряющих при этом свою энергию.

Обозначим через \mathbf{r} и \mathbf{p} соответственно радиус-вектор, определяющий положение нейтрона, и его импульс. Функцию распределения нейтронов в момент t обозначим через $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, так что число нейтронов, для которых \mathbf{r} и \mathbf{p} заключены в интервалах $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{p}$, равно $f d\mathbf{r} d\mathbf{p}$.

Функция распределения, вообще говоря, меняется с течением времени. Это изменение вызывается, во-первых, испусканием нейтронов источниками; во-вторых, свободным движением нейтронов; в-третьих, столкновениями нейтронов с ядрами; и, наконец, в-четвертых, поглощением нейтронов.

Полное изменение числа нейтронов в интервале $d\mathbf{r} d\mathbf{p}$ в единицу времени можно представить в виде

$$\frac{df}{dt} d\mathbf{r} d\mathbf{p} = q d\mathbf{r} d\mathbf{p} - v \mathbf{grad} f d\mathbf{r} d\mathbf{p} - \frac{f}{\tau_c} d\mathbf{r} d\mathbf{p} - \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{cm} d\mathbf{r} d\mathbf{p}. \quad (1.1)$$

Здесь $q d\mathbf{r} d\mathbf{p}$ – число нейтронов, доставляемых источниками ежесекундно в интервал $d\mathbf{r} d\mathbf{p}$ фазового пространства. Второй член представляет собой число нейтронов, уходящих из объема $d\mathbf{r}$ в единицу времени, благодаря их свободному движению (v – скорость нейтрона). Третий член дает число поглощенных нейтронов в единицу времени, τ_c – время жизни нейтрона по отношению к захвату, равное

$$\frac{1}{\tau_c} = v \sum_{\alpha} N_{\alpha} \sigma_{\alpha}^{\alpha}(E), \quad (1.2)$$

где N_{α} – число ядер сорта α в единице объема, σ_{α}^{α} – сечение захвата нейтронов с энергией E ядрами сорта α .

Наконец, четвертый член представляет собой изменение числа нейтронов в единицу времени, обусловленное столкновениями нейтронов с ядрами.

В свою очередь, $(\partial f / \partial t)_{cm}$ есть разность числа нейтронов, уходящих из интервала импульсов $d\mathbf{p}$ и приходящих в этот интервал в единицу времени за счет столкновений.

Число нейтронов, уходящих из интервала $d\mathbf{p}$ в единицу времени, равно

$$\frac{v}{l(E)} f d\mathbf{r} d\mathbf{p},$$

где $l(E)$ – длина свободного пробега нейтронов, равная

$$\frac{1}{l(E)} = \sum_{\alpha} N_{\alpha} \sigma_{\alpha}^{\alpha}(E), \quad (1.3)$$

$\sigma_s^\alpha(E)$ – сечение рассеяния нейтронов ядрами сорта α .

Число нейтронов, приходящих в единицу времени в интервал dp импульсного пространства из интервала dp' , благодаря столкновениям нейтронов с ядрами сорта α , можно представить в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}') dr dp' \cdot dp w_\alpha(\mathbf{p}', \mathbf{p}), \quad (1.4)$$

где $w_\alpha(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ – вероятность перехода $\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}$ в единицу времени, отнесенная к единице объема импульсного пространства \mathbf{p} .

Если считать, что в системе координат, где покойится центр инерции сталкивающихся нейтрона и ядра, рассеяние нейтронов обладает сферической симметрией, то $w_\alpha(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ можно представить в виде

$$w_\alpha(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = A_\alpha(E') \delta\left[\frac{\mathbf{p}'^2 - \mathbf{p}^2}{2m} - \frac{(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2}{2M_\alpha}\right] \quad (1.5)$$

где $A_\alpha(E')$ зависит только от энергии нейтрона в состоянии \mathbf{p}' ; δ -функция обеспечивает выполнение закона сохранения энергии; $(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2/(2M_\alpha)$ есть энергия, переданная ядру массы M_α .

Функция $A_\alpha(E')$ может быть определена из условия нормировки

$$\int w_\alpha(\mathbf{p}', \mathbf{p}) d\mathbf{p} = \frac{v'}{l_\alpha(E')}, \quad (1.6)$$

где v' – скорость нейтрона с импульсом \mathbf{p}' , $l_\alpha(E')$ – длина пробега нейтронов по отношению к рассеянию ядрами сорта α , $1/l_\alpha(E') = N_\alpha \sigma_s^\alpha(E')$. Подставляя в (1.6) выражение (1.5) для $w_\alpha(\mathbf{p}', \mathbf{p})$, получим

$$A_\alpha(E') \int \delta\left(\frac{\mathbf{p}'^2 - \mathbf{p}^2}{2m} - \frac{(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2}{2M_\alpha}\right) d\mathbf{p} = \frac{v'}{l_\alpha(E')}. \quad (1.6')$$

Вводя угол ϑ между векторами \mathbf{p}' и \mathbf{p} , перепишем входящий в (1.6') интеграл в виде

$$2\pi \int \delta\left(\frac{\mathbf{p}'^2 - \mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2 - 2\mathbf{p}'\mathbf{p} \cos\vartheta}{2M_\alpha}\right) p^2 dp \sin\vartheta d\vartheta =$$

$$= 2\pi \frac{M_\alpha}{p'} \int pdp = \frac{2\pi m M_\alpha}{p'} \int_{\varepsilon_\alpha E'}^{E'} dE = \frac{2\pi m M_\alpha}{p'} (1 - \varepsilon_\alpha) E',$$

где

$$\varepsilon_\alpha = \left(\frac{M_\alpha - m}{M_\alpha + m}\right)^2.$$

Таким образом, получаем

$$A_\alpha(E') = \frac{1}{\pi m M_\alpha (1 - \varepsilon_\alpha) l_\alpha(E')}. \quad (1.7)$$

Полное число нейтронов, приходящих в интервал dp , получается интегрированием (1.4) по dp' и суммированием по всем сортам рассеивающих ядер α . Оно равно

$$\frac{1}{\pi m} \sum_\alpha \frac{1}{M_\alpha (1 - \varepsilon_\alpha)} \int C_\alpha \delta\left(\frac{\mathbf{p}'^2 - \mathbf{p}^2}{2m} - \frac{(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2}{2M_\alpha}\right) \times \\ \times f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{dp'}{l(p')} dr dp.$$

Здесь $l(p')$ – длина пробега нейтронов, определяемая формулой (1.3),

$$C_\alpha = \frac{N_\alpha \sigma_s^\alpha(E')}{\sum_\alpha N_\alpha \sigma_s^\alpha(E')}. \quad (1.8)$$

Мы будем предполагать, что C_α слабо зависит от энергии; иными словами, мы предполагаем, что при изменении энергии на величину порядка скачка энергии при одном упругом столкновении C_α испытывает изменение, которое мало по сравнению с самим C_α . В первом приближении мы считаем величины C_α постоянными (см. однако формулу (3.26) для среднего квадрата длины замедления нейтронов, в которой учитывается зависимость C_α от энергии).

Полное изменение числа нейтронов в единицу времени в интервале $dr dp$ определяется формулой (1.1).

Используя полученные выражения для числа нейтронов, приходящих в интервале импульсов dp и уходящих из этого интервала, получим окончательно следующее кинетическое уравнение для определения функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = q - v \operatorname{grad} f - \frac{v}{l(E)} f - \frac{1}{\tau_c} f + \sum_{\alpha} \frac{C_{\alpha}}{\pi m M_{\alpha} (1 - \epsilon_{\alpha})} \times \\ \times \int \delta \left(\frac{p'^2 - p^2}{2m} - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2M_{\alpha}} \right) \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{p}')}{l(E')} d\mathbf{p}'. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В стационарном случае $\partial f / \partial t$ равняется нулю.

Наша задача состоит в исследовании уравнения (1.9).

§2. Функции распределения нейтронов в импульсном пространстве

Рассмотрим стационарное распределение нейтронов.

Пусть в начале координат находится точечный источник монохроматических нейтронов. В этом случае

$$q = \frac{Q}{4\pi p_0^2} \delta(\mathbf{r}) \delta(p - p_0), \quad (2.1)$$

где Q – мощность источника, т.е. число испускаемых им ежесекундно нейтронов, p_0 – их импульс.

Точно решить уравнение (1.9) даже с таким простым выражением для q не удается. Возможно, однако, последовательно определять моменты функции распределения

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}) &= \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{r}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{p}) = \int \mathbf{r} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{r}, \\ H(\mathbf{p}) &= \int r^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Совершенно ясен физический смысл введенных функций: $F(\mathbf{p})$ представляет собой функцию распределения нейтронов в импульсном пространстве.

Отношение

$$\bar{r}^2(E) = \frac{H(\mathbf{p})}{F(\mathbf{p})} \quad (2.3)$$

есть, очевидно, средний квадрат расстояния, которое должен пройти нейtron, чтобы замедлиться от начальной энергии E_0 до энергии E . Полагая в выражении для \bar{r}^2 энергию E равной $(3/2)kT$ (T – температура, k – постоянная Больцмана), мы получим средний квадрат длины замедления нейтрона.

Нахождение среднего квадрата длины замедления является нашей основной задачей.

Заметим, что в силу шаровой симметрии задачи функция $F(\mathbf{p})$ может зависеть только от абсолютного значения импульса $| \mathbf{p} |$, $F(\mathbf{p}) = F(p)$. Такое же заключение относится и к функции $H(\mathbf{p})$: $H(\mathbf{p}) = H(p)$.

Векторная функция $\mathbf{G}(\mathbf{p})$ по тем же соображениям должна быть параллельна вектору \mathbf{p} :

$$\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}}{p} g(p), \quad (2.4)$$

где $g(p)$ зависит только от абсолютного значения импульса.

Мы не будем в этом параграфе учитывать поглощение нейтронов, считая его малым¹. В случае малого поглощения средний квадрат длины замедления не может существенно зависеть от поглощения (см. §5).

Для простоты будем сперва считать, что имеется только один сорт рассеивающих ядер.

Положим в (1.9) $\tau_c = \infty$ и проинтегрируем это уравнение по всему объему за вычетом объема бесконечно малого шара радиуса a , центр которого совпадает с источником нейтронов. В результате получим

$$\begin{aligned} \int v \operatorname{grad} f d\mathbf{r} + \frac{v F(p)}{l(E)} - \frac{1}{\pi m M (1 - \epsilon)} \times \\ \times \int \delta \left(\frac{p'^2 - p^2}{2m} - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2M} \right) \frac{F(p')}{l(E')} d\mathbf{p}' = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

¹Это предположение реализуется при замедлении в графите и тяжелой воде.

(справа стоит нуль, ибо точка $r = 0$ находится вне объема интегрирования).

Устраним δ -функцию интегрированием по углу ϑ между векторами \mathbf{p} и \mathbf{p}' . В результате получим

$$\int \delta\left(\frac{p'^2 - p^2}{2m} - \frac{p^2 + p'^2 - 2pp' \cos\vartheta}{2M}\right) \frac{F(p')}{l(E')} 2\pi p'^2 dp' \sin\vartheta d\vartheta = \\ = \frac{2\pi M}{p} \int \frac{F(p')}{l(E')} p' dp' = \frac{2\pi m M}{p} \int_E^{E/\varepsilon} \frac{F(p')}{l(E')} dE' \quad (2.6)$$

(максимальное значение энергии E' , потеряв часть которой, нейтрон приобретает энергию E , равно, очевидно, E/ε).

Вычислим далее интеграл $\int \mathbf{v} \operatorname{grad} f d\mathbf{r}$. По теореме Гаусса имеем

$$\int \mathbf{v} \operatorname{grad} f d\mathbf{r} = - \int f v ds = -4\pi a^2 f_a v,$$

где ds – элемент поверхности шара радиуса a , f_a – значение f на поверхности шара. Ясно, что

$$4\pi a^2 f_a v = \int q dr = Q \frac{\delta(p - p_0)}{4\pi p_0^2}.$$

Возвращаясь к уравнению (2.5) и вводя вместо $F(p)$ новую функцию $X(E)$

$$X(E) = \frac{E}{l(E)} F(p), \quad (2.7)$$

получим следующее интегральное уравнение для определения $X(E)$

$$X(E) - \frac{1}{1 - \varepsilon} \int_E^{E/\varepsilon} \frac{X(E') dE'}{E'} = \frac{Q \delta(p - p_0)}{8\pi p_0}. \quad (2.8)$$

Это интегральное уравнение удобно решать, применяя преобразование Меллина-Лапласа [2] к функции $X(E)$:

$$X_s = \int_0^\infty X(E) E^{s-1} dE = \int_0^{E_0} X(E) E^{s-1} dE. \quad (2.9)$$

Зная X_s , можно определить $X(E)$, если воспользоваться формулой обращения

$$X(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} X_s E^{-s} ds. \quad (2.10)$$

Формула (2.10) имеет место, если интеграл $\int_0^\infty X(E) E^{c-1} dE$ абсолютно сходится. Далее мы убедимся в том, что $X(E)$ при $E = 0$ имеет полюс первого порядка. Поэтому $c = Re s$ должно быть больше единицы, но может быть выбрано сколь угодно близким к единице.

Умножим уравнение (2.8) на E^{s-1} и проинтегрируем по dE :

$$X_s - \frac{1}{1 - \varepsilon} \int_0^\infty E^{s-1} dE \int_E^{E/\varepsilon} X(E') \frac{dE'}{E'} = \\ = \frac{Q}{8\pi p_0} \int_0^\infty E^{s-1} \delta(p - p_0) dE = \frac{Q}{8\pi m} E_0^{s-1}. \quad (2.11)$$

Рассмотрим двойной интеграл

$$\int_0^\infty E^{s-1} dE \int_E^{E/\varepsilon} X(E') \frac{dE'}{E'} = \int_0^\infty E^{s-1} dE \int_E^\infty X(E') \frac{dE'}{E'} - \\ - \int_0^\infty E^{s-1} dE \int_{E/\varepsilon}^\infty X(E') \frac{dE'}{E'}. \quad (2.12)$$

В интегралах, стоящих в правой части этого равенства, изменяя порядок интегрирования, пользуясь известной формулой

$$\int_0^\infty dx \int_x^\infty f(x, y) dy = \int_0^\infty dy \int_0^y f(x, y) dx. \quad (2.12')$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} E^{s-1} dE \int_E^{E/\varepsilon} X(E') \frac{dE'}{E'} &= \frac{1}{s} \int_0^{\infty} X(E') E'^{s-1} dE' - \\ - \frac{\varepsilon^s}{s} \int_0^{\infty} X(E') E'^{s-1} dE' &= \frac{1}{s} (1 - \varepsilon^s) X_s. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Подставляя (2.13) в (2.11), получим

$$X_s - \frac{1}{s} \frac{1 - \varepsilon^s}{1 - \varepsilon} X_s = \frac{Q}{8\pi m} E_0^{s-1}, \quad (2.13')$$

откуда

$$X_s = \frac{(1 - \varepsilon) Q}{8\pi m} \frac{s E_0^{s-1}}{s(1 - \varepsilon) - 1 + \varepsilon^s}. \quad (2.14)$$

По формуле обращения (2.10) находим $X(E)$

$$X(E) = \frac{1}{2\pi i} \frac{(1 - \varepsilon) Q}{8\pi m} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{s E_0^{s-1}}{E^s [s(1 - \varepsilon) - 1 + \varepsilon^s]} ds \quad (2.15)$$

и далее по (2.7) определяем $F(p)$ – функцию распределения нейтронов в импульсном пространстве

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{l(E)}{E} X(E) = \\ &= \frac{Q(1 - \varepsilon)}{16\pi^2 im} \frac{l(E)}{E^2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{E_0}{E}\right)^{s-1} \frac{sds}{s(1 - \varepsilon) - 1 + \varepsilon^s}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Эта формула справедлива при любом виде зависимости длины свободного пробега нейтронов от энергии. Для вычислени вхodящего сюда интеграла замкнем прямую, вдоль которой производится интегрирование, бесконечной полуокружностью, охватывающей левую полуплоскость.

Обозначим полюсы подинтегральной функции (2.15), лежащие слева от прямой $\text{Re } s = c$, через s_i . Эти полюсы суть корни уравнения

$$(1 - \varepsilon)s - 1 + \varepsilon^s = 0. \quad (2.17)$$

Заметим, что уравнение (2.17) не имеет корней справа от прямой $\text{Re } s = 1$. По теореме о вычетах имеем

$$F(p) = \frac{Q(1 - \varepsilon)}{8\pi m} \frac{l(E)}{E^2} \sum_i \left(\frac{E_0}{E}\right)^{s_i-1} \frac{s_i}{A_i}, \quad (2.18)$$

где

$$A_i = \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{s(1 - \varepsilon) - 1 + \varepsilon^s}{s - s_i} = (1 - \varepsilon) + \ln \varepsilon \cdot \varepsilon^{s_i}. \quad (2.19)$$

В том случае, когда рассеивателем является водород, $\varepsilon = 0$ и единственным полюсом будет точка $s = 1$, вычет относительно которой равен единице. В этом случае

$$F(p) = \frac{Q}{8\pi m} \frac{l(E)}{E^2}, \quad \varepsilon = 0. \quad (2.20)$$

Эта формула была впервые выведена Ферми [3].

В области энергий $E \ll E_0$ главную роль в сумме (2.18) играет член с максимальной вещественной частью s_i , т.е. член с $s_i = 1$. Поэтому при $E \ll E_0$ [4,3]

$$F(p) \approx \frac{Q(1 - \varepsilon)}{8\pi m(1 - \varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon)} \frac{l(E)}{E^2}, \quad E \ll E_0. \quad (2.21)$$

Умножив $F(p)$ на $4\pi p^2 (dp/dE)dE$, мы найдем распределение нейтронов по энергиям, т.е. число нейтронов во всем пространстве, энергия которых заключена между E и $E + dE$. В области энергии $E \ll E_0$ это распределение имеет следующий вид

$$4\pi p^2 F(p) \frac{dp}{dE} dE = \frac{Q(1 - \varepsilon) \sqrt{\frac{m}{2}} l}{(1 - \varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon)} \frac{dE}{E^{3/2}}. \quad (2.21')$$

Мы видим, что в области энергий $E \ll E_0$ функция распределения $F(p)$ оказывается обратно пропорциональной квадрату энергии нейтронов. Это обстоятельство может быть установлено также иными, элементарными методами, по крайней

мере, в том случае, когда выполнено условие $1 - \varepsilon \ll 1$ (т.е. когда $m \ll M$). В этом случае энергия нейтрона при каждом столкновении меняется мало; по порядку величины изменение энергии при одном столкновении равно $(1 - \varepsilon)E/2$.

Так как захватом нейтронов мы пренебрегаем, то в импульсном пространстве должен сохраняться поток частиц, равный

$$4\pi p^2 F(p)\dot{p} = Q. \quad (2.22)$$

Здесь \dot{p} означает скорость изменения импульса нейтрона, вызванного столкновениями с ядрами. По порядку величины \dot{p} может быть определено из соотношения

$$\dot{E} = \frac{p\dot{p}}{m} = \frac{v}{l(p)} \frac{(1 - \varepsilon)E}{2}, \quad (2.23)$$

откуда

$$\dot{p} = \frac{(1 - \varepsilon)E}{2l(E)}.$$

Из (2.22) получаем

$$F(p) = \frac{Q}{4\pi p^2 \dot{p}} = \frac{Ql(E)}{4\pi m(1 - \varepsilon)E^2}. \quad (2.24)$$

Заметим, что к такому же результату приводит формула (2.21), если считать в ней $1 - \varepsilon \ll 1$.

Зависимость $F(p)$ от E в области энергий $E \ll E_0$ в предположении, что $1 - \varepsilon \ll 1$, может быть также установлена из интегрального уравнения (2.8), которое в этом случае сводится к дифференциальному.

Действительно, так как при выполнении условия $1 - \varepsilon \ll 1$ энергия нейтрона мало меняется при каждом столкновении, то функция $X(E')/E'$, стоящая под знаком интеграла в (2.8), может быть разложена в ряд

$$\frac{X(E')}{E'} = \frac{X(E)}{E} + (E' - E) \frac{d}{dE} \frac{X(E)}{E}.$$

Уравнение (2.8) приобретает поэтому вид:

$$X(E) - \frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{X(E)}{E} \int_E^{E/\varepsilon} dE' - \frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{d}{dE} \left(\frac{X(E)}{E} \right) \int_E^{E/\varepsilon} (E' - E) dE' = 0,$$

$$E \neq E_0,$$

откуда

$$-\frac{2X(E)}{E^2} = \frac{d}{dE} \frac{X(E)}{E}$$

и, следовательно,

$$X(E) = \frac{\text{const}}{E}$$

т.е.

$$F(p) \sim \frac{l(E)}{E^2}$$

в соответствии с формулой (2.21).

§3. Средний квадрат длины замедления нейтрона

Выше мы уже говорили, что наша основная задача состоит в нахождении среднего квадрата длины замедления нейтрона. Для решения этой задачи нужно знать функцию $H(p)$ (см. формулу (2.3)), для определения которой нужно в свою очередь знать $G(p)$. Поэтому мы перейдем сейчас к нахождению функции $G(p)$.

Рассматривая стационарное распределение, мы положим в (1.9) $\partial f / \partial t = 0$, умножим это уравнение на \mathbf{r} и результат проинтегрируем по всему объему.

Интегрированием по частям легко убедиться в том, что

$$\int \text{grad } f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} r dr = -\mathbf{v} F(p).$$

Поэтому мы получим

$$-\frac{\mathbf{p}}{m} F(p) + \frac{pG(\mathbf{p})}{ml(E)} - \frac{1}{\pi m M (1 - \varepsilon)} \times$$

$$\times \int \delta \left(\frac{p'^2 - p^2}{2m} - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2m} \right) \frac{\mathbf{G}(\mathbf{p}')}{l(E')} d\mathbf{p}' = 0. \quad (3.1)$$

Подставляя сюда

$$\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}}{p} g(p),$$

найдем

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{p}}{l(E)} g(p) - \frac{1}{\pi M(1-\varepsilon)} \times \\ & \times \int \delta \left(\frac{p'^2 - p^2}{2m} - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2M} \right) \frac{\mathbf{p}'}{p'} \frac{g(p')}{l(E')} d\mathbf{p}' = \mathbf{p} F(p). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Интеграл, содержащий δ -функцию, должен дать вектор, параллельный \mathbf{p} . Поэтому под знаком интеграла можно заменить вектор \mathbf{p}' его проекцией на направление вектора \mathbf{p} .

$$\begin{aligned} & \int \delta \left(\frac{p'^2 - p^2}{2m} - \frac{p^2 + p'^2 - 2pp' \cos\vartheta}{2M} \right) \cos\vartheta \frac{g(p')}{l(E')} 2\pi p'^2 dp' \sin\vartheta d\vartheta = \\ & = \frac{2\pi M}{p} \int \cos\vartheta \frac{g(p')}{l(E')} p' dp'. \end{aligned} \quad (3.2')$$

Здесь $\cos\vartheta$ (ϑ – угол между \mathbf{p}' и \mathbf{p}) можно выразить через значение энергии E и E' ; для этого следует приравнять нулю аргумент δ -функции. В результате простых выкладок получим

$$\cos\vartheta = \left(\sqrt{\frac{E}{E'}} - \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{E'}{2E}} \right) \frac{M+m}{2m}. \quad (3.3)$$

Введем вместо $g(p)$ новую функцию $y(E)$:

$$g(p) = \frac{l(E)}{E} y(E). \quad (3.4)$$

Функция $y(E)$ удовлетворяет уравнению

$$y(E) - \frac{M+m}{2m(1-\varepsilon)} \int_E^{E/\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{E}{E'}} - \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{E'}{E}} \right) \frac{y(E')}{E'} dE' = EF(p). \quad (3.5)$$

Для решения этого уравнения применим к $y(E)$ преобразование Лапласа-Меллина:

$$y_s = \int_0^\infty y(E) E^{s-1} dE = \int_0^{E_0} y(E) E^{s-1} dE. \quad (3.6)$$

Умножив (3.5) на E^{s-1} и интегрируя по dE , получим:

$$\begin{aligned} y_s - \frac{M+m}{2m(1-\varepsilon)} \int_0^\infty E^{s-1} dE \int_E^{E/\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{E}{E'}} - \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{E'}{E}} \right) \frac{y(E')}{E'} dE' = \\ = \int_0^\infty E^s F(p) dE. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Вычислим входящие сюда интегралы

$$\int_0^\infty E^{s-1} dE \int_E^{E/\varepsilon} \sqrt{\frac{E}{E'}} \frac{y(E')}{E'} dE', \quad \int_0^\infty E^{s-1} dE \int_E^{E/\varepsilon} \sqrt{\frac{E'}{E}} \frac{y(E')}{E'} E'.$$

Применяя формулу (2.12'), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty E^{s-1} dE \int_E^{E/\varepsilon} \sqrt{\frac{E}{E'}} \frac{y(E')}{E'} dE' = \\ & = \int_0^\infty E^{s-1} dE \int_E^\infty \sqrt{\frac{E}{E'}} \frac{y(E')}{E'} dE' - \int_0^\infty E^{s-1} dE \int_{E/\varepsilon}^\infty \sqrt{\frac{E'}{E}} \frac{y(E')}{E'} dE' = \\ & = \int_0^\infty dE' \int_0^{E'} E^{s-1} \sqrt{\frac{E}{E'}} \frac{y(E)}{E'} dE - \varepsilon^s \int_0^\infty dE' \int_0^{E'} u^{s-1} \sqrt{\frac{\varepsilon u}{E'}} \frac{y(E')}{E'} du = \\ & = \frac{1}{s + \frac{1}{2}} y_s - \frac{\varepsilon^{s+\frac{1}{2}}}{s + \frac{1}{2}} y_s. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем

$$\int_0^\infty E^{s-1} dE \int_E^{E/\varepsilon} \sqrt{\frac{E'}{E}} \frac{y(E')}{E'} dE' = \frac{1 - \varepsilon^{s-\frac{1}{2}}}{s - \frac{1}{2}} y_s.$$

Окончательно уравнение (3.7) приобретает следующий вид²

$$y_s \left\{ 1 - \frac{M+m}{2m(1-\varepsilon)} \left[\frac{1-\varepsilon^{s+\frac{1}{2}}}{s+\frac{1}{2}} - \sqrt{\varepsilon} \frac{1-\varepsilon^{s-\frac{1}{2}}}{s-\frac{1}{2}} \right] \right\} = [EF(p)]_s. \quad (3.8)$$

Найдя отсюда y_s , мы далее по формуле обращения

$$y(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} E^{-s} y_s ds \quad (3.9)$$

находим $y(E)$.

Вычисления значительно упрощаются, если длина свободного пробега нейтрона $l(E)$ может считаться не зависящей от энергии. В этом случае величина $[EF(p)]_s$, только множителем отличается от величины X_s , определяемой формулой (2.14).

Мы будем в дальнейшем предполагать, что длина свободного пробега l слабо зависит от энергии. В этом предположении y_s определяется следующей формулой

$$y_s = \frac{lQ(1-\varepsilon)E_0^{s-1}s}{8\pi m[(1-\varepsilon)s-1+\varepsilon^s]} \frac{1}{1 - \frac{M+m}{(1-\varepsilon)2m} \left[\frac{1-\varepsilon^{s+\frac{1}{2}}}{s+\frac{1}{2}} - \sqrt{\varepsilon} \frac{1-\varepsilon^{s-\frac{1}{2}}}{s-\frac{1}{2}} \right]}. \quad (3.10)$$

Функция g согласно (3.4) и (3.9) может быть представлена в виде

$$g = \frac{l}{E} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} E^{-s} y_s ds \quad (3.11)$$

Далее, мы убедимся в том, что $y(E)$ имеет в точке $E = 0$ такую же особенность, как и $X(E)$, т.е. полюс второго порядка. Поэтому мы выбираем c в (3.11) таким же, как и при определении $X(E)$.

²Мы применяем обозначение

$$[f(E)]_s = \int_0^\infty f(E) E^{s-1} dE$$

Можно утверждать, что при $\varepsilon \neq 0$ в области энергии $E \ll E_0$ главную роль в интеграле для $g(E)$, также как и в формуле для $F(p)$, играет тот из полюсов, расположенных внутри контура интегрирования, вещественная часть которого максимальна, т.е. полюс $s = 1$. Вычислив вычет относительно полюса, найдем

$$g(E) = \frac{l^2 Q}{8\pi E^2} \frac{1-\varepsilon}{(1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon) \left[1 - \frac{M+m}{m(1-\varepsilon)} \left(\frac{1-\varepsilon^{3/2}}{3} + \varepsilon - \sqrt{\varepsilon} \right) \right]}, \quad (3.12)$$

$$E \ll E_0, \quad l = \text{const.}$$

Мы видим, что $g(E)$ действительно имеет в точке $E = 0$ полюс второго порядка, как это и утверждалось выше. Из формул для $g(E)$ и $F(p)$ легко показать, что при $E \ll E_0$ и $1-\varepsilon \ll 1$ имеет место соотношение

$$\frac{G}{F} = \frac{p}{p} l. \quad (3.13)$$

Иными словами, при замедлении нейтрона от энергии E_0 до энергии $E \ll E_0$ средняя проекция перемещения нейтрона на направление его импульса в случае тяжелого замедлителя равна длине свободного пробега.

В том случае, когда $\varepsilon = 0$, определение $g(E)$ может быть доведено до конца. Действительно, в этом случае y_s определяется формулой (3.10) при $\varepsilon = 0$:

$$y_s = \frac{lQ}{8\pi m} E_0^{s-1} \frac{s}{s-1} \frac{s+\frac{1}{2}}{s-\frac{1}{2}}.$$

Функция y_s имеет только два полюса $s = 1$ и $s = \frac{1}{2}$; в (3.11) вычеты относительно этих полюсов равны, соответственно,

$$\frac{3l^2 Q}{8\pi m E^2}, \quad -\frac{l^2 Q}{8\pi m E^2} \sqrt{\frac{E}{E_0}}.$$

Поэтому при $\varepsilon = 0$ мы получим

$$g(E) = \frac{Ql^2}{8\pi m E^2} \left(3 - \sqrt{\frac{E}{E_0}} \right), \quad l = \text{const.} \quad (3.14)$$

Используя (2.20), найдем отсюда

$$\frac{\mathbf{G}}{F} = \left(3 - \sqrt{\frac{E}{E_0}}\right) l \frac{\mathbf{p}}{p}, \quad \varepsilon = 0. \quad (3.15)$$

При $E \ll E_0$ это отношение в три раза больше, чем для тяжелого замедлителя. Это обстоятельство легко понять, если вспомнить, что при $\varepsilon = 0$ рассеяние происходит лишь на углы, не превосходящие $\frac{\pi}{2}$; поэтому для полного изменения направления движения частицы приходится пройти большее расстояние, чем в случае тяжелого замедлителя.

Заметим, что приведенные формулы для $\varepsilon = 0$ лишь условно можно применить к водороду в качестве замедлителя. Дело в том, что они выведены в предположении $l = \text{const}$, что не имеет, вообще говоря, места в применении к водороду. Приближенно можно считать, что l не зависит от энергии, если $E \ll 10^5$ эВ.

Перейдем теперь к определению функции $H(p)$. Умножим уравнение (1.9) (положив в нем предварительно $\partial f / \partial t = 0$) на r^2 и проинтегрируем по всему объему. Интегрированием по частям можно убедиться в том, что

$$\int r^2 \mathbf{v} \operatorname{grad} f dr = -2\mathbf{v} \int \mathbf{r} f dr = -2\mathbf{v} \mathbf{G}(p) = -2vg(E).$$

Поэтому мы получим

$$\begin{aligned} & \frac{v}{l} H(p) - \frac{1}{\pi m M (1 - \varepsilon)} \times \\ & \times \int \delta \left(\frac{p'^2 - p^2}{2m} - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2M} \right) \frac{H(p')}{l(E')} d\mathbf{p}' = 2vg(E). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Введем вместо $H(p)$ новую функцию $Z(E)$

$$H(p) = \frac{l}{E} Z(E). \quad (3.17)$$

Устранив δ -функцию интегрированием по углу ϑ между \mathbf{p}' и \mathbf{p} , получим следующее уравнение для определения $Z(E)$:

$$Z(E) - \frac{1}{1 - \varepsilon} \int_E^{E/\varepsilon} \frac{Z(E')}{E'} dE' = 2Eg(E). \quad (3.18)$$

Для решения этого уравнения мы снова применим преобразование Лапласа-Меллина.

$$Z_s = \int_0^\infty Z(E) E^{s-1} dE, \quad Z(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} E^{-s} Z_s ds.$$

Замечая, что левые части уравнения (2.8) и (3.18) совпадают и используя (2.13'), получим:

$$\frac{(1 - \varepsilon)s - 1 + \varepsilon^s}{s(1 - \varepsilon)} Z_s = 2[Eg(E)]_s. \quad (3.19)$$

Правая часть этого уравнения с точностью до постоянного множителя совпадает с y_s , если l не зависит от энергии. В этом предположении мы получим

$$Z_s = \frac{l^2 Q (1 - \varepsilon)^2 E_0^{s-1} s^2}{4\pi m [(1 - \varepsilon)s - 1 + \varepsilon^s]^2} \frac{1}{1 - \frac{M+m}{2m(1-\varepsilon)} \left[\frac{1-\varepsilon^{s+\frac{1}{2}}}{s+\frac{1}{2}} - \sqrt{\varepsilon} \frac{1-\varepsilon^{s-\frac{1}{2}}}{s-\frac{1}{2}} \right]} \quad (3.20)$$

и

$$H(p) = \frac{1}{2\pi i} \frac{l}{E} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} E^{-s} Z_s ds. \quad (3.21)$$

Если $\varepsilon = 0$, то формула для $H(p)$ приобретает вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{Ql^3}{8\pi^2 im E^2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{E_0}{E} \right)^{s-1} \frac{s^2}{(s-1)^2} \frac{s+\frac{1}{2}}{s-\frac{1}{2}} ds = \\ &= \frac{Ql^3}{4\pi m E^2} \left(3 \ln \frac{E_0}{E} + 2 + \sqrt{\frac{E}{E_0}} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Разделив $H(p)$ на $F(p)$, найдем средний квадрат расстояния $\overline{r^2}(E)$, которое необходимо пройти нейтрону, чтобы замедлиться от энергии E_0 до энергии E .

Пользуясь теоремой о вычетах, можно представить интеграл (3.21) в виде бесконечной суммы членов вида $C_i (E_0/E)^{s_i-1}$, где s_i – полюса функции Z_s (C_i – константы). В области малых энергий, когда $E \ll E_0$, главную роль в этом

ряду играет полюс $s = 1$. Мы приведем здесь сразу формулу для определения $\bar{r}^2(E)$. Найдя вычеты Z_s относительно полюса $s = 1$, получим

$$\bar{r}^2(E) = \frac{H}{F} = \frac{2(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon+\varepsilon\ln\varepsilon} l^2 \frac{\ln\frac{E_0}{E} + 2 - \frac{\varepsilon\ln^2\varepsilon}{1-\varepsilon+\varepsilon\ln\varepsilon} - B}{(1 - \frac{2}{3}\frac{m}{M})}, \quad (3.23)$$

где

$$B = \frac{M/m + 1}{(1-\varepsilon)(1 - \frac{2}{3}m/M)} \times \\ \times \left\{ \frac{2}{9}(1-\sqrt{\varepsilon})(1-8\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon) - \varepsilon(1-\frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon})\ln\varepsilon \right\}.$$

Формулу (3.23) мы перепишем в виде

$$\frac{\bar{r}^2(E)}{l^2} = \frac{\ln(E_0/E) + D(\varepsilon)}{C(\varepsilon)}. \quad (3.23')$$

Отметим, что зависимость \bar{r}^2 от энергии определяется членом $\ln(E_0/E)$.

Формулы (3.23) (3.23') дают возможность определить средний квадрат длины замедления нейтронов в том случае, когда замедлитель состоит из атомов одного сорта и когда длина свободного пробега нейтронов может считаться не зависящей от их энергии.

Средний квадрат длины замедления нейтронов мы в дальнейшем обозначим через ρ^2 . Для определения ρ^2 нужно подставить в (3.23) вместо E тепловую энергию, равную $(3/2) kT$,

$$\rho^2 = \bar{r}^2 \left(\frac{3}{2} kT \right). \quad (3.24)$$

Приведенными выше формулами можно пользоваться для определения среднего квадрата длины замедления также и в том случае, когда l зависит от энергии, но эта зависимость должна быть достаточно слабой. В этом случае в формуле (3.23) величина $l^2 \ln(E_0/E)$ должна быть заменена интегралом

$$\int_E^{E_0} l^2(x) \frac{dx}{x}.$$

Используя (3.21), определяющий $H(p)$ можно представить с помощью теории о вычетах в виде ряда ~

Помимо теории о вычетах можно представить штотограф (3.21) в виде бесконечного ряда $C(\varepsilon) \left(\frac{E}{E_0} \right)^{s+1}$, где s - показатель степеней $\frac{E-E_0}{E}$. В области малых энергий, когда $E \ll E_0$, функция Z_s играет главную роль в этом ряду и играет самое главное значение в ряду. Но при $s=1$ ряд формулы для определения $\bar{r}^2(E)$. Наиболее корректно Z_s определить при $s=1$, получим

$$\frac{\bar{r}^2(E)}{l^2} = \frac{1}{F} \frac{H}{1-\varepsilon+\varepsilon\ln\varepsilon} = \frac{2(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon+\varepsilon\ln\varepsilon) \left(1 - \frac{2}{3}\frac{m}{M} \right)} \left(\ln\frac{E_0}{E} + 2 - \frac{\varepsilon\ln^2\varepsilon}{1-\varepsilon+\varepsilon\ln\varepsilon} - B \right) \quad (3.23)$$

$$\text{Чт} \quad B = \frac{4/m+1}{(1-\varepsilon)(1-\frac{2}{3}\frac{m}{M})} \left\{ \frac{2}{9}(1-\varepsilon)(1-8\varepsilon+\varepsilon) - \varepsilon(1-\frac{1}{3}\varepsilon)\ln\varepsilon \right\}$$

Формула 3.23 мы перепишем в виде

$$\frac{\bar{r}^2(E)}{l^2} = \frac{\ln\frac{E_0}{E} + 2k}{C(\varepsilon)} \quad (3.23')$$

Значения D и C для различных замедлителей предложены на рис. 1

Фрагмент рукописи, написанный А.И.Ахиезером

Формулы (3.23), (3.23') относятся к тому случаю, когда замедлитель состоит из ядер одного сорта. Покажем, как следует определять длину замедления, если замедлитель состоит из ядер различных сортов.

Общее интегральное уравнение для этого случая было приведено выше (см. (1.9)). Мы предположим, что длина пробега l и величина C_α не зависят от энергии (это равносильно предположению о постоянстве σ_s^α). Интегральное уравнение решается тем же методом, что и в случае одного рассеивателя. Окончательно формула имеет для $\bar{r}^2(E)$ имеет вид:

$$\bar{r}^2(E) = 2l^2 \frac{A}{1 + \sum_{\alpha} \frac{C_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}\ln\varepsilon_{\alpha}}{1-\varepsilon_{\alpha}}}, \quad (3.25)$$

где

$$A = \frac{\ln \frac{E_0}{E} + 2 - \sum_{\alpha} \frac{C_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}\ln^2\varepsilon_{\alpha}}{1-\varepsilon_{\alpha}} \left(1 + \sum_{\alpha} C_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}\ln\frac{\varepsilon_{\alpha}}{1-\varepsilon_{\alpha}} \right)^{-1} - B}{1 - \frac{2}{3} \sum_{\alpha} C_{\alpha} \frac{m}{M_{\alpha}}},$$

$$B = \left(1 - \frac{2}{3} \sum_{\alpha} C_{\alpha} \frac{m}{M_{\alpha}} \right)^{-1} \sum_{\alpha} \frac{C_{\alpha}(m + M_{\alpha})}{m(1 - \varepsilon_{\alpha})} \times$$

$$\times \left[\frac{2}{9} (1 - \sqrt{\varepsilon_{\alpha}})(1 - 8\sqrt{\varepsilon_{\alpha}} + \varepsilon_{\alpha}) + \varepsilon_{\alpha} \left(\frac{1}{3} \sqrt{\varepsilon_{\alpha}} - 1 \right) \ln \varepsilon_{\alpha} \right],$$

$$\varepsilon_{\alpha} = \left(\frac{M_{\alpha} - m}{M_{\alpha} + m} \right)^2.$$

Если величины l и C_{α} не постоянны, но слабо зависят от энергии, то формула (3.25) заменяется следующей:

$$\bar{r}^2(E) = 2 \int_E^{E_0} \frac{l^2(u)}{\left(1 - \frac{2}{3} \sum_{\alpha} C_{\alpha} \frac{m}{M_{\alpha}} \right) \left(1 + \sum_{\alpha} \frac{C_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}\ln\varepsilon_{\alpha}}{1-\varepsilon_{\alpha}} \right)} \frac{du}{u} +$$

$$+ l^2 \frac{2 - \left(\sum_{\alpha} \frac{C_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}\ln^2\varepsilon_{\alpha}}{1-\varepsilon_{\alpha}} \right) \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{C_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}\ln\varepsilon_{\alpha}}{1-\varepsilon_{\alpha}} \right)^{-1} - B}{1 - \frac{2}{3} \sum_{\alpha} C_{\alpha} \frac{m}{M_{\alpha}}}. \quad (3.26)$$

Во втором члене подразумевается усреднение по энергии в интервале от E до E_0 .

§4. Средний квадрат длины замедления для замедлителя, содержащего водород

Методом, которым мы пользовались в предыдущем параграфе, принципиально можно определять длину замедления также и в тех случаях, когда длина пробега нейтрона сильно зависит от энергии (например, когда в замедлителе содержится водород). Решение уравнений для $g(E)$, $H(E)$ приводит, однако, при этом к очень громоздким выкладкам. Более простым является излагаемый ниже метод [1], являющийся обобщением метода Ферми [3].

Рассмотрим замедлитель, представляющий собой смесь водорода и тяжелого рассеивателя. Обозначим длины пробегов нейтрона по отношению к рассеянию на ядрах водорода и тяжелого рассеивателя соответственно через $l_H(E)$ и $l_0(E)$. Основное кинетическое уравнение (1.9) в пренебрежении поглощением нейтронов имеет вид

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad } f + vf \left(\frac{1}{l_0} + \frac{1}{l_H} \right) - \frac{1}{\pi m^2} \int \delta \left[\frac{p'^2 - p^2}{2m} - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2m} \right] f(\mathbf{r}, \mathbf{p}') \frac{d\mathbf{p}'}{l_H(E')} -$$

$$- \frac{1}{\pi m M (1 - \varepsilon)} \int \delta \left[\frac{p'^2 - p^2}{2m} - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2M} \right] f(\mathbf{r}, \mathbf{p}') \frac{d\mathbf{p}'}{l_0(E')} = \frac{Q}{4\pi p_0^2} \delta(\mathbf{r}) \delta(p - p_0). \quad (4.1)$$

Здесь M – масса ядра тяжелого рассеивателя, $\varepsilon = (\frac{M-m}{M+m})^2$. Мы предполагаем, что $1 - \varepsilon \ll 1$.

Определим прежде всего функцию

$$F(E) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{r}.$$

Интегрируя уравнение (4.1) по $d\mathbf{r}$ и устранив δ -функцию, как это было сделано при выводе уравнения (2.8) (см. формулу (2.6)), получим

$$F(E) \left[\frac{1}{l_0(E)} + \frac{1}{l_H(E)} \right] - \frac{1}{E(1-\epsilon)} \int_E^{E/\epsilon} \frac{F(E') dE'}{l_0(E')} -$$

$$- \frac{1}{E} \int_E^{\infty} \frac{F(E') dE'}{l_H(E')} = \frac{mQ\delta(p-p_0)}{4\pi p_0^3}. \quad (4.2)$$

Пользуясь тем, что $1 - \epsilon \ll 1$, мы заменим второй член в (4.2) приближенно на

$$- \frac{1}{E(1-\epsilon)} \frac{F(E)}{l_0(E)} \left(\frac{E}{\epsilon} - E \right) \approx - \frac{F(E)}{l_0(E)}.$$

Уравнение приобретает при этом следующий вид

$$\frac{F(E)}{l_H(E)} - \frac{1}{E} \int_E^{\infty} \frac{F(E') dE'}{l_H(E')} = \frac{mQ\delta(p-p_0)}{4\pi p^3} = \frac{Q}{8\pi m E_0} \delta \left(\ln \frac{E_0}{E} \right). \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) при $E < E_0$ решалось ранее, когда рассматривался случай водородного рассеивателя (см.(2.20)). Формула, верная и при E близком к E_0 , имеет вид:

$$F(E) = \frac{l_H(E)Q}{8\pi m E^2} \left[1 + \delta \left(\ln \frac{E_0}{E} \right) \right]. \quad (4.4)$$

Чтобы убедиться в этом достаточно проинтегрировать (4.3) по E от $E_0 - \Delta$ до $E_0 + \Delta$, $\Delta \rightarrow 0$.

Полученный результат является очевидным, ибо мы пренебрегаем изменением энергии нейтрона при соударении его с ядром тяжелого рассеивателя, однако учитываем происходящее при таком соударении изменение направления движения нейтрона. Поэтому функция распределения $F(E)$, которая определяется только замедляющими свойствами ядер, имеет одинаковый вид как при наличии тяжелого рассеивателя, так и без него. Напротив, средний квадрат длины замедления, а также среднее смещение нейтрона в каком-либо направлении определяются также изменением направления движения нейтрона, происходящим при соударении с ядрами, и поэтому существенно зависят от наличия тяжелого рассеивателя.

Перейдем к нахождению функции $g(E)$, которая определяется формулами (2.2) и (2.4). Умножив уравнение (4.1) на g и проинтегрировав произведение по всему объему, получим после устранения δ -функций (см. формулу (3.2')) следующее уравнение для определения $g(E)$:

$$g(E) \left(\frac{1}{l_0(E)} + \frac{1}{l_H(E)} \right) - \frac{1}{E(1-\epsilon_0)} \int_E^{E/\epsilon_0} \frac{\cos\vartheta_0}{l_0(E')} g(E') dE' -$$

$$- \frac{1}{E} \int_E^{\infty} \frac{\cos\vartheta_H}{l_H(E')} g(E') dE' = F(E). \quad (4.5)$$

Здесь $\cos\vartheta_0$ и $\cos\vartheta_H$ определяется по формуле (3.3), если положить в ней, соответственно, $\epsilon = \epsilon_0$ и $\epsilon = 0$.

$$\cos\vartheta_0 = \frac{m+M}{2m} \left(\sqrt{\frac{E}{E'}} - \sqrt{\epsilon_0} \sqrt{\frac{E'}{E}} \right) = \frac{1}{1-\sqrt{\epsilon_0}} \left(\sqrt{\frac{E}{E'}} - \sqrt{\epsilon_0} \sqrt{\frac{E'}{E}} \right),$$

$$\cos\vartheta_H = \sqrt{\frac{E}{E'}}. \quad (4.6)$$

Рассмотрим первый из интегралов, входящих в (4.5). Так как $\epsilon_0 \approx 1$, то область изменения энергии E' в этом интеграле невелика; мы вынесем поэтому $g(E')/l_0(E')$ за знак интеграла:

$$\frac{1}{E(1-\epsilon_0)} \int_E^{E/\epsilon_0} \frac{\cos\vartheta_0}{l_0(E')} g(E') dE' \cong$$

$$\cong \frac{1}{E(1-\epsilon_0)(1-\sqrt{\epsilon_0})} \frac{g(E)}{l_0(E)} \int_E^{E/\epsilon_0} \left(\sqrt{\frac{E}{E'}} - \sqrt{\epsilon_0} \sqrt{\frac{E'}{E}} \right) dE'. \quad (4.7)$$

Легко убедиться в том, что $\int_E^{E/\epsilon_0} \left(\sqrt{\frac{E}{E'}} - \sqrt{\epsilon_0} \sqrt{\frac{E'}{E}} \right) dE'$ представляет собой малую третьего порядка относительно $1 - \epsilon_0$. Поэтому первый интеграл в уравнении (4.5) содержит множителем

$1 - \varepsilon_0$. На этом основании можно вовсе не учитывать этот интеграл. Уравнение, служащее для определения $g(E)$, приобретает простой вид:

$$\left(\frac{1}{l_0(E)} + \frac{1}{l_H(E)} \right) g(E) - \int_E^\infty \frac{1}{\sqrt{EE'}} \frac{g(E')}{l_H(E')} dE' = F(E). \quad (4.8)$$

Отметим, что это уравнение, в отличие от уравнения (4.3) для $F(E)$, содержит член, учитывающий действие тяжелого рассеивателя.

Умножив (4.8) на \sqrt{E} и продифференцировав по E , получим следующее дифференциальное уравнение для определения функции $g(E)$:

$$\frac{d}{dE} \left[\sqrt{E} \left(\frac{1}{l_0(E)} + \frac{1}{l_H(E)} \right) g(E) \right] + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{g(E)}{l_H(E)} = \frac{d}{dE} [\sqrt{E} F(E)]. \quad (4.9)$$

Введем обозначения

$$\frac{l_H(E)}{l_0(E)} = \alpha(E), \quad \frac{g(E)}{l_H(E)} [1 + \alpha(E)] E = u(E). \quad (4.10)$$

Функция $u(E)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{du}{dE} + \frac{u}{2E} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \sqrt{E} \frac{d}{dE} (\sqrt{E} F). \quad (4.11)$$

Для того, чтобы установить начальное условие u , заметим, что по сути дела верхний предел в интеграле, входящем в уравнение (4.8), равен E_0 . Поэтому этот интеграл обратится в нуль, если положить в нем $E = E_0$. Отсюда следует, что

$$g(E_0) \left[\frac{1}{l_0(E_0)} + \frac{1}{l_H(E_0)} \right] = F(E_0)$$

и, следовательно,

$$u(E_0) = E_0 F(E_0). \quad (4.12)$$

Решение уравнения (4.11) с этим начальным условием имеет вид

$$u(E) = e^{\frac{1}{2} \int_E^{E_0} \frac{1-\alpha(E')}{1+\alpha(E')} \frac{dE'}{E'}} \int_{E_0}^E \sqrt{E'} \frac{d}{dE'} [\sqrt{E'} F(E')] e^{\frac{1}{2} \int_{E_0}^{E'} \frac{1-\alpha(E'')}{1+\alpha(E'')} \frac{dE''}{E''}} dE' + \\ + F(E_0) E_0 e^{-\frac{1}{2} \int_{E_0}^E \frac{1-\alpha(E')}{1+\alpha(E')} \frac{dE'}{E'}}. \quad (4.13)$$

Пользуясь выражением для $F(E)$ (4.4) и определением $u(E)$, представим $g(E)$ в виде

$$g(E) = \frac{Q}{8\pi m} \frac{l_H(E)}{E[1+\alpha(E)]} e^{\frac{1}{2} \int_E^{E_0} \frac{1-\alpha(E')}{1+\alpha(E')} \frac{dE'}{E'}} \left\{ \frac{l_H(E_0)}{E_0} \left[1 + \delta \left(\ln \frac{E_0}{E} \right) \right] - \right. \\ \left. - \int_E^{E_0+0} \sqrt{E'} dE' e^{\frac{1}{2} \int_{E_0}^{E'} \frac{1-\alpha(E'')}{1+\alpha(E'')} \frac{dE''}{E''}} \frac{d}{dE'} \frac{l_H(E')}{E'^{3/2}} \left[1 + \delta \left(\ln \frac{E_0}{E'} \right) \right] \right\}, \quad (4.14)$$

верхней предел $E_0 + 0$ означает, что в интеграле, содержащем δ -функцию, точка $E' = E_0$ находится внутри интервала интегрирования.

Перейдем теперь к нахождению функции $H(E)$

$$H(E) = \int r^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) dr.$$

Умножим уравнение (4.1) на r^2 и проинтегрируем по объему. Устранив δ -функцию интегрированием по углу ϑ между \mathbf{p}' и \mathbf{p} , получим

$$vH(E) \left[\frac{1}{l_0(E)} + \frac{1}{l_H(E)} \right] - \frac{2}{(1-\varepsilon_0)p} \int_E^{E/\varepsilon_0} \frac{H(E')}{l_0(E')} dE' - \\ - \frac{2}{p} \int_E^\infty \frac{H(E')}{l_H(E')} dE' = 2vg(E). \quad (4.15)$$

Первый из входящих сюда интегралов, в силу предположения $1 - \varepsilon_0 \ll 1$, может быть приближенно заменен на

$$\frac{2}{(1 - \varepsilon_0)p} \left(\frac{E}{\varepsilon_0} - E \right) \frac{H(E)}{l_0(E)} \approx \frac{vH(E)}{l_0(E)}.$$

Уравнение (4.15) приобретает поэтому вид

$$\frac{vH(E)}{l_H(E)} - \frac{2}{p} \int_E^\infty \frac{H(E')}{l_H(E')} dE' = 2vg(E), \quad (4.16)$$

или, если ввести прежнее обозначение

$$Z(E) = E \frac{H(E)}{l_H(E)}, \quad (4.17)$$

то

$$Z(E) - \int_E^\infty \frac{Z(E')dE'}{E'} = 2Eg(E), \quad (4.17')$$

где $g(E)$ определяется формулой (4.14).

Дифференцируя уравнение (4.17) по E , получим

$$Z'(E) + \frac{Z(E)}{E} = 2[Eg(E)]', \quad (4.18)$$

откуда

$$\frac{1}{E}(EZ)' = 2(Eg)'$$

и

$$Z(E) = \frac{2}{E} \int_E^{E_0} E' g(E') dE' + 2Eg(E). \quad (4.19)$$

Это решение удовлетворяет нужному начальному условию

$$Z(E_0) = 2E_0g(E_0), \quad (4.12')$$

вытекающему из уравнения (4.17') (в этом уравнении верхний предел по существу дела равен E_0 , поэтому интеграл обращается в нуль при $E = E_0$).

Первый из решений уравнения (4.17) в силу предположения $1 - \varepsilon_0 \ll 1$ можно заменить на

$$\frac{2}{pE} \left(\frac{E}{\varepsilon_0} - E \right) \frac{H(E)}{l_0(E)} \approx \frac{vH(E)}{l_0(E)}$$

Задавшись $v = 1$, приобретем искомую форму

$$\frac{vH(E)}{l_0(E)} = \frac{2}{p} \int_E^\infty \frac{H(E')}{l_0(E')} dE' = 2vg(E)$$

или, если ввести прежнее обозначение
 $Z(E) = E \frac{H(E)}{l_0(E)}$

то

$$Z(E) - \int_E^\infty \frac{Z(E')dE'}{E'} = 2Eg(E)$$

и $g(E)$ определяется формулой (4.14).
Дифференцируя уравнение (4.17') по E , получим

$$Z'(E) + \frac{Z(E)}{E} = 2[Eg(E)]'$$

$$\text{тогда } \frac{1}{E}(EZ)' = 2(Eg)'$$

$$\text{и } Z(E) = \frac{2}{E} \int_E^{E_0} E' g(E') dE' + 2Eg(E)$$

это решение удовлетворяет начальному условию
 $Z(E_0) = 2E_0g(E_0)$,

полученное из уравнения (4.17') (см. уравнение 4.12').
При этом из уравнения (4.17') получаем
 $\frac{1}{E}(EZ)' = 2(Eg)'$.

$$\text{и } H(E) = 2l_0(E) \left\{ g(E) + \frac{1}{E} \int_E^{E_0} u g(u) du \right\}$$

и здесь сплошь (4.17') удовлетворяет начальному условию

$$\bar{Z}'(E) = \frac{H(E)}{E(E)}$$

После этого задача решена.

Фрагмент рукописи, написанный А.И.Ахиезером

По формуле (4.17) определяем $H(E)$

$$H(E) = 2l_H(E) \left[g(E) + \frac{1}{E^2} \int_E^{E_0} ug(u) du \right] \quad (4.20)$$

и далее, пользуясь выражением (4.4) для $F(E)$, находим квадрат длины замедления, равный

$$\bar{r^2}(E) = \frac{H(E)}{F(E)}.$$

Таким образом, задача определения длины замедления в случае замедлителя, представляющего собой смесь водорода и тяжелого рассеивателя, сведена к квадратурам.

§5. Пространственное распределение нейтронов в диффузационной области

В предыдущих параграфах была определена функция распределения нейтронов в импульсном пространстве и найдены ее три первых пространственных момента. Теперь мы перейдем к детальному рассмотрению пространственного распределения нейтронов.

Найти функцию в общем виде, как указывалось выше, не удается. В этом параграфе мы выведем дифференциальное уравнение, определяющее пространственное распределение нейтронов в диффузационной области.

Пусть источник нейтронов окружен некоторым замедлителем. При каждом столкновении с ядром замедлителя нейtron в среднем теряет не больше половины своей энергии. Поэтому для замедления нейтрона до энергий, малых по сравнению с его начальной энергией, требуется большое число столкновений.

Ясно, что после достаточно большого числа столкновений может исчезнуть корреляция между направлениями векторов \mathbf{r} и \mathbf{p} , иными словами, все значения угла θ между векторами \mathbf{r} и \mathbf{p} с большой степенью точности могут быть равновероятными.

Функция распределения в этих условиях не будет сильно зависеть от направления движения нейтрона. Определение пространственного распределения нейтронов сводится тогда к диффузационной задаче.

Как будет видно из дальнейшего, диффузационное приближение несправедливо только на очень больших расстояниях от источника. Обычно на этих расстояниях находится малая часть всех нейтронов.

Вторым случаем, когда несправедливо диффузационное рассмотрение, является область энергий, близких к начальной энергии нейтронов, испускаемых источником. Очевидно, что в этом случае нейtron испытывает мало столкновений, благодаря чему сохраняется корреляция между \mathbf{r} и \mathbf{p} . Отметим еще, что при замедлении в водороде возникают особенности, связанные с сильной зависимостью длины свободного пробега от энергии. В дальнейшем мы не будем рассматривать водородные замедлители.

Перейдем к выяснению условий применимости диффузационного приближения.

Будем искать функцию распределения в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_0(\mathbf{r}, E, t) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, E, t), \quad (5.1)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{p}/p$, а функции f_0 и \mathbf{F} не зависят от направления импульса нейтрона.

Выражение (5.1) представляет собой два первых члена в разложении функции распределения нейтронов в ряд по сферическим функциям, зависящим от ориентации вектора \mathbf{p} . В диффузационном приближении, как будет показано ниже, достаточно ограничиться двумя первыми членами разложения.

Мы предположим, что векторная функция \mathbf{F} , характеризующая анизотропию в распределении нейтронов, по абсолютному значению значительно меньше функции f_0

$$|\mathbf{F}(\mathbf{r}, E, t)| \ll f_0(\mathbf{r}, E, t), \quad (5.2)$$

и далее выясним, при каких условиях выполняется это неравенство.

Если источник нейтронов точечный, то функция распределения зависит от \mathbf{r} , p и угла θ между \mathbf{r} и \mathbf{p} (\mathbf{r} - расстояние от источника). В этом случае векторная функция имеет направление \mathbf{r} , и формула (5.1) может быть написана в виде:

$$f = f_0(r, E, t) + \cos\theta F(r, E, t). \quad (5.1')$$

Заметим, что функция \mathbf{F} определяет плотность потока нейтронов. Действительно, плотность потока \mathbf{j} определяется согласно формуле

$$\mathbf{j} = \int \mathbf{v} f \, dO_p, \quad (5.3')$$

где dO_p – элемент телесного угла p . Подставляя сюда вместо f выражение (5.1), получим

$$\mathbf{j} = \frac{4\pi}{3} \mathbf{v} \mathbf{F}. \quad (5.3)$$

Имея в виду дальнейшие приложения, мы выведем теперь общие уравнения для f_0 и \mathbf{F} , не делая сперва предположения о стационарности функции распределения.

Воспользуемся общим кинетическим уравнением (1.9) и выполним в нем интегрирование по углу ϑ между векторами \mathbf{r}' и \mathbf{r} . При этом исчезнет δ -функция, взамен которой мы получим

$$\delta \left(\frac{\mathbf{p}'^2 - \mathbf{p}^2}{2m} - \frac{(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2}{2M} \right) d\mathbf{p}' \rightarrow M \frac{\mathbf{p}' d\mathbf{p}'}{p}, \quad (5.4)$$

где φ' – азимут вектора \mathbf{p}' (по отношению к плоскости \mathbf{r}, \mathbf{p}).

Предполагая сперва для простоты, что имеется только один сорт рассеивающих атомов, мы получим следующее кинетическое уравнение для определения функции распределения f :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mathbf{v} \operatorname{grad} f - \frac{v}{l} f + \frac{2}{p(1-\varepsilon)} \int_E^{E/\varepsilon} \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t)}{l(E')} dE' \frac{d\varphi'}{2\pi} + q \quad (5.5)$$

(при написании этого уравнения мы пренебрегли поглощением нейтронов).

Подставим в (5.5) вместо f выражение (5.1). Мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} &= -\mathbf{v} \operatorname{grad} f_0 - \mathbf{v} \operatorname{grad}(\mathbf{u} \mathbf{F}) - \frac{v}{l} f_0 - \frac{\mathbf{v} \mathbf{F}}{l} + \\ &+ \frac{2}{p(1-\varepsilon)} \int_E^{E/\varepsilon} \frac{f'_0}{l'} dE' \frac{d\varphi'}{2\pi} + \frac{2}{p(1-\varepsilon)} \int_E^{E/\varepsilon} \frac{\mathbf{u}' \mathbf{F}'}{l'} dE' \frac{d\varphi'}{2\pi} + q \quad (5.6) \end{aligned}$$

(штрих над величиной означает, что значение энергии, от которой она зависит, равно E').

Преобразуем последний интеграл. Будем для простоты считать, что источник нейтронов – точечный. В этом случае согласно (5.1')

$$\mathbf{u}' \mathbf{F}' = \cos \theta' F(r, E', t),$$

где θ' – угол между \mathbf{r}' и \mathbf{r} .

Согласно известной формуле тригонометрии

$$\cos \theta' = \cos \theta \cos \vartheta + \sin \theta \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi'),$$

где θ – угол между \mathbf{r} и \mathbf{r}' , ϑ – угол между направлениями импульсов \mathbf{r} и \mathbf{r}' и φ – азимут \mathbf{r} .

При интегрировании по φ' последний член исчезает, поэтому уравнение (5.6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} &= -\mathbf{v} \operatorname{grad} f_0 - \mathbf{v} \operatorname{grad}(\mathbf{u} \mathbf{F}) - \frac{v}{l} f_0 - \frac{\mathbf{v} \mathbf{F}}{l} + \\ &+ \frac{2}{p(1-\varepsilon)} \int_E^{E/\varepsilon} \frac{f'_0}{l'} dE' + \frac{2}{p(1-\varepsilon)} \int_E^{E/\varepsilon} \cos \vartheta \frac{\mathbf{u} \mathbf{F}'}{l'} dE' + q. \quad (5.7) \end{aligned}$$

Величина $\cos \vartheta$ определяется из равенства нулю аргумента δ -функции

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{M+m}{2m} \sqrt{\frac{E}{E'}} - \frac{M-m}{2m} \sqrt{\frac{E'}{E}} = \frac{1}{1-\sqrt{\varepsilon}} \left(\sqrt{\frac{E}{E'}} - \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{E'}{E}} \right), \\ \varepsilon &= \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2. \quad (5.8) \end{aligned}$$

Из (5.7) легко получить уравнения для f_0 и \mathbf{F} , не содержащие \mathbf{u} . Проинтегрируем для этого (5.7) по \mathbf{u} . Замечая, что при интегрировании по \mathbf{u} мы можем произвести замену:

$$\mathbf{v} \operatorname{grad}(\mathbf{u} \mathbf{F}) = v \left(u_x^2 \frac{\partial F}{\partial x} + u_y^2 \frac{\partial F}{\partial y} + u_z^2 \frac{\partial F}{\partial z} \right),$$

и что среднее значение u_i^2 ($i = x, y, z$) равно $1/3$, получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = -\frac{v}{3} \operatorname{div} \mathbf{F} - \frac{v}{l} f_0 + \frac{2}{p(1-\varepsilon)} \int_E^{E/\varepsilon} \frac{f_0(r, E', t)}{l(E')} dE' + q. \quad (5.9)$$

Умножив (5.7) на \mathbf{u} и проинтегрировав результат по \mathbf{u} , получим второе уравнение, связывающее f_0 и \mathbf{F} :

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = -v \operatorname{grad} f_0 - \frac{v}{l} \mathbf{F} + \frac{2}{p(1-\varepsilon)} \int_E^{E/\varepsilon} \cos \vartheta \frac{\mathbf{F}'}{l'} dE'. \quad (5.10)$$

В этом уравнении мы не будем учитывать производную по времени $\partial \mathbf{F} / \partial t$, т.к. эта величина значительно меньше $(v/l)\mathbf{F}$. Действительно, $\partial \mathbf{F} / \partial t$, по порядку величины равно $(1/T_D)\mathbf{F}$, где T_D – время, в течение которого функция \mathbf{F} претерпевает существенное изменение. Это время в диффузионных процессах всегда значительно больше времени между отдельными столкновениями и равного по порядку величины l/v . Отсюда следует, что в диффузионной области можно пренебречь $\partial \mathbf{F} / \partial t$ по сравнению с $(v/l)\mathbf{F}$.

Заметим, что аналогичные рассуждения не применимы к уравнению (5.9), ибо, как мы сейчас покажем, член v/l , входящий в (5.9), фактически компенсируется последним слагаемым (интегралом).

Итак, мы имеем систему уравнений

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = -\frac{v}{3} \operatorname{div} \mathbf{F} - \frac{v}{l} f_0 + \frac{2}{p(1-\varepsilon)} \int_E^{E/\varepsilon} \frac{f'_0}{l'} dE' + q, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{F} - \frac{2l}{vp(1-\varepsilon)} \int_E^{E/\varepsilon} \cos \vartheta \frac{\mathbf{F}'}{l'} dE' = -l \operatorname{grad} f_0. \quad (5.12)$$

Переходя к исследованию этих уравнений, обратим внимание на то обстоятельство, что моменты функций распределения $F(p)$, $g(p)$, $H(p)$ обратно пропорциональны E^2 (в предположении постоянства длины свободного пробега l).

Произведения $E^2 F$, $E^2 g$, $E^2 H$ лишь слабо (логарифмически) зависят от энергии.

По этой причине можно считать, что f_0 (в предположении $l = \text{const}$) является медленно меняющейся функцией энергии.

Предполагая, что длина свободного пробега слабо зависит от энергии, мы будем считать, что функция

$$\frac{f_0(\mathbf{r}, E, t) E^2}{l(E)}$$

медленно изменяется с энергией E .

Мы будем поэтому в дальнейшем пользоваться разложением

$$\frac{f'_0 E'^2}{l'} = \frac{f_0 E^2}{l} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_0 E^2}{l} \right) (y - y'), \quad (5.13)$$

где

$$y = \ln \frac{E_0}{E}, \quad y' = \ln \frac{E_0}{E'}$$

(E_0 – начальная энергия нейтронов).

Заметим, что ограничиться первым членом в разложении (5.13) недостаточно, ибо, как легко убедиться, при этом второй и третий члены в (5.11) сокращаются.

Действительно, подставляя (5.13) в (5.11), мы получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = -\frac{v}{3} \operatorname{div} \mathbf{F} - \frac{1}{\psi} \frac{v}{E^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_0 E^2}{l} \right) + q, \quad (5.14)$$

где

$$\frac{1}{\psi} = \frac{E}{1-\varepsilon} \int_E^{E/\varepsilon} \frac{dE'}{E'^2} \ln \frac{E'}{E} = \frac{1-\varepsilon+\varepsilon \ln \varepsilon}{1-\varepsilon}. \quad (5.14')$$

Аналогичным образом мы будем считать медленно меняющейся функцию

$$\frac{FE^2}{l(E)}.$$

Для этой функции также справедливо разложение типа (5.13), однако в выражении (5.13), как легко видеть, можно не учитывать члены $\partial(FE^2/l) \partial y$ ($y' - y$) и пользоваться приближенным

равенством

$$\frac{\mathbf{F}' E'^2}{l'} \approx \frac{\mathbf{F} E^2}{l},$$

откуда

$$\frac{\mathbf{F}'}{l'} \approx \frac{\mathbf{F}}{l} \frac{E^2}{E'^2}. \quad (5.15')$$

Подставляя (5.15') в (5.12), получим

$$\mathbf{F} \left(1 - \frac{E}{1-\varepsilon} \int_E^{E/\varepsilon} \frac{\cos\vartheta}{E'^2} dE' \right) = -l \operatorname{grad} f_0, \quad (5.15)$$

где $\cos\vartheta$ определяется согласно формуле (5.8).

Входящий сюда интеграл, содержащий $\cos\vartheta$ (вместе с множителем $E/(1-\varepsilon)$), можно рассматривать как некоторое среднее значение $\cos\vartheta$.

Вводя обозначение

$$\overline{\cos\vartheta} = \frac{E}{1-\varepsilon} \int_E^{E/\varepsilon} \frac{\cos\vartheta}{E'^2} dE', \quad (5.16')$$

мы перепишем (5.15) в виде

$$\mathbf{F} = -l_{tr} \operatorname{grad} f_0, \quad (5.16)$$

где

$$\frac{1}{l_{tr}} = \frac{1 - \overline{\cos\vartheta}}{l}. \quad (5.16'')$$

Величину l_{tr} можно назвать транспортной длиной свободного пробега нейтронов.

Пользуясь формулой (5.8), легко определить $\overline{\cos\vartheta}$

$$\begin{aligned} \overline{\cos\vartheta} &= \frac{E}{1-\varepsilon} \int_E^{E/\varepsilon} \frac{1}{2E'^2} \left(\frac{M}{m} + 1 \right) \times \\ &\times \left(\sqrt{\frac{E}{E'}} - \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{E'}{E}} \right) dE' = \frac{2}{3} \frac{m}{M}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Введем в рассмотрение функции $n(\mathbf{r}, E, t)$ и $\mathbf{N}(\mathbf{r}, E, t)$,

$$n = 8\pi m \frac{f_0 E^2}{l\psi}, \quad \mathbf{N} = 8\pi m \frac{\mathbf{F} E^2}{l\psi} \quad (5.18)$$

(множитель $8\pi m/\psi$ введен для удобства нормировки, см. ниже).

Уравнения (5.14) и (5.16) в области, не содержащей источников, приобретают при этом вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= -\frac{v}{3} \operatorname{div} \mathbf{N} - \frac{v}{l\psi} \frac{\partial n}{\partial y}, \\ \mathbf{N} &= -l_{tr} \operatorname{grad} n, \end{aligned} \quad (5.19')$$

откуда

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n - \frac{v}{l\psi} \frac{\partial n}{\partial y}, \quad (5.19)$$

где величина

$$D = \frac{1}{3} v l_{tr} \quad (5.19'')$$

представляет собой коэффициент диффузии замедляющихся нейтронов, скорость которых равна v .

Вводя вместо y новую переменную τ согласно соотношению

$$d\tau = \frac{1}{3} l l_{tr} \psi dy = \frac{1}{3} l^2 \frac{(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon)(1 - \frac{2}{3} \frac{m}{M})} dy, \quad (5.19''')$$

перепишем уравнение (5.19) в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n - D \frac{\partial n}{\partial \tau}. \quad (5.20)$$

В стационарном случае функция n удовлетворяет уравнению

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial \tau}. \quad (5.21)$$

Мы получили уравнение диффузационного типа, в котором роль времени играет переменная τ .

Если длина свободного пробега l постоянна, то

$$\tau(E) = \frac{l^2}{3} \frac{(1-\varepsilon)\ln(E_0/E)}{(1-\varepsilon+\varepsilon\ln\varepsilon)(1-\frac{2}{3}\frac{m}{M})}. \quad (5.20')$$

Если $l(E)$ не постоянно, но слабо зависит от энергии, то τ определяется как

$$\tau(E) = \frac{(1-\varepsilon)}{3(1-\varepsilon+\varepsilon\ln\varepsilon)(1-\frac{2}{3}\frac{m}{M})} \int_E^{E_0} l^2(E) \frac{dE}{E}. \quad (5.20'')$$

Приведем для дальнейшего выражение для τ , справедливое в случае тяжелого замедлителя, когда $1-\varepsilon \ll 1$. В этом случае (l считается постоянным)

$$\tau(E) = \frac{2}{3} l^2 \frac{\ln(E_0/E)}{(1-\varepsilon)(1-\frac{2}{3}\frac{m}{M})}, \quad \varepsilon = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2. \quad (5.20''')$$

Заметим, что в области энергии $E \ll E_0$ для тяжелого замедлителя с точностью до членов порядка $(1-\varepsilon)/\ln(E_0/E)$ средний квадрат длины замедления нейтронов может быть согласно формуле (3.23) представлен в виде

$$\overline{r^2(E)} = 6\tau(E). \quad (5.20''''')$$

Разъясним теперь смысл нормировки (5.18). Покажем для этого, как следует записывать уравнение для n при наличии источников нейтронов. Пусть имеются монохроматические источники нейтронов с объемной плотностью $Q(\mathbf{r})$. Это значит, что

$$q = Q(\mathbf{r}) \frac{\delta(p - p_0)}{4\pi p_0^2}.$$

При наличии источников мы должны к правой части первого из уравнений (5.19') прибавить выражение

$$\frac{8\pi m}{\psi l} E^2 q = \frac{E}{\psi l} \delta(p - p_0) Q(\mathbf{r}). \quad (5.22')$$

Уравнение (5.21) получается из (5.20) (в случае когда $(\partial f_0/\partial t = 0)$ делением на D . Поэтому при наличии источников нейтронов к Δn в уравнении (5.21) следует добавить член

$$\frac{E}{D\psi l} \delta(p - p_0) Q(\mathbf{r}). \quad (5.22)$$

Замечая, что

$$\delta(p - p_0) = \delta(\tau) \frac{d\tau}{dp}$$

и пользуясь формулами (5.19'''), (5.13), перепишем (5.22) в виде

$$\frac{E}{D\psi l} \delta(p - p_0) Q(\mathbf{r}) = Q(\mathbf{r}) \delta(\tau). \quad (5.23)$$

Таким образом, уравнение, определяющее n при наличии монохроматических источников нейтронов, имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \Delta n + Q \delta(\tau). \quad (5.24)$$

Это уравнение равносильно уравнению (5.21)

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial \tau}$$

вместе с "начальным" условием: при $\tau = 0$ n должно равняться $Q(\mathbf{r})$

$$n(\mathbf{r}, 0) = Q(\mathbf{r}). \quad (5.21')$$

Заметим, что, поскольку f_0 пропорционально n и множитель пропорциональности зависит только от энергии, то решение уравнения (5.21), пронормированное согласно условию

$$\int n(\mathbf{r}, \tau) d\mathbf{r} = 1, \quad (5.25)$$

определяет плотность вероятности того, что нейtron с энергией $E = E(\tau)$ находится в точке \mathbf{r} ($nd\mathbf{r}$ – вероятность нахождения нейтрона в элементе объема $d\mathbf{r}$).

Предыдущие результаты относились к тому случаю, когда рассеиватель содержит атомы одного сорта.

Если замедление нейтронов происходит в среде, содержащей атомы различных сортов, то все выведенные выше формулы остаются в силе; следует лишь под $1/(\psi l)$ подразумевать сумму

$$\frac{1}{\psi l} = \sum_{\alpha} \frac{1}{\psi_{\alpha} l_{\alpha}}, \quad (5.26)$$

распространенную на все сорта рассеивающих ядер (l_{α} – длина свободного пробега нейтрона по отношению к рассеянию атомами сорта α , $(1/l_{\alpha}) = N_{\alpha} \sigma_{\alpha}^s$; величина ψ_{α} определяется согласно формуле (5.14'), в которую вместо ϵ следует подставить $\epsilon_{\alpha} = [(M_{\alpha} - m)/(M_{\alpha} + m)]^2$, M_{α} – масса ядра сорта α).

Транспортная длина свободного пробега определяется теперь согласно формуле

$$\frac{1}{l_{tr}} = \sum_{\alpha} \frac{1 - \overline{\cos \vartheta_{\alpha}}}{l_{\alpha}},$$

где

$$\overline{\cos \vartheta_{\alpha}} = \frac{E}{1 - \epsilon_{\alpha}} \int_{E}^{E/\epsilon_{\alpha}} \frac{\cos \vartheta_{\alpha}}{E'^2} dE',$$

$$\cos \vartheta_{\alpha} = \frac{1}{1 - \sqrt{\epsilon_{\alpha}}} \left(\sqrt{\frac{E}{E'}} - \sqrt{\epsilon_{\alpha}} \sqrt{\frac{E'}{E}} \right). \quad (5.26')$$

Мы должны теперь выяснить, при каких условиях справедливы наши результаты, иными словами, при каких условиях справедливо предположение о малости асимметричной части функции распределения.

С этой целью достаточно рассмотреть решения уравнений (5.21), (5.16) в случае точечного источника монохроматических нейтронов, находящегося в бесконечном замедлителе.

Если источник нейтронов с энергией E_0 расположить в начале координат, то при $r = 0$, т.е. при энергии $E = E_0$ нейтроны будут находиться только в точке $r = 0$.

Мы должны поэтому найти решение диффузационной проблемы (5.21) при условии, что в "момент времени" $\tau = 0$ частица находится в точке $r = 0$. Нужное решение имеет, как известно, вид

$$n(r, \tau) = \frac{\text{const}}{(2\pi\tau)^{3/2}} e^{-r^2/4\tau}. \quad (5.27)$$

Согласно формуле (5.19'), функция N равна

$$\mathbf{N} = -l_{tr} \operatorname{grad} n = \frac{l_{tr} \mathbf{r}}{2\tau}. \quad (5.27')$$

Отсюда следует, что

$$\frac{|\mathbf{N}|}{n} = \frac{rl_{tr}}{2\tau}. \quad (5.27'')$$

Для того, чтобы наше приближение имело смысл, необходимо выполнение условия $|\mathbf{N}| \ll n$. Из (5.27'') следует, что для этого r должно удовлетворять неравенству

$$r \ll \frac{2\tau}{l_{tr}}. \quad (5.28)$$

Если $1 - \epsilon \ll 1$, то условие (5.28) приобретает вид

$$r \ll \frac{4}{3} l \frac{\ln(E_0/E)}{1 - \epsilon}. \quad (5.28')$$

Итак, сделанное нами предположение о малости асимметричной функции распределения выполняется в области пространства (5.28). В этой области законно, следовательно, диффузационное рассмотрение.

Легко понять смысл верхней границы диффузационной области. Для того, чтобы проблему можно было рассматривать как диффузционную, функция распределения должна медленно меняться на расстоянии порядка длины пробега (точнее говоря, транспортной длины пробега l_{tr}), т.е. должно выполняться условие

$$l_{tr} \frac{\partial n}{\partial r} \ll n.$$

Это условие дает

$$\frac{l_{tr} r}{2\tau} \ll 1,$$

т.е. приводит к прежнему результату $r \ll \frac{2\tau}{l_{tr}}$.

Заметим, что за границей применимости диффузационной теории (5.28) находится очень малая часть всех нейтронов. В самом деле, отношение функции n при $r_0 = 2\tau/l$ к ее значению при $r = 0$ равняется:

$$e^{-\frac{r}{l^2}} \approx e^{-\frac{1-\epsilon}{1-\epsilon+\epsilon \ln \epsilon} \ln \frac{E_0}{E}} = \left(\frac{E}{E_0} \right)^{\frac{1-\epsilon}{1-\epsilon+\epsilon \ln \epsilon}} \ll 1, \quad E \ll E_0.$$

Поэтому интеграл от n по объему сферы $r \leq r_0$ почти не отличается от единицы (считая, что $4\pi \int_0^{r_0} nr^2 dr = 1$). Таким образом практически все поле замедляющихся нейтронов можно описывать диффузионным способом (исключая случай водородных замедлителей (см. выше)).

То обстоятельство, что на очень больших расстояниях от источника пространственное распределение нейтронов должно отличаться от даваемого формулой $n \sim e^{-\frac{r^2}{4t}}$, явствует также из следующих соображений.

Последняя формула дает очень быстрое спадание плотности нейтронов с увеличением расстояния. Между тем, в область пространства, расположенную далеко от источника, возможен непосредственный "проскок" нейтронов, не испытавших столкновений с ядрами замедлителя. Число таких нейтронов пропорционально $e^{-\frac{r}{l_0}}$, где l_0 – длина пробега нейтронов с энергией E_0 .

Быстрые нейтроны, попавшие на далекие расстояния, будут там замедляться; в результате установится своеобразное равновесие между "компонентами" быстрых и замедленных нейтронов: число последних будет пропорционально числу быстрых нейтронов т.е. $e^{-\frac{r}{l_0}}$. Из этих соображений становится ясно, что вдали от источника должен иметь место экспоненциальный, типа $e^{-\frac{r}{l_0}}$, спад плотности нейтронов с расстоянием в отличие от закона $e^{-\frac{r^2}{4t}}$, справедливого в диффузионной области, где находятся, главным образом, нейтроны, испытавшие много столкновений.

В случае, когда $1 - \epsilon \ll 1$, можно указать простые соображения, приводящие к уравнению (5.21) [3]. Эти соображения основаны на предположении о справедливости диффузионной картины. Заметим предварительно, что если нейtron при каждом столкновении с ядром рассеивателя теряет лишь небольшую долю своей энергии, то последнюю можно считать однозначной функцией "возраста" нейтрона. Эту связь между энергией нейтрона и его возрастом легко установить. При каждом

столкновении нейтрона с ядром теряется доля энергии, равная

$$\Delta E \approx \frac{1 - \epsilon}{2} E.$$

Пусть ν есть среднее число столкновений, которые испытал нейтрон возраста t и энергии $E(t)$. Тогда

$$\frac{\partial E}{\partial \nu} = -\frac{1 - \epsilon}{2} E.$$

Откуда

$$\nu = \frac{2}{1 - \epsilon} \ln \frac{E_0}{E}.$$

По определению длины пробега l имеем

$$d\nu = \frac{v}{l} dt.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{v}{l} \frac{(1 - \epsilon)}{2} E, \\ t &= \frac{2}{1 - \epsilon} \int_{E_0}^E \frac{l}{v} \frac{dE}{E}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Наша задача состоит в нахождении плотности нейтронов как функции их энергии и координат в стационарном случае, когда источник длительно испускает нейтроны. Вместо этой задачи можно рассматривать следующую нестационарную задачу. В момент времени $t = 0$ источник испустил некоторый "ливень" нейтронов. Какова плотность нейтронов $\rho(\mathbf{r}, t)$ в точке \mathbf{r} в момент времени t ? Иначе говоря, какова плотность нейтронов возраста t ?

В основу определения ρ положим диффузионное уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \Delta \rho - \frac{1}{T_c} \rho, \quad (5.30)$$

где $D = \frac{1}{3} v l$ – коэффициент диффузии, T_c – время жизни нейтрона по отношению к захвату. Это уравнение справедливо, когда захват мал, т.е., когда $\sigma_c \ll \sigma_s$ (см. §30).

Выше мы видели, что возраст нейтрона однозначно связан с его энергией. Полагая в уравнении (5.30)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial E} \cdot \frac{v}{l} \frac{1-\epsilon}{2} E,$$

получим

$$-\frac{3(1-\epsilon)}{2l^2} E \frac{\partial \rho}{\partial E} = \Delta \rho - \frac{1}{L^2} \rho, \quad (5.31)$$

$$L = \sqrt{\frac{lvT_c}{3}} = \sqrt{\frac{ll_c}{3}}.$$

Введя новую переменную

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2l^2}{3(1-\epsilon)} \ln \frac{E_0}{E} = \frac{2l^2}{3(1-\epsilon)} y, \\ d\tau &= D dt = \frac{1}{3} lv dt, \end{aligned} \quad (5.31')$$

перепишем (5.31) в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \Delta \rho - \frac{1}{L^2} \rho. \quad (5.32)$$

Этим уравнением определяется плотность нейтронов в точке \mathbf{r} в момент времени $t = t(\tau)$ в единовременно испущенном "ливне" нейтронов.

Рассмотрим теперь стационарную задачу, в которой нейтроны испускаются длительно. Плотность вероятности того, что в этом случае нейtron находится в точке \mathbf{r} и имеет энергию $E = E_0 e^{-y}$, равна $n(\mathbf{r}, \tau)$. Ясно, что $n(\mathbf{r}, \tau)$ пропорционально $\rho(\mathbf{r}, \tau)$. Положив в (5.32) $L = \infty$, мы получим уравнение (5.21).

Формула (5.32) показывает, что плотность вероятности $n(\mathbf{r}, y)$ при наличии слабого поглощения³ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \Delta n - \alpha(\tau)n; \quad \alpha(\tau) = \frac{1}{L^2} = \frac{3}{l_c l_s} \quad (5.33)$$

(l_c и l_s – длины пробега по отношению к захвату и рассеянию).

³ В случае сильного поглощения диффузационное уравнение неприменимо, см. §30.

Сделав в уравнении (5.33) подстановку

$$n(\mathbf{r}, \tau) = e^{-\int_0^\tau \alpha(\tau') d\tau'} n'(\mathbf{r}, \tau), \quad (5.33')$$

получим для $n'(\mathbf{r}, \tau)$ уравнение

$$\frac{\partial n'}{\partial \tau} = \Delta n', \quad (5.33'')$$

характерное для случая, когда поглощение отсутствует.

Мы видим отсюда, что слабое поглощение не влияет на пространственное распределение нейтронов. Этим оправдывается сделанное при определении среднего квадрата длины замедления пренебрежение поглощением нейтронов.

В заключение этого параграфа мы покажем, что, пользуясь уравнением (5.21), легко получить выражение (2.21) для функции распределения нейтронов $F(p)$ по импульсам.

Действительно, введем в рассмотрение интеграл от функции $n(\mathbf{r}, \tau)$ по всему пространству

$$\nu(\tau) = \int n(\mathbf{r}, \tau) d\mathbf{r}. \quad (5.34)$$

Согласно (5.21),

$$\frac{d\nu}{d\tau} = \int \frac{\partial n}{\partial \tau} d\mathbf{r} = \int \Delta n d\mathbf{r}. \quad (5.34')$$

Пользуясь теоремой Гаусса, можно представить выражение (5.34') в виде поверхностного интеграла

$$\int \Delta n d\mathbf{r} = \int_S \frac{\partial n}{\partial z} ds$$

(здесь z – направление внешней нормали к поверхности, ограничивающей объем).

Если источники нейтронов расположены в ограниченной части пространства, то на бесконечности $\partial n / \partial z = 0$, и поэтому интеграл, взятый по всему пространству, обращается в нуль. Отсюда видно, что

$$\frac{d\nu}{d\tau} = 0,$$

т.е.

$$\nu(\tau) = \nu(0) = \int n(\mathbf{r}, 0) d\mathbf{r} = \int Q(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = Q_0,$$

где Q_0 общая мощность источников.

Вспоминая связь между $n(\mathbf{r}, \tau)$ и функцией распределения $f_0(\mathbf{r}, \tau)$, получим

$$F(p) = \int f(\mathbf{r}, \tau) d\mathbf{r} \approx \int f_0(\mathbf{r}, \tau) d\mathbf{r} = \frac{\nu \psi l}{8\pi m E^2} \approx \frac{Q_0 \psi l}{8\pi m E^2}.$$

Последнее выражение совпадает с полученной нами ранее формулой (2.21) для $F(p)$.

§6. Границные условия для быстрых нейтронов

В тех случаях, когда источник нейтронов находится в неоднородном рассеивателе, для решения уравнения (5.21) необходимо знать граничные условия, которым подчиняется функция $n(\mathbf{r}, \tau)$.

Границные условия состоят, очевидно, в равенстве плотностей нейтронов и их потоков на границе двух сред.

Обозначая две соприкасающиеся вдоль некоторой поверхности среды индексами 1 и 2, мы будем иметь следующие граничные условия:

$$f_0^{(1)} = f_0^{(2)}, \quad \mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{F}^{(2)}. \quad (6.1)$$

Так как

$$\mathbf{F} = -l_{tr} \operatorname{grad} f_0, \quad (6.1')$$

то второе из указанных выше условий можно представить в виде

$$D^{(1)} \operatorname{grad} f_0^{(1)} = D^{(2)} \operatorname{grad} f_0^{(2)}, \quad (6.2)$$

где

$$D^{(1)} = \frac{1}{3} l_{tr}^{(1)} v, \quad D^{(2)} = \frac{1}{3} l_{tr}^{(2)} v \quad (6.2')$$

суть коэффициенты диффузии нейтронов, скорость которых равна v в обеих средах.

Выразим функции $f_0^{(1)}, f_0^{(2)}$ через $n^{(1)}, n^{(2)}$.

Пользуясь формулой (5.18), получим из (6.1), (6.1')

$$\psi^{(1)} l^{(1)} n^{(1)} = \psi^{(2)} l^{(2)} n^{(2)},$$

$$D^{(1)} \psi^{(1)} l^{(1)} \operatorname{grad} n^{(1)} = D^{(2)} \psi^{(2)} l^{(2)} \operatorname{grad} n^{(2)}. \quad (6.3)$$

Если воспользоваться определениями D и τ , то эти соотношения приобретут вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tau}{dy} \right)^{(1)} \operatorname{grad} n^{(1)} &= \left(\frac{d\tau}{dy} \right)^{(2)} \operatorname{grad} n^{(2)}, \\ \frac{1}{D^{(1)}} \left(\frac{d\tau}{dy} \right)^{(1)} n^{(1)} &= \frac{1}{D^{(2)}} \left(\frac{d\tau}{dy} \right)^{(2)} n^{(2)}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Это и есть граничные условия для функции n .

§7. Поле замедляющихся нейтронов

Перейдем к рассмотрению поля замедляющихся нейтронов в простейших случаях.

7.1. Точечный источник нейтронов в бесконечном замедлителе

Пусть точечный источник монохроматических нейтронов находится в бесконечной однородной непоглощающей среде. Нормированная функция $n(r, \tau)$ имеет в этом случае следующий вид

$$n(r, \tau) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4\tau}}. \quad (7.1)$$

Физический смысл этой функции заключается в том, что $n(r, \tau) dr$ представляет собой вероятность нахождения нейтрона с энергией $E = E(\tau)$ в элементе объема dr .

Найдем в рассматриваемом случае функцию распределения нейтронов. Согласно (5.1), (5.18),

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \approx \text{const} \frac{n(\mathbf{r}, \tau)}{E^2}. \quad (7.2)$$

Для определения *const* проинтегрируем (7.2) по объему и воспользуемся представлением (2.21) функции распределения в импульсном пространстве в области малых энергий ($E \ll E_0$)

$$\int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{r} = F(p) = \frac{Q l(1-\varepsilon)}{8\pi m(1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon)} \frac{1}{E^2}, \quad E \ll E_0. \quad (7.3)$$

Замечая, что $\int n(r, \tau) dr = 1$, мы получим

$$\text{const} = \frac{Ql}{8\pi m} \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon}, \quad (7.4')$$

и поэтому

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{Q l(1-\varepsilon)}{8\pi m(1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon)} \frac{e^{-r^2/4\tau}}{E^2(4\pi\tau)^{3/2}}. \quad (7.4)$$

Число нейтронов в единице объема, энергия которых заключена между E и $E + dE$, равно

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) 4\pi p^2 dp = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{Q l(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon) E^{3/2}} \frac{e^{-r^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{3/2}} dE. \quad (7.5)$$

Формулы (7.4) и (7.5) выведены в предположении отсутствия поглощения. Учтем теперь поглощение нейтронов.

Решение уравнения (5.33), определяющего $n(\mathbf{r}, \tau)$ при наличии поглощения, имеет вид

$$n(\mathbf{r}, t) = \text{const} e^{-\int_0^\tau \alpha(\tau') d\tau'} \frac{e^{-r^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{3/2}}. \quad (7.6)$$

Функция $n(\mathbf{r}, \tau)$ должна быть в этом случае пронормирована таким образом, чтобы выполнялось условие

$$n(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r}), \quad (7.7)$$

ибо $\tau = 0$ соответствует $E = E_0$, т.е. начальной энергии нейтронов. Отсюда следует, что *const* в (7.6) равна единице и

$$n(\mathbf{r}, \tau) = e^{-\int_0^\tau \alpha(\tau') d\tau'} \frac{e^{-r^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{3/2}}. \quad (7.8)$$

7.2. Точечный источник в полубесконечном замедлителе, граничащем с вакуумом

Пусть замедлитель занимает бесконечное полупространство, граничащее в плоскости yz с вакуумом. Ось x имеет направление, перпендикулярное границе. Точечный источник монохроматических нейтронов находится в точке Q на расстоянии x_0 от границы (см.рис.1).

Определим поле нейтронов $n(\mathbf{r}, \tau)$, удовлетворяющее уравнению (5.21).

При решении этого уравнения мы будем ради простоты исходить из приближенного граничного условия, считая плотность нейтронов на границе равной нулю, т.е.

$$n = 0 \quad \text{при } x = 0. \quad (7.9)$$

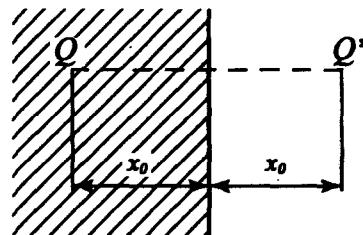


Рис. 1

Для решения задачи проще всего поступить следующим образом. Представим себе, что в точке Q^* , являющейся зеркальным изображением точки Q относительно границы, находится фиктивный отрицательный источник нейтронов той же мощности, что и истинный источник. Тогда распределение нейтронов

в бесконечно протяженном замедлителе при наличии двух источников Q и Q^* будет совпадать с распределением нейтронов в полубесконечном замедлителе с одним источником Q при выполнении условия (7.9).

Решение уравнения (5.21) в заштрихованной области рис.1, где расположен замедлитель, в точке (x, y, z) имеет вид

$$n(x, y, z, \tau) = \frac{e^{-\frac{r^2}{4\tau}} - e^{-\frac{r^{*2}}{4\tau}}}{(4\pi\tau)^{3/2}} = \frac{e^{-\frac{y^2+z^2}{4\tau}}}{4\pi\tau} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}} - e^{-\frac{x^{*2}}{4\tau}}}{\sqrt{4\pi\tau}}, \quad (7.10)$$

где r и r^* – расстояния от точки (x, y, z) до точек Q и Q^* . Из этой формулы видно, что зависимость плотности вероятности n от координат y и z остается такой же, как и в случае бесконечного замедлителя.

7.3. Точечный источник на оси бесконечной замедляющей призмы

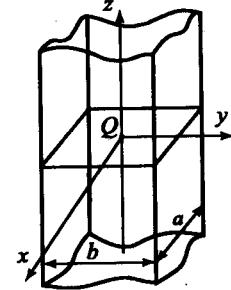


Рис. 2

Пусть точечный источник монохроматических нейтронов находится в точке Q (см. рис. 2), на оси бесконечной замедляющей призмы прямоугольного сечения. Точку Q примем за начало координат, ось z направлена вдоль оси призмы. Определим поле нейтронов $n(\mathbf{r}, \tau)$ при наличии поглощения, удовлетворяющее уравнению (5.33).

При решении этого уравнения будем сперва, так же, как и в предыдущем примере, ради простоты исходить из приближенного граничного условия, считая, что на поверхности призмы плотность нейтронов равна нулю, т.е.

$$n = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm \frac{a}{2}, \quad y = \pm \frac{b}{2} \quad (7.11)$$

(решение с точным граничным условием см. ниже).

"Начальное" условие для функции n имеет вид

$$n(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r}). \quad (7.12)$$

Решение уравнения (5.33) ищем в виде

$$\begin{aligned} n(x, y, z, \tau) &= \frac{e^{-\frac{z^2}{4\tau}}}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{0} \int_{-\infty}^{\tau} ad\tau \sum_{k,l} A_{kl} \cos \pi \frac{2k+1}{a} x \cdot \cos \pi \frac{2l+1}{b} y \times \\ &\quad \times e^{-[\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2}] \pi^2 \tau} \end{aligned} \quad (7.13)$$

(ряд не содержит синусов, так как функция n по соображениям симметрии не должна, очевидно, меняться при замене $x \rightarrow -x$ или $y \rightarrow -y$).

Константы A_{kl} находим из начального условия

$$\delta(x)\delta(y) = \sum_{k,l} A_{kl} \cos \frac{2k+1}{a} \pi x \cos \frac{2l+1}{b} \pi y. \quad (7.14)$$

Умножим это уравнение на $\cos \frac{2k+1}{a} \pi x \cos \frac{2l+1}{b} \pi y$ и проинтегрируем по x в пределах $-a/2, a/2$, и по y в пределах $-b/2, b/2$. В результате получим

$$1 = A_{kl} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos^2 \frac{2k+1}{a} \pi x dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos^2 \frac{2l+1}{b} \pi y dy = A_{kl} \frac{ab}{4},$$

откуда

$$A_{kl} = \frac{4}{ab}. \quad (7.14')$$

Пронормированная плотность вероятности нахождения нейтрона с энергией $E = E(\tau)$ в точке \mathbf{r} имеет следующий вид

$$\begin{aligned} n(x, y, z, \tau) &= \frac{e^{-\frac{z^2}{4\tau}}}{\sqrt{4\pi\tau}} e^0 \int_{-\infty}^{\tau} ad\tau \frac{4}{ab} \sum_{k,l} \cos \pi \frac{2k+1}{a} x \cos \pi \frac{2l+1}{b} y \times \\ &\quad \times e^{-[\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2}] \pi^2 \tau}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Заметим, что зависимость от координаты z здесь такая же, как и в случае бесконечно протяженного замедлителя; она выражается Гауссовским распределением.

Выясним вопрос об энергетическом спектре нейтронов в призме.

Если размеры призмы велики по сравнению с $\sqrt{2\tau}$, то распределение нейтронов по энергии будет таким же, как и в бесконечной среде, так как в этом случае практически все поле находится внутри призмы.

Если размеры призмы не удовлетворяют этому условию, то количество нейтронов с малыми энергиями будет относительно меньшим, чем в случае бесконечной среды.

Рассмотрим область энергий $E \ll E_0$. В этом случае функция распределения нейтронов может быть представлена в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \text{const} \frac{n(x, y, z, \tau)}{E^2}. \quad (7.16)$$

Чтобы определить $const$, рассмотрим такие значения τ , которые удовлетворяют условию $a \gg \sqrt{\tau(E)}$. При этом функция распределения будет практически такой же, как и в случае бесконечно протяженного замедлителя. Поэтому $const$ в формуле (7.16) совпадает с константой (7.4').

$$const = \frac{Ql(1-\varepsilon)}{8\pi m(\varepsilon - \varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon)}.$$

Число нейтронов в единице объема, энергия которых заключена в пределах от E до $E + dE$, равняется

$$f(r, p) 4\pi p^2 dp = \frac{Ql(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{m}{2}}}{(1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon)} \frac{e^{-\frac{p^2}{4r}}}{\sqrt{4\pi r}} e^{-\int_0^\tau a d\tau} \frac{4}{ab} \times \\ \times \sum_{k,l=0}^{\infty} \cos \frac{2k+1}{a} \pi x \cos \frac{2l+1}{b} \pi y e^{-(\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2})\pi^2 \tau} \frac{dE}{E^{3/2}}. \quad (7.17)$$

Эта формула справедлива при любых τ . При $\tau > a, b$ функция распределения, как и следовало ожидать, отличается от функции распределения в бесконечном пространстве.

Если экспериментально определить зависимость функции распределения от z для нейтронов с определенным τ , отвечающим энергии, близкой к тепловой, но большей последней, то по ширине Гауссовского распределения может быть определено τ_T , т.е. средний квадрат длины замедления до тепловых энергий.

Заметим, что в действительности граничное условие (7.11) не является точным. Если исходить из точного условия (см. §35)

$$n + s \frac{\partial n}{\partial \nu} = 0, \quad (7.18)$$

где $s = 0,71l$ (l —длина свободного пробега нейтронов, ν —направление нормали к границе), то вместо формулы (7.13) мы получим следующее выражение для n :

$$n(x, y, z, \tau) = \frac{e^{-z^2/4\tau}}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\int_0^\tau a d\tau} \sum_{i,j} A'_{ij} \cos \frac{q_i x}{a} \cos \frac{p_j y}{b} e^{-[\frac{q_i^2}{a^2} + \frac{p_j^2}{b^2}]\tau}, \quad (7.19)$$

где A_{ij} — постоянные, а q_i и p_j суть корни трансцендентных уравнений

$$\begin{aligned} ctg \frac{q_i}{2} &= \frac{s}{a} q_i, \\ ctg \frac{p_j}{2} &= \frac{s}{b} p_j. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Для определения константы A'_{ij} исходим из начального условия (7.13):

$$\delta(x)\delta(y) = \sum_{ij} A'_{ij} \cos \frac{q_i x}{a} \cos \frac{p_j y}{b}. \quad (7.21)$$

Умножив это уравнение на $\cos(q_i x/a)\cos(p_j y/b)$ и проинтегрировав произведение по x в пределах $-a/2, a/2$ и по y в пределах $-b/2, b/2$, получим

$$A'_{ij} = \frac{4}{ab} [(1 + \frac{1}{q_i} \sin q_i)(1 + \frac{1}{p_j} \sin p_j)]^{-1}. \quad (7.22)$$

Подставив (7.22) в (7.19), найдем $n(r, \tau)$.

Определим еще распределение по энергиям нейтронов, выходящих из призмы. Будем для простоты исходить из формулы (7.13) для $n(r, \tau)$ и считать, что $a = b$.

Найдем поток нейтронов через грань $x = a/2$. Он равен, согласно (7.17),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J_x dE &= -D \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=a/2} dy \cdot 4\pi p^2 dp = \\ &= \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{D Q l (1-\varepsilon)}{1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon} e^{-\int_0^\tau a d\tau} \frac{4}{a^2} \times \\ &\times \sum_{k,l} (-1)^{k+l} \frac{2k+1}{2l+1} e^{[(2k+1)^2 + (2l+1)^2] \frac{\pi^2 \tau}{a^2}} \frac{dE}{E^{3/2}}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Добавляя сюда поток через грань $y = a/2$ и удваивая результат, получим следующее выражение для потока нейтронов, выходящих из призмы, энергия которых заключена между E и $E + dE$:

$$JdE = \frac{8}{a^2} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{DQl(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon} e^{-\int_0^{\tau} \alpha d\tau} \sum_{k,l} (-1)^{k+l} \frac{(2k+1)^2 + (2l+1)^2}{(2k+1)(2l+1)} \times \\ \times e^{[(2k+1)^2 + (2l+1)^2] \frac{\pi^2 \tau}{a^2}} \cdot \frac{dE}{E^{3/2}}. \quad (7.24)$$

Введем в рассмотрение функцию $s(\eta)$, определенную следующим рядом:

$$s(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} e^{-(2k+1)^2 \eta}. \quad (7.25)$$

Поток нейtronов JdE может быть просто выражен через $s(\eta)$. Действительно, легко убедиться, что

$$JdE = \frac{8}{a^2} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{DQl(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon} e^{-\int_0^{\tau} \alpha d\tau} \left[\frac{d}{d\eta} s^2(\eta) \right]_{\eta=\frac{\pi^2 \tau}{a^2}} \frac{dE}{E^{3/2}}. \quad (7.26)$$

В заключение отметим, что при $a \rightarrow \infty$ все формулы этого параграфа переходят в соответствующие формулы для бесконечной среды.

7.4. Точечный источник не на оси бесконечной замедляющей призмы

Рассмотрим теперь тот случай, когда точечный источник монохроматических нейtronов находится не на оси призмы, а в точке, координаты которой суть x_0, y_0 (см.рис.2).

При решении уравнения (5.33), определяющего $n(\mathbf{r}, \tau)$, будем исходить из приближенного граничного условия, считая на поверхности призмы плотность нейtronов равной нулю.

"Начальное условие" имеет теперь вид

$$n(\mathbf{r}, 0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z). \quad (7.27)$$

Ищем разложение $n(\mathbf{r}, \tau)$ в ряд Фурье

$$n(x, y, z, \tau) = \frac{e^{-\frac{z^2}{4\tau}}}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\int_0^{\tau} \alpha d\tau} \times \\ \times \left\{ \sum_{k,l=0}^{\infty} A_{kl} \cos \frac{2k+1}{a} \pi x \cos \frac{2l+1}{b} \pi y e^{-[\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2}] \pi^2 \tau} + \right. \\ + \sum_{k=0, l=1}^{\infty} B_{kl} \cos \frac{2k+1}{a} \pi x \sin \frac{2l\pi}{b} y e^{-[\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{4l^2}{b^2}] \pi^2 \tau} + \\ + \sum_{k=1, l=0}^{\infty} C_{kl} \sin \frac{2k\pi}{a} x \cos \frac{2l+1}{b} y e^{-[\frac{(2l+1)^2}{b^2} + \frac{4k^2}{a^2}] \pi^2 \tau} + \\ \left. + \sum_{k,l=1}^{\infty} D_{kl} \sin \frac{2k\pi}{a} x \sin \frac{2l\pi}{b} y e^{-[\frac{4k^2}{a^2} + \frac{4l^2}{b^2}] \pi^2 \tau} \right\}. \quad (7.28)$$

Для определения констант A, B, C, D воспользуемся начальным условием (7.27).

Положив $\tau = 0$, умножим правую часть (7.28) на $\cos \frac{2k+1}{a} \pi x \cos \frac{2l+1}{b} \pi y$ и проинтегрируем ее по x в пределах $-a/2, a/2$ и по y в пределах $-b/2, b/2$; в результате получим

$$\cos \frac{2k+1}{a} \pi x_0 \cos \frac{2l+1}{b} \pi y_0 = A_{kl} \frac{ab}{4},$$

откуда

$$A_{kl} = \frac{4}{ab} \cos \frac{2k+1}{a} \pi x_0 \cos \frac{2l+1}{b} \pi y_0. \quad (7.28')$$

Аналогичным образом найдем

$$B_{kl} = \frac{4}{ab} \cos \frac{2k+1}{a} \pi x_0 \sin \frac{2l\pi}{b} y_0,$$

$$C_{kl} = \frac{4}{ab} \sin \frac{2k\pi}{a} x_0 \cos \frac{2l+1}{b} \pi y_0,$$

$$D_{kl} = \frac{4}{ab} \sin \frac{2k\pi}{a} x_0 \sin \frac{2l\pi}{b} y_0. \quad (7.28'')$$

Формула (7.28) может быть записана окончательно в следующем виде

$$n(x, y, z, \tau) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\int_0^\tau \alpha d\tau} \frac{4}{ab} \left\{ \sum_{k,l=0}^{\infty} \cos \frac{2k+1}{a} \pi x_0 \cos \frac{2l+1}{b} \pi y_0 \times \right. \\ \times \cos \frac{2k+1}{a} \pi x \cos \frac{2l+1}{b} \pi y e^{-[\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2}] \pi^2 \tau} + \\ + \sum_{k=0, l=1}^{\infty} \cos \frac{2k+1}{a} \pi x_0 \sin \frac{2l\pi}{b} y_0 \cos \frac{2k+1}{a} \pi x \sin \frac{2l\pi}{b} y e^{-[\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{4l^2}{b^2}] \pi^2 \tau} + \\ + \sum_{k=1, l=0}^{\infty} \sin \frac{2k\pi}{a} x_0 \cos \frac{2l+1}{b} \pi y_0 \sin \frac{2k\pi}{a} x \cos \frac{2l+1}{b} \pi y e^{-[\frac{4k^2}{b^2} + \frac{(2l+1)^2}{a^2}] \pi^2 \tau} + \\ \left. + \sum_{k,l=1}^{\infty} \sin \frac{2k\pi}{a} x_0 \sin \frac{2l\pi}{b} y_0 \sin \frac{2k\pi}{a} x \sin \frac{2l\pi}{b} y e^{-[\frac{4k^2}{a^2} + \frac{4l^2}{b^2}] \pi^2 \tau} \right\}. \quad (7.29)$$

Заметим, что в эту формулу координаты источника и точки наблюдения входят симметрично.

7.5. Точечный источник в центре прямоугольной замедляющей призмы

Пусть точечный источник монохроматических нейтронов находится в центре прямоугольной призмы со сторонами a, b, c (см. рис. 3). Начало координат совпадает с центром призмы. Определим поле нейтронов в этом случае.

При решении уравнения будем исходить сперва из приближенных условий

$$n = 0 \text{ при } x = \pm \frac{a}{2}, y = \pm \frac{b}{2},$$

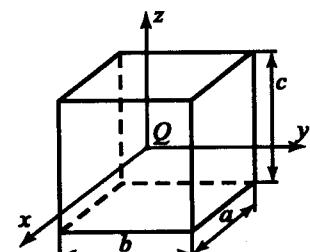


Рис. 3

$$z = \pm \frac{c}{2}. \quad (7.30)$$

"Начальное" условие имеет вид

$$n(\mathbf{r}, 0) = \delta(x) \delta(y) \delta(z). \quad (7.30')$$

Решение ищем в виде ряда Фурье

$$n(x, y, z, \tau) = e^{-\int_0^\tau \alpha d\tau} \sum_{k,l,m} A_{klm} \cos \frac{2k+1}{a} \pi x \times \\ \times \cos \frac{2l+1}{b} \pi y \cos \frac{2m+1}{c} \pi z e^{-\left\{ \frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2} + \frac{(2m+1)^2}{c^2} \right\} \pi^2 \tau}. \quad (7.31')$$

Начальное условие дает

$$\delta(\mathbf{r}) = \sum_{k,l,m} A_{klm} \cos \frac{2k+1}{a} \pi x \cos \frac{2l+1}{b} \pi y \cos \frac{2m+1}{c} \pi z.$$

Умножив это равенство на $\cos \frac{2k+1}{a} \pi x \cos \frac{2l+1}{b} \pi y \cos \frac{2m+1}{c} \pi z$ и проинтегрировав по объему призмы, получим

$$A_{klm} = \frac{8}{abc}.$$

Подставляя это в (7.31'), получим окончательно следующее выражение для $n(\mathbf{r}, \tau)$:

$$n(x, y, z, \tau) = \frac{8}{abc} e^{-\int_0^\tau \alpha d\tau} \sum_{k,l,m} \cos \frac{2k+1}{a} \pi x \times \\ \times \cos \frac{2l+1}{b} \pi y \cos \frac{2m+1}{c} \pi z e^{-\left\{ \frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2} + \frac{(2m+1)^2}{c^2} \right\} \pi^2 \tau}. \quad (7.31)$$

Для очень длинной призмы, когда $c \gg \sqrt{\tau}$, можно заменить суммирование по m интегрированием. Мы получим в результате формулу (7.15).

Заметим, что если исходить не из приближенного (см. §35), а точного граничного условия $n + s \partial n / \partial \nu = 0$, то формула (7.31) заменится следующим выражением для плотности нейтронов

$$n(x, y, z, \tau) = \frac{8}{abc} e^{-\int_0^\tau \alpha d\tau} \sum_{i,j,k} \cos \frac{q_i x}{a} \cos \frac{p_j y}{b} \cos \frac{r_k z}{c} \times \\ \times e^{-[\frac{q_i^2}{a^2} + \frac{p_j^2}{b^2} + \frac{r_k^2}{c^2}] \tau} \left[(1 + \frac{\sin q_i}{q_i}) (1 + \frac{\sin p_j}{p_j}) (1 + \frac{\sin r_k}{r_k}) \right]^{-1}, \quad (7.32)$$

где q_i, p_j, r_k суть корни уравнений

$$\operatorname{ctg} \frac{q_i}{2} = \frac{s}{a} q_i, \quad \operatorname{ctg} \frac{p_j}{2} = \frac{s}{b} p_j, \quad \operatorname{ctg} \frac{r_k}{2} = \frac{s}{c} r_k. \quad (7.32')$$

§8. Поле тепловых нейтронов

В предыдущих параграфах было выведено уравнение для определения плотности вероятности нахождения нейтрона с энергией $E(\tau)$ в точке r и найдены решения этого уравнения в простейших случаях. Используем теперь эти решения для нахождения плотности тепловых нейтронов.

Под тепловыми подразумеваются нейтроны, энергия которых меньше или порядка некоторой энергии $E_T \approx kT$ (T – температура замедлителя, k – постоянная Больцмана).

Рассмотрим сперва тот случай, когда замедление нейтронов происходит в тяжелом замедлителе. В этих условиях при каждом столкновении с атомом замедлителя нейtron передает лишь небольшую долю своей энергии. В процессе замедления нейтрона, когда его энергия уменьшается от начальной энергии E_0 до тепловой энергии E_T , существует однозначная связь между энергией нейтрона и его возрастом.

Обозначим через t_T время, которое требуется нейтрону, чтобы замедлиться от энергии E_0 до энергии E_T . Это время может быть определено, согласно (5.29) по формуле

$$t_T = \frac{2}{1-\varepsilon} \int_{E_T}^{E_0} \frac{l}{v} \frac{dE}{E}. \quad (8.1)$$

Процесс замедления и связанной с ним диффузии описывается, как мы знаем, уравнением (см.(5.33))

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \Delta n - \alpha(\tau)n, \quad (8.2)$$

где

$$\tau = \frac{2}{3} \frac{l^2}{1-\varepsilon} \ln \frac{E_0}{E}$$

(эта формула получается из общего выражения (5.20') для τ , если считать в нем $1-\varepsilon \ll 1$).

Для "ливня" нейтронов, испущенных источником в момент времени $t = 0$, это уравнение справедливо вплоть до момента окончания замедления t_T .

После того, как замедление окончилось, "ливень" нейтронов подчиняется диффузионному уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D_T \Delta W - \frac{1}{T_c} W, \quad t \geq t_T, \quad (8.3)$$

где D_T – коэффициент диффузии нейтронов с энергией E_T ; T_c – время их жизни по отношению к захвату.

Можно объединить уравнения (8.2) и (8.3) в одно уравнение, еслиенным образом определить переменную τ для моментов времени, больших, чем t_T . Именно, пусть при $t \geq t_T$ переменная τ определяется равенством

$$\tau = \tau_T + D_T(t - t_T), \quad t \geq t_T, \quad (8.4)$$

где

$$\tau_T = \frac{2}{3} \frac{l^2}{1-\varepsilon} \ln \frac{E_0}{E_T}. \quad (8.4')$$

Уравнения (8.2), (8.3) могут быть записаны тогда в виде одного уравнения

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \Delta n - \alpha(\tau)n, \quad (8.5)$$

причем вплоть до момента замедления $t = t_T$ величина τ является функцией энергии, а после окончания замедления τ от энергии не зависит и определяется формулой (8.4).

Для $\tau \geq \tau_T$ коэффициент поглощения $\alpha(\tau)$ не зависит от τ и равен

$$\alpha(\tau) = \frac{1}{D_T T_c} = \frac{1}{L^2}, \quad \tau \geq \tau_T, \quad (8.6)$$

где L – диффузионная длина в замедлителе.

Заметим для дальнейшего, что

$$L^2 = \frac{1}{3} l_c l_s,$$

где l_c и l_s – длины свободного пробега тепловых нейтронов по отношению к рассеянию и захвату.

Уравнение (8.3) определяет плотность вероятности того, что нейtron возраста $t = t(\tau)$ находится в точке \mathbf{r} . Нейтроны, возраст которых превосходит t_T , являются, очевидно, тепловыми. Отсюда следует, что мы получим число тепловых нейтронов в элементе объема dV , если проинтегрируем по t ($t \geq t_T$) выражение $W Q dt dV$, представляющее собой число нейтронов, возраст которых лежит в интервале dt и которые находятся в объеме dV (Q – число нейтронов, испускаемых ежесекундно источником). Пределы интегрирования по t равны, очевидно, t_T и ∞ .

Вместо переменной t можно интегрировать по τ , имея в виду, что

$$d\tau = D_T dt, \quad t \geq t_T. \quad (8.4'')$$

Обозначая плотность тепловых нейтронов в точке \mathbf{r} через $N(\mathbf{r}, E_T)$, (E_T указывает на то, что замедление считается законченным, когда достигается энергия E_T), получим следующую формулу для определения $N(\mathbf{r}, E_T)$:

$$N(\mathbf{r}, E_T) = \frac{Q}{D_T} \int_{t_T}^{\infty} W(\mathbf{r}, \tau) d\tau. \quad (8.7)$$

Это выражение следует еще усреднить по энергии E_T , которую мы считали "началом" тепловой области. Нижний предел в интеграле (8.7) очень слабо (логарифмически) зависит от E_T . Если поглощением можно пренебречь, то остается лишь усреднить обратный коэффициент диффузии $1/D_T = 3/(lv_T)$.

Предполагая, что в тепловой области имеет место максвелловское распределение нейтронов и считая длину свободного пробега l постоянной, получим следующее выражение для среднего значения D_T^{-1}

$$D^{-1} \equiv \overline{D_T^{-1}} = \frac{3}{l} \overline{v_T^{-1}} = \frac{3}{l} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m}{kT}$$

(m – масса нейтрона). Выразим D через тепловую скорость нейтрона, равную $v_0 = \sqrt{(3kT/m)}$:

$$D = \frac{v_0 l}{3} \sqrt{\frac{\pi}{6}}. \quad (8.8')$$

Плотность тепловых нейтронов после усреднения по энергии E_T определяется следующей формулой:

$$N(\mathbf{r}) = \frac{Q}{D} \int_{t_T}^{\infty} n(\mathbf{r}, \tau) d\tau. \quad (8.8)$$

Переходя к произвольной замедляющей среде, мы должны для определения поля тепловых нейтронов рассматривать диффузионное уравнение, в котором в качестве источников стоит величина, пропорциональная $n(t_T)$,

$$D_T \Delta N - \frac{N}{T_c} = -n(t_T) + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad (8.9)$$

где n нормировано в согласии с (5.25).

Решения уравнения (8.9) совпадают при $1 - \epsilon \ll 1$ с тем, что дает (8.8).

Найдем плотность тепловых нейтронов в простейших случаях, считая повсюду, что имеется точечный источник быстрых нейтронов.

8.1. Поле тепловых нейтронов в бесконечном непоглощающем замедлителе

Плотность вероятности $n(\mathbf{r}, t)$ определяется в этом случае формулой (7.1). Плотность тепловых нейтронов равна

$$N(\mathbf{r}) = \frac{Q}{D} \int_{t_T}^{\infty} \frac{e^{-\frac{r^2}{4\tau}}}{(4\pi\tau)^{3/2}} d\tau.$$

Сделаем здесь замену переменной $\sqrt{\tau} = 1/z$:

$$N(\mathbf{r}) = \frac{Q}{2(4\pi)^{3/2} D} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{r_T}}} e^{-\frac{r^2 z^2}{4}} dz = \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \frac{Q}{r D} \int_0^{\frac{r}{2\sqrt{r_T}}} e^{-u^2} du. \quad (8.9')$$

Вводя функцию ошибок

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du, \quad (8.10')$$

перепишем (8.9') в виде

$$N(r) = \frac{Q}{4\pi r D} \Phi\left(\frac{r}{2\sqrt{r_T}}\right). \quad (8.10)$$

Приведем асимптотические выражения для плотности тепловых нейтронов при $r \gg 2\sqrt{r_T}$ и $r \ll 2\sqrt{r_T}$.

Если $r \gg 2\sqrt{r_T}$, то

$$N(r) \approx \frac{Q}{4\pi r D}. \quad (8.11)$$

Если $r \ll 2\sqrt{r_T}$, то

$$N(r) \approx \frac{Q}{(4\pi)^{3/2} 2D \sqrt{r_T}}. \quad (8.12)$$

Заметим, что если бы мы имели точечный источник тепловых нейтронов, то вдали от него плотность нейтронов определялась бы формулой (8.11).

В самом деле, в этом случае плотность нейтронов определяется из условия

$$4\pi r^2 \frac{dN}{dr} D = Q \quad (8.13)$$

в полном соответствии с выражением (8.11).

В области пространства $r \ll 2\sqrt{r_T}$ поле тепловых нейтронов, определяемое согласно формуле (8.12), отличается от поля точечного источника тепловых нейтронов.

Можно сказать, что точечный источник быстрых нейтронов создает такое же поле тепловых нейтронов, как протяженный источник тепловых нейтронов, причем размеры этого источника по порядку величины равны длине замедления нейтронов.

Рассмотрим теперь это же поле в случае произвольного рассеивателя. Согласно (8.9) при $\partial N / \partial t = 0$ имеем

$$D \Delta N = -\frac{Qe^{-r^2/4r_T}}{(4\pi r_T)^{3/2}}. \quad (8.14)$$

Рассмотрим теперь поле ^{этого же} ~~этого же~~ ^{наиболее} ~~наиболее~~ ^{пространства} ~~пространства~~ ^{расчета}
при $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$ имеем:

$$D \Delta N = -\frac{Qe^{-r^2/4r_T}}{(4\pi r_T)^{3/2}} \quad (8.14')$$

Начнем преобразование формулы:

$$N = \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \int e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} \quad (8.15)$$

Множитель согласовано:

$$-Q \Delta N = -\frac{Q}{(4\pi)^{3/2}} \int e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}$$

$$N(k) = \frac{Q}{(4\pi)^{3/2}} e^{-k^2 r^2}$$

С помощью (8.15) находим:

$$N(k) = \frac{Q}{(4\pi)^{3/2}} \int e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} = \frac{Q}{(4\pi)^{3/2}} \int e^{ikx - k^2 r^2} \int e^{iky - k^2 r^2} \int e^{ikz - k^2 r^2} d\vec{k} =$$

$$= \frac{Q}{(4\pi)^{3/2}} \int_k^{\infty} \int_{-k}^k \int_{-k}^k e^{-k^2 r^2} dk$$

Входящий сюда интеграл вычислим ^{следующим образом:}

$$\int_{-k}^k e^{-k^2 r^2} dk = \int_{-k}^k e^{-k^2 r^2} dk = \int_{-k}^{\infty} e^{-k^2 r^2} dk =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2 r^2} dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2} dk = \sqrt{\pi} r^{-1/2}$$

$$J = \sqrt{\pi} r^{-1/2} \int_{-k}^{\infty} e^{-k^2 r^2} dk = \sqrt{\pi} r^{-1/2} \int_{-k}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Подставляя это значение J в (8.15) мы получим к согласовано ^{формулу} ~~формулу~~ (8.14):

$$N(k) = \frac{Q}{(4\pi)^{3/2}} e^{-k^2 r^2} \int_{-k}^{\infty} e^{-k^2 r^2} dk$$

Произведем преобразование Фурье

$$N = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ikr} N(k) dk. \quad (8.15)$$

$N(k)$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} -Dk^2 N(k) &= -(2\pi)^3 Q A e^{-k^2 \tau_T}, \\ N(k) &= Q A \frac{(2\pi)^3 e^{-k^2 \tau_T}}{Dk^2}. \end{aligned}$$

С помощью (8.15) находим

$$\begin{aligned} N(r) &= Q A \int \frac{dk e^{ikr - \tau_T k^2}}{Dk^2} = 2\pi \frac{AQ}{D} \int_0^\infty dk e^{-\tau_T k^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta e^{ikr \cos \theta} = \\ &= \frac{4\pi AQ}{Dr} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \sin kr e^{-\tau_T k^2}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Входящий сюда интеграл вычисляем следующим образом

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \frac{dk}{k} \sin kr e^{-\tau_T k^2}; \frac{dJ}{dr} = \int_0^\infty dk \cos kr e^{-\tau_T k^2} = \int_{-\infty}^\infty e^{ikr - \tau_T k^2} dk = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\tau_T}} e^{-\frac{r^2}{4\tau_T}}; J = \sqrt{\frac{\pi}{\tau_T}} \int_0^r e^{-\frac{x^2}{4\tau_T}} dx = 2\sqrt{\tau_T} \int_0^{\frac{r}{2\sqrt{\tau_T}}} e^{-u^2} du. \end{aligned}$$

Подставляя это значение J в (8.16), мы приходим к выражению типа

$$N(r) = \frac{8\pi AQ \sqrt{\tau_T}}{Dr} \int_0^{\frac{r}{2\sqrt{\tau_T}}} e^{-u^2} du. \quad (8.17)$$

8.2. Поле тепловых нейтронов в бесконечном замедлителе, обладающем поглощением

Будем по-прежнему считать замедлитель бесконечно протяженным, но учтем поглощение нейтронов.

Плотность вероятности $n(\mathbf{r}, \tau)$ имеет теперь вид

$$n(\mathbf{r}, \tau) = \frac{e^{-\int_0^\tau \alpha(\tau) d\tau}}{(4\pi\tau)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4\tau}}. \quad (8.18)$$

Подставляя это выражение в формулу (8.8), получим

$$N(r) = \frac{Q}{D} \int_{\tau_T}^\infty \frac{e^{-\frac{r^2}{4\tau}}}{(4\pi\tau)^{3/2}} e^{-\int_0^\tau \alpha(\tau) d\tau} d\tau. \quad (8.19)$$

Заметим, что входящий сюда интеграл $\int_0^\tau \alpha(\tau) d\tau$ может быть представлен в виде

$$\int_0^\tau \alpha(\tau) d\tau = \int_0^{\tau_T} \alpha(\tau) d\tau + \alpha(\tau_T)(\tau - \tau_T), \quad \tau \geq \tau_T, \quad (8.20)$$

так как, согласно ранее сказанному, коэффициент поглощения $\alpha(\tau)$ в тепловой области не зависит от τ (т.е. от времени).

Физический смысл равенства (8.20) чрезвычайно прост: первое слагаемое представляет собой поглощение, имеющее место в процессе замедления, а второе слагаемое – поглощение в тепловой области, пропорциональное времени жизни теплового нейтрона. Вспоминая, что $\alpha(\tau_T) = 1/L^2$, перепишем формулу (8.19) в виде

$$N(r) = \frac{Q}{D} e^{-\int_0^{\tau_T} \alpha(\tau) d\tau + \frac{\tau_T}{L^2}} \int_{\tau_T}^\infty e^{-\frac{r^2}{4\tau} - \frac{\tau}{L^2}} \frac{d\tau}{(4\pi\tau)^{3/2}}. \quad (8.21)$$

Вводя новую переменную интегрирования $z = \tau^{-1/2}$, получим

$$N(r) = \frac{2}{(4\pi)^{3/2}} \frac{Q}{D} e^{-\int_0^T \alpha(\tau)d\tau + \frac{rT}{L^2}} e^{\frac{r}{L}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{rT}}} e^{-(\frac{rz}{2} + \frac{1}{Lz})^2} dz.$$

Положим далее

$$z = \sqrt{\frac{2}{rL}} u.$$

тогда

$$N(r) = \frac{2}{(4\pi)^{3/2}} \frac{Q}{D} \sqrt{\frac{2}{rL}} e^{-\int_0^T \alpha(\tau)d\tau + \frac{rT}{L^2}} e^{\frac{r}{L}} \int_0^{\sqrt{\frac{rL}{2rT}}} e^{-\frac{r}{2L}(u+\frac{1}{u})^2} du. \quad (8.22)$$

Введем вместо u переменную

$$w = u + \frac{1}{u}; \quad u = \frac{w}{2} \pm \sqrt{\frac{w^2}{4} - 1}. \quad (8.23)$$

При вычислении интеграла (8.22) следует различать два случая, в зависимости от того, будет ли верхний предел интеграла $\sqrt{\frac{rL}{2rT}}$ меньше или больше единицы.

В первом случае, когда $r \leq \frac{2rT}{L}$, мы должны взять знак минус в формуле (8.19) для u . Простые выкладки дают в этом случае

$$\begin{aligned} N(r) &= \frac{2}{(4\pi)^{3/2}} \frac{Q}{D} \sqrt{\frac{2}{rL}} e^{-\int_0^T \alpha(\tau)d\tau + \frac{rT}{L^2}} e^{\frac{r}{L}} \times \\ &\times \int_{w=\sqrt{\frac{rL}{2rT}}+\sqrt{\frac{2rT}{rL}}}^{w=\infty} e^{-\frac{r}{2L}w^2} \left(d\sqrt{\frac{w^2}{4}-1} - \frac{dw}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi^{3/2}} \frac{Q}{Dr} e^{-\int_0^T \alpha(\tau)d\tau + \frac{rT}{L^2}} \times \end{aligned}$$

$$\times \left\{ e^{-\frac{r}{L}} \int_{\frac{\sqrt{rT}}{L}-\frac{r}{2\sqrt{rT}}}^{\infty} e^{-x^2} dx - e^{\frac{r}{L}} \int_{\frac{r}{2\sqrt{rT}}+\frac{\sqrt{rT}}{L}}^{\infty} e^{-x^2} dx \right\}. \quad (8.24')$$

Пользуясь снова функцией ошибок (8.10'), представим (8.24') в виде

$$\begin{aligned} N(r) &= \frac{Q}{8\pi Dr} e^{-\int_0^T \alpha(\tau)d\tau + \frac{rT}{L^2}} \left\{ e^{\frac{r}{L}} \left[\Phi\left(\frac{r}{2\sqrt{rT}} + \frac{\sqrt{rT}}{L}\right) - 1 \right] - \right. \\ &\left. - e^{-\frac{r}{L}} \left[\Phi\left(\frac{\sqrt{rT}}{L} - \frac{r}{2\sqrt{rT}}\right) - 1 \right] \right\}, \quad r \leq \frac{2rT}{L}. \quad (8.24) \end{aligned}$$

Легко видеть, что в отсутствие поглощения, когда $L \rightarrow \infty$, эта формула переходит в формулу (8.10).

Рассмотрим теперь область пространства, для которой $r \geq \frac{2rT}{L}$. Разобьем интервал интегрирования по u в (8.22) на два интервала $(0, 1)$ и $(1, \sqrt{\frac{rL}{2rT}})$. Переходя от u к переменной w , мы должны считать в интегrale, который берется в интервале $(0, 1)$ $u = \frac{w}{2} - \sqrt{\frac{w^2}{4} - 1}$, а в интегrale по интервалу $(1, \sqrt{\frac{rL}{2rT}})$ $u = \frac{w}{2} + \sqrt{\frac{w^2}{4} - 1}$.

В результате этой замены получим

$$\begin{aligned} N(r) &= \frac{2}{(4\pi)^{3/2}} \frac{Q}{D} \sqrt{\frac{2}{rL}} e^{-\int_0^T \alpha(\tau)d\tau + \frac{rT}{L^2}} e^{\frac{r}{L}} \times \\ &\times \left\{ \int_{w=2}^{\infty} e^{-\frac{r}{2L}w^2} \left(d\sqrt{\frac{w^2}{4}-1} - \frac{dw}{2} \right) + \right. \\ &+ \left. \int_{w=2}^{w=\sqrt{\frac{rL}{2rT}}+\sqrt{\frac{2rT}{rL}}} e^{-\frac{r}{2L}w^2} \left(d\sqrt{\frac{w^2}{4}-1} + \frac{dw}{2} \right) \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{Q}{4\pi^{3/2}} \frac{1}{Dr} e^{-\int_0^T \alpha d\tau + \frac{\tau T}{L^2}} \times \\ \times \left\{ e^{-\frac{r}{L}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{\tau T}}{L} - \frac{r}{2\sqrt{\tau T}}} e^{-x^2} dx \right] - e^{\frac{r}{L}} \int_{\frac{\sqrt{\tau T}}{L} + \frac{r}{2\sqrt{\tau T}}}^{\infty} e^{-x^2} dx \right\}. \quad (8.25')$$

Выражая входящие сюда интегралы через функцию ошибок, получим:

$$N = \frac{1}{8\pi} \frac{Q}{Dr} e^{-\int_0^T \alpha d\tau + \frac{\tau T}{L^2}} \left\{ e^{-\frac{r}{L}} \left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{\tau T}}{L} - \frac{r}{2\sqrt{\tau T}}\right) \right] - e^{\frac{r}{L}} \left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{\tau T}}{L} + \frac{r}{2\sqrt{\tau T}}\right) \right] \right\}. \quad (8.25)$$

Эта формула, выведенная в предположении, что $r \geq \frac{2\tau T}{L}$, имеет такой же вид, как и формула (8.24), справедливая в том случае, когда $r \leq \frac{2\tau T}{L}$.

Таким образом, формулой (8.24) можно пользоваться для всех значений r .

Определяя поле тепловых нейтронов в бесконечном поглощающем пространстве в случае произвольного замедлителя, аналогично выводу (8.16) получаем:

$$N(r) = \frac{4\pi A Q}{r} \int_0^\infty \frac{k dk e^{-\tau_T k^2}}{Dk^2 + \frac{1}{T_c}} \sin kr = \frac{4\pi A Q}{Dr} \int_0^\infty \frac{k dk e^{-\tau_T k^2} \sin kr}{k^2 + \frac{1}{L^2}}, \quad (8.26)$$

$$DT_c = L^2,$$

L – диффузионная длина тепловых нейтронов.

Преобразуем теперь интеграл, входящий в (8.26). Введем обозначения

$$k = \frac{x}{L}, \quad \frac{\tau_T}{L^2} = b, \quad \frac{r}{L} = \rho, \quad J_0 = \int_0^\infty \frac{k dk e^{-\tau_T k^2} \sin kr}{k^2 + \frac{1}{L^2}}.$$

В этих обозначениях

$$J_0 = \int_0^\infty \frac{xdx \sin x \rho e^{-bx^2}}{x^2 + 1}.$$

Дифференцируем J_0 по b :

$$\begin{aligned} \frac{dJ_0}{db} &= - \int_0^\infty \frac{x^3 dx \sin x \rho e^{-bx^2}}{x^2 + 1} = \\ &= - \int_0^\infty x dx \sin x \rho e^{-bx^2} + \int_0^\infty x dx \sin x \rho e^{-bx^2} = \\ &= - \frac{\rho}{2b} \int_0^\infty dx \cos x \rho e^{bx^2} + J_0 = - \frac{\rho \sqrt{\pi}}{4b^{3/2}} e^{-\frac{b^2}{4b}} + J_0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что J_0 равно

$$J_0 = \frac{\sqrt{\pi} \rho}{4} e^b \int_b^\infty \frac{du}{u^{3/2}} e^{-u - \frac{b^2}{4u}}. \quad (8.26')$$

Подставляя (8.26') в (8.26), мы получаем результат, отличающийся только постоянным множителем от (8.21).

На больших расстояниях от источника, когда $r \gg \sqrt{\tau T}$, мы получим из (8.24) асимптотическую формулу

$$N(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{Dr} e^{-\int_0^T \alpha d\tau + \frac{\tau T}{L^2}} e^{-\frac{r}{L}}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (8.27)$$

Мы видим, что на больших расстояниях поле тепловых нейтронов асимптотически ведет себя, как $e^{-\frac{r}{L}}$, в то время, как поле быстрых нейтронов убывает по закону $e^{-r^2/4\tau}$.

Заметим, что при наличии поглощения вдали от источника поле тепловых нейтронов, определяемое согласно (8.22), не совпадает с полем точечного источника тепловых нейтронов, в отличие от рассмотренного ранее случая отсутствия поглощения, когда такое совпадение имеет место.

В самом деле, если в начале координат находится источник тепловых нейтронов, то решение диффузационного уравнения с учетом поглощения

$$\Delta N - \frac{N}{L^2} = 0, \quad r \neq 0$$

имеет вид

$$N = \frac{Q}{4\pi r D} e^{-r/L}.$$

Сравнивая это выражение с (8.22), мы видим, что если поглощение в процессе замедления отсутствует, т.е. $\alpha = 0$, то точечный источник быстрых нейтронов создает поле тепловых нейтронов, которое в e^{rT/L^2} раз превосходит поле, создаваемое точечным источником тепловых нейтронов. Это увеличение обязано тому, что в процессе замедления быстрый нейtron проходит в среднем путь \sqrt{rT} , не поглощаясь, и поэтому поглощение в тепловой области на этом пути не сказывается.

Вблизи от источника, когда $r \ll \sqrt{rT}$, формула (8.24) дает

$$N(r) = \frac{Q}{4\pi D \sqrt{rT}} \left\{ e^{-\frac{rT}{L^2}} - \frac{2\sqrt{rT}}{L} \int_{\frac{\sqrt{rT}}{L}}^{\infty} e^{-x^2} dx \right\}. \quad (8.28)$$

Заметим, что формулы (8.10) и (8.24), определяющие плотность тепловых нейтронов, выведены на основании уравнения (8.9). Последнее уравнение относится к диффузционной области и справедливо для расстояний от источника, не превышающих $\frac{l(1-\epsilon)}{1-\epsilon+\epsilon ln \frac{E_0}{kT}}$. Вплоть до таких расстояний справедливы по-этому и формулы (8.10) и (8.24).

Выражение для $N(r)$ содержит не вполне определенную величину тепловой энергии E_T . Мы уже говорили выше, что следует усреднить $N(r, E_T)$ по значениям E_T , и выполнили это усреднение при отсутствии поглощения, предполагая, что в тепловой области имеет место максвелловское распределение. Учет поглощения приводит к громоздким формулам. Для приближенного определения плотности тепловых нейтронов мы будем пользоваться прежней формулой (8.8), понимая под D некоторое среднее значение коэффициента диффузии.

8.3. Поле тепловых нейтронов в бесконечной замедляющей призме

Рассмотрим сперва случай, когда источник быстрых нейтронов находится на оси призмы. В §7 мы определили функцию $n(\mathbf{r}, \tau)$ в этом случае. Пользуясь общей формулой (8.8), определяющей плотность тепловых нейтронов, и подставляя в нее вместо n выражение (7.15), получим

$$N(\mathbf{r}) = \frac{4}{ab} e^{-\int_0^T \alpha(\tau) d\tau + \frac{rT}{L^2}} \frac{Q}{D} \sum_{k,l=0}^{\infty} \cos \frac{2k+1}{a} \pi x \cos \frac{2l+1}{b} \pi y \times \\ \times \int_{rT}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\tau^2}{4\pi T}}}{\sqrt{4\pi T}} e^{-\frac{\tau}{L^2} - [\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2}] \pi^2 \tau} d\tau. \quad (8.29)$$

Сделав в интеграле замену переменной $\tau = \eta^2$, получим

$$N(\mathbf{r}) = \frac{4}{ab} e^{-\int_0^T \alpha d\tau + \frac{rT}{L^2}} \frac{Q}{D} \sum_{k,l=0}^{\infty} \cos \frac{(2k+1)}{a} \pi x \cos \frac{(2l+1)}{b} \pi y \times \\ \times e^{\frac{s}{L_{kl}}} \int_{\sqrt{rT}}^{\infty} e^{-(\frac{s}{2\eta} + \frac{\eta}{L_{kl}})^2} d\eta, \quad (8.29')$$

где

$$\frac{1}{L_{kl}^2} = \frac{1}{L^2} + \pi^2 \left[\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2} \right]. \quad (8.30)$$

Рассмотрим интеграл, входящий в (8.29'). Полагая

$$\eta = \sqrt{\frac{z L_{kl}}{2}} u,$$

получим

$$\int_{\sqrt{rT}}^{\infty} e^{-(\frac{s}{2\eta} + \frac{\eta}{L_{kl}})^2} d\eta = \sqrt{\frac{z L_{kl}}{2}} \int_{\sqrt{\frac{2\tau}{z L_{kl}}}}^{\infty} e^{-\frac{s}{2L_{kl}}(u + \frac{1}{u})^2} du.$$

Введем вместо u переменную $w = u + \frac{1}{u}$. При вычислении интеграла следует различать два случая в зависимости от того, будет ли нижний предел интеграла, равный $\sqrt{\frac{2\tau}{zL_{kl}}}$, больше или меньше единицы. Если $\frac{2\tau}{zL_{kl}} > 1$, то

$u = \frac{w}{2} + \sqrt{\frac{w^2}{4} - 1}$. В результате простых выкладок мы получим в этом случае

$$e^{\frac{z}{L_{kl}}} \int_{\sqrt{\tau}}^{\infty} e^{-(\frac{z}{2\eta} + \frac{\eta}{L_{kl}})^2} d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{4} L_{kl} \left\{ e^{\frac{z}{L_{kl}}} \left[1 - \Phi \left(\frac{z}{2\sqrt{\tau}} + \frac{\sqrt{\tau}}{L_{kl}} \right) \right] + e^{\frac{z}{L_{kl}}} \left[1 - \Phi \left(\frac{\sqrt{\tau}}{L_{kl}} - \frac{z}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] \right\}. \quad (8.31)$$

Если $\frac{2\tau}{zL_{kl}} < 1$, то интервал интегрирования по u следует разбить на две части $(\sqrt{\frac{2\tau}{zL_{kl}}}, 1)$, $(1, \infty)$. В первом интервале $u = \frac{w}{2} - \sqrt{\frac{w^2}{4} - 1}$, во втором интервале $u = \frac{w}{2} + \sqrt{\frac{w^2}{4} - 1}$. Легко убедиться в том, что окончательная формула совпадает с формулой (8.31), которой можно, следовательно, пользоваться при всех значениях.

Пользуясь (8.31), перепишем выражение для $N(r)$ в виде

$$N(r) = \frac{Q}{abD} e^{-\int_0^T adt + \frac{T}{L^2}} \sum_{k,l=0}^{\infty} L_{kl} \cos \frac{2k+1}{a} \pi x \cos \frac{2l+1}{b} \pi y \times \\ \times \left\{ e^{\frac{z}{L_{kl}}} \left[1 - \Phi \left(\frac{z}{2\sqrt{\tau}} + \frac{\sqrt{\tau}}{L_{kl}} \right) \right] + e^{-\frac{z}{L_{kl}}} \left[1 - \Phi \left(\frac{\sqrt{\tau}}{L_{kl}} - \frac{z}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] \right\}. \quad (8.32)$$

Выясним, как асимптотически ведет себя $N(r)$ при больших $z \gg \sqrt{\tau}$.

Заметим, что L_{kl} уменьшается с увеличением чисел k, l . Ясно, что при больших z основную роль в сумме (8.32) играет член с $k = l = 0$. Вспоминая, что $\Phi(z) \rightarrow 1$ при $z \gg 1$, получим следующую асимптотическую формулу, справедливую при больших z :

$$N(x, y, z) = \frac{2QL_{00}}{abD} e^{-\int_0^T adt + \frac{T}{L^2}} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} e^{-\frac{z}{L_{00}}}, \\ z \gg \sqrt{\tau}, \quad (8.33)$$

где

$$\frac{1}{L_{00}^2} = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + 3N^2 \sigma_s \sigma_c \quad (8.34)$$

(N – число ядер замедлителя в единице объема, σ_s и σ_c – сечения рассеяния и захвата нейтронов ядрами замедлителя).

Отметим, что зависимость от z имеет здесь вид $e^{-\frac{z}{L_{00}}}$, в то время, как плотность быстрых нейтронов в призме спадает по закону $e^{-\frac{z^2}{4\tau}}$. Различие в асимптотическом поведении вызвано, очевидно, интегрированием по t .

Формула (8.34) может служить для экспериментального определения захвата нейтронов. Если измерять N в области больших z , где распределение (8.34) имеет место, то по известному L_{00} можно найти $\sigma_s \sigma_c$. Зная сечение рассеяния, можно, таким образом, определить сечение захвата нейтронов.

Точность этого метода определяется, очевидно, относительной величиной обоих слагаемых, входящих в формулу (8.34). Первое слагаемое может быть названо геометрическим захватом, оно обусловлено диффузионным оттоком нейтронов. Точные результаты могут быть получены только в том случае, если геометрический "захват" не мешает определению истинного захвата. Отсюда вытекает, что при малом истинном захвате поперечные размеры призмы должны быть достаточно велики (вдоль оси z призма предполагается бесконечной!).

Формула (8.32) нуждается в одном уточнении. Она выведена в предположении, что на границе призмы $N = 0$, в то время как точное граничное условие имеет вид (см. §35)

$$N + s \frac{\partial N}{\partial \nu} = 0.$$

Если исходить из этого условия, то сумма, входящая в формулу (8.29') для определения $N(r)$, должна быть заменена выражением

$$\sum_{i,j} \cos \frac{q_i x}{a} \cos \frac{p_j y}{b} \left[\left(1 + \frac{\sin q_i}{q_i} \right) \left(1 + \frac{\sin p_j}{p_j} \right) \right]^{-1} \times$$

$$\times e^{z/L_{ij}} \int_{\sqrt{\pi T}}^{\infty} e^{-(\frac{z}{2\eta} + \frac{\eta}{L_{ij}})^2} d\eta, \quad (8.35)$$

где

$$L_{ij}^{-2} = L^{-2} + \frac{q_i^2}{a^2} + \frac{p_j^2}{b^2} \quad (8.35')$$

(q_i и p_j суть корни уравнений (7.20)).

Вместо формулы (8.34) мы получим теперь

$$L_{00}^2 = 3N^2 \sigma_s \sigma_c + \frac{q_0^2}{a^2} + \frac{p_0^2}{b^2}, \quad (8.36)$$

где q_0 и p_0 наименьшие корни уравнений (7.20). Рассмотрим теперь случай, когда источник быстрых нейтронов смешен относительно оси призмы. Общая формула для $N(r)$ представляет собой в этом случае сумму четырех бесконечных рядов типа (8.29), в которой, однако, наряду с произведением косинусов содержатся также произведения $\cos \frac{2k+1}{a} \pi x \sin \frac{2l+1}{b} \pi y$ и $\sin \frac{2k+1}{a} \pi x \cos \frac{2l+1}{b} \pi y$ соответственно формуле (7.28).

Мы приведем здесь лишь асимптотическую формулу для $N(r)$, справедливую при больших z :

$$N(x, y, z) = \frac{2Q L_{00}}{abD} e^{-\int_0^r \alpha(\tau) d\tau + \frac{r^2}{L_{00}^2}} \cos \frac{\pi x_0}{a} \cos \frac{\pi y_0}{b} \times \\ \times \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} e^{-\frac{z}{L_{00}}}, \quad (8.37)$$

$$z \gg \sqrt{\pi T}.$$

Этой формулой, так же, как и формулой (8.33), можно пользоваться для экспериментального определения экспоненты L_{00} , т.е сечения захвата (см.формулу (8.34)).

В случае произвольной замедляющей среды, для которой нужно пользоваться уравнением (8.9), мы приходим к уравнению

$$D\Delta N - \frac{N}{T_c} = -\frac{4}{ab} A \frac{e^{-\frac{z^2}{4\pi T}}}{\sqrt{4\pi T}} \sum_{k,l} e^{-[\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2}] \pi^2 r_T} \times$$

В случае произвольной замедляющей среды, для которой нужно пользоваться уравнением (8.9), мы приходим к уравнению:

$$D\Delta N - \frac{N}{T_c} = -\frac{4}{ab} \frac{e^{-\frac{z^2}{4\pi T}}}{\sqrt{4\pi T}} \sum_{k,l} e^{-[\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2}] \pi^2 r_T} \quad (8.38)$$

аналогично уравнению (8.33) с единственной разницей в том, что уравнение имеет вид:

$$N = \sum_{k,l} f_{kl} \left(\dots, e^{-\frac{(2k+1)^2}{a^2} \pi^2 r_T}, e^{-\frac{(2l+1)^2}{b^2} \pi^2 r_T} \right)$$

~~Функция $f_{kl}(z)$ удовлетворяет уравнению:~~

$$\bullet \frac{d^2 f_{kl}}{dz^2} = \left(\frac{1}{z^2} + \frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2} \right) f_{kl} = -\frac{1}{ab} \frac{e^{-\frac{z^2}{4\pi T}}}{\sqrt{4\pi T}} = \\ = \frac{1}{\pi ab} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} - \frac{e^{-\frac{z^2}{4\pi T}}}{\sqrt{4\pi T}} dt \quad (8.39)$$

Найдем f_{kl} в пределах:

$$f_{kl} = \int_{-\infty}^{\infty} g_{kl}(t) e^{izt} dt \quad (8.40)$$

$f_{kl}(t)$ согласно (8.39) равна:

$$g_{kl}(t) = \frac{1}{z^2 + \frac{1}{ab} \frac{e^{-\frac{z^2}{4\pi T}}}{\sqrt{4\pi T}}}$$

Отсюда находим $f_{kl}(t)$:

$$f_{kl}(t) = \frac{1}{\pi ab} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{ab} \frac{e^{-\frac{z^2}{4\pi T}}}{\sqrt{4\pi T}} t}}{z^2 + \frac{1}{ab} \frac{e^{-\frac{z^2}{4\pi T}}}{\sqrt{4\pi T}}} dt \quad (8.41)$$

Следовательно выражение (8.39) будет, т.е. (8.11) имеет подобную формулу, отличную от (8.12):

Фрагмент рукописи, написанный И.Я.Померанчуком

$$\times \cos \frac{2k+1}{2a} \pi x \cos \frac{2l+1}{2b} \pi y. \quad (8.38)$$

Решение этого уравнения ищем (в соответствии со структурой правой части) в виде

$$N = \sum_{k,l} f_{kl}(z) \cos \frac{2k+1}{2a} \pi x \cos \frac{2l+1}{2b} \pi y e^{-[(\frac{(2k+1)^2}{4a^2} + \frac{(2l+1)^2}{4b^2})] \pi^2 \tau_T}.$$

Функции $f_{kl}(z)$ удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_{kl}}{dz^2} - \left(\frac{1}{L^2} + \frac{(2k+1)^2}{4a^2} \pi^2 + \frac{(2l+1)^2}{4b^2} \pi^2 \right) f_{kl} = - \frac{4A}{ab} \frac{e^{-\frac{z^2}{4\tau_T}}}{\sqrt{4\pi\tau_T}} = \\ = - \frac{2A}{\pi ab} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iqz - q^2 \tau_T} dq. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Разлагаем f_{kl} в ряд Фурье

$$f_{kl} = \int_{-\infty}^{\infty} g_{kl}(q) e^{iqz} dq. \quad (8.40)$$

$g_{kl}(q)$ согласно (8.39) равны:

$$g_{kl}(q) = \frac{qA}{q^2 + \frac{1}{L_{kl}^2}} \frac{e^{-q^2 \tau_T}}{\pi ab}.$$

Отсюда находим $f_{kl}(z)$:

$$f_{kl}(z) = \frac{2A}{\pi ab} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-q^2 \tau_T} e^{iqz}}{q^2 + \frac{1}{L_{kl}^2}} dq. \quad (8.41)$$

Сравнивая это выражение с (8.25), (8.26) и (8.32), мы видим, что (8.41) только постоянным множителем отличается от (8.32).

8.4. Поле тепловых нейтронов в замедляющей призме конечных размеров

Пользуясь обозначениями §7 и подставляя в (8.8) вместо $n(\mathbf{r}, t)$ (7.31) для определения плотности тепловых нейтронов, получим

$$\begin{aligned} N(x, y, z) = \frac{Q}{D} \frac{8}{abc} e^{-\int_0^r \alpha dr} \times \\ \times \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2k+1}{a} \pi x \cdot \cos \frac{2l+1}{b} \pi y \cdot \cos \frac{2m+1}{c} \pi z}{\pi^2 [\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2} + \frac{(2m+1)^2}{c^2}] + \frac{1}{L^2}} \times \\ \times e^{-[\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2} + \frac{(2m+1)^2}{c^2}] \pi^2 \tau_T}. \end{aligned} \quad (8.42)$$

§9. Уравнение для тепловых нейтронов при наличии мультипликации

Рассмотрим систему, состоящую из замедлителя и элемента, ядра которого способны делиться под действием тепловых нейтронов.

Пусть в точке $\mathbf{r} = 0$ находится источник быстрых нейтронов, дающих в единицу времени q нейтронов с энергией E . В этом параграфе мы установим общее интегральное уравнение, которому удовлетворяет в этом случае плотность тепловых нейтронов.

Размеры системы предполагаются значительно большими, чем длина свободного пробега нейтронов. Нейtronная плотность будет при этом медленно меняющейся функцией координат, ибо она существенно меняется на расстояниях порядка размеров всей системы. В этих условиях плотность тепловых нейтронов $N(\mathbf{r}, t)$ в точке \mathbf{r} момент времени t удовлетворяет диффузионному уравнению

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \Delta N - \frac{N}{T_c} + q. \quad (9.1)$$

Первый член в правой части этого уравнения дает изменение плотности тепловых нейтронов, обусловленное диффузией; D – коэффициент диффузии тепловых нейтронов, равный, как известно,

$$D = \frac{1}{3} l_s v, \quad (9.2)$$

где l_s – средняя длина свободного пробега нейтрона (по отношению к рассеянию), v – средняя скорость тепловых нейтронов.⁴

Второй член в (9.1) представляет собой число нейтронов, поглощаемых в единице объема в единицу времени; T_c – время жизни теплового нейтрона по отношению к захвату. Если σ_c^α – эффективное сечение захвата теплового нейтрона ядром сорта α , то

$$\frac{1}{T_c} = \sum_{\alpha} N_{\alpha} \sigma_c^{\alpha} v, \quad (9.3)$$

где N_{α} – число ядер сорта α в единице объема.

Наконец, последний член представляет собой число тепловых нейтронов, возникающих в единице объема в единицу времени за счет процессов деления ядер мультилиплицирующей компоненты, происходящих, главным образом, под действием медленных нейтронов, а также за счет превращения быстрых нейтронов, испускаемых источником, в тепловые нейтроны.

Найдем прежде всего изменение плотности тепловых нейтронов, обусловленное процессами деления ядер [4]. Рассмотрим элемент объема $d\mathbf{r}'$ около точки \mathbf{r}' . В этом объеме содержится $N(\mathbf{r}', t)d\mathbf{r}'$ тепловых нейтронов. В единицу времени из этого числа поглощается различными ядрами всего

$$\frac{1}{T_c} N(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}'$$

нейтронов. Нас интересуют нейтроны, захваченные ядрами мультилиплицирующей компоненты. Их число может быть представлено в виде

$$\theta \frac{N(\mathbf{r}', t)}{T_c} d\mathbf{r}', \quad (9.4')$$

где

⁴Строго говоря, коэффициент диффузии выражается не через длину рассеяния l_s , а через транспортную длину l_{tr} . Практически, однако, это различие в случае тепловых нейтронов существенно лишь при рассеянии на веществах, содержащих водород или дейтерий (например, в воде или тяжелой воде). (Прим. ред.)

$$\theta = \frac{\sum_i N_i \sigma_c^i}{\sum_{\alpha} N_{\alpha} \sigma_c^{\alpha}}. \quad (9.4)$$

Здесь суммирование по i распространяется на те сорта ядер, которые способны делиться; суммирование по α относится ко всем сортам ядер вообще, включая и те из них, которые не способны делиться.

Величину θ можно назвать тепловым использованием.

Пусть на каждый тепловой нейtron, захваченный ядром мультилиплицирующей компоненты, образуется ν новых быстрых нейтронов. Общее количество быстрых нейтронов, образующихся в элементе объема $d\mathbf{r}'$ в единицу времени, равно

$$\frac{\nu \theta}{T_c} N(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}'. \quad (9.5')$$

Величину ν легко связать с числом нейтронов, появляющихся в результате одного акта деления ядра. Обозначим через ν_i число нейтронов, рождающихся в одном акте деления ядра сорта i , тогда

$$\nu = \frac{\sum_i N_i \sigma_f^i \nu_i}{\sum N_i \sigma_c^i}, \quad (9.5)$$

где σ_f^i – сечение деления ядра i -го сорта.

Образующиеся быстрые нейтроны, двигаясь в замедлителе, теряют свою энергию. Те из них, которые не будут захвачены резонансно, в конце концов превращаются в тепловые нейтроны.

Если обозначить через φ вероятность быстрому нейтрону замедлиться, не будучи захваченным ни на один из резонансных уровней ядер, то общее число новых медленных нейтронов, появляющихся в единицу времени в результате захватов, происходивших в объеме $d\mathbf{r}'$, будет

$$\frac{\nu \varphi \theta}{T_c} N(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}'. \quad (9.6)$$

Замедление быстрого нейтрона, родившегося в точке \mathbf{r}' , может окончиться в разных точках \mathbf{r} .

Обозначим через $W(\mathbf{r}', \mathbf{r})d\mathbf{r}$ вероятность того, что быстрый нейтрон, родившийся в точке \mathbf{r}' , становится тепловым в элементе объема $d\mathbf{r}$ около точки \mathbf{r} . В результате замедления нейтронов, возникших в $d\mathbf{r}'$, в элементе объема $d\mathbf{r}$ появится в единицу времени

$$\frac{\nu\varphi\theta}{T_c} N(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' W(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (9.7')$$

тепловых нейтронов. Проинтегрировав это выражение по $d\mathbf{r}'$ и разделив результат на $d\mathbf{r}$, найдем изменение плотности тепловых нейтронов в единицу времени в точке \mathbf{r} , вызванное рождением новых нейтронов

$$\frac{\nu\varphi\theta}{T_c} \int N(\mathbf{r}', t) W(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}'. \quad (9.7)$$

Определим теперь число тепловых нейтронов, возникающих в единице объема в единицу времени за счет замедления нейтронов, испускаемых источником. Это число равно, очевидно,

$$Q\varphi W(0, \mathbf{r}) \quad (9.8')$$

(источник находится в начале координат). Итак, q равно

$$q = Q\varphi W(0, \mathbf{r}) + \frac{\nu\varphi\theta}{T_c} \int N(\mathbf{r}', t) W(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}'. \quad (9.8)$$

Подставляя это выражение в уравнение (9.1), получим окончательно следующее интегро-дифференциальное уравнение для определения $N(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\Delta N + \frac{\nu\varphi\theta}{T_c} \int N(\mathbf{r}', t) W(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}' + Q\varphi W(0, \mathbf{r}) - \frac{N(\mathbf{r}, t)}{T_c}. \quad (9.9)$$

Заметим, что плотность вероятности $W(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ пропорциональна рассмотренной нами ранее функции $n(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, \tau_T)$. (Напомним, что $n(\mathbf{r}, \tau)$ пропорционально вероятности того, что нейтрон, вышедший из точки $\mathbf{r} = 0$ имеет в точке \mathbf{r} энергию $E = E(\tau)$).

Учитывая условие нормировки

$$\int W(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1, \quad (9.9')$$

можно утверждать, что $W(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ совпадает с нормированной функцией $n(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, \tau_T)$, определенной в случае отсутствия поглощения.

В дальнейшем мы детально изучим уравнение (9.9). здесь же сделаем следующие замечания.

Если количество нейтронов, возникающих при делении ядер, превышает потерю нейтронов, обусловленную вылетом их из системы и захватами, не приводящими к делению, то в системе будет развиваться цепная реакция.

Уравнение (9.9) имеет в этом случае, даже в отсутствие источника нейтронов, экспоненциально растущее со временем решение.

Условие того, что число нейтронов, рождающихся в процессе деления, превышает число нейтронов, захватываемых ядрами, может быть, очевидно, представлено в виде

$$\nu\varphi\theta > 1. \quad (9.10)$$

Заметим, что величины ν , φ и θ входят в основное уравнение (9.9) в виде комбинации $\nu\varphi\theta$. Это произведение мы обозначим через K и назовем K коэффициентом размножения нейтронов. Условие (9.10) показывает, что для протекания саморазвивающейся цепной реакции коэффициент размножения нейтронов должен быть больше единицы.

Для возможности протекания саморазвивающейся цепной реакции этого условия, однако, недостаточно. Необходимо еще, чтобы размеры системы превышали некоторую минимальную критическую величину.

Существование критических размеров можно легко понять. Действительно, вылет нейтронов из системы представляет собой поверхностный эффект, в то время как захват нейтронов, происходящий во всей массе вещества, является существенно объемным эффектом. Предположим, что размеры системы увеличиваются. При этом, очевидно, увеличивается как число захватов, приводящих к делению, так и число захватов без деления. Относительная роль захватов обоих типов, однако, не меняется. С другой стороны, относительная роль поверхностных эффектов с увеличением размеров системы уменьшается. Поэтому уменьшается относительная роль вылетов нейтронов.

Критические размеры как раз характеризуются тем, что количество рождающихся новых нейтронов в точности равно потере нейтронов, обусловленной их вылетом из системы и захватами, не приводящими к делению.

Если размеры системы меньше критических, то протекание саморазвивающейся реакции, естественно, невозможно.

§10. Поле тепловых нейтронов в мультилиплицирующей призме (теория экспоненциальных опытов)

Обратимся прежде всего к рассмотрению уравнения (9.9) для систем, размеры которых меньше критических.

При наличии источника нейтронов уравнение (9.9) допускает в этом случае стационарное, не зависящее от времени, решение. Исследуем это решение для случая бесконечно длинной прямоугольной призмы, состоящей из смеси замедлителя и мультилиплицирующей компоненты (см.рис 4, призма бесконечна вдоль z). На оси призмы в точке Q находится источник быстрых нейтронов.

Выпишем здесь, пользуясь результатами §7, выражение для $W(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = n(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, \tau_T)$ (см.формулу (7.15), в которой следует считать $\alpha = 0$)

$$W(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{4}{ab} \frac{e^{-\frac{(z-z')^2}{4\tau_T}}}{\sqrt{4\pi\tau_T}} \times \\ \times \sum_{k,l=0}^{\infty} \cos \frac{2k+1}{a} \pi(x-x') \times \\ \times \cos \frac{2l+1}{b} \pi(y-y') e^{-[\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2}] \pi^2 \tau_T}. \quad (10.1)$$

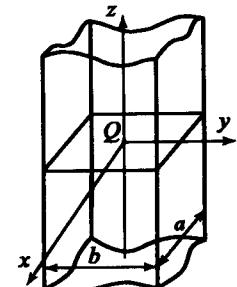


Рис. 4

Предположим, что поперечные размеры призмы a, b значительно превосходят длину свободного пробега нейтронов в призме. При этом можно считать, что на границе призмы приближенно выполняется условие $N \approx 0$ (см.§8).

Решение уравнения (9.9), удовлетворяющее этому условию, ищем в виде

$$N(\mathbf{r}) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \cos \frac{2k+1}{a} \pi x \cos \frac{2l+1}{b} \pi y f_{kl}(z), \quad (10.2)$$

где $f_{kl}(z)$ неизвестные, подлежащие определению, функции. Подставляя это выражение в уравнение (9.9) и пользуясь формулой (10.1) для $W(\mathbf{r}', \mathbf{r})$, получим

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} \left\{ f_{kl}''(z) - \left[\frac{(2k+1)^2}{a^2} \pi^2 + \frac{(2l+1)^2}{b^2} \pi^2 + \frac{1}{L^2} \right] f_{kl}(z) \right\} \times \\ \times \cos \frac{2k+1}{a} \pi x \cos \frac{2l+1}{b} \pi y + \\ + \frac{\nu\varphi\theta}{L^2} \sum_{k,l=0}^{\infty} \int \cos \frac{2k+1}{a} \pi x' \cos \frac{2l+1}{b} \pi y' f_{kl}(z') W(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r} = \\ = -\frac{Q}{D} \frac{4}{ab} \varphi \frac{e^{-\frac{z^2}{4\tau_T}}}{\sqrt{4\pi\tau_T}} \sum_{k,l=0}^{\infty} \cos \frac{2k+1}{a} \pi x \cos \frac{2l+1}{b} \pi y \times \\ \times e^{-[\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2}] \pi^2 \tau_T}. \quad (10.3)$$

Выполним сперва интегрирование по x', y' . Воспользовавшись формулой

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \cos \frac{2k+1}{a} \pi x' \cos \frac{2l+1}{b} \pi y' W(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dx' dy' = \\ = \frac{e^{-\frac{(z-z')^2}{4\tau_T}}}{\sqrt{4\pi\tau_T}} \cos \frac{2k+1}{a} \pi x \cos \frac{2l+1}{b} \pi y e^{-[\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2}] \pi^2 \tau_T},$$

получим следующее уравнение для определения функции $f_{kl}(z)$:

$$f_{kl}''(z) - \left[\frac{(2k+1)^2}{a^2} \pi^2 + \frac{(2l+1)^2}{b^2} \pi^2 + \frac{1}{L^2} \right] f_{kl}(z) +$$

$$+\frac{\nu\varphi\theta}{L^2} e^{-[\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2}] \pi^2 \tau_T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(z-z')^2}{4\tau_T}}}{\sqrt{4\pi\tau_T}} f_{kl}(z') dz' = \\ = \frac{Q}{D} \frac{4}{ab} \varphi \frac{e^{-\frac{z^2}{4\tau_T}}}{\sqrt{4\pi\tau_T}} e^{-[\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2}] \pi^2 \tau_T}. \quad (10.4)$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде интеграла Фурье

$$f_{kl}(z) = \int e^{iz\eta} \lambda(\eta) d\eta. \quad (10.5)$$

Замечая, что

$$\frac{e^{-\frac{z^2}{4\tau_T}}}{\sqrt{4\pi\tau_T}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau_T \eta^2} e^{iz\eta} d\eta, \quad (10.6)$$

мы получим, подставив (10.5), (10.6) в (10.4), следующее выражение для компоненты Фурье:

$$\lambda(\eta) = \left\{ \frac{\nu\varphi\theta}{L^2} e^{-[\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2}] \pi^2 \tau_T} e^{-\tau_T \eta^2} - \eta^2 - \frac{(2k+1)\pi^2}{a^2} - \frac{(2l+1)\pi^2}{b^2} - \frac{1}{L^2} \right\} = \frac{4Q\varphi}{Dab \cdot 2\pi} e^{-\tau_T \eta^2}. \quad (10.7)$$

Таким образом,

$$f_{kl}(z) = \frac{4Q\varphi}{Dab \cdot 2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau_T \eta^2} e^{iz\eta} d\eta \times \\ \times \left\{ \frac{\nu\varphi\theta}{L^2} e^{-[\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2}] \pi^2 \tau_T} e^{-\tau_T \eta^2} - \eta^2 - \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{a^2} - \frac{(2l+1)^2 \pi^2}{b^2} - \frac{1}{L^2} \right\}^{-1}. \quad (10.8)$$

В дальнейшем нас будет интересовать главным образом асимптотическое поведение $f_{kl}(z)$ при больших z ($z \gg \sqrt{\tau_T}$).

Мы можем при этом вовсе пренебречь выражением, стоящим в правой части уравнения (10.4), так как оно содержит множитель $e^{-z^2/4\tau_T}$.

Полученное однородное уравнение имеет очевидное решение

$$f_{kl}(z) = \text{const } e^{-\gamma_{kl} z}, \quad z \gg \sqrt{\tau_T}, \quad (10.8')$$

где γ_{kl} – некоторая постоянная.

Замечая, что

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau_T}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z'-z)^2}{4\tau_T}} e^{-\gamma_{kl} z'} dz' = e^{-\gamma_{kl} z} e^{\gamma_{kl}^2 \tau_T},$$

получим следующее трансцендентное уравнение для нахождения экспоненты γ_{kl} :

$$\gamma_{kl}^2 = \frac{(2k+1)^2}{a^2} \pi^2 + \frac{(2l+1)^2}{b^2} \pi^2 + \frac{1}{L^2} - \frac{\nu\varphi\theta}{L^2} e^{\gamma_{kl}^2 \tau_T - [\frac{(2k+1)^2}{a^2} + \frac{(2l+1)^2}{b^2}] \pi^2 \tau_T}. \quad (10.9)$$

При $\eta = i\gamma_{kl}$ знаменатель подинтегральной функции (член в фигурных скобках) в общем выражении для f_{kl} (10.8) обращается в нуль.

Вводя обозначения

$$\frac{1}{L_{kl}^2} = \frac{\pi^2(2k+1)^2}{a^2} + \frac{\pi^2(2l+1)^2}{b^2}, \\ \eta = (\gamma_{kl}^2 - \frac{1}{L_{kl}^2}) L^2, \quad (10.10)$$

перепишем (10.9) в виде

$$\eta = (1 - \nu\varphi\theta) e^{\frac{\tau_T}{L^2} \eta}. \quad (10.11)$$

Уравнение (10.11) определяет η как функцию $K = \nu\varphi\theta$ и $\frac{\tau_T}{L^2}$. Переписав (10.11) в виде

$$K = (1 - \eta) e^{-\frac{\tau_T}{L^2} \eta}, \quad (10.11')$$

заключаем, что $\eta < 0$ при $K > 1$ и $\eta > 0$ при $K < 1$, т.е.

$$\gamma_{kl} < \frac{1}{L_{kl}}, \text{ если } K > 1,$$

$$\gamma_{kl} > \frac{1}{L_{kl}}, \text{ если } K < 1. \quad (10.11'')$$

Заметим, что при $L = \infty$, т.е. в отсутствие захвата, $\gamma_{kl} = L_{kl}^{-1}$.

Рассмотрим подробнее тот случай, когда $|1 - K| \ll 1$. В этом случае $\eta \ll 1$, и мы можем поэтому разложить экспоненциальную функцию, входящую в (10.11'), в ряд с точностью до квадратичных членов. В результате получим

$$\eta = \frac{1 - K}{1 + K \frac{\tau_T}{L^2}}$$

и

$$\gamma_{kl}^2 = \frac{1}{L_{kl}^2} + \frac{1}{L^2} \frac{1 - K}{1 + K \frac{\tau_T}{L^2}}. \quad (10.12)$$

Так как γ_{kl} возрастает с увеличением индексов k и l , то на далеких расстояниях от источника наиболее существенную роль играет, очевидно, гармоника $k = l = 0$.

Плотность тепловых нейтронов определяется при этом следующей асимптотической формулой

$$N(x, y, z) \sim \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} e^{-\gamma_{00} z}, \quad z \gg \sqrt{\tau_T}. \quad (10.13)$$

Экспериментальное определение нейтронного поля при больших z дает возможность найти γ_{00} , откуда, зная L^2 и τ_T , можно определить коэффициент размножения K .

Следует иметь в виду, что предыдущие формулы выведены в предположении, что на границе призмы плотность нейтронов обращается в нуль. Для получения более точных результатов следует исходить из граничного условия (см. §35)

$$N + s \frac{\partial N}{\partial \nu} = 0.$$

Приведенные выше формулы остаются при этом в силе, если понимать под L_{kl}^{-2} выражение

$$q_i^2/a^2 + p_j^2/b^2,$$

где q_i, p_j – корни уравнений (7.20). В частности, в γ_{00} будут входить наименьшие корни q_0, p_0 .

Если положить в приведенных выше формулах $K = 0$, то формула (10.2) перейдет в выражение (8.29) для плотности тепловых нейтронов в замедляющей призме.

ГЛАВА II

КРИТИЧЕСКИЕ РАЗМЕРЫ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

§11. Основные соотношения

Перейдем к изложению методов нахождения критических размеров мультилицирующих систем или, как мы будем их еще называть, – реакторов или котлов. Мы предположим здесь, что система представляет собой однородную смесь вещества, ядра которого способны делиться главным образом под действием медленных нейтронов, и замедлителя, в котором происходит замедление рождающихся быстрых нейтронов до тепловых энергий.

Размеры системы предполагаются значительно превосходящими длину свободного пробега нейтрона.

Заметим прежде всего, что критические размеры системы могут быть значительно уменьшены, если окружить ее оболочкой, вещество которой слабо поглощает нейтроны. Такая оболочка будет "отражать" часть нейтронов, вылетающих из системы, обратно в систему. Таким образом, уменьшается вредный вылет нейтронов из системы, благодаря чему уменьшаются критические размеры системы.

Саморазвивающаяся цепная реакция описывается уравнением (9.9), в котором следует положить $Q = 0$. Задача состоит в том, чтобы определить минимальные размеры системы, начиная с которых уравнение (9.9) имеет нарастающие экспоненциально со временем решения.⁵

Предполагая в общем случае наличие слоя нейtronной изоляции, о котором упоминалось выше, выпишем здесь кинетические уравнения для тепловых нейтронов в мультилицирующей среде и в слое нейtronной изоляции.

Обозначим плотность тепловых нейтронов в мультилицирующей среде и в изоляции в точке \mathbf{r} в момент времени t со-

ответственно через $N_i(\mathbf{r}, t)$ и $N_e(\mathbf{r}, t)$. Плотность нейтронов N_i удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = D_i \Delta N_i + \frac{\nu \varphi \theta}{T_i} \int N_i(\mathbf{r}', t) W(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}' - \frac{1}{T_i} N_i(\mathbf{r}, t), \quad (11.1)$$

где D_i – коэффициент диффузии тепловых нейтронов в мультилицирующей среде, T_i – время их жизни по отношению к захвату в мультилицирующей среде.

Для плотности нейтронов в изоляции имеет место уравнение

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} = D_e \Delta N_e - \frac{1}{T_e} N_e + q_e, \quad (11.2)$$

где D_e – коэффициент диффузии тепловых нейтронов в изоляции, T_e – время их жизни в изоляции по отношению к захвату и, наконец, q_e – количество тепловых нейтронов, поступающих в единицу времени в единицу объема изоляции из мультилицирующей среды, где они родились, но замедление которых закончилось в изоляции. Ясно, что эта величина заметно отлична от нуля только в тонком пограничном слое, толщина которого по порядку величины равна длине замедления нейтронов в изоляции. Вдали от границы, на расстояниях, превышающих длину замедления в изоляции, $q_e \approx 0$; здесь имеет место обычное диффузионное уравнение

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} = D_e \Delta N_e - \frac{1}{T_e} N_e. \quad (11.3)$$

Для того, чтобы сделать задачу вполне определенной, нужно указать еще граничные условия. Эти условия состоят в следующем. На границе мультилицирующей среды с изоляцией должны быть равны, во-первых, плотности нейтронов с обеих сторон границы и, во-вторых, поток нейтронов, выходящих из мультилицирующей среды в изоляцию, должен быть равен потоку нейтронов, входящему в изоляцию. Эти условия приводят к следующим равенствам, выполняющимся на границе (§15):

$$N_i = N_e, \\ D_i \frac{\partial N_i}{\partial \nu} = D_e \frac{\partial N_e}{\partial \nu}, \quad (11.4)$$

⁵ В настоящее время вместо используемого авторами термина "нейтронная изоляция" общеупотребителен термин "отражатель". (Прим. ред.)

где ν – нормаль к границе.

На границе с вакуумом выполняется в общем случае условие (см. §35)

$$N + s \frac{\partial N}{\partial \nu} = 0, \quad (11.4')$$

где s – некоторая константа, имеющая размерность длины. По порядку величины s равняется длине свободного пробега нейтронов l_s . Точное значение s зависит от формы граничной поверхности, в случае плоской границы $s = 0,71l_s$.⁶

В рассматриваемом нами случае плотность нейтронов является медленно меняющейся функцией координат; она претерпевает существенные изменения на расстояниях порядка размеров всей системы. Поэтому $\partial N / \partial \nu \sim N/R$, где R определяет порядок величины размеров системы. Итак,

$$s \frac{\partial N}{\partial \nu} \sim \frac{l_s}{R} N.$$

Так как $l_s \ll R$, то членом $s\partial N/\partial \nu$ можно вовсе пренебречь в выражении (11.4'). Таким образом, в первом приближении условие на границе с вакуумом имеет вид

$$N_{\text{гр}} = 0. \quad (11.5)$$

Таким условием мы уже пользовались в предыдущей главе.

Приступая к исследованию уравнений (11.1) и (11.3), заметим предварительно, что $W_\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ является сложной функцией координат и зависит, кроме того, от формы и величины изучаемой системы. Индекс τ , который иногда появляется, напоминает нам, что $W_\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ зависит также от τ . Поэтому в общем виде нахождение решения системы уравнений (11.1) и (11.3) представляет собой чрезвычайно сложную математическую задачу.

Существенные упрощения наступают, если рассматривать уравнения (11.1) вдали от границы системы, т.е. на расстояниях, которые велики по сравнению со средней длиной замедления нейтронов в мультилицирующей среде. Размеры системы, которые мы будем главным образом изучать, предполагаются значительно большими длины замедления нейтронов.

⁶Более точно, $s = 0,71l/(1 - \cos\vartheta)$, где l есть полная длина, $1/l = 1/l_s + 1/l_c$, $\cos\vartheta$ – средний консинус угла рассеяния. (Прим. ред.)

Ясно, что вне сравнительно тонкого поверхностного слоя, толщина которого порядка длины замедления нейтронов, влияние границы не будет сказываться. Вне этого слоя $W_\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ будет функцией только расстояния между точками \mathbf{r}' и \mathbf{r} , в то время как вблизи границы зависимость W от \mathbf{r}' и \mathbf{r} имеет более сложный характер. Если замедляющие свойства изоляции такие же как и у реактора, то W имеет одинаковый вид как вблизи границы, так и вдали от нее. Этот случай осуществляется у графитового реактора с графитовой изоляцией.

Функция $W_\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ становится исчезающе малой, если расстояние между точками \mathbf{r}' и \mathbf{r} значительно больше длины замедления. Выше мы уже говорили, что нейтронная плотность представляет собой медленно меняющуюся функцию координат, $N(\mathbf{r}, t)$ почти не меняется на расстояниях порядка длины замедления. По этой причине можно в уравнении (11.1) разложить $N(\mathbf{r}', t)$ в ряд по степеням $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ и ограничиться квадратичными членами:

$$N(\mathbf{r}', t) = N(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^3 (x'_i - x_i) \frac{\partial N}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 (x'_i - x_i)(x'_k - x_k) \frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial x_k}, \quad (11.6')$$

где x_i – компоненты вектора \mathbf{r} . Подставляя это разложение в интеграл, входящий в (11.1), получим

$$\begin{aligned} \int N(\mathbf{r}', t) W(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}' &= N(\mathbf{r}, t) \int W(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}' + \\ &+ \sum_i \frac{\partial N}{\partial x_i} \int (x'_i - x_i) W(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}' + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial x_k} \int (x'_i - x_i)(x'_k - x_k) W(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (11.6'')$$

Рассмотрим это разложение вдали от границы, где W зависит только от модуля $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$. С возрастанием $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ функция W быстро спадает, поэтому в интегралах можно считать пределы бесконечными. Отсюда легко заключить, что члены, линейные относительно $x_i - x'_i$, дают в (11.6'') при интегрировании нуль.

Обращаются в нуль также те из интегралов в последнем члене в (11.6''), в которых $i \neq k$. Что касается интегралов с $i = k$, то все они, очевидно, одинаковы и равны

$$\int (x'_i - x_i)^2 W(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}' = \frac{1}{3} \int |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2 W(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) d\mathbf{r}' = \frac{1}{3} \rho^2, \quad (11.6)$$

где ρ^2 средний квадрат длины замедления нейtronов. Итак,

$$\int N(\mathbf{r}', t) W(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}' = N(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{6} \rho^2 \Delta N. \quad (11.7)$$

Подставляя это выражение в уравнение (11.1), получим

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = (D_i + \frac{1}{6} \rho^2 \frac{K}{T_i}) \Delta N_i + \frac{N_i}{T_i} (K - 1). \quad (11.8)$$

Из интегро-дифференциального уравнения мы получили уравнение диффузионного типа, оперировать с которым гораздо легче, чем с исходным уравнением (11.1).

Подчеркнем, что это уравнение справедливо лишь внутри мультилиплицирующей системы, вдали от границы, на расстояниях от последней, превышающих ρ . Вблизи границы необходимо пользоваться точным уравнением.

Обратим внимание на то обстоятельство, что в диффузионное уравнение (11.8) в качестве коэффициента диффузии входит сумма $D_i + \rho^2 K / (6T_i)$, которую можно назвать эффективным коэффициентом диффузии. Обозначим эффективный коэффициент диффузии через $D_{\text{эфф}}^i$

$$D_{\text{эфф}}^i = D_i + \frac{1}{6} \rho^2 \frac{K}{T_i}. \quad (11.9)$$

Введем еще следующие обозначения:

$$L = \sqrt{DT_c} = \sqrt{\frac{1}{3} l_c l_s},$$

$$\Lambda = \sqrt{\frac{D_{\text{эфф}} T_c}{K - 1}} = \sqrt{\frac{DT_c + \frac{1}{6} \rho^2 K}{K - 1}}, \quad (11.10)$$

где l_c и l_s – длины пробега нейtronов по отношению к захвату и рассеянию. Если обозначить сечения рассеяния и захвата нейtronов ядрами сорта α соответственно через σ_s^α и σ_c^α , то

$$l_s^{-1} = \sum_\alpha N_\alpha \sigma_s^\alpha, \quad l_c^{-1} = \sum_\alpha N_\alpha \sigma_c^\alpha, \quad (11.10')$$

где N_α – число ядер сорта α в единице объема.

Величина L называется диффузионной длиной, Λ может быть названа эффективной диффузионной длиной (предполагается, что $K > 1$). Пользуясь этими обозначениями, перепишем уравнения (11.8) и (11.3) в виде

$$\frac{1}{D_{\text{эфф}}^i} \frac{\partial N_i}{\partial t} = \Delta N_i + \frac{1}{\Lambda_i^2} N_i, \\ \frac{1}{D_e} \frac{\partial N_e}{\partial t} = \Delta N_e - \frac{1}{L_e^2} N_e \quad (11.11)$$

(индексы i и e относятся соответственно к мультилиплицирующей среде и к изоляции).

Эти уравнения, как уже говорилось выше, справедливы вдали от границы, на расстояниях от последней, превышающих длину замедления. Пользоваться уравнениями вблизи границы, строго говоря, незаконно.

Решая задачу приближенно, мы будем, однако, считать эти уравнения справедливыми везде, вплоть до самой границы с изоляцией, на которой потребуем выполнения определенных граничных условий. Эти условия должны учитывать то обстоятельство, что в действительности у границы с изоляцией уравнения (11.11) не имеют места. Следует подчеркнуть, что эти условия, вообще говоря, не совпадают с граничными условиями (11.4), если даже заменить в последних коэффициент диффузии D^i на эффективный коэффициент диффузии $D_{\text{эфф}}^i$. Только в случае исчезающе малой длины замедления имеют место граничные условия (11.4). Вопросу нахождения граничных условий с учетом конечной длины замедления нейtronов посвящен §15.

Заметим, что если размеры системы превосходят критические размеры, то плотность нейtronов будет экспоненциально расти со временем. В самом деле, разлагая плотность нейtronов в ряд Фурье по времени:

$$N(\mathbf{r}, t) = \sum_k e^{\lambda_k t} N_{(k)}(\mathbf{r}),$$

мы для функций $N_{(k)}(\mathbf{r})$ получаем уравнения:

$$\frac{\lambda_k}{D_{\text{эфф}}^i} N_{(k)i} = \Delta N_{(k)i} + \frac{1}{\Lambda_i^2} N_{(k)i},$$

$$\frac{\lambda_k}{D_e} N_{(k)e} = \Delta N_{(k)e} - \frac{1}{L_e^2} N_{(k)e}.$$

Эта система уравнений вместе с граничными условиями определяет возможные значения λ_k . При этом $N(\mathbf{r}, t)$ практически всегда определяется тем членом в сумме по k , которому соответствует наибольшее значение λ_k , т.е.

$$N(\mathbf{r}, t) = e^{\lambda_{\max} t} N(\mathbf{r}).$$

Когда размеры системы меньше критических, то максимальное значение λ отрицательно, то-есть плотность нейтронов (в отсутствие внешнего источника) падает с течением времени. Когда размеры системы больше критических, $\lambda_{\max} > 0$, нейтронное поле растет со временем, причем это нарастание осуществляется экспоненциальным образом:

$$N(t) = N(0) e^{\lambda_{\max} t} = N(0) e^{\lambda t}.$$

Мы будем называть $\lambda_{\max} = \lambda$ экспонентой размножения.

Критическим размерам отвечает стационарное распределение нейтронов. Поэтому при определении в дальнейшем критических размеров различного рода систем можно положить в уравнениях (11.1)

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = \frac{\partial N_e}{\partial t} = 0.$$

Прежде, чем переходить к рассмотрению конкретных примеров определения критических размеров, сделаем еще следующее замечание.

Все приведенные выше уравнения содержат только плотность тепловых нейтронов. В некоторых случаях бывает удобно рассматривать наряду с тепловыми также и быстрые, замедляющиеся нейтроны. При этом вместо интегро-дифференциального уравнения для тепловых нейтронов мы будем иметь систему дифференциальных уравнений для быстрых и тепловых нейтронов. Приведем здесь эти уравнения.

Имея в виду в дальнейшем только определение критических размеров, мы будем рассматривать стационарный случай.

Плотность быстрых нейтронов с энергией $E = E(\tau)$, $\tau = A \ln(E_0/E)$, в точке \mathbf{r} обозначим через $n(\mathbf{r}, \tau)$. Плотность тепловых нейтронов будем по-прежнему обозначать че-

рез $N(\mathbf{r})$. Плотность быстрых нейтронов, согласно (5.33), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \Delta n - \alpha(\tau)n + q, \quad (11.12')$$

где член, пропорциональный $\alpha(\tau)$, учитывает поглощение нейтронов с энергией $E = E(\tau)$, а q представляет собой объемную плотность источников быстрых нейтронов. В рассматриваемом случае это нейтроны, рождающиеся в единице объема среды благодаря актам деления ядер и имеющие энергию $E = E(\tau)$. Число их пропорционально плотности тепловых нейтронов $N(\mathbf{r})$. В самом общем случае q можно представить в виде

$$q = f(\tau) N(\mathbf{r}), \quad (11.12'')$$

где $f(\tau)$ – некоторая функция τ , характеризующая энергетический спектр рождающихся нейтронов. Мы будем считать рождающиеся нейтроны монохроматическими. В этом случае

$$q = \varepsilon N(\mathbf{r}) \delta(\tau), \quad (11.12)$$

где ε – константа, которая согласно §5 равна

$$\varepsilon = \frac{\nu \theta}{T_c} \quad (11.13)$$

(T_c – время жизни теплового нейтрона).

Мы можем не писать q в правой части уравнения (11.12'), что равноценно уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \Delta n - \alpha(\tau)n \quad (11.14)$$

вместе с "начальным" условием

$$n(\mathbf{r}, 0) = \varepsilon N(\mathbf{r}). \quad (11.14')$$

Плотность тепловых нейтронов удовлетворяет общему уравнению

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \Delta N - \frac{N}{T_c} + j, \quad (11.15)$$

где D – коэффициент диффузии тепловых нейтронов; j – объемная плотность источников тепловых нейтронов; иными

словами j представляет собой число замедлившихся нейтронов, поступающих в единицу времени в тепловую область. Легко видеть, что

$$j = n(\mathbf{r}, \tau_T). \quad (11.16)$$

В самом деле, мы можем представить j в виде

$$j = \int_{E \leq E_T} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{cm} d\mathbf{p}, \quad (11.16')$$

где $(\partial f / \partial t)_{cm}$ – изменение функции распределения нейтронов, отнесенное к единице времени и вызванное столкновениями с ядрами замедлителя; интегрирование в (11.16') производится по области импульсного пространства, в которой энергия нейтрона E не превосходит тепловой энергии $E_T \approx kT$.

Вид оператора $(\partial f / \partial t)_{cm}$ мы установили в §5. Очевидно, второе слагаемое в правой части формулы (5.14) и представляет собой $(\partial f / \partial t)_{cm}$ (первое слагаемое определяет диффузионный отток нейтронов). Итак

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{cm} = -\frac{v}{\psi E^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_0 E^2}{l} \right). \quad (11.17)$$

Поэтому согласно (11.16')

$$j = - \int_{E \leq E_T} \frac{v}{\psi E^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_0 E^2}{l} \right) 4\pi r^2 dr. \quad (11.18)$$

Переходя к интегрированию по энергии и замечая, что $y = \ln(E_0/E)$, получим

$$j = \frac{8\pi m}{\psi} \int_{E \leq E_T} \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{f_0 E^2}{l} \right) dE = \frac{8\pi m}{\psi} \left(\frac{f_0 E^2}{l} \right)_{E=E_T} = n(\mathbf{r}, \tau_T).$$

Последнее равенство написано на основании определения n согласно формуле (5.18). Таким образом j действительно определяется функцией (11.16). В стационарном случае, который нас только будет дальше интересовать, уравнение (11.15) можно переписать в виде

$$\Delta N - \beta N + \gamma n(\mathbf{r}, \tau_T) = 0, \quad (11.19)$$

где

$$\beta = \frac{1}{L^2}, \quad \gamma = \frac{1}{D} \quad (11.19')$$

(напомним, что $L^2 = DT$).

Легко убедиться в том, что уравнения (11.14), (11.19) вместе с начальным условием (11.14') (предполагаем, что рождающиеся нейтроны имеют одну и ту же энергию) эквивалентны основному интегро-дифференциальному уравнению (11.1). Действительно, сделав подстановку

$$n(\mathbf{r}, \tau) = e^{0 \int_0^\tau \alpha d\tau} n'(\mathbf{r}, \tau), \quad (11.20')$$

мы приведем уравнение (11.14) к виду

$$\frac{\partial n'}{\partial \tau} = \Delta n'. \quad (11.20)$$

Функция n' удовлетворяет начальному условию

$$n'(\mathbf{r}, 0) = \epsilon N(\mathbf{r}). \quad (11.20'')$$

Уравнение (11.20) имеет вид уравнения теплопроводности. Хорошо известно, что решения уравнения теплопроводности с заданным начальным распределением "температуры", т.е. $n'(\mathbf{r}, 0)$, записываются как:

$$n'(\mathbf{r}, \tau) = \epsilon \int N(\mathbf{r}') W(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}', \quad (11.21)$$

где W представляет собой функцию Грина рассматриваемой задачи (в числе аргументов W не отмечена переменная τ , хотя, конечно, W зависит от τ).

Определелив по формулам (11.20) и (11.21) $n(\mathbf{r}, \tau_T)$, и подставив результат в (11.19), получим следующее уравнение для плотности тепловых нейтронов

$$\Delta N - \beta N + \epsilon \gamma e^{-\int_0^{\tau_T} \alpha d\tau} \int N(\mathbf{r}') W(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}' = 0. \quad (11.22)$$

Мы получили наше прежнее интегро-дифференциальное уравнение (11.1). Сравнение уравнений показывает, что величины $\beta, \varepsilon, \gamma$ связаны следующим образом с прежними константами ν, φ, θ :

$$\beta = \frac{1}{DT_c} = \frac{1}{L^2}, \quad \gamma e^{-\int_0^{\tau_T} \alpha d\tau} = \frac{\nu \varphi \theta}{L^2}. \quad (11.23)$$

Так как согласно (11.13), (11.19')

$$\varepsilon \gamma = \frac{\nu \theta}{L^2},$$

то

$$e^{\int_0^{\tau_T} \alpha(\tau) d\tau} = \varphi. \quad (11.24')$$

Уравнения (11.14), (11.19) относятся к мультилицирующей среде.

В общем случае, когда имеется также слой нейтронной изоляции, мы получим следующую систему уравнений. Плотность быстрых нейтронов удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial \tau} &= \Delta n_i - \alpha_i(\tau) n_i, \\ \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 n_e}{\partial \tau^2} &= \Delta n_e - \alpha_e(\tau) n_e, \end{aligned} \quad (11.24)$$

где индексы i и e относятся соответственно к мультилицирующей среде и изоляции. Постоянная a^2 входит во второе уравнение (11.24) в силу различия замедляющих свойств мультилицирующей среды и изоляции. Эта величина равна, очевидно,

$$a^2 = \frac{\rho_i^2}{\rho_e^2} \quad (11.25)$$

(ρ с индексом i, e представляет собой длину замедления в соответствующей среде).

Функции $\alpha_i(\tau)$ и $\alpha_e(\tau)$ характеризуют поглощение нейтронов в обеих средах. Начальное условие для быстрых нейтронов имеет вид

$$n_i(\mathbf{r}, 0) = \varepsilon N_i(\mathbf{r}),$$

$$n_e(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad (11.26)$$

где $N_i(\mathbf{r})$ – плотность тепловых нейтронов в мультилицирующей среде, а ε определяется согласно (11.13). (Второе из этих условий означает, что в изоляции не рождаются новые нейтроны.)

Для плотности тепловых нейтронов имеем уравнения

$$\begin{aligned} \Delta N_i &= \beta_i N_i - \gamma_i n_i(\mathbf{r}, \tau_{Ti}), \\ \Delta N_e &= \beta_e N_e - \gamma_e n_e(\mathbf{r}, \tau_{Te}), \end{aligned} \quad (11.27)$$

где индексы i и e по прежнему относятся соответственно к мультилицирующей среде и к изоляции. (В силу различия замедляющих свойств, величина τ_T также снабжена индексом i либо e .) Входящие сюда константы β, γ определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \beta_i &= \frac{1}{L_i^2}, \quad \beta_e = \frac{1}{L_e^2}, \\ \gamma_i &= \frac{1}{D^{(i)}}, \quad \gamma_e = \frac{1}{D^{(e)}}, \end{aligned} \quad (11.28)$$

где L_i и L_e – диффузационные длины соответственно в мультилицирующей среде и в изоляции, $D^{(i)}$ и $D^{(e)}$ – коэффициенты диффузии тепловых нейтронов в обеих средах.

На границе с изоляцией выполняются условия

$$\begin{aligned} N_i &= N_e, \quad n_i = \frac{1}{c} n_e, \\ \frac{\partial N_i}{\partial \nu} &= \frac{1}{d_t} \frac{\partial N_e}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial n_i}{\partial \nu} = \frac{1}{d_f} \frac{\partial n_e}{\partial \nu}, \end{aligned} \quad (11.29)$$

$$d_t = \frac{D^{(i)}}{D^{(e)}}, \quad (11.30)$$

а c и d_f согласно (6.4) определяются формулами

$$\begin{aligned} c &= \frac{\left(\frac{d\tau}{dy}\right)^{(i)}}{\left(\frac{d\tau}{dy}\right)^{(e)}} \frac{D_f^{(e)}}{D_f^{(i)}}, \\ d_f &= \frac{\left(\frac{d\tau}{dy}\right)^{(i)}}{\left(\frac{d\tau}{dy}\right)^{(e)}}, \end{aligned} \quad (11.31)$$

$D_f^{(i)}, D_f^{(e)}$ – коэффициенты диффузии замедляющихся нейтронов в обеих средах; D_f согласно (5.19'') зависит от скорости нейтронов.

Первая пара уравнений (11.29) выражает равенство плотностей тепловых и быстрых нейтронов по обе стороны границы; вторая пара выражает равенство потоков (ν – направление нормали к границе).

Приведенные здесь уравнения мы исследуем в дальнейших параграфах.

§12. Критические размеры неизолированных мультилиплицирующих систем

Перейдем к определению критических размеров различных систем.

Мы начнем с рассмотрения неизолированных систем и определим прежде всего критические размеры неизолированной мультилиплицирующей сферы.

Решим сперва задачу приближенно, исходя из диффузионного уравнения (11.11) с эффективным коэффициентом диффузии и сравним затем это решение с точным решением, основанным на исследовании уравнений (11.14), (11.19).

Если система имеет форму шара, то плотность нейтронов будет зависеть (помимо времени) только от расстояния до центра сферы. Так как лапласиан в этом случае равен

$$\Delta N = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rN), \quad (12.1)$$

то первое уравнение (11.11) запишется в виде

$$\frac{1}{D_{\text{эфф}}} \frac{\partial}{\partial t}(rN) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rN) + \frac{rN}{\Lambda^2} \quad (12.2)$$

(мы опустили всюду индекс i).

На границе сферы должно выполняться условие

$$N(R, t) = 0, \quad (12.3)$$

где R – радиус среды.

Общее решение уравнения (12.2) представляет собой сумму частных решений, имеющих вид

$$rN = e^{\lambda t} \psi(r), \quad (12.4')$$

причем $\psi(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \left(\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\lambda}{D_{\text{эфф}}} \right) \psi = 0. \quad (12.4)$$

Функция $\psi(r)$ должна, очевидно, обращаться в нуль помимо точки $r = R$, также в центре сферы, так как плотность нейтронов $N(r)$ всюду конечна. Отсюда следует, что

$$\psi \equiv \psi_m = A_m \sin \frac{\pi m r}{R}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (12.5)$$

Подставляя (12.5) в (12.4), найдем

$$\frac{\pi^2 m^2}{R^2} = \frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\lambda}{D_{\text{эфф}}},$$

откуда

$$\lambda = D_{\text{эфф}} \left(\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\pi^2 m^2}{R^2} \right). \quad (12.6)$$

Величину λ можно назвать экспонентой размножения. Мультилипликация нейтронов имеет место при условии

$$\lambda > 0. \quad (12.6')$$

Критическим размерам отвечает стационарное распределение нейтронов, т.е. $\lambda = 0$. Для того, чтобы из этого условия согласно формуле (12.6) определить критический радиус R_c , следует иметь в виду, что плотность нейтронов – существенно положительная величина. Поэтому, полагая в (12.6) $\lambda = 0$, нужно считать $m = 1$. Для критического радиуса мы получим значение

$$R_c = \pi \Lambda = \pi \sqrt{\frac{L^2 + \frac{1}{6} \rho^2 K}{K - 1}}. \quad (12.7)$$

Заметим, что критический радиус оказывается обратно-пропорциональным $(K - 1)^{1/2}$.

Распределение нейтронов в сфере, радиус которой равен R_c , имеет вид

$$N(r) = \text{const} \frac{\sin \pi \frac{r}{R_c}}{r}. \quad (12.8)$$

Рассмотрим выражение для экспоненты размножения. Предположим, что радиус сферы R превосходит критическое значение, причем выполняется неравенство

$$(m+1)R_c > R > mR_c,$$

где m – целое число. В таком случае можно утверждать, что экспонента размножения будет положительной для первых m функций (12.5).

Обозначая экспоненту размножения j -гармоники (т.е. функции типа (12.5)) через λ_j , получим

$$\lambda_j = \frac{D_{\phi}}{\Lambda^2} \left(1 - j^2 \frac{R_c^2}{R^2} \right). \quad (12.9)$$

Отметим, что экспонента размножения уменьшается с ростом номера гармоники. Если радиус сферы мало отличается от R_c (но, конечно, $R > R_c$), то экспонента размножения приближенно равна

$$\lambda \approx \frac{2}{\pi} \frac{D_{\phi}}{\Lambda^3} (R - R_c). \quad (12.10)$$

Таким образом, при небольшом превышении критических размеров экспонента размножения пропорциональна $R - R_c$.

Приведем формулу для критического объема сфера Ω_c и отвечающей ему массы M_c :

$$\Omega_c = \frac{4\pi}{3} R_c^3 = \frac{4\pi^4}{3} \frac{\left(\frac{1}{3}l_c l_s + \frac{1}{6}\rho^2 K\right)^{3/2}}{(K-1)^{3/2}}, \quad (12.11)$$

$$M_c = \frac{4\pi^4}{3} d \frac{\left(\frac{1}{3}l_c l_s + \frac{1}{6}\rho^2 K\right)^{3/2}}{(K-1)^{3/2}}, \quad (12.11')$$

где d – плотность вещества.

Так как длины пробега l_c , l_s и ρ обратно пропорциональны числу ядер в единице объема, то критический радиус обратно пропорционален плотности, а критическая масса обратно пропорциональна квадрату плотности.

Перейдем теперь к определению критических размеров сферы, исходя из точных уравнений (11.14), (11.19). Введем в рассмотрение вместо $n(r, \tau)$ и $N(r)$ (плотности суть функции расстояния до центра) функции $\varphi(r, \tau)$ и $\phi(r)$

$$\varphi(r, \tau) = rn(r, \tau), \quad \phi(r) = rN(r).$$

Уравнения (11.14), (11.19) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \alpha(\tau)\varphi - f(\tau)\phi(r), \\ \frac{d^2 \phi}{dr^2} &= \beta\phi - \gamma\varphi(r, \tau_T). \end{aligned} \quad (12.12)$$

Эти уравнения относятся к общему случаю, когда рождающиеся нейтроны немонохроматичны. К уравнениям присоединим граничные условия

$$\begin{aligned} \varphi(R, \tau) &= 0, \quad \varphi(0, \tau) = 0, \\ \phi(R) &= 0, \quad \phi(0) = 0 \end{aligned} \quad (12.12')$$

и начальное условие

$$\varphi(r, 0) = f(0)\phi(r). \quad (12.12'')$$

Случай монохроматических нейтронов рассмотрим отдельно. Сделав подстановку

$$\varphi(r, \tau) = \psi(r, \tau) e^{-\int_0^\tau \alpha(\tau)d\tau}, \quad (12.13')$$

перепишем уравнения (12.12) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} &= \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - f(\tau) e^{\int_0^\tau \alpha d\tau} \phi(r), \\ \frac{d^2 \phi}{dr^2} &= \beta\phi - \gamma\psi(r, \tau_T) e^{-\int_0^T \alpha d\tau}. \end{aligned} \quad (12.13)$$

Общее решение этой системы представляет собой сумму частных решений

$$\begin{aligned}\psi &= \sum A_m \sin \frac{\pi m r}{R} \chi_m(\tau), \\ \phi &= \sum B_m \sin \frac{\pi m}{R} r\end{aligned}\quad (12.13'')$$

(A, B – константы, $\chi_m(\tau)$ – неизвестные функции).

Для определения критических размеров достаточно рассмотреть частное решение, отвечающее $m = 1$:

$$\begin{aligned}\psi &= A \sin \frac{\pi r}{R} \chi(\tau), \\ \phi &= B \sin \frac{\pi}{R} r.\end{aligned}\quad (12.14)$$

Подставляя (12.14) в (12.13), получим

$$\begin{aligned}A\{\chi'(\tau) + \frac{\pi^2}{R^2} \chi(\tau)\} &= f(\tau) e^{-\int_0^\tau \alpha d\tau} B, \\ B\left(\beta + \frac{\pi^2}{R^2}\right) &= \gamma e^{-\int_0^{\pi T} \alpha d\tau} \chi(\pi T) A.\end{aligned}\quad (12.15)$$

Перемножая эти равенства, найдем

$$\left(\beta + \frac{\pi^2}{R^2}\right) \left\{ \chi'(\tau) + \frac{\pi^2}{R^2} \chi(\tau) \right\} = \gamma e^{-\int_0^{\pi T} \alpha d\tau + \int_0^\tau \alpha d\tau} \chi(\pi T) f(\tau),$$

откуда

$$\chi'(\tau) + \frac{\pi^2}{R^2} \chi(\tau) = g(\tau), \quad (12.16')$$

где

$$g(\tau) = \frac{\gamma \chi(\pi T)}{\beta + \frac{\pi^2}{R^2}} e^{-\int_0^{\pi T} \alpha d\tau} f(\tau).$$

Интегрируя (12.16'), получим

$$\chi(\tau) = C e^{-\frac{\pi^2}{R^2} \tau} + e^{-\frac{\pi^2}{R^2} \tau} \int_0^\tau g(\tau') e^{\frac{\pi^2}{R^2} \tau'} d\tau', \quad C = \chi(0). \quad (12.16)$$

Остается определить постоянную C . Замечая, что

$$\psi(r, 0) = f(0) \phi(r),$$

найдем

$$A \chi(0) = B f(0),$$

откуда

$$C = \chi(0) = f(0) \frac{B}{A} = f(0) \frac{\gamma e^{-\int_0^{\pi T} \alpha d\tau} \chi(\pi T)}{\beta + \frac{\pi^2}{R^2}}. \quad (12.16'')$$

Подставив это значение C в (12.16), получим

$$\chi(\tau) = \frac{\gamma \chi(\pi T)}{\beta + \frac{\pi^2}{R^2}} e^{-\frac{\pi^2}{R^2} \tau} \left\{ f(0) + \int_0^\tau e^{0 - \int_0^{\tau'} (\alpha + \frac{\pi^2}{R^2}) d\tau'} f(\tau') d\tau' \right\} e^{-\int_0^\tau \alpha d\tau}.$$

Положим здесь $\tau = \pi T$. Мы получим тогда следующее трансцендентное уравнение для нахождения критического радиуса:

$$\beta + \frac{\pi^2}{R^2} = \gamma e^{-\int_0^{\pi T} \alpha(\tau) d\tau - \frac{\pi^2}{R^2} \pi T} \left\{ f(0) + \int_0^{\pi T} e^{0 - \int_0^{\tau'} \alpha(\tau) d\tau - \frac{\pi^2}{R^2} \tau'} f(\tau') d\tau' \right\}. \quad (12.17)$$

Это уравнение относится к общему случаю, когда рождающиеся нейтроны не монохроматичны и их энергетический спектр характеризуется функцией $f(\tau)$. Мы рассмотрим теперь специально наиболее простой случай, когда рождающиеся нейтроны монохроматичны. В этом случае мы имеем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} &= \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \\ \frac{d^2 \phi}{dr^2} &= \beta \phi - \gamma e^{-\int_0^{\pi T} \alpha d\tau} \psi(r, \tau_T).\end{aligned}\quad (12.18)$$

Границные условия выражаются по-прежнему, а начальное условие имеет вид

$$\psi(r, 0) = \varepsilon\phi(r), \quad (12.18')$$

где ε определено (11.13).

Решение уравнений ищем в виде (12.14). Подстановка (12.14) в (12.18) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \chi'(\tau) + \frac{\pi^2}{R^2}\chi(\tau) &= 0, \\ B\left(\beta + \frac{\pi^2}{R^2}\right) &= \gamma e^{-\int_0^{\tau_T} \alpha d\tau} \chi(\tau_T) A. \end{aligned} \quad (12.19)$$

Начальное условие имеет вид

$$A\chi(0) = \varepsilon B. \quad (12.19')$$

Решая уравнение для $\chi(\tau)$ и используя это условие, получим

$$\chi\tau = \frac{\varepsilon B}{A} e^{-\frac{\pi^2}{R^2}\tau}, \quad (12.20)$$

откуда

$$\chi\tau_T = \frac{\varepsilon B}{A} e^{-\frac{\pi^2}{R^2}\tau_T}.$$

Подставляя это значение $\chi(\tau_T)$ во второе из соотношений (12.19), получим окончательно трансцендентное уравнение для определения критического радиуса

$$\beta + \frac{\pi^2}{R^2} = \varepsilon \gamma e^{-\int_0^{\tau_T} \alpha d\tau} e^{-\frac{\pi^2}{R^2}\tau_T}. \quad (12.21)$$

Введем сюда вместо $\beta, \varepsilon, \gamma$ постоянные K и L , согласно (11.13) и (11.19'). Мы получим тогда

$$1 + \pi^2 \left(\frac{L}{R}\right)^2 = K e^{-\frac{\pi^2}{R^2}\tau_T}. \quad (12.22)$$

Проанализируем это уравнение. Прежде всего, заметим, что оно имеет только одно вещественное решение при выполнении условия $K > 1$. Если $K < 1$, то вещественных решений

не существует вовсе. В этом легко убедиться, построив графики функций $K e^{-\frac{\pi^2}{R^2}\tau_T}$ и $1 + \pi^2 \left(\frac{L}{R}\right)^2$ (см. рис.5, по оси абсцисс отложено $\frac{\pi^2}{R^2} L^2$). Разложим для этого $e^{-\frac{\pi^2}{R^2}\tau_T}$ в ряд по степеням $\frac{\tau_T}{R^2}$ ($\tau \ll R^2$).

Полагая $e^{-\frac{\pi^2}{R^2}\tau_T} \approx 1 - \frac{\pi^2}{R^2}\tau_T$, получим $R = R_0 = \pi \sqrt{\frac{L^2 + \frac{1}{6}\rho^2 K}{K-1}}$.

(Мы воспользовались тем, что $\tau_T = \frac{1}{6}\rho^2$.) Эта формула совпадает с выведенной ранее на основании диффузионного уравнения формулой (12.7). В следующем приближении получим

$$R_c \approx \frac{\pi \sqrt{L^2 + K\tau_T}}{\sqrt{K-1}} \left\{ 1 - \frac{1}{4}\pi^4 \frac{K}{K-1} \frac{\tau_T^2}{R_0^4} \right\}, \quad (12.23)$$

где R_0 определяется по формуле (12.7).

Таким образом, приближенная формула (12.7) с точностью до τ_T^2/R^4 совпадает с точной. Это обстоятельство дает нам основание считать, что пользование диффузионным уравнением (11.11) с эффективным коэффициентом диффузии должно давать достаточно точные результаты при определении критических размеров систем, не окруженных слоем изоляции.

Отсутствие изоляции играет здесь существенную роль. Дело в том, что в этом случае граничное условие состоит в равенстве нулю плотности нейтронов. Между тем, совершенно ясно, что влияние пограничной области, где плотность нейтронов крайне мала, не может быть очень существенным. Этим и объясняется совпадение с большой степенью точности результатов, даваемых точным и приближенным расчетом. По этой причине совпадают также распределения нейтронов в приближенной и точной теориях (плотность нейтронов в обоих случаях пропорциональна $\sin(\pi r/R_c)$).

Изложенная теория может быть легко обобщена на общий случай неизолированной системы, имеющей произвольную форму. Существенным является то обстоятельство, что,

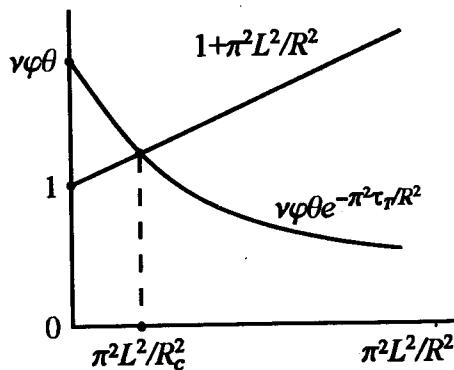


Рис. 5

как было показано выше (см.(12.14)), в случае неизолированной сферы, имеющей критические размеры, пространственное распределение быстрых нейтронов с точностью до множителя, зависящего от энергии, совпадает с пространственным распределением тепловых нейтронов. Это свойство характерно не только для сферы; им отличается любая неизолированная система [см. ниже (12.25)]. Равенство пространственного распределения N и n обязано одинаковым граничным условиям: $N = 0, n = 0$. Мы воспользуемся одинакостью пространственного распределения для определения критических размеров неизолированной системы, имеющей произвольную форму.

Исходными являются уравнения (11.14), (11.19), которые мы здесь ради удобства выпишем еще раз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial \tau} &= \Delta n - \alpha(\tau)n, \\ n(\mathbf{r}, 0) &= \varepsilon N(\mathbf{r}), \\ \Delta N - \beta N + \gamma n(\mathbf{r}, \tau_T) &= 0. \end{aligned} \quad (12.24)$$

Предполагая (при определении размеров) пространственную зависимость функций N и n одинаковой, мы положим в уравнениях (12.24)

$$n(\mathbf{r}, \tau) = N(\mathbf{r}) f(\tau) e^{-\int_0^\tau \alpha d\tau}, \quad (12.25)$$

где $f(\tau)$ – некоторая функция τ . Подстановка (12.25) в (12.24) дает

$$\begin{aligned} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} &= \frac{\Delta N}{N}, \\ \Delta N - \beta N + \gamma e^{-\int_0^T \alpha d\tau} f(\tau_T) N &= 0, \\ f(0) &= \varepsilon. \end{aligned} \quad (12.26)$$

Первое из этих соотношений показывает, что

$$\frac{f'(\tau)}{f(\tau)} = \frac{\Delta N}{N} = -\kappa^2, \quad (12.27)$$

где κ^2 – константа, откуда

$$\Delta N + \kappa^2 N = 0, \quad (12.28)$$

$$f(\tau) = \varepsilon e^{-\kappa^2 \tau} \quad (12.29)$$

(мы воспользовались тем, что $f(0) = \varepsilon$).

Постановка (12.28), (12.29) в (12.26) приводит к следующему трансцендентному уравнению для определения κ^2

$$\kappa^2 + \beta = \gamma \varepsilon e^{-\kappa^2 \tau_T - \int_0^T \alpha d\tau}. \quad (12.30)$$

Вводя сюда вместо ε, γ и β величины ν, ε, θ и L^2 , перепишем (12.30) в виде

$$\kappa^2 + \frac{1}{L^2} = \frac{K}{L^2} e^{-\kappa^2 \tau_T}. \quad (12.31)$$

Мы получим для κ^2 уравнение того же типа, что уравнение (12.22).

Зная κ , можно, пользуясь уравнением (12.28), определять критические размеры любых неизолированных систем. Действительно, мы должны найти нетривиальное решение уравнения (12.28)

$$\Delta N + \kappa^2 N = 0,$$

обращающееся в нуль на внешней поверхности системы.

В частности в случае мультилицирующего параллелепипеда, стороны которого суть $2a, 2b, 2c$, искомое решение имеет вид

$$N = \text{const} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi z}{c}, \quad (12.32)$$

где оси x, y, z направлены по трем взаимно перпендикулярным ребрам параллелепипеда, а начало координат совпадает с его центром. В рассматриваемом случае

$$\Delta N = -\left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2}\right) N,$$

поэтому критические условия размеры определяются из условия

$$\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2} = \kappa^2. \quad (12.33)$$

В случае системы, имеющей форму цилиндра (неизолированного), решение уравнения (12.28), обращающееся в нуль на боковой поверхности цилиндра и его основаниях, имеет вид

$$N = \text{const} \cos \frac{\pi z}{h} J_0 \left(c_1 \frac{r}{R} \right), \quad (12.34)$$

где $2h$ – высота цилиндра и R – его радиус, $J_0(x)$ – функции Бесселя нулевого порядка и $c_1 = 2,405$ – наименьший корень $J_0(x)$. Так как

$$\Delta N = - \left(\frac{\pi^2}{h^2} + \frac{c_1^2}{R^2} \right) N,$$

то, согласно (12.28),

$$\frac{\pi^2}{h^2} + \frac{c_1^2}{R^2} = \kappa^2. \quad (12.35)$$

Из этого соотношения могут быть определены критические размеры цилиндра.

§13. Примеры определения критических размеров изолированных и неизолированных систем

Перейдем теперь к определению критических размеров различных однородных систем.

В этом параграфе мы будем пользоваться диффузионными уравнениями (11.11). В предыдущих параграфах уже указывалось, что эти уравнения справедливы только вдали от границы, на расстояниях, превышающих длину замедления нейтронов.

Мы будем, тем не менее, пользоваться диффузионными уравнениями везде, вплоть до самой границы с изоляцией, считая, что на последней выполняются некоторые эффективные граничные условия.

Если бы диффузионная картина была справедливой везде, то граничные условия имели бы вид

$$N_i = N_e, \quad (13.1')$$

$$D_i \frac{\partial N_i}{\partial \nu} = D_e \frac{\partial N_e}{\partial \nu} \quad (13.1'')$$

(ν – нормаль к границе раздела двух сред).

Первое из этих условий остается в силе в том случае, когда диффузионное рассмотрение оказывается несправедливым, второе же условие должно быть заменено следующим

$$\frac{\partial N_i}{\partial \nu} = d \frac{\partial N_e}{\partial \nu},$$

где d – некоторая величина, зависящая от свойств обеих сред. Она может быть определена из исследования точного интегрального уравнения, которому удовлетворяет плотность нейтронов вблизи границы. Только в предельном случае исчезающее малой длины замедления нейтронов величина d становится равной отношению коэффициентов диффузии соответствующих сред

$$d_{\rho \rightarrow 0} = \frac{D_e}{D_i}.$$

Найдению эффективных граничных условий в том случае, когда замедляющие свойства обеих сред одинаковы, посвящен §15.

Итак, мы будем считать, что на границе двух сред выполняются условия

$$\begin{aligned} N_i &= N_e, \\ \frac{\partial N_i}{\partial \nu} &= d \frac{\partial N_e}{\partial \nu}. \end{aligned} \quad (13.1)$$

Что касается границы с вакуумом, то ради простоты мы будем исходить из приближенного граничного условия, считая что плотность нейтронов на этой границе равна нулю.

Определим прежде всего критические размеры неизолированных параллелепипеда и цилиндра.

13.1. Параллелепипед без изоляции

Плотность тепловых нейтронов N удовлетворяет внутри параллелепипеда уравнению

$$\Delta N + \frac{N}{\Lambda^2} = 0. \quad (13.2)$$

Мы должны решить это уравнение с соблюдением граничных условий

$$N(\pm a, y, z) = N(x, \pm b, z) = N(x, y, \pm c) = 0,$$

где $2a, 2b, 2c$ – стороны параллелепипеда (начало координат, оси которых параллельны ребрам параллелепипеда, находится в его центре). Так как N существенно положительная функция, то решение (13.2) следует взять в виде

$$N = \text{const} \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} \cos \frac{\pi z}{2c}. \quad (13.2')$$

Подстановка (13.2') в (13.2) дает

$$\frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) = \frac{1}{\Lambda^2}. \quad (13.3)$$

Из этого соотношения могут быть определены критические размеры параллелепипеда. Это соотношение отличается от соотношения (12.33), полученного из рассмотрения точных уравнений, только тем, что в правой части вместо κ^2 стоит $\frac{1}{\Lambda^2}$.

Из (13.3) следует, что

$$a \geq \frac{\pi \Lambda}{2}$$

(знак равенства относится к тому случаю, когда $b = c = \infty$). Для параллелепипеда конечных размеров

$$a, b, c > \frac{\pi \Lambda}{2}.$$

Определим минимальный объем параллелепипеда. Легко убедиться в том, что минимум объема достигается для куба, т.е. когда

$$a = b = c = \sqrt{3} \frac{\pi \Lambda}{2}.$$

Минимальный объем равен

$$\Omega_{\text{куб}} = 3\sqrt{3} \pi^3 \Lambda^3.$$

Напомним, что критический объем шара равен $\Omega_{\text{шар}} = \frac{4\pi^4}{3} \Lambda^3$. Отношение обоих объемов равно

$$\frac{\Omega_{\text{куб}}}{\Omega_{\text{шар}}} = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} \approx 1,24.$$

13.2. Цилиндр без изоляции

Рассмотрим мультилицирующий круглый цилиндр, радиус которого обозначим через R . Введем полярные координаты с осью z , совпадающей с осью цилиндра. Начало координат поместим в центре цилиндра. Высоту цилиндра обозначим через $2h$. Нейтронная плотность N зависит только от z и расстояния до оси цилиндра r . Лапласиан в этих координатах имеет вид

$$\Delta N = \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial N}{\partial \rho} \right).$$

Поэтому уравнение (13.2) в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial N}{\partial \rho} + \frac{N}{\Lambda^2} = 0. \quad (13.4)$$

Уравнение (13.4) должно быть решено с соблюдением следующих граничных условий: плотность нейтронов $N(z, \rho)$ должно обращаться в нуль на основаниях и боковой поверхности цилиндра. Нужное нам решение ищем в виде произведения функции от z на функцию от r :

$$N(z, r) = Z(z)f(r). \quad (13.4')$$

Подстановка (13.4') в (13.4) дает

$$f(\rho)Z''(z) + Z(z) \left[f''(\rho) + \frac{1}{\rho} f'(\rho) \right] + \frac{f(\rho)Z(z)}{\Lambda^2} = 0,$$

откуда получаем два уравнения:

$$\begin{aligned} Z''(z) + aZ(z) &= 0, \\ f''(\rho) + \frac{1}{\rho} f'(\rho) + \left(\frac{1}{\Lambda^2} - a \right) f(\rho) &= 0, \end{aligned} \quad (13.5)$$

где a – постоянная разделения. Легко видеть, что величина a должна быть положительной. В противном случае требование $Z(\pm h) = 0$ приводит к тому, что $Z(z)$ тождественно равно нулю.

Так как функция $Z(z)$ не может принимать отрицательных значений, то в качестве решения первого из уравнений (13.5) следует взять

$$Z(z) = \text{const} \cos pz, \quad p = \sqrt{a}$$

(решение $\sin pz$ меняет знак при перемене знака z). Условие $Z(\pm h) = 0$ дает $\cos ph = 0$, откуда $p = \frac{\pi}{2h}$, и поэтому

$$Z(z) = \text{const} \cos \frac{\pi z}{2h}. \quad (13.6')$$

Уравнение для функции $f(r)$ приобретает вид

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + \left(\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\pi^2}{4h^2} \right) f(r) = 0.$$

Решением этого уравнения, конечным при $r = 0$, является функция Бесселя $J_0(x)$:

$$f(r) = J_0 \left(r \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\pi^2}{4h^2}} \right).$$

Так как на боковой поверхности цилиндра плотность нейтронов обращается в нуль, то

$$f(R) = 0,$$

откуда

$$R \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\pi^2}{4h^2}} = c_1 = 2,4048, \quad (13.6)$$

где c_1 – наименьший корень функции Бесселя $J_0(x)$. Переписав условие (13.6) в виде

$$\frac{\pi^2}{4h^2} + \frac{c_1^2}{R^2} = \frac{1}{\Lambda^2}, \quad (13.6')$$

мы видим, что оно отличается от точного условия (12.35) для определения критических размеров цилиндра только тем, что в правую часть (13.6) входит величина $1/\Lambda^2$ вместо величины κ^2 , входящей в правую часть (12.35).

Пространственное распределение в обоих случаях одинаково и имеет вид

$$N(z, r) = \text{const} \cos \frac{\pi z}{2h} J_0 \left(c_1 \frac{r}{R} \right). \quad (13.7)$$

Из (13.6') следует, что

$$R \geq c_1 \Lambda, \quad h \geq \frac{\pi}{2} \Lambda.$$

Мы видим, что даже в случае бесконечно длинного цилиндра для выполнения критических условий радиус его не может быть меньше $c_1 \Lambda$; точно также при бесконечном радиусе цилиндра высота его не может быть меньше $\frac{\pi}{2} \Lambda$.

Критический объем мультилиплицирующего цилиндра равен

$$\Omega = 2\pi R^2 h = \frac{2\pi \cdot c_1^2 h}{\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\pi^2}{4h^2}}.$$

Объем достигает минимума при

$$h = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \Lambda, \quad R = \sqrt{\frac{3}{2}} c_1 \Lambda \cong 2,94 \Lambda$$

и равен при этом

$$\Omega_{\text{цил}} = \frac{3\sqrt{3}\pi^2 c_1^2}{2} \Lambda^3 \cong 148 \Lambda^3.$$

Сравнение с критическим объемом шара дает

$$\frac{\Omega_{\text{цил}}}{\Omega_{\text{шар}}} = \frac{3\sqrt{3}c_1^2 \pi^2}{2 \frac{4\pi^2}{3}} = \frac{9\sqrt{3}c_1^2}{8\pi^2} \approx 1,14.$$

Перейдем теперь к определению критических размеров систем, окруженных слоем нейтронной изоляции. Начнем с рассмотрения тех случаев, когда изоляция имеет бесконечную толщину.

13.3. Сфера, окруженная бесконечной изоляцией

Основные уравнения (11.11) в рассматриваемом случае могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dr^2}(N_i r) + \frac{N_i r}{\Lambda^2} &= 0, \\ \frac{d^2}{dr^2}(N_e r) - \frac{N_e r}{L_e^2} &= 0.\end{aligned}\quad (13.8)$$

Решение этих уравнений в общем виде таково:

$$\begin{aligned}N_i r &= A \sin \frac{r}{\Lambda} + B \cos \frac{r}{\Lambda}, \\ N_e r &= C e^{-\frac{r}{L_e}} + D e^{\frac{r}{L_e}}.\end{aligned}\quad (13.8')$$

Поскольку изоляция предполагается бесконечной, член с $e^{+\frac{r}{L_e}}$ должен отсутствовать, т.е. $D = 0$. Далее, так как N_i конечно при $r = 0$, то $B = 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned}N_i &= \frac{A}{r} \sin \frac{r}{\Lambda}, \quad r \leq R_0, \\ N_e &= \frac{C}{r} e^{-\frac{r}{L_e}}, \quad r \geq R_0,\end{aligned}\quad (13.9)$$

где R_0 – радиус сферы. Границные условия имеют вид

$$N_i(R_0) = N_e(R_0), \quad N'_i(R_0) = dN'_e(R_0). \quad (13.10)$$

Заметим, что в рассматриваемом сейчас случае можно исключить наружное решение N_e . Разделив первое уравнение (13.10) на второе и используя (13.9), получаем граничное условие которому должно удовлетворять внутреннее решение:

$$\left(\frac{N'_i}{N_i}\right)_{R_0} = d \left(-\frac{1}{R_0} - \frac{1}{L_e}\right).$$

В других случаях, разобранных ниже, также иногда может быть сделано исключение наружного решения.

Первое из условий (13.10) дает $C = A \sin \frac{R_0}{\Lambda} e^{\frac{R_0}{L_e}}$, поэтому

$$N_e = \frac{A}{r} \sin \frac{R_0}{\Lambda} e^{-\frac{r-R_0}{L_e}},$$

второе условие дает

$$\left(\frac{1}{\Lambda} \cos \frac{R_0}{\Lambda} - \frac{1}{R_0} \sin \frac{R_0}{\Lambda}\right) = -d \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{L_e}\right) \sin \frac{R_0}{\Lambda},$$

откуда

$$\frac{R_0}{\Lambda} \operatorname{ctg} \frac{R_0}{\Lambda} = 1 - d \left(1 + \frac{R_0}{L_e}\right). \quad (13.11)$$

Это трансцендентное уравнение должно служить для определения критического радиуса сферы R_0 при заданных значениях параметров d, Λ, L_e .

Обозначим R_0/Λ через x ; тогда

$$x \operatorname{ctg} x = 1 - d - dx \frac{\Lambda}{L_e}. \quad (13.11')$$

Отсюда видно, что $x = R_0/\Lambda$ есть функция d и $d\Lambda/L_e$.

Рассмотрим некоторые предельные случаи. Пусть поглощение нейтронов в изоляции отсутствует. Это значит, что длина пробега по отношению к захвату l_c , а, следовательно, и диффузионная длина L_e в изоляции равны бесконечности. Уравнение (13.11) в этом случае имеет вид

$$\frac{R_0}{\Lambda} \operatorname{ctg} \frac{R_0}{\Lambda} = 1 - d. \quad (13.12)$$

Если $d = 1$, то

$$R_0 = \frac{\pi}{2} \Lambda. \quad (13.12')$$

Напомним, что в отсутствии изоляции критический радиус сферы равен $\pi\Lambda$. Мы видим, что если $d = 1$, то в случае бесконечной непоглощающей изоляции критический радиус сферы в два раза меньше, чем в случае отсутствия изоляции. Заметим, что при исчезающей малой длине замедления нейтронов условию $d = 1$ отвечает равенство коэффициентов диффузии мультилиплирующей среды и изоляции.

Рассмотрим теперь предельный случай $d = 0$. В этом случае критический радиус сферы равен нулю.⁷ При исчезающей малой длине замедления нейтронов этому случаю соответствует равенство нулю коэффициента диффузии в изоляции. Ясно, что при равенстве нулю коэффициента диффузии в изоляции нейтроны не диффундируют в изоляцию и последняя ведет себя, как абсолютный отражатель нейтронов.

⁷ Напомним, что все вышеприведенные рассуждения законны лишь при $K > 1$. (Прим. ред.)

Следует заметить, что полученный результат справедлив как для поглощающей, так и для непоглощающей изоляции, здесь существенно лишь то, что $d = 0$.

Реальная изоляция не может, конечно, вернуть назад в мультилиплицирующую систему все вышедшие из нее нейтроны. Этому препятствует не только поглощение нейtronов в изоляции; даже в отсутствии поглощения нейтроны диффундируют в изоляции на бесконечность и оттуда не возвращаются.

Рассмотрим сферу, радиус которой R больше критического радиуса R_0 . Определим экспоненту размножения в этом случае, предполагая, что сфера окружена слоем бесконечной изоляции. Будем искать в следующем виде решение уравнений (13.8), в которых справа добавлен член $\frac{\partial N}{\partial t}$:

$$N_i = e^{\lambda t} \frac{f_i(r)}{r}, \quad N_e = e^{\lambda t} \frac{f_e(r)}{r}.$$

Функции f_i и f_e удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_i}{dr^2} + \left(\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\lambda}{D_{\text{эфф}}} \right) f_i &= 0, \quad f_i(0) = 0, \\ \frac{d^2 f_e}{dr^2} - \left(\frac{1}{L_e^2} + \frac{\lambda}{D_e} \right) f_e &= 0, \quad f_e(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (13.13)$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} f_i(r) &= A \sin r \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\lambda}{D_{\text{эфф}}}}, \\ f_e(r) &= B e^{-r \sqrt{\frac{1}{L_e^2} + \frac{\lambda}{D_e}}}. \end{aligned} \quad (13.14)$$

Условия на границе с изоляцией при $r = R$ таковы:

$$\begin{aligned} f_i(R) &= f_e(R), \\ \left[\frac{d}{dr} \frac{f_i(r)}{r} \right]_{r=R} &= d \left[\frac{d}{dr} \frac{f_e(r)}{r} \right]_{r=R}. \end{aligned} \quad (13.13')$$

Эти условия дают

$$B = A e^{R \sqrt{\frac{1}{L_e^2} + \frac{\lambda}{D_e}}} \sin R \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\lambda}{D_e}},$$

$$R \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\lambda}{D_{\text{эфф}}}} \operatorname{ctg} R \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\lambda}{D_{\text{эфф}}}} = 1 - d \left(1 + R \sqrt{\frac{1}{L_e^2} + \frac{\lambda}{D_e}} \right). \quad (13.15)$$

Последнее соотношение должно служить для определения λ при заданном R и известных параметрах d, L_e, Λ .

Если радиус сферы R равен критическому радиусу R_0 , то $\lambda = 0$. Найдем λ при малых превышенных радиусах над его критическим значением, т.е. считая $\Delta R = R - R_0 \ll R_0$. Предполагая величину λ достаточно малой, будем считать, что выполняется неравенство

$$\frac{\lambda \Lambda^2}{D} \ll 1.$$

Разложив левую часть уравнения (13.15) в ряд степенями λ и ρ , получим

$$\left(\frac{\Delta R}{\Lambda} - \frac{\Lambda R_0}{2 D_{\text{эфф}}} \lambda \right) \left(\operatorname{ctg} \frac{R_0}{\Lambda} - \frac{R_0}{\Lambda \sin^2 \frac{R_0}{\Lambda}} \right) = d \frac{R_0}{L_e} \left(1 + \frac{\Delta R}{R_0} \right) \sqrt{1 + \frac{L_e^2 \lambda}{D_e}} \quad (13.16)$$

(мы воспользовались уравнением (13.11) для определения критического радиуса R_0).

Будем различать случаи большого и малого поглощения нейtronов в изоляции. В первом из них $\lambda L_e^2 / D_e \ll 1$; во втором случае мы положим $L_e = \infty$.

Если поглощение не мало, так что выполняется неравенство $\lambda L_e^2 / D_e \ll 1$, то в правой части (13.16) можно положить

$$\sqrt{1 + \frac{L_e^2 \lambda}{D_e}} \approx 1 + \frac{L_e^2 \lambda}{2 D_e}.$$

Мы получим при этом в первом приближении линейное соотношение между λ и ΔR :

$$\frac{\Delta R}{R_0} \left(\frac{R_0^2}{\Lambda^2 \sin^2 \frac{R_0}{\Lambda}} + d - 1 \right) = \frac{\lambda \Lambda^2}{2D_{\text{эфф}}} \left(\frac{R_0^2}{\Lambda^2 \sin^2 \frac{R_0}{\Lambda}} + d \frac{R_0}{\Lambda} + d + \frac{L_e R_0}{\Lambda^2} - 1 \right). \quad (13.17)$$

Рассмотрим теперь случай очень малого поглощения в изоляции, считая $L_e = \infty$. Формула (13.16) приобретает при этом следующий вид:

$$\left(\frac{\Delta R}{\Lambda} - \frac{1}{2} \frac{\Lambda R_0 \lambda}{D_{\text{эфф}}} \right) \left(\operatorname{ctg} \frac{R_0}{\Lambda} - \frac{R_0}{\Lambda} \frac{1}{\sin^2 \frac{R_0}{\Lambda}} \right) = - \frac{R_0}{D_{\text{эфф}}} \sqrt{\lambda D_e}. \quad (13.18')$$

Так как λ мало, то член, содержащий λ в левой части этого равенства, можно не учитывать. Замечая еще, что при $L_e = \infty$

$$\frac{R_0}{\Lambda} \operatorname{ctg} \frac{R_0}{\Lambda} = 1 - d,$$

получим окончательно

$$\lambda = \frac{D_{\text{эфф}}^2}{D_e R_0^4} \left[\frac{R_0^2}{\Lambda^2} - d(1-d) \right]^2 (\Delta R)^2. \quad (13.18)$$

Мы видим, что в случае бесконечной непоглощающей изоляции λ в первом приближении оказывается пропорциональной квадрату превышения радиуса сферы над его критическим значением. В частности, если $D_{\text{эфф}} = D_e$, то $R_0 = \frac{\pi}{2} \Lambda$ и

$$\lambda = \frac{D_{\text{эфф}}}{\Lambda^4} (\Delta R)^2 = \frac{\pi^4 D_{\text{эфф}} (\Delta R)^2}{16 R_0^4}. \quad (13.18'')$$

13.4. Призма, изолированная по основаниям

Рассмотрим прямоугольную призму, изолированную по основаниям слоями бесконечной изоляции (см.рис.6, на котором изоляция заштрихована, $2h$ – высота призмы). Размеры призмы вдоль осей x и y равны $2a$ и $2b$.

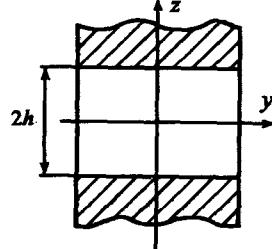


Рис. 6

Для определения критических размеров исходим из уравнений

$$\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} + \frac{N_i}{\Lambda^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 N_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_e}{\partial z^2} - \frac{N_e}{L_e^2} = 0. \quad (13.19)$$

Границные условия таковы:

$$N_i(\pm a, y, z) = N_e(\pm a, y, z),$$

$$N_i(x, \pm b, z) = N_e(x, \pm b, z),$$

$$N_i(x, y, \pm h) = N_e(x, y, \pm h),$$

$$\left(\frac{\partial N_i}{\partial z} \right)_{z=\pm h} = d \left(\frac{\partial N_e}{\partial z} \right)_{z=\pm h}. \quad (13.19')$$

Решения уравнений ищем в виде

$$N_i = A \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} \cos k z, \quad |z| \leq h,$$

$$N_e = B \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} e^{-|z|q}, \quad |z| \geq h. \quad (13.19'')$$

Подстановка (13.19'') в (13.19) дает:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{4a^2} + \frac{\pi^2}{4b^2} + k^2 &= \frac{1}{\Lambda^2}, \\ \frac{\pi^2}{4a^2} + \frac{\pi^2}{4b^2} - q^2 + \frac{1}{L_e^2} &= 0. \end{aligned} \quad (13.20)$$

Первые два условия (13.19') автоматически удовлетворяются. Последние два приводят к соотношениям

$$A \cos kh = B e^{-hq},$$

$$k A \sin kh = dqB e^{-hq},$$

откуда

$$k \operatorname{tg} kh = d q, \quad (13.21)$$

т.е.

$$h = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} d \frac{q}{k}. \quad (13.21')$$

Пользуясь (13.20), можно выразить k и q через a, b и Λ, L_e :

$$k = \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)},$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{L_e^2} + \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}. \quad (13.21'')$$

Мы получим таким образом соотношение, связывающее критические размеры призмы h, a, b .

13.5. Цилиндр, изолированный по основаниям

Рассмотрим мультилиплицирующий цилиндр, изолированный по основаниям двумя полубесконечными цилиндрами такого же радиуса, что и мультилиплицирующий цилиндр (см.рис. 7, на котором изоляция заштрихована).

Плотность нейтронов в мультилиплицирующем цилиндре и в изоляции удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial \rho} + \frac{N_i}{\Lambda^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 N_e}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 N_e}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial N_e}{\partial \rho} - \frac{N_e}{L_e^2} = 0, \quad (13.22)$$

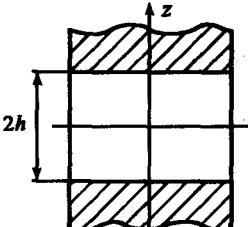


Рис. 7

решение которых ищем в виде

$$N_i(r, z) = \cos kz f(r),$$

$$N_e(r, z) = A e^{-q|z|} f(r). \quad (13.22')$$

Подстановка (13.22') в уравнение (13.22) дает

$$f''(r) + \frac{1}{r} f' + \left(\frac{1}{\Lambda^2} - k^2 \right) f(r) = 0,$$

$$f''(r) + \frac{1}{r} f' + \left(q^2 - \frac{1}{L_e^2} \right) f(r) = 0, \quad (13.22'')$$

откуда

$$\frac{1}{\Lambda^2} - k^2 = q^2 - \frac{1}{L_e^2}. \quad (13.23)$$

Решение уравнений (13.22') имеет вид:

$$f(r) = J_0 \left(r \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - k^2} \right). \quad (13.24)$$

Однаковая зависимость N_i и N_e от r дает возможность удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности цилиндра, где плотность нейтронов должна обращаться в нуль. Отсюда следует, что

$$f(R) = 0,$$

т.е.

$$R \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - k^2} = c_1 = 2,4048 \quad (13.25)$$

(c_1 – первый нуль функции Бесселя $J_0(x)$). Граничные условия на основаниях цилиндра приводят к равенствам

$$\cos kh = A e^{-qh},$$

$$k \sin kh = dq A e^{-qh},$$

откуда

$$k \operatorname{tg} kh = dq, \quad (13.26)$$

$$h = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} d \frac{q}{k}. \quad (13.26')$$

Выразив, согласно (13.23), (13.25), k и q через R , получим соотношение, связывающее радиус и высоту цилиндра, имеющего критические размеры.

13.6. Цилиндр, окруженный бесконечной боковой изоляцией

Рассмотрим мультилиплицирующий цилиндр, окруженный бесконечной боковой изоляцией, толщина которой равна высоте цилиндра (см. рис. 8, изоляция заштрихована).

Плотность нейтронов определяется уравнениями (13.22). Границные условия имеют в рассматриваемом случае следующий вид:

$$N_i(r, \pm h) = N_e(r, \pm h) = 0$$

$$N_i(R, z) = N_e(R, z),$$

$$\left(\frac{\partial N_i}{\partial r} \right)_{r=R} = d \left(\frac{\partial N_e}{\partial r} \right)_{r=R}. \quad (13.27)$$

Рис. 8

Будем искать N_i и N_e в виде

$$N_i = \cos \frac{\pi z}{2h} f_i(r), \quad N_e = \cos \frac{\pi z}{2h} f_e(r), \quad (13.28)$$

где функции $f_i(r)$ и $f_e(r)$ удовлетворяют уравнениям

$$f_i''(r) + \frac{1}{r} f_i'(r) + \left(\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\pi^2}{4h^2} \right) f_i(r) = 0,$$

$$f_e''(r) + \frac{1}{r} f_e'(r) - \left(\frac{1}{L_e^2} + \frac{\pi^2}{4h^2} \right) f_e(r) = 0. \quad (13.28')$$

Так как функция $f_i(r)$ должна быть конечной при $r = 0$, а $f_e(r)$ должна обращаться в нуль на бесконечности, то решения уравнений (13.28') должны быть взяты в виде

$$f_i(r) = A J_0 \left(r \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\pi^2}{4h^2}} \right),$$

$$f_e(r) = B K_0 \left(r \sqrt{\frac{1}{L_e^2} + \frac{\pi^2}{4h^2}} \right),$$

где $K_0(z)$ – Бесселева функция, ведущая себя на бесконечности как e^{-z} (A, B – константы). Границные условия дают

$$\begin{aligned} A J_0 \left(R \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\pi^2}{4h^2}} \right) &= B K_0 \left(R \sqrt{\frac{1}{L_e^2} + \frac{\pi^2}{4h^2}} \right), \\ A \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\pi^2}{4h^2}} J'_0 \left(R \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\pi^2}{4h^2}} \right) &= \\ = d B \sqrt{\frac{1}{L_e^2} + \frac{\pi^2}{4h^2}} K'_0 \left(R \sqrt{\frac{1}{L_e^2} + \frac{\pi^2}{4h^2}} \right). \end{aligned} \quad (13.29)$$

Замечая, что

$$J'_0(z) = J_1(z), \quad K'_0(z) = -K_1(z),$$

получим, исключая A и B из (13.29), следующее трансцендентное уравнение для определения критического радиуса цилиндра R :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\pi^2}{4h^2}} \frac{J_1 \left(R \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\pi^2}{4h^2}} \right)}{J_0 \left(R \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\pi^2}{4h^2}} \right)} &= \\ = -d \sqrt{\frac{1}{L_e^2} + \frac{\pi^2}{4h^2}} \frac{K_1 \left(R \sqrt{\frac{1}{L_e^2} + \frac{\pi^2}{4h^2}} \right)}{K_0 \left(R \sqrt{\frac{1}{L_e^2} + \frac{\pi^2}{4h^2}} \right)}. \end{aligned} \quad (13.30)$$

Рассмотрим теперь несколько примеров определения критических размеров систем в случае изоляции конечной толщины.

13.7. Сфера, окруженная слоем изоляции конечной толщины

Обозначим радиус мультилиплицирующей сферы через R_0 . Изоляция представляет собой шаровой слой, внешний радиус которого обозначим через R_1 (см.рис.9).

Нейтронная плотность определяется уравнениями (13.8). Границные условия таковы:

$$\begin{aligned} N_i(R_0) &= N_e(R_0), \\ N_e(R_1) &= 0, \\ N'_i(R_0) &= dN'_e(R_0). \end{aligned} \quad (13.31)$$

Решение уравнений имеет вид

$$N_i(r) = A \frac{\sin \frac{r}{\Lambda}}{r},$$

$$N_e(R_0) = \frac{B}{r} e^{-\frac{r}{L_e}} + \frac{C}{r} e^{\frac{r}{L_e}}. \quad (13.32)$$

Используя условие $N_e(R_1) = 0$, получим

$$N_e(r) = \frac{B}{r} \operatorname{sh} \frac{R_1 - r}{L_e}, \quad R_0 \leq r \leq R_1.$$

Два других условия дают

$$\begin{aligned} A \sin \frac{R_0}{\Lambda} &= B \operatorname{sh} \frac{R_1 - R_0}{L_e}, \\ A \left\{ \frac{1}{\Lambda} \cos \frac{R_0}{\Lambda} - \frac{1}{R_0} \sin \frac{R_0}{\Lambda} \right\} &= \\ = -d B \left\{ \frac{1}{L_e} \operatorname{ch} \frac{R_1 - R_0}{L_e} + \frac{1}{R_0} \operatorname{sh} \frac{R_1 - R_0}{L_e} \right\}. \end{aligned}$$

Избавив из этих уравнений A и B , получим уравнение для определения R_0 :

$$\frac{R_0}{\Lambda} \operatorname{ctg} \frac{R_0}{\Lambda} = 1 - d \left(1 + \frac{R_0}{L_e} \operatorname{cth} \frac{R_1 - R_0}{L_e} \right). \quad (13.33)$$

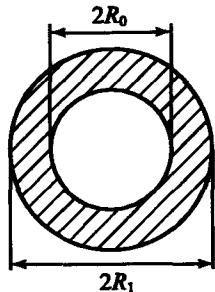


Рис. 9

Положив здесь $R_1 = \infty$, получим уравнение (13.11), справедливое в случае бесконечной изоляции; положив $R_1 = R_0$, найдем $\operatorname{ctg} \frac{R_0}{\Lambda} = -\infty$ и $R_0 = \pi \Lambda$. Это соотношение, справедливое в отсутствии изоляции, было получено ранее.

Заметим, что мы можем в разбираемом сейчас примере исключить наружное решение, сведя задачу к нахождению решения внутреннего уравнения, удовлетворяющего граничному условию:

$$\left(\frac{N'_i}{N_i} \right)_{R_0} = d \left(-\frac{1}{R_0} - \frac{1}{L_e} \operatorname{cth} \frac{R_1 - R_0}{L_e} \right).$$

Такая замена может быть полезна в том случае, когда во внутренней области возникают особенности благодаря, например, наличию регулирующих стержней.

13.8. Цилиндр, изолированный по основаниям слоями конечной толщины

Рассмотрим мультилиплицирующий цилиндр, изолированный по основаниям двумя одинаковыми цилиндрами конечной длины, радиус которых равен радиусу мультилиплицирующего цилиндра (см.рис.10, изоляция заштрихована).

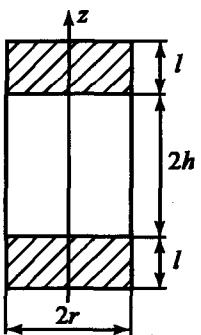


Рис. 10

Плотность нейtronов удовлетворяет уравнениям (13.22). Границные условия в рассматриваемом случае таковы:

$$\begin{aligned} N_i(R, z) &= N_e(R, z) = 0, \\ N_e(r, \pm(h + l)) &= 0, \\ N_i(r, h) &= N_e(r, h), \\ \left(\frac{\partial N_i}{\partial z} \right)_{z=\pm h} &= d \left(\frac{\partial N_e}{\partial z} \right)_{z=\pm h}. \end{aligned} \quad (13.34)$$

Решение уравнений (13.22) ищем в виде

$$N_i(r, z) = A \cos kz f(r), \quad N_e(r, t) = B \operatorname{sh} q(h + l - z) f(r)$$

(A, B – константы). Условие $N_e(r \pm (h + l)) = 0$ здесь уже выполнено. Функция $f(r)$ удовлетворяющая уравнению (13.22''), имеет вид

$$f(r) = J_0 \left(r \sqrt{\frac{1}{\Lambda} - k^2} \right).$$

Первое из граничных условий (13.34) дает $f(R) = 0$, откуда

$$R \sqrt{\frac{1}{\Lambda} - k^2} = c_1. \quad (13.35)$$

Два последних условия приводят к соотношениям

$$A \cos kh = B \operatorname{sh} ql,$$

$$kA \operatorname{sh} kh = d q B \operatorname{ch} ql,$$

откуда

$$\operatorname{tg} kh = d \frac{q}{k} \operatorname{cth} ql$$

и

$$h = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} d \frac{q}{k} \operatorname{cth} ql. \quad (13.36)$$

Подставив сюда k и q , определяемые формулами (13.23) и (13.35), найдем связь между h и R .

13.9. Цилиндр, окруженный слоем конечной боковой изоляции

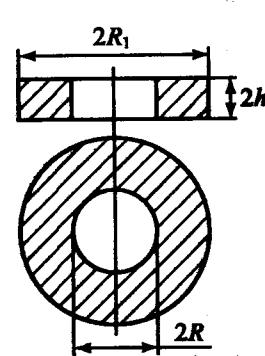


Рис. 11

Рассмотрим мультилиптирующий цилиндр, окруженный слоем конечной боковой изоляции. Пусть изоляция представляет собой цилиндрический слой высоты $2h$, такой же, как и высота мультилиптирующего цилиндра; радиус внешней поверхности слоя изоляции обозначим через R_1 (см. рис.11). Плотность нейтронов определяется из уравнений (13.22). Решение которых ищем в виде

$$N_i(r, z) = \cos \frac{\pi z}{2h} f_i(r), \quad N_e(r, z) = \cos \frac{\pi z}{2h} f_e(r).$$

Радиальная функция определяется уравнениями (13.28') вместе с граничными условиями

$$f_i(R) = f_e(R),$$

$$f'_i(R) = d f'_e(R),$$

$$f_e(R_1) = 0. \quad (13.37)$$

Функция $f_i(r)$, также как и в случае бесконечной боковой изоляции, представляет собой функцию Бесселя нулевого порядка:

$$f_i(r) = C J_0 \left(r \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{\pi^2}{4h^2}} \right).$$

Что касается функции $f_e(r)$, то она может быть выражена через функции Бесселя чисто мнимого аргумента. В случае бесконечной изоляции в качестве $f_e(r)$ нужно было брать $K_0(x)$, так как при $x \rightarrow \infty K_0(x) \approx e^{-x}$. В случае изоляции конечной толщины $f_e(r)$ будет выражаться через обе функции Бесселя второго рода $K_0(x)$ и $I_0(x)$ (при $x \rightarrow \infty I_0(x) \approx e^x$):

$$f_e(r) = A K_0 \left(r \sqrt{\frac{1}{L_e^2} + \frac{\pi^2}{4h^2}} \right) + B I_0 \left(r \sqrt{\frac{1}{L_e^2} + \frac{\pi^2}{4h^2}} \right).$$

Для удобства дальнейших выкладок введем обозначения:

$$\xi = \sqrt{\Lambda^2 - \frac{\pi^2}{4h^2}}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{1}{L_e^2} + \frac{\pi^2}{4h^2}}.$$

Границные условия (13.37) дают

$$C J_0(\xi R) = A K_0(\zeta R) + B I_0(\zeta R),$$

$$\xi C J'_0(\xi R) = d \zeta [A K'_0(\zeta R) + B I'_0(\zeta R)],$$

$$A K_0(\zeta R_1) + B I_0(\zeta R_1) = 0.$$

Исключив из этих уравнений A, B, C , получим уравнение для нахождения критического радиуса R при заданных значениях R_1 и других параметров:

$$\xi \frac{J'_0(\xi R)}{J_0(\xi R)} = d \zeta \frac{K_0(\zeta R_1) I'_0(\zeta R_1) - I_0(\zeta R_1) K'_0(\zeta R_1)}{K_0(\zeta R_1) I_0(\zeta R) - I_0(\zeta R_1) K_0(\zeta R)}. \quad (13.38)$$

§14. Критические размеры сложных систем

В этом параграфе мы покажем, каким образом следует определять критические размеры сложных систем, состоящих из разнообразных мультилиплицирующих сред. Также, как и в предыдущем параграфе, мы будем пользоваться диффузионными уравнениями с эффективными граничными условиями типа (13.1).

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу. Пусть система состоит из мультилиплицирующего шара радиуса R_1 , окруженного мультилиплицирующим шаровым слоем другого вещества. Этот слой, в свою очередь, окружен слоем нейтронной изоляции (см. рис.12, внешние радиусы мультилиплицирующего и изолирующего слоев равны соответственно R_2 и R_3).

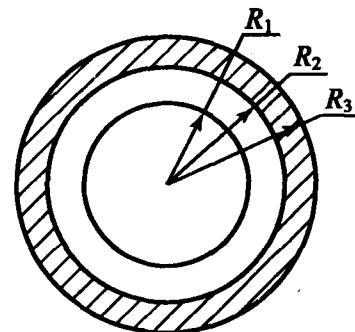


Рис. 12

Обозначим плотность нейтронов в стационарных условиях во внутреннем шаре и двух прилегающих к нему слоях соответственно через $N_1(r)$, $N_2(r)$, $N_3(r)$. Функции N_1 , N_2 , N_3 определяются из следующих уравнений:

$$\Delta N_1 + \frac{N_1}{\Lambda_1^2} = 0,$$

$$\Delta N_2 + \frac{N_2}{\Lambda_2^2} = 0,$$

$$\Delta N_3 - \frac{N_3}{L_3^2} = 0, \quad (14.1)$$

где Λ_1 и Λ_2 – эффективные диффузионные длины для шара и мультилиплицирующего слоя, L_3 – диффузионная длина в изоляции. Граничные условия при наличии изоляции таковы:

$$N_1(R_1) = N_2(R_1),$$

$$N'_1(R_1) = dN'_2(R_1),$$

$$N_2(R_2) = N_3(R_2),$$

$$N'_2(R_2) = d'N'_3(R_2) \quad (14.2)$$

(смысл введенных величин d , d' разъяснен в начале §13).

В отсутствии изоляции условия (14.2) заменяются следующими:

$$\begin{aligned} N_1(R_1) &= N_2(R_1), \\ N'_1(R_1) &= dN'_2(R_1), \\ N_2(R_2) &= 0. \end{aligned} \quad (14.2')$$

Решение системы (14.1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} N_1 &= A_1 \frac{1}{r} \sin \frac{r}{\Lambda_1}, \\ N_2 &= A_2 \frac{1}{r} \sin \frac{r + \alpha}{\Lambda_2}, \\ N_3 &= A_3 \frac{1}{r} \sin \frac{R_3 - r}{L_3} \end{aligned} \quad (14.3)$$

(A_1, A_2, A_3, α – константы).

Если изоляция отсутствует, то

$$\begin{aligned} N_1 &= A_1 \frac{1}{r} \sin \frac{r}{\Lambda_1}, \\ N_2 &= A_2 \frac{1}{r} \sin \frac{R_2 - r}{\Lambda_2}, \\ N_3 &= 0. \end{aligned} \quad (14.3')$$

Рассмотрим сперва случай, когда изоляция отсутствует. Граничные условия (14.2') приводят в этом случае к соотношениям

$$\begin{aligned} A_1 \sin \frac{R_1}{\Lambda_1} &= A_2 \sin \frac{R_2 - R_1}{\Lambda_2}, \\ A_1 \left\{ \frac{1}{\Lambda_1} \cos \frac{R_1}{\Lambda_1} - \frac{1}{R_1} \sin \frac{R_1}{\Lambda_1} \right\} &= \\ = -dA_2 \left\{ \frac{1}{\Lambda_2} \cos \frac{R_2 - R_1}{\Lambda_2} - \frac{1}{R_1} \sin \frac{R_2 - R_1}{\Lambda_2} \right\}. \end{aligned}$$

Исключив отсюда A_1 и A_2 , получим

$$\frac{1}{d} \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \operatorname{ctg} \frac{R_1}{\Lambda_1} + \left(1 - \frac{1}{d}\right) \frac{\Lambda_2}{R_1} = -\operatorname{ctg} \frac{R_2 - R_1}{\Lambda_2}. \quad (14.4)$$

Это соотношение связывает радиусы R_1 и R_2 ; задавшись R_1 , можно отсюда найти R_2 :

$$\frac{R_2 - R_1}{\Lambda_2} = \pi - \operatorname{arcctg} \left\{ \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1 d} \operatorname{ctg} \frac{R_1}{\Lambda_1} + \left(1 - \frac{1}{d}\right) \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \right\}. \quad (14.5)$$

Если положить здесь $d = 1$ и $\Lambda_1 = \Lambda_2$, то мы получим $R_2 = \pi \Lambda_2$, как и должно быть.

Рассмотрим предельный случай $R_1 \ll \Lambda_1$. Введем обозначение

$$\frac{R_2 - R_1}{\Lambda_2} = \pi - \varepsilon$$

Так как $R_1 \ll \Lambda_1$, то R_2 близко к $\pi \Lambda_2$. Поэтому $|\varepsilon| \ll 1$. Заменяя на этом основании $\operatorname{ctg} \varepsilon$ на $\frac{1}{\varepsilon}(1 - \frac{\varepsilon^2}{3})$, получим из (14.5)

$$\frac{\Lambda_2}{R_1} \left(1 - \frac{1}{3d} \frac{R_1^2}{R_2^2}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{3}\right),$$

откуда

$$\begin{aligned} \varepsilon &\approx \frac{R_1}{\Lambda_2} + \frac{1}{3} \left(\frac{R_1}{\Lambda_2}\right)^2 \left(\frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1^2 d} - 1\right), \\ \frac{R_2}{\Lambda_2} &= \pi + \frac{1}{3} \left(\frac{R_1}{\Lambda_2}\right)^2 \left(1 - \frac{\Lambda_2^2}{d \Lambda_1^2}\right). \end{aligned} \quad (14.6)$$

Если $\frac{\Lambda_2^2}{d \Lambda_1^2} > 1$, то $R_2 < \pi \Lambda_2$; если $\frac{\Lambda_2^2}{d \Lambda_1^2} < 1$, то $R_2 > \pi \Lambda_2$.

Рассмотрим теперь тот случай, когда имеется слой нейтронной изоляции. Границные условия приводят в этом случае к соотношениям

$$A_1 \sin \frac{R_1}{\Lambda_1} = A_2 \sin \frac{R_1 + \alpha}{\Lambda_2},$$

$$\begin{aligned} A_1 \left\{ \frac{1}{\Lambda_1} \cos \frac{R_1}{\Lambda_1} - \frac{1}{R_1} \sin \frac{R_1}{\Lambda_1} \right\} &= d A_2 \left\{ \cos \frac{R_1 + \alpha}{\Lambda_2} - \frac{1}{R_1} \sin \frac{R_1 + \alpha}{\Lambda_2} \right\}, \\ A_2 \sin \frac{R_2 + \alpha}{\Lambda_2} &= A_3 \operatorname{sh} \frac{R_3 - R_2}{L_3}, \\ A_2 \left\{ \frac{1}{\Lambda_2} \cos \frac{R_2 + \alpha}{\Lambda_2} - \frac{1}{R_2} \sin \frac{R_2 + \alpha}{\Lambda_2} \right\} &= \\ &= -d' A_3 \left\{ \frac{1}{L_3} \operatorname{ch} \frac{R_3 - R_2}{L_3} + \frac{1}{R_2} \operatorname{sh} \frac{R_3 - R_2}{L_3} \right\}. \end{aligned}$$

Исключив A_1, A_2, A_3 , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda_1} \operatorname{ctg} \frac{R_1}{\Lambda_1} - \frac{1}{R_1} &= d \left\{ \frac{1}{\Lambda_2} \operatorname{ctg} \frac{R_1 + \alpha}{\Lambda_2} - \frac{1}{R_1} \right\}, \\ \frac{1}{\Lambda_2} \operatorname{ctg} \frac{R_2 + \alpha}{\Lambda_2} - \frac{1}{R_2} &= -d' \left\{ \frac{1}{L_3} \operatorname{cth} \frac{R_3 - R_2}{L_3} + \frac{1}{R_2} \right\}. \end{aligned} \quad (14.7)$$

Первое из этих соотношений может служить для определения α при заданном R_1 ; подставив полученное значение $\alpha = \alpha(R_1)$ во второе соотношение, получим трансцендентное уравнение для определения R_2 .

Рассмотрим более подробно предельный случай $R_1 \ll \Lambda_1, \Lambda_2$. В этом случае мы имеем также $|\alpha| \ll \Lambda_2$. Первое из уравнений (14.7) приобретает вид

$$-\frac{1}{3} \frac{R_1}{\Lambda_1^2} = d \left\{ \frac{1}{R_1 + \alpha} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{3} \frac{R_1 + \alpha}{\Lambda_2^2} \right\},$$

откуда

$$\alpha \approx \frac{R_1}{3} \left(\frac{R_1}{\Lambda_2}\right)^2 \cdot \left[\frac{1}{d} \left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}\right)^2 - 1 \right]. \quad (14.8)$$

Определим теперь R_2 из второго уравнения (14.7). Полагая в нем $\alpha = 0$, мы получим уравнение (13.33) для определения критического радиуса R_2^0 сферы, окруженной слоем нейтронной изоляции:

$$\frac{R_2^0}{\Lambda_2} \operatorname{ctg} \frac{R_2^0}{\Lambda_2} = 1 - d' \left(1 + \frac{R_2^0}{L_3} \operatorname{ctg} \frac{R_3 - R_2^0}{L_3}\right).$$

Положим поэтому

$$R_2 = R_2^0 + \rho,$$

считая $|\rho| \ll R_2^0$, и определим ρ в зависимости от α . Пользуясь приближенными формулами

$$\operatorname{ctg}(x + \delta) = \operatorname{ctg} x - \frac{\delta}{\sin^2 x},$$

$$\operatorname{cth}(x + \delta) = \operatorname{cth} x - \frac{\delta}{sh^2 x}, \quad |\delta| \ll x,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\Lambda_2} \left\{ \operatorname{ctg} \frac{R_2^0}{\Lambda_2} - \frac{R_2^0}{\Lambda_2} \frac{1}{\sin^2 \frac{R_2^0}{\Lambda_2}} + d' \frac{\Lambda_2}{L_3} \left[\operatorname{cth} \frac{R_3 - R_2^0}{L_3} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{R_2^0}{L_3} \frac{1}{sh^2 \frac{R_3 - R_2^0}{L_3}} \right] \right\} = \frac{\alpha}{\Lambda_2} \frac{R_2^0}{\Lambda_2} \frac{1}{\sin^2 \frac{R_2^0}{\Lambda_2}}. \end{aligned} \quad (14.9)$$

Так как при малых R_1 $\alpha \sim R_1^3$ (см. формулу (14.8)), то изменение критического радиуса R_2 в этом случае оказывается пропорциональным объему внутренней сферы.

Заметим, что этот результат может быть получен также если применить теорию возмущений к определению критических размеров сложных систем (см. §16).

В некоторых случаях приходится заключать мультилиплирующее вещество в тонкую поглощающую металлическую оболочку. Это имеет место, например, при использовании воды или тяжелой воды в качестве замедлителя.

Так как оболочка поглощает нейтроны, то ее толщину h следует выбирать малой по сравнению с длиной свободного пробега l_c^0 нейронов по отношению к захвату в веществе оболочки.

Если условие $h \ll l_c^0$ выполнено, то отсюда еще вовсе не вытекает, что изменение нейтронного поля вблизи оболочки, вызванное ее присутствием, будет незначительным. Действительно, условие $h \ll l_c^0$ означает лишь, что вероятность поглощения нейтрона при однократном прохождении через оболочку мала, изменение же нейтронного поля определяется не только степенью поглощения нейтронов при однократном прохождении через оболочку, но также и тем, сколько раз нейtron возвращается к оболочке.

Для уяснения этого обстоятельства рассмотрим прежде всего следующую задачу. Пусть дана среда, в которой непрерывно распределены источники тепловых нейтронов, создающие q нейтронов в единице объема в единицу времени. Будем считать, что $q = \text{const}$. В пространстве создается тогда однородное нейтронное поле с плотностью нейтронов, равной

$$N_\infty = qT_c. \quad (14.10)$$

где T_c – время жизни нейтрона по отношению к захвату. Предположим теперь, что в это поле вносится бесконечная пластинка толщины h . Определим, как изменится нейтронное поле, благодаря внесению пластиинки.

Плотность нейтронов вне пластиинки определяется уравнением

$$D\Delta N = \frac{N}{T_c} - q, \quad (14.11)$$

где D – коэффициент диффузии нейтронов вне пластиинки. Выберем ось x перпендикулярно плотности пластиинки (см. рис.13 – пластиинка заштрихована). Решение уравнения (14.11) ищем в виде

$$N = N_\infty + Ae^{-\frac{|x|}{L}}, \quad L^2 = DT_c. \quad (14.11')$$

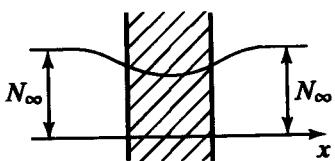


Рис. 13

Для определения константы A нужно найти плотность нейтронов в пластиинке $N_0(x)$ и использовать граничные условия

$$N(\pm h/2) = N_0(\pm h/2),$$

$$DN'(h/2) = D_0N'_0(h/2) \quad (14.12)$$

(D_0 – коэффициент диффузии нейтронов в веществе пластиинки).

Плотность нейтронов внутри пластиинки определяется уравнением

$$\Delta N_1 = \frac{N_1}{L_0^2}, \quad L_0^2 = D_0 T_c^0$$

(T_c^0 – время жизни нейтронов по отношению к захвату в веществе пластиинки). Решение этого уравнения имеет вид

$$N_1(x) = B \operatorname{ch} \frac{x}{L_0}.$$

Границные условия (14.12) дают

$$B \operatorname{ch} \frac{h}{2L_0} = N_\infty + A e^{-\frac{h}{2L}} \equiv N_0,$$

$$\frac{B D_0}{L_0} s h \frac{h}{2L_0} = -\frac{AD}{L} e^{-\frac{h}{2L}} = -\frac{D}{L} N_0 + \frac{D}{L} N_\infty$$

(N_0 – плотность нейтронов на поверхности пластинки), откуда

$$N_\infty = N_0 \left(1 + \frac{LD_0}{L_0 D} t h \frac{h}{2L_0} \right). \quad (14.13)$$

Рассмотрим специально случай тонкой пластинки, когда $h \ll L_0$. Заменяя $t h(h/2L_0)$ на $h/2L_0$, получим

$$N_\infty = N_0 \left(1 + \frac{hLD_0}{2L_0^2 D} \right). \quad (14.13')$$

Пользуясь формулами

$$L = \sqrt{\frac{1}{3} l_c l_s}, \quad L_0 = \sqrt{\frac{1}{3} l_s^0 l_c^0}, \quad D = \frac{1}{3} l_s v, \quad D_0 = \frac{1}{3} l_s^0 l_s v$$

(l_c, l_s – длины пробега нейтрона по отношению к захвату и рассеянию вне пластинки, l_c^0, l_s^0 – аналогичные величины для пластинки), перепишем (14.13') в виде

$$N_0 = \frac{N_\infty}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{l_c}{l_s}} \frac{h}{l_c^0}}. \quad (14.14)$$

Приведем еще один вывод этого соотношения, не основанный на использовании диффузионного уравнения внутри пластинки. Будем исходить из того, что диффузионный поток нейтронов, направленный к пластинке, должен равняться числу нейтронов ежесекундно поглощаемых пластинкой.

Вычислим число нейтронов, поглощаемых пластинкой. Заметим для этого, что, если вероятность поглощения нейтрона при однократном прохождении через пластинку мала, то можно считать распределение по углам падающих на пластинку

нейтронов сферически симметричным. Иными словами, вероятность того, что угол падения нейтрона заключен в пределах $\theta, \theta + d\theta$ (см. рис.14) равна при этом $\frac{1}{2} \sin \theta d\theta$ (интеграл от этого выражения по углам в пределах от $\theta = 0$ до $\theta = \pi$ равен единице).

Искомое число нейтронов, ежесекундно поглощаемых пластинкой, равно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} N v \cos \theta \sigma_c \frac{h}{\cos \theta} n \frac{1}{2} \sin \theta d\theta = \frac{N v \sigma_c n h}{2}, \quad (14.15)$$

где n – число ядер вещества пластинки в единице объема ($h/\cos \theta$ представляет собой путь, проходимый в пластинке нейтроном, движущимся под углом θ).

Согласно сказанному выше, эта величина равна диффузионному потоку, т.е.

$$-D \frac{dN}{dx} = \frac{n v \sigma_c h}{2} N. \quad (14.15')$$

Подставляя сюда вместо N выражение (14.11'), получим

$$\left(N_\infty + A e^{-\frac{h}{L}} \right) \frac{v \sigma_c n h}{2} = -D A \frac{1}{L} e^{-\frac{h}{L}},$$

откуда находим плотность нейтронов на поверхности пластинки N_0 :

$$N_0 = N_\infty + A e^{-\frac{h}{L}} = \frac{N_\infty}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{l_c}{l_s}} \frac{h}{l_c^0}}.$$

Мы получили прежнее соотношение (14.14). Таким образом, мы видим, что соотношение (14.14) не требует для своего вывода использование диффузионного уравнения внутри пластинки. Иными словами, оно справедливо даже в тех случаях, когда диффузионным уравнением внутри пластинки нельзя пользоваться.

Формула (14.14), связывающая плотность нейтронов на поверхности пластинки и вдали от нее, показывает, что отличие

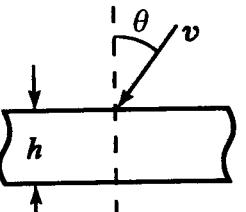


Рис. 14

N_∞ от N_0 определяется не только отношением толщины пластиинки h к длине пробега L_c^0 , но также и величиной $\sqrt{\frac{l_c}{l_s}}$. Этую последнюю величину можно трактовать, как число возвратов к пластинке. Если $\sqrt{\frac{l_c}{l_s}} \gg 1$, то даже при $h \ll l_c^0$ N_0 может сильно отличаться от N_∞ .

Обратим внимание на то обстоятельство, что в выражение для N_0 не входит длина пробега l_s^0 . Это дает возможность, зная отношение $\frac{N_0}{N_\infty}$, определять длину пробега по отношению к захвату в пластинке l_c^0 независимо от длины пробега по отношению к рассеянию l_s^0 .

Перейдем теперь к определению критических размеров системы, заключенной в тонкую поглощающую оболочку. При этом мы будем исходить из диффузационного рассмотрения и считать длину замедления нейтронов исчезающе малой. (Расчеты, учитывающие конечность длины замедления, приведены в §17.)

Пусть мультилицирующий шар радиуса R_0 отделяется оболочкой толщины h от слоя другого вещества, могущего быть как мультилицирующим, так и изолирующим (см.рис.12). Будем считать толщину оболочки малой. В этих условиях нет необходимости решать дифференциальное уравнение, определяющее плотность нейтронов в оболочке; наличие оболочки можно учесть соответствующими граничными условиями.

Так как мы предполагаем здесь длину замедления нейтронов исчезающе малой, то граничные условия имеют следующий вид

$$\begin{aligned} D_1 N'_1(R_0) &= D_0 N'_0(R_0), \\ D_0 N'_0(R_0 + h) &= D_2 N'_2(R_0 + h), \\ N_1(R_0) &= N_0(R_0), \quad N_0(R_0 + h) = N_2(R_0 + h). \end{aligned} \quad (14.16)$$

Здесь индексы 0,1,2 относятся к оболочке, внутренней сфере и слою. (Если слой мультилицирующий, то вместо D_2 нужно написать $D_{2\text{эф}}$, см. (11.9).) Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$D_2 N'_2(R_0 + h) - D_1 N'_1(R_0) = D_0 \{N'_0(R_0 + h) - N'_0(R_0)\}.$$

Так как h мало, то

$$N'_2(R_0 + h) \approx N'_2(R_0), \quad N'_0(R_0 + h) - N'_0(R_0) \approx N''_0(R_0)h.$$

Предположим далее, что радиус оболочки R_0 значительно больше диффузационной длины L_0 . Тогда

$$N''_0(R_0) \approx \Delta N_0 \Big|_{r=R_0} = \frac{N_0(R_0)}{L_0^2}.$$

Действительно, из уравнения

$$\Delta N_0 = \frac{N_0}{L_0^2}$$

следует, что

$$N_0 = \frac{A_1}{r} e^{-\frac{r}{L_0}} + \frac{A_2}{r} e^{\frac{r}{L_0}}.$$

Если выполнено условие $R_0 \gg L_0$, то $N'_0(R_0)$ по порядку величины равно $N_0(R_0)/L_0$, поэтому

$$\frac{N'_0(R_0)}{R_0} \ll \frac{N_0(R_0)}{L_0^2}.$$

Так как

$$\Delta N_0 = \frac{2N'(r)}{r} + N''(r) = \frac{N_0(r)}{L_0^2},$$

то

$$N''_0(R_0) \approx \frac{N_0(R_0)}{L_0^2}.$$

Итак, мы имеем при $r = R_0$ условие

$$D_2 N'_2(R_0) - D_1 N'_1(R_0) \approx \frac{D_0 h}{L_0^2} N_0(R_0). \quad (14.17')$$

Если $h \ll R_0$ и вероятность поглощения нейтрона при однократном прохождении мала, то должно еще выполняться условие $N_1(R_0) \approx N_0(R_0) \approx N_2(R_0)$. Поэтому окончательно получаем следующие граничные условия при $r = R_0$:

$$N_1(R_0) = N_2(R_0),$$

$$D_2 N'_2(R_0) - D_1 N'_1(R_0) = \frac{\hbar v}{l_c^0} N_1(R_0) \quad (14.17)$$

(мы воспользовались соотношениями $D_0 = \frac{1}{3} l_s^0 v$, $L_0^2 = \frac{1}{3} l_s^0 l_c^0$).

Заметим, что второе из этих условий можно получить проще, если учесть, что разность потоков $D_2 N'_2(R_0) - D_1 N'_1(R_0)$ должна равняться числу нейтронов, поглощаемых ежесекундно единицей поверхности оболочки. Последняя величина определяется формулой (14.15).

Задачу определения критических размеров можно теперь сформулировать следующим образом. Если поглощающая оболочка отделяет мультилиплицирующий шар от изолирующего слоя, то необходимо решить уравнения

$$\Delta N_1 + \frac{N_1}{\Lambda_1^2} = 0,$$

$$\Delta N_2 - \frac{N_2}{\Lambda_2^2} = 0 \quad (14.18)$$

вместе с граничными условиями (14.17). Кроме того, должно выполняться условие

$$N_2(R_1) = 0$$

(R_1 – внешний радиус слоя).

Если оболочка отделяет две мультилиплицирующие среды, то уравнения (14.18) заменяются следующими:

$$\Delta N_1 + \frac{N_1}{\Lambda_1^2} = 0,$$

$$\Delta N_2 + \frac{N_2}{\Lambda_2^2} = 0,$$

$$\Delta N_3 - \frac{N_3}{\Lambda_3^2} = 0, \quad (14.19)$$

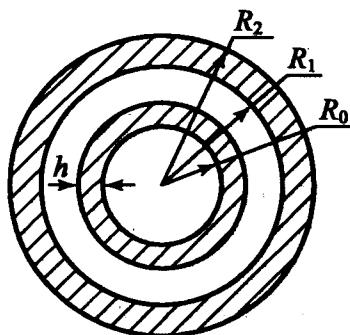


Рис. 15

где N_3 плотность нейтронов в слое изоляции, внешний радиус которого равен R_2 (рис.15). В этом случае, помимо условий (14.17), должны выполняться еще следующие условия:

$$N_2(R_1) = N_3(R_1),$$

$$D_2 N'_2(R_1) = D_3 N'_3(R_1),$$

$$N_3(R_2) = 0. \quad (14.20)$$

Рассмотрим сперва систему уравнений (14.18). Решение ищем в виде

$$N_1 = A_1 \frac{\sin \frac{r}{\Lambda_1}}{r},$$

$$N_2 = A_2 \frac{\operatorname{sh} \frac{R_1 - r}{L_2}}{r}. \quad (14.21)$$

Границные условия дают

$$A_1 \sin \frac{R_0}{\Lambda_1} = A_2 \operatorname{sh} \frac{R_1 - R_0}{L_2},$$

$$-D_2 A_2 \left\{ \frac{1}{R_0} \operatorname{sh} \frac{R_1 - R_0}{L_2} + \frac{1}{L_2} \operatorname{ch} \frac{R_1 - R_0}{L_2} \right\} -$$

$$-D_1 A_1 \left\{ \frac{1}{\Lambda_1} \cos \frac{R_0}{\Lambda_1} - \frac{1}{R_0} \sin \frac{R_0}{\Lambda_1} \right\} = \frac{\hbar v}{l_c^0} A_1 \sin \frac{R_0}{\Lambda_1}, \quad (14.21')$$

откуда

$$D_1 \left\{ \frac{1}{\Lambda_1} \operatorname{ctg} \frac{R_0}{\Lambda_1} - \frac{1}{R_0} \right\} + \frac{\hbar v}{l_c^0} + D_2 \left\{ \frac{1}{L_2} \operatorname{cth} \frac{R_1 - R_0}{L_2} + \frac{1}{R_0} \right\} = 0. \quad (14.22)$$

Это и есть трансцендентное уравнение для определения R_0 при заданных значениях R_0 , h и других параметров.

Если изоляцию можно считать бесконечной, то уравнение (14.22) переходит в

$$\frac{R_0}{\Lambda_1} \operatorname{ctg} \frac{R_0}{\Lambda_1} = 1 - \frac{D_2}{D_1} - \frac{\hbar v R_0}{D_2 l_c^0} - \frac{D_2 R_0}{D_1 L_2}. \quad (14.23)$$

Этому уравнению можно формально придать вид, отвечающий случаю $h = 0$, если ввести фиктивную диффузационную длину L'_2 согласно формуле

$$\frac{hv}{l_c^0} + \frac{D_2}{L_2} = \frac{D_2}{L'_2},$$

откуда

$$L'_2 = L_2 \frac{1}{1 + \sqrt{3} \frac{h}{l_c^0} \sqrt{\frac{l_c^{(2)}}{l_s^{(2)}}}}. \quad (14.24)$$

Уравнение (14.23) перепишется тогда в виде

$$\frac{R_0}{\Lambda_1} \operatorname{ctg} \frac{R_0}{\Lambda_1} = 1 - \frac{D_2}{D_1} \left(1 + \frac{R_0}{L'_2} \right). \quad (14.23')$$

Подчеркнем, что даже в том случае, когда $h/l_c^0 \ll 1$, L'_2 может сильно отличаться от L_2 , если только $l_c^{(2)}/l_s^{(2)}$ – "число возвратов" нейтрона к оболочке достаточно велико.

Рассмотрим теперь тот случай, когда поглощающая оболочка разделяет мультилицирующий шар и мультилицирующий слой вещества (изоляция отсутствует). Решение первых двух уравнений (14.19) ищем в виде

$$N_1 = \frac{A_1}{r} \sin \frac{r}{\Lambda_1},$$

$$N_2 = \frac{A_2}{r} \sin \frac{R_1 - r}{\Lambda_2}.$$

Границные условия (14.17) дают

$$\begin{aligned} A_1 \sin \frac{R_0}{\Lambda_1} &= A_2 \sin \frac{R_1 - R_0}{\Lambda_2}, \\ -D_2 A_2 \left\{ \frac{1}{R_0} \sin \frac{R_1 - R_0}{\Lambda_2} + \frac{1}{\Lambda_2} \cos \frac{R_1 - R_0}{\Lambda_2} \right\} + \\ + D_1 A_1 \left\{ \frac{1}{R_0} \sin \frac{R_0}{\Lambda_1} - \frac{1}{\Lambda_1} \cos \frac{R_0}{\Lambda_1} \right\} &= \frac{hv}{l_c^0} A_1 \sin \frac{R_0}{\Lambda_1}, \end{aligned}$$

откуда

$$D_1 \left\{ \frac{1}{\Lambda_1} \operatorname{ctg} \frac{R_0}{\Lambda_1} - \frac{1}{R_0} \right\} + \frac{hv}{l_c^0} + D_2 \left\{ \frac{1}{R_0} + \frac{1}{\Lambda_2} \operatorname{ctg} \frac{R_1 - R_0}{\Lambda_2} \right\} = 0. \quad (14.25')$$

Задавшись радиусом сферы R_0 , можно отсюда вычислить R_1 :

$$\begin{aligned} \frac{R_1 - R_0}{\Lambda_2} &= \pi - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \left\{ \frac{D_1}{D_2} \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \operatorname{ctg} \frac{R_0}{\Lambda_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Lambda_2}{R_0} + \frac{\Lambda_2}{R_0} \left(1 - \frac{D_1}{D_2} \right) + \sqrt{3} \frac{h}{l_c^0} \sqrt{\frac{l_c^{(2)}}{l_s^{(2)}}} \right\}. \end{aligned} \quad (14.25)$$

§15. Регулирующие стержни

Если мы имеем мультилицирующую систему, размеры которой превосходят критические, то введением в нее вещества, поглощающего нейтроны, можно добиться того, что система перейдет в стационарное состояние. Удалив затем некоторое количество этого вещества, мы снова переведем систему в надкритическое состояние. Таким путем можно регулировать работу нейтронной мультилицирующей системы.

Мы будем предполагать в этом параграфе, что система имеет цилиндрическую форму, и что регулирование системы осуществляется введением в нее цилиндрических стержней, содержащих поглощающее нейтроны вещество. Цилиндры располагаются параллельно оси системы; длина их равна высоте системы, которую мы ради простоты предполагаем неизолированной.

Наша задача состоит в определении числа и места расположения поглощающих стержней, приводящих систему в стационарное состояние. Так как плотность нейтронов максимальна на оси мультилицирующей системы, то поглощающие стержни будут вызывать наибольший эффект в том случае, когда они расположены вблизи этой оси.

Мы рассмотрим сперва следующую задачу. Пусть в неизолированную мультилицирующую систему, имеющую форму цилиндра радиуса R и находящуюся в надкритическом состоянии, вводится поглощающее вещество, заполняющее цилиндр радиуса R_1 (см. рис. 16), коаксиальный с цилиндром радиуса R . Требуется определить радиус R_1 и коэффициент поглощения таким образом, чтобы количество поглотителя было минимальным.

При решении этой задачи мы будем исходить из диффузионного рассмотрения. В отсутствие поглотителя плотность тепловых нейтронов удовлетворяет уравнению

$$\Delta N + \kappa_0^2 N = \frac{1}{D} \frac{\partial N}{\partial t}, \quad \kappa_0^2 = \frac{1}{\Lambda^2}. \quad (15.1)$$

Обозначая высоту цилиндра через $2h$, мы можем представить N в виде

$$N(x, y, z, t) = e^{\lambda t} \cos \frac{\pi z}{2h} N(x, y), \quad (15.2)$$

где λ – экспонента размножения (ось z направлена вдоль оси цилиндра). Функция $N(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta N + \kappa^2 N_0 = \frac{\lambda}{D} N, \quad \kappa^2 = \kappa_0^2 - \left(\frac{\pi}{2h} \right)^2. \quad (15.1')$$

Введением достаточного количества поглотителя мы добиваемся того, что экспонента размножения обращается в нуль. В стационарном режиме плотность нейтронов в мультилиплицирующей среде и поглощающем цилиндре удовлетворяет уравнениям

$$\Delta N_I + \kappa^2 N_I = 0,$$

$$\Delta N_{II} + \kappa_1^2 N_{II} = 0, \quad (15.3)$$

где индексы I и II относятся соответственно к чисто мультилиплицирующей области I и области, содержащей поглотитель (см.рис. 16). Величина κ_1^2 может быть представлена в виде

$$\kappa_1^2 = \kappa^2 - f(c), \quad f(c) > 0, \quad (15.3')$$

где $f(c)$ – некоторая функция концентрации поглотителя c , монотонно возрастающая с увеличением c .

Решения уравнений (15.3) имеют вид

$$N_I = A [J_0(\kappa r) - T_0(\kappa R) N_0(\kappa r)], \quad T_0(x) = \frac{J_0(x)}{N_0(x)},$$

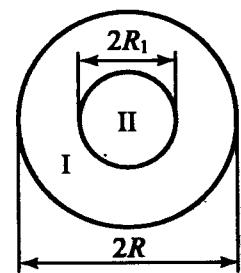


Рис. 16

$$N_{II} = B J_0(\kappa_1 r), \quad (15.3')$$

где J_0 и N_0 функции Бесселя и Неймана нулевого порядка (мы воспользовались тем, что $N_1(R) = 0$).

Константы A, B находим из условий непрерывности плотности и потока нейтронов при $r = R_1$. Потоки в областях I и II равны соответственно:

$$j_I = D \frac{\partial N_I}{\partial r} = -AD\kappa [J_1(\kappa r) - T_0(\kappa R) N_1(\kappa r)],$$

$$j_{II} = D \frac{\partial N_{II}}{\partial r} = -BD_1\kappa_1 J_1(\kappa_1 r), \quad (15.4)$$

где D и D_1 коэффициенты диффузии нейтронов в I и II областях. Равенство плотностей и потоков при $r = R_1$ приводит к условию

$$\zeta(\kappa_1 R_1) \equiv \begin{vmatrix} J_0(\kappa_1 R_1), & J_0(\kappa R_1) - T_0(\kappa R) N_0(\kappa R_1) \\ D_1 \kappa_1 J_1(\kappa_1 R_1), & D\kappa [J_1(\kappa R_1) - T_0(\kappa R) N_1(\kappa R_1)] \end{vmatrix} = 0, \quad (15.5)$$

связывающему величины κ, R, κ_1, R_1 .

Потребуем теперь, чтобы расход поглотителя $\pi(\kappa_1 R_1)$, равный

$$\pi(\kappa_1 R_1) = 2h\pi R_1^2 c$$

был минимальным. Приравнивая дифференциалы функций $\pi(\kappa_1 R_1)$ и $\zeta(\kappa_1 R_1)$, получим

$$d\pi = \frac{\partial \pi}{\partial \kappa_1} d\kappa_1 + \frac{\partial \pi}{\partial R_1} dR_1 = 0,$$

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial \kappa_1} d\kappa_1 + \frac{\partial \zeta}{\partial R_1} dR_1 = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial \pi}{\partial \kappa_1} \frac{\partial \zeta}{\partial R_1} - \frac{\partial \pi}{\partial R_1} \frac{\partial \zeta}{\partial \kappa_1} = 0. \quad (15.6)$$

Легко убедиться в том, что уравнение (15.6) удовлетворяется, если положить

$$\kappa_1 = 0.$$

Из (15.5) мы получим при этом

$$J_1(\kappa R_1) - T_0(\kappa R) N_1(\kappa R_1) = 0, \quad (15.7')$$

т.е.

$$T_1(\kappa R_1) = T_0(\kappa R), \quad (15.7)$$

где функция $T_p(x)$ определяется как

$$T_p(x) = \frac{J_p(x)}{N_p(x)}. \quad (15.8)$$

Соотношение (15.7) должно служить для определения радиуса цилиндра R_1 . Условие $\kappa_1 = 0$ вместе с (15.3') определяет концентрацию поглотителя.

Отметим, что условие (15.7') выражает согласно (15.4) равенство нулю потока нейтронов через боковую поверхность цилиндра радиуса R_1 . Решением рассмотренной задачи можно воспользоваться для приближенного решения следующего вопроса. Предположим, что поглотитель заполняет цилиндр R_1 не полностью и регулировка системы осуществляется введением внутрь системы некоторого числа поглощающих стержней, расположенных внутри цилиндра R_1 (см.рис.17). Спрашивается какое число стержней должно быть взято для приведения системы в стационарное состояние. Будем считать, что на один стержень "приходится" площадь $\pi\sigma^2$ (см.рис. 17), так что искомое

число стержней равно

$$m = \frac{\pi R_1^2}{\pi\sigma^2}. \quad (15.9)$$

Задача сводится к определению σ . Эту величину мы определим из следующих двух условий. Во-первых будем считать, что поток нейтронов через поверхность цилиндра радиуса σ равняется нулю. Во-вторых, так как стержень предполагается абсолютно поглощающим, то плотность нейтронов на поверхности стержня мы будем считать равной нулю.

Плотность нейтронов вблизи поверхности стержня определяется по формуле

$$N = AJ_0(\kappa r) + BN_0(\kappa r).$$

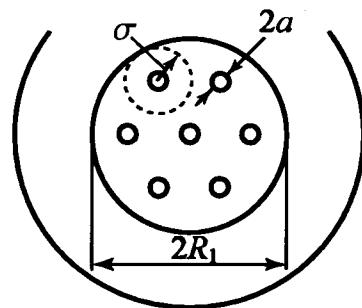


Рис. 17

Поток равняется

$$j = -D\kappa [AJ_1(\kappa r) + BN_1(\kappa r)].$$

Указанные выше условия приводят к следующим уравнениям

$$\begin{aligned} AJ_0(\kappa a) + BN_0(\kappa a) &= 0, \\ AJ_1(\kappa a) + BN_1(\kappa a) &= 0, \end{aligned} \quad (15.10)$$

где a – радиус стержня. Будем предполагать, что стержни достаточно тонкие, так что $\kappa a \ll 1$. В этом случае имеют место соотношения

$$J_0(\kappa a) \approx 1, \quad N_0(\kappa a) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma \kappa a}$$

(γ – постоянная Эйлера, $\ln \frac{2}{\gamma} \approx 0,116$). Пользуясь этими разложениями, мы получим из (15.10)

$$T_1(\kappa a) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\ln \kappa a - 0,116}, \quad T_1(x) = \frac{J_1(x)}{N_1(x)}. \quad (15.11)$$

Соотношение (15.11) определяет при заданных a, κ величину σ , а следовательно и число регулирующих стержней – если предварительно определена величина R_1 согласно (15.7).

Приведенное решение является приближенным. Мы покажем теперь, как решается задача точно в том случае, когда поглощающие стержни радиуса a расположены по образующим коаксиальных цилиндров, радиусы которых суть R_1, R_2, \dots .

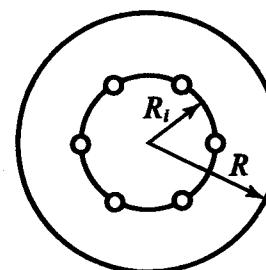


Рис. 18

Пусть на поверхности цилиндра R_i равномерно расположено μ_i стержней (см.рис. 18). Мы предполагаем, что введение стержней приводит систему в стационарное состояние, которое описывается в области, не занятой стержнями, диффузионным уравнением

$$\Delta N + \kappa^2 N = 0 \quad (15.12)$$

(N – плотность тепловых нейтронов.)

Стержни мы будем считать абсолютно поглощающими, поэтому плотность нейтронов должна обращаться в нуль на поверхности стержней (и на поверхности цилиндра радиуса R , так как система предполагается неизолированной).

Построим прежде всего частное решение уравнения (15.12), удовлетворяющее условию равенства нулю плотности нейтронов N на поверхности цилиндра радиуса R и имеющее логарифмические особенности на поверхности стержней, расположенных на поверхности цилиндра радиуса R_i .

Заметим для этого, что функция $N_0(\kappa | \mathbf{r} - \mathbf{r}_{is} |)$, где \mathbf{r} радиус вектор, лежащий в плоскости, перпендикулярной оси цилиндров, есть частное решение (15.12), имеющее логарифмическую особенность в точке \mathbf{r}_{is} .

Вследствие линейности уравнения (15.12) сумма

$$\sum_{s=1}^{\mu_i} N_0(\kappa | \mathbf{r} - \mathbf{r}_{is} |),$$

где \mathbf{r}_{is} – радиус вектор, определяющий положение s – стержня на i -цилиндре, представляет собой частное решение уравнения (15.12), имеющее логарифмические особенности на поверхности стержней, расположенных на поверхности цилиндра R_i .

Пользуясь известной из теории бесселевых функций формулой

$$N_0(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta}) = N_0(a)J_0(b) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} N_p(a)J_p(b) \cos p\vartheta, \quad (15.13)$$

мы представим $N_0(\kappa | \mathbf{r} - \mathbf{r}_{is} |)$ в виде

$$N_0(\kappa | \mathbf{r} - \mathbf{r}_{is} |) = N_0(\kappa r)J_0(\kappa R_i) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} N_p(\kappa r)J_p(\kappa R_i) \cos p\vartheta \quad (15.14)$$

(ϑ – угол между \mathbf{r} и \mathbf{r}_{is}). Так как функция

$$\alpha_0 J_0(\kappa r) + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p \cos p\vartheta J_p(\kappa r), \quad (15.14')$$

где α_p – константы и ϑ – угол, определяющий положение радиус-вектора \mathbf{r} (по отношению к вектору \mathbf{r}_{is}), есть частное решение уравнения (15.12), регулярное внутри цилиндра радиуса R , то функция

$$\psi_{is}(\mathbf{r}) = N_0(\kappa | \mathbf{r} - \mathbf{r}_{is} |) - \frac{J_0(\kappa R_i)}{T_0(\kappa R)} J_0(\kappa r) -$$

$$-2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_p(\kappa R_i)}{T_p(\kappa R)} J_p(\kappa r) \cos p\vartheta, \quad T_p(x) = \frac{J_p(x)}{N_p(x)}, \quad (15.15)$$

представляет собой частное решение уравнения (15.12), имеющее логарифмическую особенность в точке \mathbf{r}_{is} и обращающееся в нуль при $r = R$. (Последнее свойство легко проверяется на основании (15.13).)

Теперь мы можем построить функцию $\psi_i(\mathbf{r})$, являющуюся решением уравнения (15.12), которая обращается в нуль при $r = R$ и имеет логарифмические особенности в точках \mathbf{r}_{is} ($s = 1, 2, \dots, \mu_i$). Эта функция равна сумме функций $\psi_{is}(\mathbf{r})$

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^{\mu_i} \psi_{is}(\mathbf{r}). \quad (15.16)$$

Легко видеть, что в окрестности точки \mathbf{r}_{is} функция ψ_i имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_i(r, \vartheta) = & -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma \kappa | \mathbf{r} - \mathbf{r}_{is} |} + \sum_q^{\mu_i} N_0(\kappa | \mathbf{r} - \mathbf{r}_{iq} |) - \\ & - \mu_i \frac{J_0(\kappa R_i) J_0(\kappa r)}{T_0(\kappa R)} - 2\mu_i \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_p(\kappa R_i)}{T_p(\kappa R)} J_p(\kappa r) \cos p\vartheta. \end{aligned} \quad (15.17)$$

(Штрих над суммой по q в (15.17), (15.18) и (15.21') означает, что в ней отсутствует член с $q = s$).

Предполагая, что $a \ll R$, мы перепишем (15.17) в виде

$$\begin{aligned} \psi_i(r, \vartheta) \Big|_{\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_{is}} \approx & -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma \kappa a} + \sum_q^{\mu_i} N_0(\kappa | \mathbf{r}_{is} - \mathbf{r}_{iq} |) - \\ & - \mu_i \frac{J_0^2(\kappa R_i)}{T_0(\kappa R)} - 2\mu_i \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_p^2(\kappa R_i)}{T_p(\kappa R)}. \end{aligned} \quad (15.18)$$

Общее решение уравнения (15.12) представляет собой, очевидно, линейную комбинацию ψ_i

$$\psi(\mathbf{r}, \vartheta) = \sum_i A_i \psi_i(\mathbf{r}, \vartheta). \quad (15.19)$$

Коэффициенты A_i мы найдем из условия, что ψ обращается в нуль на поверхностях стержней:

$$A_k \psi_k(r, \vartheta) \Big|_a + \sum_i' A_i \psi_i \left(R_k, \frac{2\pi}{\mu_k} s \right) = 0. \quad (15.20)$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, мы получим соотношение, связывающее R, R_i, μ_i, a и κ , из которого можно найти κ по заданным R, R_i, μ_i, a .

Смысъ полученного значения κ заключается в следующем. При заданной геометрии мультилиплицирующей системы и регулирующих стержней это значение κ определяет максимально допустимое значение $K = \nu\varphi\theta$ для мультилиплицирующей системы, которая данной системой регулирующих стержней может быть приведена в стационарное состояние. Если коэффициент размножения K для системы превосходит это значение, то при заданном числе и конфигурации регулирующих стержней систему нельзя привести в стационарное состояние.

Приведем пример, разъясняющий положенный общий метод. Пусть в систему вводится один центральный стержень и μ стержней, равномерно расположенных на поверхности цилиндра радиуса R_2 . Определитель системы (15.20) приобретает в этом случае следующий вид

$$\zeta = \begin{vmatrix} -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma \kappa a} - \frac{1}{T_0(\kappa a)}, & \mu \left[N_0(\kappa R_2) - \frac{J_0(\kappa R_2)}{T_0(\kappa R)} \right] \\ N_0(\kappa R_2) - \frac{J_0(\kappa R_2)}{T_0(\kappa R)}, & \psi_2(r, \vartheta)_{r=R_2} \end{vmatrix} = 0, \quad (15.21)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_2(r, \vartheta)_{r=R_2} = & -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma \kappa a} + \sum_{q=1}^{\mu} N_0(\kappa |r_{2q} - r_{2s}|) - \\ & - \mu \cdot \frac{J_0^2(\kappa R_2)}{T_0(\kappa R)} - 2\mu \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_p^2(\kappa R_2)}{T_p(\kappa R)}. \end{aligned} \quad (15.21')$$

Это соотношение определяет значение κ при заданных a, R_2, R .

Максимальное значение величины κ , при котором система может быть еще приведена в стационарное состояние одним центральным стержнем и μ стержнями, расположенными на

поверхности цилиндра R_2 , достигается при определенном значении радиуса R_2 . Это значение R_2 и отвечающее ему максимальное значение κ определяются из условий

$$\begin{aligned} \zeta(\kappa, R_2) &= 0, \\ \zeta'_{R_2}(\kappa, R_2) &= 0. \end{aligned} \quad (15.22)$$

§16. Малые возмущения мультилиплицирующих систем

Если возмущение мультилиплицирующей системы, вызываемое поглощающим стержнем (см. предыдущий параграф), невелико, то влияние стержня может быть исследовано методом теории возмущений. Этот же метод применим и при других возмущениях мультилиплицирующей системы, связанных с изменением каких либо параметров системы или ее части; необходимо лишь, как мы в этом убедимся далее, чтобы нейтронная плотность не испытывала больших изменений, изменения же самих параметров, вообще говоря, не должны быть обязательными малыми.

Рассмотрим прежде всего задачу о влиянии поглощающего (регулирующего) стержня на работу мультилиплицирующей системы. Мы будем исходить, так же, как и в § 15, из диффузионного рассмотрения. Пусть плотность тепловых нейтронов N до внесения стержня удовлетворяет уравнению

$$\Delta N + \kappa_0^2 N = 0 \quad (16.1)$$

где κ_0^2 согласно (11.8) равняется

$$\kappa_0^2 = \frac{K-1}{L^2 + K\tau} - \frac{\lambda}{D}, \quad K = \nu\varphi\theta \quad (16.2)$$

(λ – экспонента размножения, $N(t) = N(0)e^{\lambda t}$).

После внесения поглощающего стержня экспонента размножения уменьшится. Уравнение для плотности тепловых нейтронов вне стержня будет при этом иметь вид

$$\Delta N' + \kappa^2 N' = 0 \quad (16.3)$$

Уменьшение экспоненты размножения можно трактовать как уменьшение коэффициента мультипликации $K = \nu\varphi\theta$. Именно

увеличение коэффициента, стоящего при плотности нейтронов в диффузионном уравнении от κ_0^2 до κ^2 мы будем связывать с уменьшением величины K :

$$\delta\kappa^2 = \kappa_0^2 - \kappa^2 = \frac{\partial}{\partial K} \frac{K-1}{L^2 + K\tau} \delta K = \frac{L^2 + \tau}{(L^2 + K\tau)^2} \delta K. \quad (16.4)$$

Найдя δK , мы сможем по известным формулам определить изменение размножения (при неизменных внешних размерах). Покажем теперь, как найти $\delta\kappa^2$. Умножая уравнения (16.1) и (16.3) соответственно на N' и N и вычитая из первого второе, получим

$$\operatorname{div}(N' \operatorname{grad} N - N \operatorname{grad} N') = (\kappa^2 - \kappa_0^2) NN'. \quad (16.5)$$

Проинтегрируем (16.5) по объему системы за вычетом объема поглощающего стержня. Предполагая стержень абсолютно поглощающим, так что на его поверхности плотность N' равна нулю, и считая систему неизолированной⁸, в силу чего функции N и N' обращаются в нуль на внешней поверхности системы, мы получим при этом

$$\delta\kappa^2 \int NN' dV = \int_S N \frac{\partial N'}{\partial \nu} dS, \quad (16.6)$$

где dV – элемент объема системы, dS – элемент поверхности стержня, по которой производится интегрирование в правой части (16.6); ν – направление нормали к поверхности стержня. В левой части равенства (16.6) мы заменим NN' на N^2 , так как в интеграле

$$\int NN' dV$$

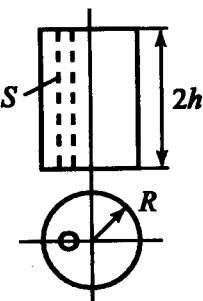


Рис. 19

область вблизи стержня не играет роли, а вдали от стержня мало возмущение, вносимое стержнем, то есть разница между N и N' , мала.

⁸Т.е. без отражателя. (Прим. ред.)

Таким образом, мы получим

$$\delta\kappa^2 \cong \frac{\int_S N \frac{\partial N'}{\partial \nu} dS}{\int N^2 dV}, \quad (16.7)$$

$$\delta K = \frac{(L^2 + K\tau)^2}{L^2 + \tau} \frac{\int_S N \frac{\partial N'}{\partial \nu} dS}{\int N^2 dV}, \quad (16.7')$$

причем в знаменателе (16.7) интегрирование можно производить по всему объему мультилиплицирующей системы.

Применим эту формулу в том случае, когда мультилиплицирующая система имеет форму цилиндра, параллельно оси которого расположен поглощающий стержень (см.рис. 19). Радиус стержня a будем считать малым по сравнению с высотой цилиндра $2h$ и радиусом системы R .

Определим вид функции N' вблизи стержня. При решении этой задачи можно исходить из предположения о том, что поглощающий стержень находится в однородном (вблизи стержня) нейтронном поле, причем среда обладает диффузионной длиной L . Функция N' должна быть решением диффузионного уравнения, обладающим следующими свойствами. На оси стержня функция N' должна иметь особенность (логарифмическую); вдали от стержня возмущенное поле N' должно совпадать с полем N , и, наконец, на поверхности стержня $N' = 0$. Искомое решение имеет, очевидно, вид

$$N' = N \left(1 - \frac{K_0(\frac{r}{L})}{K_0(\frac{a}{L})} \right), \quad (16.8)$$

где $K_0(x)$ – функция Бесселя, имеющая при $x \rightarrow 0$ следующий асимптотический вид:

$$K_0(x) = \ln \frac{2}{\gamma x} \quad (16.8')$$

($\ln \gamma$ – постоянная Эйлера, $\gamma = 1,77$). Из (16.8) следует, что

$$\left(\frac{\partial N'}{\partial \nu} \right)_{r=a} = N \frac{1}{L} \frac{K_1(a/L)}{K_0(a/L)} \cong \frac{1}{a \ln \frac{2L}{\gamma a}} N_{r=a}.$$

Подставляя это выражение в (16.7) и используя (16.4), получим

$$\delta K = \frac{(L^2 + K\tau)^2}{L^2 + \tau} \frac{2\pi}{\ln \frac{2L}{\gamma a}} \frac{\int N_{r=a}^2 dl}{\int N^2 dV}, \quad (16.9)$$

где в числителе интегрирование производится вдоль длины стержня.

Мы видим, что изменение величины $K = \nu\varphi\theta$ определяется интегралом от квадрата невозмущенной плотности нейtronов по длине стержня. Таким образом, действие стержня особенно велико в том случае, когда он находится в местах с наибольшей невозмущенной концентрацией нейtronов.

Для выяснения степени точности теории возмущений разберем еще один пример, а именно определим изменение коэффициента размножения K в том случае, когда мультилиплирующая система имеет форму шара радиуса R . Пусть в систему вводится поглощающий шар, концентрический с шаром R . Радиус поглощающего шара a мы предполагаем малым по сравнению с радиусом всей системы.

Найдем возмущенную плотность нейtronов N' вблизи поверхности поглощающего шара. Функция N' , также как и в разобранном выше примере с поглощающими стержнями, удовлетворяет диффузационному уравнению с диффузционной длиной L . Плотность N' должна обладать особенностью в центре сферы, обращаться в нуль на поверхности сферы и переходить в невозмущенную плотность вдали от поглощающей сферы. Отсюда следует, что

$$N' \approx N \left(1 - \frac{e^{-r/L}}{e^{-a/L}} \frac{a}{r} \right). \quad (16.10)$$

Имея в виду, что $N \approx N_{r=a} (a / \sin \frac{\pi a}{R}) (\sin \frac{\pi r}{R}) / r$, мы получим, согласно (16.7) следующее выражение для $\delta\kappa^2$

$$\delta\kappa^2 \simeq \frac{N_{r=a}^2 4\pi a^2 \cdot a (\frac{1}{L a} + \frac{1}{a^2})}{\int N^2 dV} \approx \frac{2\pi^2 a}{R^3}. \quad (16.11)$$

Рассматриваемую задачу можно решить также точно (находясь, конечно, в рамках диффузационной теории). Плотность нейtronов в области $a \leq r \leq R$ определяется выражением

$$N' = \frac{1}{r} (A \sin kr + B \cos kr).$$

Так как N' обращается в нуль при $r = a$ и $r = R$, то

$$\operatorname{tg} \kappa R = \operatorname{tg} \kappa a. \quad (16.12)$$

В отсутствие поглощающего стержня имеет место уравнение

$$\operatorname{tg} \kappa_0 R = 0.$$

Мы предполагаем, что

$$\kappa a \ll 1, \quad |\kappa - \kappa_0| r \ll 1.$$

В этих условиях соотношения (16.12), (16.12') приводят к результату

$$\delta\kappa R + \frac{(\delta\kappa R)^3}{3} \approx \kappa_0 a \approx \frac{\pi a}{R}. \quad (16.13)$$

Пренебрегая здесь членом $(\delta\kappa R)^3/3$, мы получим

$$\delta\kappa^2 \approx \frac{2\pi^2 a}{R^3},$$

т.е. выражение (16.11), полученное ранее согласно формуле (16.9). Мы видим отсюда, что наша приближенная теория определения $\delta\kappa^2$ дает правильные результаты, если выполняется условие

$$(\delta\kappa R)^2 \ll 1, \quad (16.14)$$

где R может считаться равным критическому радиусу. Замечая, что критический радиус шара равен

$$R = \frac{\pi \sqrt{L^2 + K\tau}}{\sqrt{K - 1}},$$

и пользуясь формулой (16.4), мы представим (16.14) в виде

$$\delta K \ll K - 1. \quad (16.15)$$

Это неравенство и выражает условие применимости изложенного выше метода нахождения δK . (Кроме того здесь должны быть, конечно, выполнены общие условия применимости диффузационного уравнения, которым мы все время пользовались.) Выше мы не учитывали того, что поглощающий стержень поглощает только тепловые нейтроны и практически прозрачен

для быстрых. Чтобы учесть это обстоятельство надо применять теорию возмущения не к уравнению с эффективным коэффициентом диффузии (11.8), а к интегральному уравнению (11.1). При этом результат получится отличный от формулы (16.7) даже в том случае, когда мы будем применять уравнение с эффективным коэффициентом диффузии для определения плотности тепловых нейтронов внутри реактора. Вместо (16.1) напишем общее интегральное уравнение (мы рассматриваем стационарный случай):

$$\Delta N - \frac{N}{L^2} + \frac{K}{L^2} \int_V W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') N(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = 0, \quad (16.16)$$

для возмущенной плотности соответствующее уравнение имеет вид

$$\Delta N' - \frac{N'}{L^2} + \frac{K'}{L^2} \int_{V'} W'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') N'(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = 0, \quad (16.17)$$

где V' – объем реактора за вычетом объема поглощающего стержня. Мы предполагаем, что последний объем мал, так что $V \cong V'$. Кроме того предполагаем, что поглощающий стержень не оказывает заметного влияния на процесс замедления, так что $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cong W'(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Тогда, повторяя прежние рассуждения, получим

$$\begin{aligned} \int_S N \frac{\partial N'}{\partial \nu} dS &= \frac{1}{L^2} \left[K' \int_V N(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \int_V W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') N'(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \right. \\ &\quad \left. - K \int_V N'(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \int_V W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') N(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right]. \end{aligned}$$

Используя симметрию $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = W(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ и положив $N = N'$ в объемном интеграле, получим:

$$\frac{\delta K}{L^2} \int \int W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') N(\mathbf{r}) N(\mathbf{r}') dr dr' = \int_S N \frac{\partial N'}{\partial \nu} dS. \quad (16.18)$$

Используя интегральное уравнение, перепишем это соотношение в виде

$$\frac{\delta K}{L^2 K} \int (N - L^2 \Delta N) N dV = \int_S N \frac{\partial N'}{\partial \nu} dS. \quad (16.18')$$

Считаем теперь, что в рассматриваемом объеме справедливо уравнение

$$\Delta N + \kappa_0^2 N = 0.$$

Формула (16.18') приводит тогда к результату

$$\delta K = \frac{KL^2}{\kappa_0^2 L^2 + 1} \frac{\int_S N \frac{\partial N'}{\partial \nu} dS}{\int V N^2 dV} = \frac{L^2(L^2 + K\tau)}{L^2 + \tau} \frac{\int_S N \frac{\partial N'}{\partial \nu} dS}{\int V N^2 dV}. \quad (16.19)$$

Эта формула отличается от (16.7') тем, что один из множителей $L^2 + K\tau$ заменен на L^2 . Поскольку L^2 сравнимо с τ , это уточнение теории дает значительную поправку.

В некоторых случаях удобнее пользоваться несколько иной формой теории возмущений, определяя непосредственно изменение критических размеров системы, связанное с изменением ее параметров. Предположим, что коэффициент размножения нейтронов испытывает изменения, которые могут быть различными в разных точках системы. Пусть K имеет вид

$$K = K_0 + K'(\mathbf{r}), \quad (16.20)$$

где K_0 – константа, а K' – некоторая функция координат. Относительно $K'(\mathbf{r})$ мы будем только предполагать, что эта величина не вызывает сильного возмущения нейтронного поля, хотя сама по себе она может быть в отдельных местах сравнимой с K_0 . Например, K' может быть вызвано присутствием какого либо загрязнения в системе. В отдельных точках концентрация примеси может быть при этом большой, не вызывая однако сильного возмущения нейтронной плотности.

Мы снова будем исходить из диффузационного рассмотрения. Критические размеры системы, коэффициент размножения которой равен K_0 , определяются из рассмотрения уравнения

$$\Delta N + \kappa_0^2 N = 0, \quad (16.21)$$

где, согласно (16.2),

$$\kappa_0^2 = \frac{K_0 - 1}{L^2 + K_0 \tau}. \quad (16.22)$$

Плотность нейтронов N обращается в нуль на внешней поверхности системы S_0 .

Уравнение для возмущенной плотности нейтронов N' в том случае, когда коэффициент размножения выражается формулой (16.20), имеет вид

$$\Delta N' + \kappa^2 N' = 0, \quad (16.21')$$

где

$$\kappa^2 = \kappa_0^2 + \delta\kappa^2 = \frac{K_0 + K' - 1}{L^2 + (K_0 + K')\tau}. \quad (16.22')$$

Функция N' обращается в нуль на поверхности S , отличающейся от S_0 . Умножая уравнения (16.21), (16.21') соответственно на N' и N и вычитая из первого уравнения второе, найдем

$$\operatorname{div}(N' \operatorname{grad} N - N \operatorname{grad} N') = \delta\kappa^2 N N'.$$

Интегрируя это соотношение по объему, находящемуся внутри S , получим

$$-\int_S N \frac{\partial N'}{\partial \nu} dS = \int \delta\kappa^2 N N' dV. \quad (16.23)$$

Мы предположим, что возмущенная плотность N' мало отличается от N . Поэтому мы заменим в (16.23) N' на N :

$$-\int_S N \frac{\partial N}{\partial \nu} dS = \int \delta\kappa^2 N^2 dV. \quad (16.24)$$

Это соотношение должно служить для определения параметров поверхности S , т.е. измененных критических размеров системы, по известным $\delta\kappa^2$ и N . Заметим, что справа в (16.24) можно интегрировать по объему, заключенному внутри поверхности S_0 .

Определим в качестве примера критические размеры мультилиплицирующего шара без изоляции. В этом случае

$$N = \text{const} \frac{\sin \frac{\pi r}{R_0}}{r}, \quad (16.25)$$

где R_0 – критический радиус, отвечающий коэффициенту мультилипликации K_0 . Подставляя (16.25) в (16.24), получим

$$-4\pi R^2 \left(\frac{\pi}{R_0 R} \cos \frac{\pi R}{R_0} - \frac{1}{R^2} \sin \frac{\pi R}{R_0} \right) \sin \frac{\pi R}{R_0} = 4\pi \int_0^{R_0} \delta\kappa^2 \sin^2 \frac{\pi r}{R_0} dr, \quad (16.26)$$

где R – измененный критический радиус (для простоты мы считаем, что $\delta\kappa^2$ зависит только от r).

Считая, что $|R - R_0| \ll R_0$, мы найдем отсюда

$$\pi^2 \frac{R - R_0}{R_0^2} \cong \int_0^{R_0} \delta\kappa^2 \sin^2 \frac{\pi r}{R_0} dr. \quad (16.26')$$

Если пренебречь длиной замедления нейтронов, то, как известно (см. 12.7),

$$R_0 = \frac{\pi L}{\sqrt{K_0 - 1}}, \quad \delta\kappa^2 = \frac{\delta K'}{L^2}.$$

Формула (16.26') приобретает при этом вид

$$R - R_0 = \frac{1}{K_0 - 1} \int_0^{R_0} K'(r) \sin^2 \frac{\pi r}{R_0} dr. \quad (16.27)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} R &= \frac{\pi L}{\sqrt{K_0 - 1}} - \frac{1}{K_0 - 1} \int_0^{R_0} K' \sin \frac{\pi r}{R_0} dr \cong \\ &\cong \frac{\pi L}{\sqrt{K_0 - 1} \sqrt{1 + \frac{2}{\pi L \sqrt{K_0 - 1}} \int_0^{R_0} K' \sin^2 \frac{\pi r}{R_0} dr}} = \\ &= \frac{\pi L}{\sqrt{\frac{2}{R_0} \int_0^{R_0} (K - 1) \sin^2 \frac{\pi r}{R_0} dr}} = \frac{\pi L}{\sqrt{(K - 1)}}, \end{aligned} \quad (16.28)$$

где

$$\overline{K-1} = \frac{2}{R} \int_0^{R_0} (K-1) \sin^2 \frac{\pi r}{R} dr.$$

Мы видим, что критические размеры определяются усредненным значением $K - 1$ по невозмущенной плотности нейтронов. Заметим, что этим выводом мы по сути дела уже пользовались в первом варианте теории возмущений, считая величины κ_0^2 и κ^2 постоянными вдоль оси системы. Фактически мы должны понимать под κ^2 усредненные значения по невозмущенной плотности.

Метод теории возмущения можно использовать также для приближенного определения критических размеров реактора в виде цилиндра, окруженного изоляцией со всех сторон. В §13 было показано, как решается задача о критических размерах реакторов цилиндрической формы при наличии изоляции только на боковой поверхности цилиндра. Если изоляция расположена со всех сторон цилиндра, то задача о критических размерах становится значительно более сложной, поскольку не происходит разделения переменных по радиусу и оси цилиндра.

Очевидно, что наиболее выгодная форма цилиндра получается, когда его диаметр не сильно отличается от высоты. Тогда можно считать, что поверхность цилиндра образуется в результате некоторого "возмущения" поверхности сферы.

Пусть R_0 есть критический радиус сферы, окруженной бесконечной изоляцией. Плотность тепловых нейтронов удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\Delta N_0 + \alpha_0^2 N_0 = 0, \quad (16.29)$$

где

$$\alpha_0^2 = \kappa_0^2 \quad \text{при } r < R_0,$$

$$\alpha_0^2 = -\frac{1}{L^2} \quad \text{при } r > R_0.$$

На границе при $r = R_0$ выполняются условия

$$\begin{aligned} N_{0i} &= N_{0e}, \\ \frac{\partial N_{0i}}{\partial r} &= p \frac{\partial N_{0e}}{\partial r}. \end{aligned} \quad (16.30)$$

Для цилиндра имеем аналогично:

$$\Delta N + \alpha^2 N = 0, \quad (16.29')$$

где

$$\alpha^2 = \kappa^2 \quad \text{внутри цилиндра},$$

$$\alpha^2 = -\frac{1}{L^2} \quad \text{вне цилиндра},$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} N_i &= N_e, \\ \frac{\partial N_i}{\partial \nu} &= p \frac{\partial N_e}{\partial \nu}, \end{aligned} \quad (16.30')$$

где ν нормаль к поверхности цилиндра. Умножим (16.29) на N , а (16.29') на N_0 и вычтем из первого уравнения второе:

$$\operatorname{div} [N \operatorname{grad} N_0 - N_0 \operatorname{grad} N] + (\alpha_0^2 - \alpha^2) NN_0 = 0. \quad (16.31)$$

Очевидно, что $\alpha_0^2 - \alpha^2 \neq 0$ только в тех областях сферы, которые выступают за поверхность цилиндра, и тех областях цилиндра, которые выступают за поверхность сферы (предполагается, что центр сферы совпадает с серединой оси цилиндра).

Интегрируя (16.31) по всему пространству, получим

$$\begin{aligned} \int_{S_{\text{сф}}} N(\operatorname{grad} N_{0i} - \operatorname{grad} N_{0e}) dS - \int_{S_{\text{цил}}} N_0(\operatorname{grad} N_i - \operatorname{grad} N_e) dS + \\ + (\kappa^2 + \frac{1}{L^2}) \int_{V_1} NN_0 dV + \left(-\frac{1}{L^2} - \kappa^2 \right) \int_{V_2} NN_0 dV = 0, \end{aligned}$$

где $S_{\text{сф}}$ – поверхность сферы, $S_{\text{цил}}$ – поверхность цилиндра, V_1 – объем сферы, выступающий за поверхность цилиндра, V_2 – объем цилиндра, выступающий за поверхность сферы. Используя граничные условия (16.30) и положив, как всегда в первом приближении теории возмущений $N = N_0$, получим:

$$4\pi R_0^2 N_0 \left(1 - \frac{1}{p} \right) \frac{\partial N_{0i}}{\partial R_0} - \left(1 - \frac{1}{p} \right) \int_{S_{\text{цил}}} N_0 \frac{\partial N_0}{\partial \nu} dS +$$

$$+\left(\kappa^2 + \frac{1}{L^2}\right) \left\{ \int_{V_1} N_{0i}^2 dV - \int_{V_2} N_{0e}^2 dV \right\} = 0. \quad (16.32)$$

Неизвестными в этом уравнении являются диаметр и высота цилиндра.

Выписав входящие в (16.32) интегралы в явном виде, мы получим трансцендентное уравнение, определяющее диаметр цилиндра как функцию его высоты. Пусть $p = 1$, тогда, поскольку $N_{0i} > N_{0e}$, можно сразу заключить, что $V_1 < V_2$, объем цилиндра больше, чем объем сферы, как это можно было ожидать заранее.

В уравнение (16.32) входит плотность нейтронов вблизи границы изоляции, т.е. там, где, строго говоря, нельзя пренебречь конечностью длины замедления, и следует применить приближенный метод, изложенный в §18. Учет конечности длины замедления приводит, вообще говоря, к увеличению плотности нейтронов в изоляции вблизи границы реактора. Поэтому N_{0e} в уравнении (16.32) следует увеличить, что приводит к уменьшению V_2 . Таким образом применение уравнений, в которых пренебрегается конечностью длины замедления нейтронов, должно дать завышенное значение для отношения критического объема цилиндра к критическому объему сферы.

§17. Границные условия с учетом конечной длины замедления нейтронов

При определении критических размеров различных систем исходят обычно из диффузационного рассмотрения. Такое рассмотрение незаконно вблизи границы с изоляцией. Диффузационное уравнение с эффективным коэффициентом диффузии не имеет места вблизи границы с изоляцией, на расстояниях от границы порядка длины замедления нейтронов. Роль этого пограничного слоя не слишком существена в тех случаях, когда изоляция отсутствует, так как при этом плотность нейтронов в пограничном слое мала. Однако, при наличии изоляции роль пограничного слоя возрастает.

Возможен, однако, следующий приближенный метод решения задачи. Мы считаем диффузационное уравнения справедливым всюду, вплоть до самой границы с изоляцией, но требуем выполнения определенных граничных условий, которые,

конечно, отличаются от граничных условий (13.13'), справедливых только при исчезающей малой длине замедления нейтронов. Мы установим вид этих граничных условий в том наиболее простом случае, когда замедляющие свойства мультилиплицирующей системы и окружающего ее слоя нейтронной изоляции одинаковы. (Такой случай реализуется в уран-графитовой системе, окруженной слоем графитовой изоляции.)

Поскольку нас будет интересовать здесь лишь очень тонкий пограничный слой, мы можем считать границу бесконечной плоскостью, по одну сторону от которой безгранично простирается мультилиплицирующая среда, а по другую тоже безгранично — изоляция. Для того, чтобы задача оставалась стационарной (каковой она является, если система имеет критические размеры), мы предположим, что коэффициент размножения нейтронов равен единице

$$K = \nu\varphi\theta = 1.$$

Границные условия, которые мы установим, будут, следовательно, относиться к тому случаю, когда коэффициент размножения мало отличается от единицы и когда размеры системы значительно превосходят длину замедления нейтронов. (Эти условия реализуются в уран-графитовом реакторе.) Задача сводится к решению интегро-дифференциальных уравнений вида (11.1), (11.2) для мультилиплицирующей среды и для изоляции в случае плоской границы между ними.

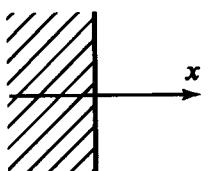


Рис. 20

Установим основные уравнения задачи. Выберем направление нормали к границе за ось x , причем пусть область $x > 0$ отвечает мультилиплицирующей среде, а область $x < 0$ — изоляции. Мы уже говорили, что замедляющие свойства мультилиплицирующей среды и изоляции предполагаются одинаковыми. Это значит, что замедление нейтронов происходит здесь так же, как если бы замедлитель был бесконечным. Отсюда, пользуясь результатами §7, можно заключить, что функция $W(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ равна в этом случае

$$W_\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{e^{-\frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2}{4\tau}}}{(4\pi\tau)^{3/2}}, \quad (17.1)$$

где τ связано с общей для обеих сред величиной среднего квадрата длины замедления ρ^2 соотношением $\tau = \frac{1}{6}\rho^2$.

Мы будем предполагать, что концентрация делящегося вещества невелика. Так как замедляющие свойства обеих сред одинаковы, то отсюда следует, что коэффициенты диффузии тепловых нейтронов в обеих средах можно считать одинаковыми. Напишем теперь уравнения, которым удовлетворяет плотность нейтронов в мультилиплицирующей среде и в изоляции. Достаточно ограничиться рассмотрением плотности тепловых нейтронов.

Обозначим плотность тепловых нейтронов в мультилиплицирующей среде и в изоляции соответственно через $N_+(x)$ и $N_-(x)$. Функция $N_+(x)$ удовлетворяет уравнению (11.1), в котором следует положить $K = 1$. Выполнив в этом уравнении интегрирование по y' и z' , получим:

$$\frac{d^2N_+}{dx^2} = \frac{1}{L_+^2}N_+(x) - \frac{1}{L_+^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4\tau}}}{\sqrt{4\pi\tau}} N_+(x') dx', \quad x > 0, \quad (17.2)$$

где L_+ – диффузационная длина в мультилиплицирующей среде. Плотность нейтронов в изоляции $N_-(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2N_-}{dx^2} = \frac{1}{L_-^2}N_-(x) - \frac{1}{L_-^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4\tau}}}{\sqrt{4\pi\tau}} N_+(x') dx', \quad x < 0, \quad (17.3)$$

где L_- – диффузационная длина в изоляции. Интеграл, входящий в (17.3) представляет собой число быстрых нейтронов, родившихся в области $x > 0$ и превратившихся в тепловые в слое изоляции, т.е. в области $x < 0$. Первое из написанных уравнений является интегро-дифференциальным, а второе – обыкновенным дифференциальным неоднородным уравнением (неоднородность становится известной функцией после того, как проинтегрировано уравнение (17.2)). Чтобы сделать систему уравнений (17.2), (17.3) вполне определенной, необходимо еще указать граничные условия. Последние заключаются, во-первых, в равенстве плотностей нейтронов на границе $x = 0$, и, во-вторых, в равенстве диффузионных потоков, исходящего из мультилиплицирующей среды и входящего в изоляцию.

Так как коэффициенты диффузии для тепловых нейтронов в мультилиплицирующей среде и в изоляции одинаковы, то граничные условия имеют следующий вид:

$$N_+(0) = N_-(0),$$

$$N'_+(0) = N'_-(0). \quad (17.4)$$

Заметим, что если бы пределы интегрирования в уравнении (17.3) простирались от $-\infty$ до $+\infty$, то уравнение имело бы решение $N_+(x) = const$, что физически ясно, так как мы предположили коэффициент размножения нейтронов равным единице. Будем в дальнейшем измерять расстояния в единицах, равных L_+ , и введем следующие обозначения:

$$\frac{\tau}{L_+^2} = \frac{1}{6} \frac{\rho^2}{L_+^2} = p; \quad \frac{L_+^2}{L_-^2} = q^2. \quad (17.5)$$

Так как поглощение нейтронов в изоляции меньше поглощения в мультилиплицирующей среде, то $q < 1$. Измеряя длины в единицах L_+ , мы будем вместо N_+ и N_- пользоваться обозначениями $f(x)$ и $g(x)$. Уравнения (17.2), (17.3) запишутся тогда в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2f}{dx^2} &= f(x) - \frac{1}{2\sqrt{\pi p}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x-y)^2}{4p}} f(y) dy, \quad x > 0, \\ \frac{d^2g}{dx^2} &= q^2 g(x) - \frac{1}{2\sqrt{\pi p}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x-y)^2}{4p}} f(y) dy, \quad x < 0. \end{aligned} \quad (17.6)$$

Граничные условия (17.4) имеют вид

$$f(0) = g(0),$$

$$f'(0) = g'(0). \quad (17.6')$$

К ним следует добавить условие, чтобы на бесконечности в изоляции плотность нейтронов обращалась в нуль, т.е.

$$g(-\infty) = 0. \quad (17.6'')$$

Перейдем теперь к решению уравнения (17.2). В это уравнение входит интеграл с ядром, зависящим от разности переменных, причем интегрирование производится по полубесконечной оси. В таких случаях следует пользоваться методом Винера-Гопфа, который подробно изложен в разделе Математическое приложение. Здесь мы воспользуемся готовыми результатами, отсылая за доказательствами к §36-38.

Покажем, как находить решения более общего уравнения

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right)f &\equiv \left(\frac{d^l}{dx^l} + p_1 \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} + p_2 \frac{d^{l-2}}{dx^{l-2}} + \dots + p_l\right) f(x) = \\ &= \int_0^\infty H(x-y) f(y) dy, \quad 0 < x < \infty, \end{aligned} \quad (17.7)$$

где p_1, p_2, \dots, p_l – константы. Предположим, что ядро $H(x)$ убывает с ростом $|x|$ настолько быстро, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(|x|) e^{\eta(x)}|^2 dx$$

сходится для всех η , не превосходящих некоторого определенного числа δ . Требуется найти те решения уравнения (17.7), для которых

$$f(x) = O(e^{\alpha x}), \quad x \rightarrow \infty,$$

где α – произвольное фиксированное число меньше δ . Для решения поставленной задачи достаточно найти комплексную компоненту Фурье функции:

$$F_+(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(x) e^{wx} dx, \quad (17.8)$$

представляющую собой регулярную функцию w в области $Re w < -\alpha$. Обращая функцию (17.8), будем иметь

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} F_+(w) e^{-wx} dw \quad (s > \alpha, x > 0). \quad (17.9)$$

Покажем, как найти компоненту Фурье $F_+(w)$. Введем в рассмотрение комплексную компоненту Фурье ядра исходного уравнения (17.7)

$$K(w) = \int_{-\infty}^{\infty} H(|x|) e^{wx} dx \quad (|Re w| < \delta).$$

Ради простоты будем считать функцию $\mathcal{P}(w)$ четной. Строим функцию

$$\tau(w) = \frac{\mathcal{P}(w) - K(w)}{(w - w_1)(w - w_2)\dots(w - w_n)} (w^2 - \delta^2)^{\frac{n-l}{2}}, \quad (17.8')$$

где w_1, w_2, \dots, w_n суть корни уравнения

$$\mathcal{P}(w) - K(w) = 0 \quad (17.9')$$

в полосе $|Re w| < \alpha$. Определяем далее функцию

$$\tau_-(w) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z-w} dz \right\}, \quad (17.10)$$

где $\beta_1 (\alpha < \beta_1 < \delta)$ выбрано так, чтобы в полосе $|Re w| < \beta_1$ не было новых корней уравнения (17.9'). Компонента Фурье $F_+(w)$ связана с $\tau_-(w)$ следующим соотношением:

$$F_+(w) = Q_{\frac{n+l}{2}-1}(w) \frac{(w-\delta)^{\frac{n-l}{2}}}{(w-w_1)\dots(w-w_n)} \tau_-(w), \quad (17.11)$$

где $Q_{\frac{n+l}{2}-1}(w)$ полином степени $\frac{n+l}{2}-1$ с произвольными коэффициентами. Применим изложенный метод к решению первого из уравнений (17.6). В этом случае

$$\mathcal{P}(w) = w^2 - 1. \quad (17.12)$$

Функция $K(w)$ имеет вид

$$K(w) = -e^{pw^2}, \quad \delta = \infty. \quad (17.13)$$

Найдем функцию $\tau(w)$. Для этого необходимо знать корни уравнения

$$w^2 - 1 + e^{pw^2} = 0. \quad (17.14)$$

В достаточно узкой полосе $|Re w| \leq \alpha$ это уравнение имеет только один корень (и притом двойной) $w = 0$. Можно показать, что если $p \leq 2,9$, то в полосе $|Re w| \leq 1$ есть только один двойной корень $w = 0$, при $p = 2,914$ появляется еще другой корень $-w^2 = 0,777 + i1,757$.

Мы будем в дальнейшем предполагать, что $p \leq 2,9$. Полагая в (17.8) $l = n = 2$, получим

$$\tau(w) = \frac{w^2 - 1 + e^{pw^2}}{w^2}, \quad (17.15)$$

и

$$\tau_-(w) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \frac{dz}{z-w} \ln \left\{ 1 - \frac{1-e^{pz^2}}{z^2} \right\} \right] \quad (\beta_1 > \alpha). \quad (17.16)$$

По формуле (17.11) имеем далее

$$F_+(w) = \frac{Aw + B}{w^2} \tau_-(w), \quad (17.17)$$

где A и B – константы. Наконец, пользуясь формулой обращения (17.9), получим следующее выражение для $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} e^{-xw} \frac{Aw + B}{w^2} dw \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \frac{dz}{z-w} \ln \left\{ 1 - \frac{1-e^{pz^2}}{z^2} \right\} \right] \quad (17.18)$$

$(\alpha < s < \beta_1, \quad x > 0).$

Прежде чем анализировать это выражение, найдем плотность нейтронов в изоляции. Необходимо решить второе уравнение (17.7). Входящий в это уравнение интеграл представляет собой, после того, как определена $f(x)$, известную функцию x .

Таким образом, речь идет об интегрировании дифференциального уравнения с известной неоднородностью. Решение уравнения (17.7), обращающее в нуль на $-\infty$, имеет вид

$$g(x) = Ce^{qx} + \frac{e^{qx}}{2q} \int_0^x F(y) e^{-qy} dy - \frac{e^{-qx}}{2q} \int_{-\infty}^x F(y) e^{qy} dy, \quad (17.19)$$

где

$$F(y) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi p}} \int_0^\infty f(\eta) e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4p}} d\eta. \quad (17.19')$$

Выразим $F(y)$ через компоненту Фурье $F_+(w)$ функции $f(z)$. Пользуясь (17.13) и учитывая, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} F_+(w) e^{-xw} dw = 0, \quad \text{если } x < 0,$$

находим

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} F_+(w) e^{-yw} K(w) dw, \quad (17.19'')$$

где $K(w) = -e^{pw^2}$. Подставляя (17.19'') в (17.19), получим следующее выражение для $g(x)$

$$g(x) = Ce^{qx} + \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} K(w) F_+(w) \left\{ \frac{e^{qx}}{2q} \int_0^x e^{-y(q+w)} dy - \frac{e^{-qx}}{2q} \int_{-\infty}^x e^{y(q-w)} dy \right\} dw.$$

Выполнив интегрирование по y , найдем

$$g(x) = Ce^{qx} + \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} \frac{K(w)}{w^2 - q^2} F_+(w) e^{-xw} dw \quad (x < 0), \quad (17.20)$$

где $F_+(w)$ определяется формулой (17.17) (член $\sim e^{qx}$, возникший при интегрировании по y , включен в 1-ый член в (17.20)). Заметим, что в формуле (17.20) можно произвольно уменьшить величину s , оставляя ее только положительной. Это может сказать только на константе C . Поэтому будем в дальнейшем считать, что $s < q$.

Итак решение уравнений (17.6) может быть представлено в виде:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} e^{-xw} \frac{Aw + B}{w^2} \tau_-(w) dw \quad (x > 0),$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} e^{-xw} \frac{e^{pw^2}}{q^2 - w^2} \frac{Aw + B}{w^2} \tau_-(w) dw + Ce^{qx} \quad (x < 0), \quad (17.21)$$

где

$$\tau_-(w) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \ln \left[1 - \frac{1 - e^{pz^2}}{z^2} \right] \frac{dz}{z-w} \right\} \quad (\alpha < s < \beta_1). \quad (17.22)$$

При $x = 0$ имеем следующие граничные условия:

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = g'(0),$$

которые связывают между собой константы A, B, C .

Приступим теперь к анализу выражений (17.21). Прежде всего выясним, как ведет себя функция $f(x)$ при больших x . Для этой цели преобразуем интеграл, определяющий $f(x)$, взяв в качестве линии интегрирования прямую $\operatorname{Re} w = s$ (строгое обоснование ниже приводимых выкладок см. в разделе Математическое приложение). По теореме о вычетах имеем

$$\int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} = \int_{s+i\infty}^{s-i\infty} -2\pi i \cdot (\text{вычет в точке } w=0).$$

Отсюда получаем

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{s+i\infty}^{s-i\infty} e^{-xw} \frac{Aw + B}{w^2} \tau_-(w) dw - \sqrt{2\pi} \tau_-(0) \times$$

$$\times \left\{ A - \frac{B}{2\pi i} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \ln \left[1 - \frac{1 - e^{pz^2}}{z^2} \right] \frac{dz}{z^2} - Bx \right\}. \quad (17.23)$$

При больших x первый интеграл ведет себя как e^{-xs} . Поэтому при $x \gg 1$ $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = a_\infty + b_\infty x, \quad (17.24)$$

где

$$a_\infty = \sqrt{2\pi} \tau_-(0) \left\{ \frac{B}{2\pi i} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \ln \left[1 - \frac{1 - e^{pz^2}}{z^2} \right] \frac{dz}{z^2} - A \right\},$$

$$b_\infty = \sqrt{2\pi} \tau_-(0) B. \quad (17.25)$$

Член, пропорциональный x , имеет простой физический смысл: на бесконечности имеется конечный, отличный от нуля поток нейтронов.

Определим теперь поведение $f(x)$ при малых x , вблизи границы. Непосредственно полагать $x = 0$ в формуле (17.23) нельзя. Мы поступим поэтому следующим образом. Замечая, что

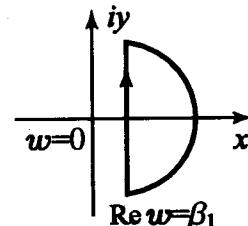


Рис. 21

(см. рис. 21), представим $\chi(w) = -\ln \tau_-(w)$ в виде

$$\chi(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \left\{ \ln \left[1 - \frac{1 - e^{pz^2}}{z^2} \right] - \frac{1}{z^2} \right\} \frac{dz}{z-w} \quad (\operatorname{Re} w < \beta_1). \quad (17.26)$$

Посмотрим, как ведет себя $\chi(w)$ при больших $|w|$ ($\operatorname{Re} w < \beta_1$). Мы имеем, очевидно, при $|w| \gg 1$

$$\chi(w) = -\frac{\Gamma_1}{w} - \frac{\Gamma_2}{w^2} + O\left(\frac{1}{w^3}\right), \quad (17.26')$$

где

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_i - i\infty}^{\beta_1 + i\infty} \left\{ \ln \left[1 - \frac{1 - e^{pz^2}}{z^2} \right] - \frac{1}{z^2} \right\} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_i - i\infty}^{\beta_1 + i\infty} \ln \left[1 - \frac{1 - e^{pz^2}}{z^2} \right] dz,$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1 - i\infty}^{\beta_1 + i\infty} \left\{ \ln \left[1 - \frac{1 - e^{pz^2}}{z^2} \right] - \frac{1}{z^2} \right\} z dz = 1. \quad (17.26'')$$

Перепишем теперь первый интеграл, определяющий $f(x)$ (см. формулу (17.23)), в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{-xw} \frac{Aw + B}{w^2} \tau_-(w) dw &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{-xw} \frac{Aw + B}{w^2} \times \\ &\times \left[e^{-\chi(w)} - 1 - \frac{\Gamma_1}{w} \right] dw + \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \left(1 + \frac{\Gamma_1}{w} \right) \frac{Aw + B}{w^2} e^{-xw} dw. \end{aligned} \quad (17.23')$$

Можно видеть, что последний интеграл равен нулю. Мы можем поэтому выражение (17.23) для $f(x)$ записать в следующем виде

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{-xw} \frac{Aw + B}{w^2} \left[e^{-\chi(w)} - 1 - \frac{\Gamma_1}{w} \right] dw - \\ &- \sqrt{2\pi} \tau_-(0) \left\{ A - \frac{B}{2\pi i} \int_{-\beta_1 - i\infty}^{-\beta_1 + i\infty} \ln \left[1 - \frac{1 - e^{pz^2}}{z^2} \right] \frac{dz}{z^2} - Bx \right\}. \end{aligned} \quad (17.27)$$

Этой формулой удобно пользоваться при малых x . Мы можем для достаточно малых x заменить в ней e^{-xw} на $1 - xw$, так

как выражение в квадратных скобках, входящих в первый интеграл, ведет себя при $|w| \rightarrow \infty$ как $\frac{1}{w^2}$. Таким образом мы получим

$$f(0) = a_\infty + \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{Aw + B}{w^2} \left[e^{-\chi(w)} - 1 - \frac{\Gamma_1}{w} \right] dw,$$

$$f'(0) = b_\infty - \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{Aw + B}{w} \left[e^{-\chi(w)} - 1 - \frac{\Gamma_1}{w} \right] dw, \quad (17.28)$$

где a_∞ и b_∞ определяются формулами (17.25). Этими соотношениями связывается поведение функции $f(x)$ на бесконечности с ее поведением при малых x вблизи границы.

Входящие в (17.28) интегралы могут быть легко вычислены, если иметь виду, что $e^{-\chi(w)}$ регулярна левее прямой $Rew = \beta_1$. Применяя теорему о вычетах, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{Aw + B}{w^2} \left[e^{-\chi(w)} - 1 - \frac{\Gamma_1}{w} \right] dw &= \\ &= \sqrt{2\pi} A[\tau_-(0) - 1] - \sqrt{2\pi} B\tau'_-(0), \end{aligned} \quad (17.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{Aw + B}{w} \left[e^{-\chi(w)} - 1 - \frac{\Gamma_1}{w} \right] dw &= \\ &= \sqrt{2\pi} B[\tau_-(0) - 1] - \sqrt{2\pi} A\Gamma_1. \end{aligned} \quad (17.30)$$

Легко найти $\chi(0)$:

$$\chi(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1 - i\infty}^{\beta_1 + i\infty} \ln \left(1 - \frac{1 - e^{pz^2}}{z^2} \right) \frac{dz}{z}.$$

Переходя от прямой $Rew = \beta_1$ к указанному на рис.22 пути интегрирования и замечая, что подинтегральная функция нечетна, мы сведем $\chi(0)$ к интегралу по полуокружности ε . Последний, очевидно равен $\pi i \ln(1 + p)$. Итак,

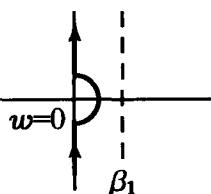


Рис. 22

$$\begin{aligned}\chi'(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \ln\left(1 - \frac{1-e^{pz^2}}{z^2}\right) \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{\pi} S_2(p), \\ S_2(p) &= \int_0^\infty \ln\left[\frac{1+t^2-e^{-pt^2}}{(1+p)t^2}\right] \frac{dt}{t^2}. \quad (17.32)\end{aligned}$$

Для сведения $\chi'(0)$ к интегралу вдоль вещественной оси нужно предварительно из $\chi'(0)$ вычесть интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \ln(1+p) \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \frac{dz}{z^2} = 0.$$

В интеграле (17.26''), определяющем Γ_1 , можно перейти к интегрированию вдоль вещественной оси:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \frac{1}{\pi} S_0(p), \\ S_0(p) &= \int_0^\infty \ln\left[1 + \frac{1-e^{-pt^2}}{t^2}\right] dt. \quad (17.33)\end{aligned}$$

Подставим найденные значения интегралов в формулы (17.28), определяющие $f(0)$ и $f'(0)$. Мы получим

$$\begin{aligned}f(0) &= -A\sqrt{2\pi}, \\ f'(0) &= B\sqrt{2\pi} + A\frac{2S_0(p)}{\sqrt{2\pi}}. \quad (17.34)\end{aligned}$$

Откуда

$$\sqrt{2\pi}A = -f(0),$$

$$\chi(0) = \frac{1}{2} \ln(1+p). \quad (17.31)$$

Выразим величины $\chi'(0)$ и Γ_1 , через определенные интегралы, взятые вдоль вещественной оси. Пользуясь определением $\chi(w)$, найдем

$$\sqrt{2\pi}B = f'(0) + f(0) \frac{S_0(p)}{\pi}. \quad (17.35)$$

Пользуясь последними формулами, можно связать величины a_∞ и b_∞ , определяющие $f(x)$ при больших x , с значениями функции $f(x)$ и ее первой производной в точке $x = 0$. Согласно формулам (17.24), (17.25), имеем

$$\begin{aligned}f(x) &= a_\infty + b_\infty x, \\ a_\infty &= \frac{1}{\sqrt{1+p}} \left[-\frac{f'(0) + f(0) \frac{S_0(p)}{\pi}}{\pi} S_2(p) + f(0) \right], \\ b_\infty &= \frac{1}{\sqrt{1+p}} \left[f'(0) + f(0) \frac{S_0(p)}{\pi} \right], \quad (17.36)\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}f(0) &= \left[a_\infty + \frac{S_2(p)}{\pi} b_\infty \right] \sqrt{1+p}, \\ f'(0) &= \left[b_\infty \left(1 - \frac{S_2(p)}{\pi} \right) - a_\infty \frac{S_0(p)}{\pi} \right] \sqrt{1+p}. \quad (17.37)\end{aligned}$$

При малых p ($p \ll 1$) $S_0(p) = \sqrt{\pi p}$. Поэтому

$$\begin{aligned}a_\infty &= f(0) \left(1 - \frac{p}{2} \right), \\ b_\infty &= \left\{ f'(0) + \sqrt{\frac{p}{\pi}} f(0) \right\} \left(1 - \frac{p}{2} \right). \quad (17.38)\end{aligned}$$

Рассмотрим выражение для плотности нейтронов в изоляции вблизи границы с мультилиплицирующей средой. Формулу (17.21), определяющую $g(x)$, можно, очевидно, дифференцировать по x . Полагая в выражениях для $g(x)$ и $g'(x)$ $x = 0$, получим

$$g(0) = C + \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} \frac{e^{pw^2}}{q^2 - w^2} \frac{Aw + B}{w^2} \tau_-(w) dw,$$

$$g'(0) = Cq - \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} \frac{e^{pw^2}}{q^2 - w^2} \frac{Aw + B}{w} \tau_-(w) dw. \quad (17.39)$$

Мы должны приравнять эти величины соответственно $f(0)$ и $f'(0)$. Исключая из (17.39) C и выражая постоянные A и B согласно (17.34) через $f(0)$ и $f'(0)$, получим соотношение, связывающее $f(0)$ и $f'(0)$. Это соотношение можно представить в виде

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = s(q, p),$$

$$s(q, p) = \frac{q - \sigma_0 + \sigma_1(q - \frac{S_0}{\pi}) - \sigma_2 q \frac{S_0}{\pi}}{1 + \sigma_1 + \sigma_2 q}, \quad (17.40)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} \frac{e^{pw^2}}{q^2 - w^2} \tau_-(w) dw, \\ \sigma_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} \frac{e^{pw^2}}{q^2 - w^2} \tau_-(w) \frac{dw}{w}, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} \frac{e^{pw^2}}{q^2 - w^2} \tau_-(w) \frac{dw}{w^2}. \end{aligned} \quad (17.41)$$

Используя формулы (17.38), найдем отношение b_∞/a_∞ как функцию параметров q и p :

$$\frac{b_\infty}{a_\infty} = \frac{\frac{f'(0)}{f(0)} + \frac{S_0(p)}{\pi}}{1 - \frac{S_2(p)}{\pi} \left[\frac{f'(0)}{f(0)} + \frac{S_0(p)}{\pi} \right]} = \frac{s(q, p) + \frac{S_0(p)}{\pi}}{1 - \frac{S_0(p)S_2(p)}{\pi^2} - \frac{S_2(p)}{\pi} s(q, p)}. \quad (17.42)$$

Если $p \ll 1$, что соответствует длине замедления, малой по сравнению с диффузионной длиной в мультилиплицирующей среде ($p = \frac{1}{6} \frac{\rho^2}{L_+}$), то имеют место следующие приближенные формулы (с точностью до p^2):

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = q + \sqrt{\frac{p}{\pi}} + \left(\frac{3}{8\sqrt{\pi}} + \frac{C}{\sqrt{\pi}} \right) p^{3/2} + O(p^2),$$

$$\frac{b_\infty}{a_\infty} = q + 2\sqrt{\frac{p}{\pi}} + \frac{q}{2} p + \left(\frac{\frac{49}{24} - \frac{2}{3}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{1 - 2q^2}{4\pi} C \right) p^{3/2} + O(p^2), \quad (17.42')$$

где

$$C = 2 \int_0^\infty \left(1 - \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} \right) \frac{dt}{t^2} = 2,369.$$

В общем случае, когда p не мало по сравнению с единицей, величина b_∞/a_∞ может быть найдена для каждой пары значений p, q путем численного интегрирования. Приведем здесь некоторые значения b_∞/a_∞ . Так например, если $p = 1$ и $q = 0,5$, то $b_\infty/a_\infty = 0,23$.

Установим теперь граничные условия, о которых шла речь в начале этого параграфа. Мы исходим из диффузионного уравнения, справедливого вдали границы, но считаем это уравнение справедливым вплоть до самой границы. В таком случае мы должны, очевидно, потребовать, чтобы решение диффузионного уравнения вблизи границы имело такой же вид, как решение точного интегро-дифференциального уравнения вдали границы. Поведение точного решения вдали от границы мы только что установили и видели, что

$$N_+(x) = a_\infty + b_\infty \frac{x}{L_+}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (17.43)$$

Такой вид должно, следовательно, иметь решение диффузионного уравнения

$$\Delta N_+ + \frac{1}{\Lambda^2} N_+ = 0 \quad (17.44)$$

вблизи границы. Обратим внимание на то обстоятельство, что в излагаемом методе нет необходимости определять плотность нейтронов в слое изоляции: уравнение (17.44) и условие (17.43) касаются только плотности нейтронов в мультилиплицирующей среде. Необходимо, однако, иметь в виду, что приведенная

здесь теория определения b_∞/a_∞ применима только в том случае, если замедляющие свойства мультилицирующей среды и изоляции одинаковы.

Определим, пользуясь уравнением (17.44) и условием (17.43), критические размеры изолированного мультилицирующего шара. Обозначая $rN_+(r)$ через $\psi(r)$, перепишем (17.44) в виде

$$\psi''(r) + \frac{1}{\Lambda^2}\psi(r) = 0.$$

Откуда

$$\psi(r) = A \sin \frac{r}{\Lambda}, \quad N_+ = \frac{A}{r} \sin \frac{r}{\Lambda}. \quad (17.45)$$

При использовании граничного условия (17.43) следует иметь в виду, что оно получено в предположении плоской границы. В рассматриваемом теперь случае сферы мы должны сопоставить функции $f(x)$ произведение $N_+(r)$ на r , т.к. множитель $\frac{1}{r}$ в выражении для $N_+(r) = \frac{1}{r} \sin \frac{r}{\Lambda}$, связанный с кривизной поверхности, мы не должны, очевидно, раскладывать в ряд по степеням x . Поэтому граничное условие мы пишем в рассматриваемом случае в виде

$$\left[\frac{\frac{d}{dr}(rN_+)}{rN_+} \right]_{r=R} = -\frac{1}{L_i} \frac{b_\infty}{a_\infty}, \quad (17.46)$$

где R – радиус сферы, L_i – диффузационная длина в мультилицирующей среде. Используя (17.45), получим

$$\operatorname{ctg} \frac{R}{\Lambda} = -\frac{\Lambda}{L_i} \frac{b_\infty}{a_\infty}. \quad (17.46')$$

Это уравнение определяет критический радиус сферы R . Замечая, что

$$\Lambda = L \frac{\sqrt{1+p}}{\sqrt{K-1}},$$

перепишем (17.46') в виде

$$\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{1+p}}{\sqrt{K-1}} \frac{b_\infty}{a_\infty}, \quad x = \frac{R}{\Lambda}. \quad (17.46'')$$

Если $p \ll 1$, то согласно (17.42')

$$\frac{b_\infty}{a_\infty} = q + 2\sqrt{\frac{p}{\pi}},$$

и

$$\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{K-1}} \left(q + 2\sqrt{\frac{p}{\pi}} \right), \quad (17.47)$$

причем мы всюду пренебрегли членами, содержащими $p, p^{3/2}, \dots$

Проведем теперь расчет критического радиуса целиком, основываясь на диффузационной картине и считая длину замедления исчезающе малой, т.е. пренебрегая всеми высшими степенями p , начиная с первой. Уравнение для плотности нейтронов N_e в изоляции имеет вид

$$\Delta N_e - \frac{q^2}{L_i^2} N_e = 0.$$

Вводя функцию $\psi_e = rN_e$, получим

$$\psi_e'' - \frac{q^2}{L_i^2} \psi_e = 0. \quad (17.48)$$

На границе сферы мы требуем выполнения условий

$$\begin{aligned} \psi_e(R) &= \psi(R), \\ \psi_e'(R) &= \psi'(R) \end{aligned} \quad (17.48')$$

(коэффициенты диффузии мультилицирующей среды и изоляции предполагаются одинаковыми). Решение (17.48) имеет вид

$$\psi_e = B e^{-\frac{q}{L_i} r}.$$

Условия (17.48') приводят к следующему уравнению для определения $x = \frac{R}{\Lambda}$:

$$\operatorname{ctg} x = -\frac{q}{\sqrt{K-1}}. \quad (17.49)$$

Мы видим, что уравнение (17.47) отличается от (17.49) наличием в правой части члена $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{p}{K-1}}$. Поскольку q меньше единицы, этот член может быть большим по сравнению с $q/\sqrt{K-1}$. Поэтому корни уравнений (17.47), (17.49) могут сильно отличаться друг от друга.

Заметим, что корень уравнения (17.47) больше корня уравнения (17.49) (при одинаковых значениях параметров). Это значит, что, считая длину замедления исчезающе малой, мы получаем заниженные значения критических размеров.

Если $\sqrt{\frac{p}{K-1}} \ll 1$, то разность корней уравнений будет

$$\Delta x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin^2 x \sqrt{\frac{p}{\nu\varphi\theta - 1}},$$

которая соответствует разности критических радиусов ΔR , равная

$$\Delta R = \frac{2}{\sqrt{6\pi}} \sin^2 \frac{R}{\Lambda} \frac{\sqrt{p^2}}{\nu\varphi\theta - 1} = \frac{2}{\sqrt{6\pi}} \frac{\sqrt{p^2}}{\nu\varphi\theta - 1 + \alpha^2}.$$

§18. Общий приближенный метод определения критических размеров мультилицирующих систем (метод многих групп)

В §12 мы рассмотрели метод определения критических размеров неизолированных мультилицирующих систем произвольной формы, учитывающий конечность длины замедления нейтронов.

Этот метод основывался на том, что для неизолированных систем пространственное распределение тепловых и быстрых нейтронов имеет одинаковый вид. При наличии изоляции пространственные распределения тепловых и быстрых нейтронов не совпадают и поэтому задача становится гораздо более сложной. Если замедляющие свойства обеих сред (мультилицирующей системы и изоляции) одинаковы, то, как было показано в §17, могут быть установлены эффективные граничные условия, пользуясь которыми можно на основании диффузионного уравнения определять критические размеры.

В общем случае, когда замедляющие свойства обеих сред неодинаковы, определение эффективных граничных условий

представляет собой чрезвычайно сложную задачу. Может быть, однако, развит общий приближенный метод решения уравнений (11.24), (11.27), дающий возможность сравнивать просто и достаточно точно определять критические размеры в ряде случаев. Этот метод, применяемый также при решении ряда задач теплопроводности [5], состоит в замене дифференциального уравнения по отношению к переменной τ системой разностных уравнений. Условия применимости такой замены обсуждаются ниже.

Переходя к разъяснению этого метода, введем вместо функций $n_i(\mathbf{r}, \tau)$ и $n_e(\mathbf{r}, \tau)$ функции $n'_i(\mathbf{r}, \tau)$ и $n'_e(\mathbf{r}, \tau)$, определяемые следующим образом:

$$n_i(\mathbf{r}, \tau) = n'_i(\mathbf{r}, \tau) e^{-\int_0^\tau \alpha_i(\tau) d\tau},$$

$$n_e(\mathbf{r}, \tau) = n'_e(\mathbf{r}, \tau) e^{-a^2 \int_0^\tau \alpha_e(\tau) d\tau}. \quad (18.1)$$

Уравнения (11.24) запишутся тогда в виде

$$\frac{\partial n'_i}{\partial \tau} = \Delta n'_i, \quad \frac{1}{a^2} \frac{\partial n'_e}{\partial \tau} = \Delta n'_e. \quad (18.1')$$

Уравнения (11.27) для тепловых нейтронов приобретают вид:

$$\Delta N_i = \beta_i N_i - \tilde{\gamma}_i n'_i(\mathbf{r}, \tau_{t1}),$$

$$\Delta N_e = \beta_e N_e - \tilde{\gamma}_e n'_e(\mathbf{r}, \tau_{t2}), \quad (18.2)$$

где

$$\tilde{\gamma}_i = \gamma_i e^{-\int_0^{\tau_{t1}} \alpha_i d\tau}, \quad \tilde{\gamma}_e = \gamma_e e^{-a^2 \int_0^{\tau_{t2}} \alpha_e(\tau) d\tau}.$$

Начальное условие имеет вид

$$n'_i(\mathbf{r}, 0) = \varepsilon N_i(\mathbf{r}),$$

$$n'_e(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad (18.3)$$

и, наконец, граничные условия (на границе с изоляцией) мы запишем в виде (см. (11.29)–(11.31))

$$N_i = N_e, \quad n'_i = n'_e / c',$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \nu} = \frac{\partial N_e}{\partial \nu}/d_t, \quad \frac{\partial n_i}{\partial \nu} = \frac{\partial n_e}{\partial \nu}/d_f, \quad (18.4)$$

где

$$c' = ce^{-\int_0^{\tau} \alpha_i d\tau + a^2 \int_0^{\tau} \alpha_e d\tau},$$

$$d'_f = d_f e^{-\int_0^{\tau} \alpha_i d\tau + a^2 \int_0^{\tau} \alpha_e d\tau}.$$

(На границе изоляции с вакуумом функции n_2 и N_2 обращаются в нуль.) Заметим, что величины c и d_f суть функции энергии нейтрона.

Метод разностных уравнений, о котором мы говорили выше, состоит в том, что интервал изменения τ разбивается на s равных частей $h = \frac{\tau_T}{s}$ и производная $\frac{\partial n'}{\partial \tau}$ в точке $\tau = (k+1)h$ ($k = 0, 1, \dots, s-1$) заменяется на

$$\left(\frac{\partial n'}{\partial \tau} \right)_{\tau=(k+1)h} = \frac{n'[\mathbf{r}, (k+1)h] - n'[\mathbf{r}, kh]}{h}.$$

Мы получим таким образом взамен уравнений в частных производных систему уравнений для функций

$$n_k^{(i)}(\tau) = n_i'(\mathbf{r}, kh), \quad n_k^{(e)}(\mathbf{r}) = n_e'(\mathbf{r}, a^2 kh),$$

не содержащих переменной τ . Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} n_{k+1}^{(i)}(\mathbf{r}) - n_k^{(i)}(\mathbf{r}) &= h \Delta n_{k+1}^{(i)}, \\ n_{k+1}^{(e)}(\mathbf{r}) - n_k^{(e)}(\mathbf{r}) &= a^2 h \Delta n_{k+1}^{(e)}, \end{aligned} \quad (18.5)$$

где $k = 0, 1, \dots, s-1$. Начальное условие (18.3) принимает вид

$$\begin{aligned} n_0^{(i)}(\mathbf{r}) &= \epsilon N_i(\mathbf{r}), \\ n_0^{(e)}(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (18.5')$$

Поэтому уравнения (18.2) могут быть переписаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta n_0^{(i)} &= \beta_i n_0^{(i)} - \epsilon \tilde{\gamma}_1 n_s^{(i)}(\mathbf{r}), \\ \Delta N_e &= \beta_e N_e - \tilde{\gamma}_2 n_s^{(e)}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (18.6)$$

На границе с изоляцией имеют место граничные условия

$$n_k^{(i)} = n_k^{(e)}/c_k, \quad n_0^{(i)} = \frac{\nu \theta}{\tau_e^{(i)}} N_e,$$

$$\frac{\partial n_k^{(i)}}{\partial \nu} = \frac{\partial n_k^{(e)}}{\partial \nu}/d_k^{(f)}, \quad \frac{\partial n_0^{(i)}}{\partial \nu} = \frac{\nu \theta}{T_c^{(i)} d_t} \frac{\partial N_e}{\partial \nu}, \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad (18.7)$$

где индекс k при величинах c и $d^{(f)}$ указывает на то, что $\tau = kh$. ($T_c^{(i)}$ – время жизни теплового нейтрона в мультилиплицирующей среде.) Заметим, что если мультилиплицирующая система характеризуется определенной симметрией, то уравнения (18.5), (18.6) сводятся к обычновенным дифференциальным уравнениям. Исследование уравнений (18.5), (18.6) при произвольном s приводит к очень громоздким формулам даже для систем, имеющих простейшую форму (например, в случае шара). Для практических целей часто бывает, однако, достаточно считать $s = 1$. Поэтому мы сейчас подробнее рассмотрим случай, когда $s = 1$. Физически это означает, что наряду с тепловыми нейтронами $N(\mathbf{r})$ мы рассматриваем только одну группу замедляющихся нейтронов, а именно, нейтроны, для которых $\tau = \tau_T$. Считая s равным единице, мы получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta n_1^{(i)} &= \frac{n_1^{(i)} - n_0^{(i)}}{\tau_T}, \\ \Delta n_0^{(i)} &= \beta_i n_0^{(i)} - \epsilon \tilde{\gamma}_i n_1^{(i)}, \end{aligned} \quad (18.8)$$

$$\begin{aligned} \Delta n_1^{(e)} &= \frac{n_1^{(e)}}{a^2 \tau_T}, \\ \Delta N_e &= \beta_e N_e - \tilde{\gamma}_e n_1^{(e)}. \end{aligned} \quad (18.9)$$

Напомним, что

$$\begin{aligned} \beta_i &= \frac{1}{L_i^2}, \quad \epsilon \tilde{\gamma}_i = \frac{K}{L_i^2}, \quad \beta_e = \frac{1}{L_e^2}, \\ \tilde{\gamma}_e &= \frac{1}{D_t^{(e)}} e^{-a^2 \int_0^{\tau_T} \alpha_e(\tau) d\tau}. \end{aligned}$$

Исследуем эти уравнения в случае мультилицирующего шара, окруженного слоем бесконечной изоляции. Вводя новые функции

$$f_k(r) = rn_k^{(i)}(r), \quad q_k(r) = rn_k^{(e)}(r), \quad G = rN_e,$$

перепишем уравнения (18.9) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_0}{dr^2} &= \frac{1}{L_i^2} f_0 - \frac{K}{L_i^2} f_1, \\ \frac{d^2 f_1}{dr^2} &= \frac{1}{\tau_t} (f_1 - f_0), \\ \frac{d^2 q}{dr^2} &= \frac{1}{\tau_t} (f_1 - f_0), \\ \frac{d^2 G}{dr^2} &= \frac{1}{L_i^2} G - \tilde{\gamma}_e g_1. \end{aligned} \quad (18.10)$$

$$(18.11)$$

Из уравнений (18.10) легко исключить функцию f_1 . Для этого дважды продифференцируем первое из уравнений (18.10) по r :

$$f_0^{(IV)} = \frac{1}{L_i^2} f_0'' - \frac{K}{L_i^2} f_1''.$$

Из второго уравнения (18.10) в комбинации с первым следует, что

$$f_1'' = -\frac{1}{\tau_t K} [L_i^2 f_0'' + (K-1)f_0],$$

поэтому

$$f_1^{(IV)} - \left(\frac{1}{L_i^2} + \frac{1}{\tau_t} \right) f_0'' - \frac{K-1}{\tau_t L_i^2} f_0 = 0. \quad (18.10')$$

Так как функция n_0 всюду конечна, то функция $f_0(r)$ должна обращаться в нуль в точке $r = 0$. Поэтому мы ищем решение уравнения (18.10') в виде:

$$f_0 = a_1 \sin p_1 r + a_2 \operatorname{sh} p_2 r, \quad (18.12)$$

где a_1 и a_2 – некоторые константы, а p_1 и p_2 – корни характеристического уравнения

$$p^4 + \left(\frac{1}{\tau_t} + \frac{1}{L_i^2} \right) p^2 - \frac{K-1}{\tau_t L_i^2} = 0, \quad (18.12'')$$

откуда

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_t} + \frac{1}{L_i^2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\tau_t} + \frac{1}{L_i^2} \right)^2 + \frac{K-1}{\tau_t L_i^2}}}, \\ p_2 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_t} + \frac{1}{L_i^2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\tau_t} + \frac{1}{L_i^2} \right)^2 + \frac{K-1}{\tau_t L_i^2}}}. \end{aligned} \quad (18.12'')$$

Пользуясь первым из уравнений (18.10), определим теперь функцию $f_1(r)$:

$$\begin{aligned} f_1(r) &= (f_0 - L_i^2 f_0'') K^{-1} = \\ &= a_1 (1 - L_i^2 p_1^2) K^{-1} \sin p_1 r + a_2 (1 - p_2^2 L_i^2) K^{-1} \operatorname{sh} p_2 r. \end{aligned} \quad (18.13)$$

Найдем далее решение уравнений (18.11). Так как на бесконечности q_1 , должно обращаться в нуль, то

$$q_1 = A e^{-\frac{r}{\sqrt{a^2 \tau_t}}} \quad (18.14)$$

(A – константа). Мы видим, что поле нейтронов, замедлившихся до тепловых энергий в изоляции, представляется простой экспоненциальной функцией. При использовании точным уравнением

$$\frac{\partial n}{\partial r} = \Delta n$$

мы получили бы решение в виде Гауссовой функции

$$e^{-r^2/4\tau}.$$

Пусть в изоляции длина замедления нейтронов меньше, чем диффузационная длина тепловых нейтронов. Тогда пространственное распределение замедлившихся нейтронов не существенно для определения поля тепловых нейтронов. В этом

случае можно ожидать, что уже теория двух групп ($s = 1$) даст хорошие результаты.

Обращающееся в нуль на бесконечности решение второго уравнения (18.11) имеет вид:

$$G = C e^{-\frac{r}{L_e}} + \frac{a e^{-a^2 \int_0^{\tau_{te}} \alpha_e d\tau}}{(-\frac{1}{a^2 \tau_0} + L_e^{-2}) D_1^{(e)}} e^{-\frac{r}{\sqrt{a^2 \tau_r}}} \quad (18.15)$$

(C – константа). Запишем теперь граничные условия задачи.

$$f_1(R) = g_1(R),$$

$$f_0(R) = \frac{\nu \theta}{T_c^{(i)} d(f)} \cdot G(R),$$

$$\left(\frac{f_1}{r}\right)'_{r=R} = \frac{1}{d(f)} \left(\frac{q}{r}\right)'_{r=R},$$

$$\left(\frac{f_0}{r}\right)'_{r=R} = \frac{\nu \theta}{T_c^{(i)} d(i)} \left(\frac{G}{r}\right)'_{r=R}, \quad (18.16)$$

где R – радиус сферы и $d(f)$ – значение $d(f)$ в точке $\tau = \tau_t$. Подстановка сюда выражений (18.12), (18.14), (18.15) дает

$$a_1(1 + p_1^2 L_i^2) \sin p_1 R + a_2(1 - p_2^2 L_i^2) \operatorname{sh} p_2 R = A K e^{-\frac{R}{\sqrt{a^2 \tau_r}}},$$

$$a_1 \sin p_1 R + a_2 \operatorname{sh} p_2 R = \frac{\nu \theta}{T_c^{(i)}} \left(C e^{-\frac{R}{L_e}} + \frac{a e^{-a^2 \int_0^{\tau_{te}} \alpha_e d\tau}}{(L_e^{-2} - \frac{1}{a^2 \tau_r}) D^{(e)}} e^{-\frac{R}{\sqrt{a^2 \tau_r}}} \right),$$

$$a_1(1 + p_1^2 L_i^2)(p_1 \cos p_1 R - \frac{1}{R} \sin p_1 R) + a_2(1 - p_2^2 L_i^2)(p_2 \operatorname{ch} p_2 R - \frac{1}{R} \operatorname{sh} p_2 R) = -\frac{A K}{d(f)} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 \tau_r}} + \frac{1}{R} \right) e^{-\frac{R}{\sqrt{a^2 \tau_r}}},$$

$$a_1(p_1 \cos p_1 R - \frac{1}{R} \sin p_1 R) + a_2(p_2 \operatorname{ch} p_2 R - \frac{1}{R} \operatorname{sh} p_2 R) =$$

$$= -\frac{\nu \theta}{T_c^{(i)} d(f)} \left\{ C \left(\frac{1}{L_e} + \frac{1}{R} \right) e^{-R/L_e} + \frac{A e^{-a^2 \int_0^{\tau_{te}} \alpha_e d\tau}}{(L_e^{-2} - \frac{1}{a^2 \tau_r}) D^{(e)}} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 \tau_r}} + \frac{1}{R} \right) e^{-\frac{R}{\sqrt{a^2 \tau_r}}} \right\}.$$

Мы получили однородную систему четырех линейных уравнений относительно постоянных a_1, a_2, A, C . Приравняв нулю определитель этой системы, получим трансцендентное уравнение для определения радиуса R .

В том случае, когда рассеивающие и замедляющие свойства изоляции и замедлителя одинаковы, это трансцендентное уравнение можно привести к следующему простому виду:

$$p_1 R = \pi - \delta,$$

$$\delta = \operatorname{arctg} p_1 L_e + \operatorname{arctg} p_1 a \sqrt{\tau_r} - \operatorname{arctg} \frac{p_2}{p_1}. \quad (18.17)$$

Если s отлично от единицы, то мы получим следующую систему уравнений для функции $f_m(r)$:

$$\frac{d^2 f_0}{dr^2} = \frac{1}{L_i^2} f_0 - \frac{K}{L_i^2} f_s, \\ \frac{d^2 f_{m+1}}{dr^2} = \frac{1}{h} (f_{m+1} - f_m), \quad (18.18) \\ m = 0, 1, 2, \dots, s-1.$$

Решение этой системы следует искать в виде

$$f_m(r) = \sum_j a_{m,j} \sin P_j r, \quad m = 0, 1, \dots, s, \quad (18.19)$$

где $a_{m,j}$ и P_j – некоторые постоянные. Подставляя (18.19) в (18.18), получим:

$$a_{m+1,j} - a_{m,j} = -h P_j^2 a_{m+1,j},$$

$$-P_j^2 a_{0,j} = \frac{1}{L_i^2} a_{0,j} - \frac{K}{L_i^2} a_{s,j}. \quad (18.20)$$

Первое из этих уравнений дает

$$a_{m+1,j} = a_{m,j} \frac{1}{1 + hP_i^2} = a_{m-1,j} \frac{1}{(1 + hP_j^2)^2} = \dots = a_{0,j} \frac{1}{(1 + hP_j^2)^{m+1}}.$$

Полагая здесь $m = s - 1$, получим

$$a_{s,j} = a_{0,j} \frac{1}{(1 + hP_j^2)^s}. \quad (18.21)$$

Подставляя (18.21) во второе уравнение (18.20), получим следующее уравнение для определения p_j :

$$-P_j^2 = \frac{1}{L_i^2} - \frac{K}{L_i^2} \frac{1}{(1 + hP_j^2)^s}. \quad (18.22)$$

Вводя вместо P_j^2 переменную $Z_j = (1 + hP_j^2)^{-1}$, перепишем (18.22) в виде:

$$KZ_j^{s+1} + \left(\frac{L_i^2}{h} - 1 \right) Z_j - \frac{L_i^2}{h} = 0. \quad (18.23)$$

Это уравнение имеет $s + 1$ корней. Поэтому число слагаемых в (18.19) также равно $s + 1$. Пользуясь формулой (18.21), мы можем представить $f_m(r)$ в виде

$$f_m(r) = \sum_{j=0}^s a_{0,j} \frac{\sin P_j r}{(1 + hP_j^2)^m}. \quad (18.24)$$

Заметим, что если устремить s к бесконечности, а $h = \frac{r_t}{s}$ к нулю, то уравнение (18.22) перейдет в

$$-P^2 = \frac{1}{L_i^2} - \frac{K}{L_i^2} e^{-P^2 r_t}. \quad (18.25)$$

С этим транцендентным уравнением мы уже встречались в §12, рассматривая критические размеры неизолированных систем. Приведем еще без вывода выражения для функции $g_k(r)$ и $G(r)$. Функция $g_m(r)$ может быть представлена в виде

$$g_m(r) = \sum_{j=1}^m b_j \psi_{m,j}(r),$$

где

$$\psi_{m,j} = e^{-r \frac{r}{\sqrt{a^2 h}}} \frac{j}{4m-j} \sum_{l=0}^{m-j} \frac{\sigma_{m-l-j}(l)}{l!} \left(\frac{2r}{\sqrt{a^2 h}} \right)^l, \quad (18.26)$$

а константы σ определяются следующим образом:

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_1(l) = l, \quad \sigma_2(l) = \sum_{j=0}^{l-1} (j+2), \quad \sigma_3(l) = \sum_{j=1}^l \sigma_2(j+1),$$

и вообще

$$\sigma_k(l) = \sum_{j=1}^l \sigma_{k-1}(j+1).$$

Функция $G(r)$ определяется формулой

$$G(r) = Be^{-\frac{r}{L_e}} + \sum_{j=1}^s b_j. \quad (18.26')$$

Итак, мы видим, что функции $f_k(r)$, $g_k(r)$ и $G(r)$ содержат всего $2s + 2$ произвольных постоянных ($a_{0,j}$, b_j , B). Воспользовавшись граничными условиями (18.7), мы получим точно $2s + 2$ линейных однородных уравнения, связывающих эти постоянные. Приравняв нулю определитель этой системы, получим транцендентное уравнение для определения критических размеров шара. Аналогичным образом можно находить критические размеры систем, имеющих другую форму.

§19. Критерии применимости метода многих групп

Можно указать некоторые общие критерии применимости указанного выше метода. Будем для определенности иметь в виду случай $s = 1$, когда все быстрые нейтроны объединены в

одну группу. Приближенный метод состоит в том, что предполагается

$$\left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_{\tau_\tau} \cong \frac{n(\tau_\tau) - n(0)}{\tau_\tau},$$

или

$$n(0) \cong n(\tau_\tau) - \tau_\tau \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_{\tau_\tau}.$$

Это есть разложение в ряд $n(0)$ около точки $\tau = \tau_\tau$. Отбрасывание остальных членов законно, если:

$$\left| \frac{\partial n}{\partial \tau_\tau} \right| \gg \frac{\tau_\tau}{2} \left| \frac{\partial^2 n}{\partial \tau_\tau^2} \right|.$$

Но, дифференцируя уравнение $\Delta n = \frac{\partial n}{\partial \tau}$ по τ , получим

$$\frac{\partial^2 n}{\partial \tau_\tau^2} = \Delta \Delta n(\tau_\tau),$$

и, следовательно для применимости приближенного метода необходимо выполнение условия

$$\frac{\tau_\tau}{2} (\Delta \Delta n) \ll |\Delta n|. \quad (19.1)$$

Если положить $|\Delta n| = \alpha^2 n$, то должно быть:

$$\frac{\tau_\tau \alpha^2}{2} \ll 1. \quad (19.2)$$

Внутри реактора плотность нейтрона существенно меняется на протяжении его размеров, поэтому можно считать, что

$$\alpha \sim \frac{1}{R},$$

где R размер реактора (в случае сферы ее радиус). Условие (19.2) приводит к неравенству

$$\tau_\tau \ll \frac{2R^2}{\pi^2}. \quad (19.3)$$

Это условие выполняется для практически интересных случаев.

Таким образом внутри реактора приближение оказывается удовлетворительным уже при $s = 1$.

В изоляции условие (19.1) не выполняется. Переход к приближенным уравнениям означает замену Гауссова распределения плотности замедляющихся нейtronов

$$e^{-\frac{r^2}{4\tau}}$$

на экспоненциальное

$$e^{-\frac{r}{\sqrt{\tau}}}.$$

Однако, если диффузационная длина тепловых нейтронов в изоляции значительно больше длины замедления, то поле тепловых нейтронов не сильно изменится при такой замене.

Расчеты показывают, что критерий применимости приближенного метода заключения при этом в следующем:

$$\left(\frac{\tau_\tau}{L^2} \right)^2 \ll 1. \quad (19.4)$$

Для графитовой изоляции это условие выполняется. В том случае, когда граничные условия, т.е. коэффициенты c, d_f в формулах (18.7) зависят от энергии (например для дейтонного реактора с графитовым отражателем) необходимо добавить к условиям (19.3) и (19.1) еще одно.

Именно, граничные условия (коэффициенты c и d_f) не должны сильно изменяться при изменении τ в интервале

$$kh < \tau < (k+1)h.$$

При $s = 1$ это условие выполняется плохо. Для того, чтобы улучшить результаты, можно произвести усреднение граничных условий по интервалу изменения τ . Вместо того, чтобы считать ($s = 1$)

$$d^{(f)} = d^{(f)}(\tau_\tau),$$

можно ввести коэффициент:

$$d_{\text{зФ}}^{(f)} = \frac{1}{\tau_\tau} \int_0^{\tau_\tau} d^{(f)}(\tau) d\tau.$$

Расчеты показывают, что при этом улучшается сходимость метода последовательных приближений, т.е. разница между критическими объемами, полученными при $s = 1$ и $s = 2$, становится незначительной.

§20. Пример определения критических размеров при реакции на быстрых нейтронах

Рассмотрим сферу, состоящую из вещества, способного делиться без участия тепловых нейтронов. Ради простоты будем считать, что изоляция отсутствует. Определим критические размеры сферы.

Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что критические размеры могут оказаться сравнимыми с длиной свободного пробега нейтронов. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, при реакциях на быстрых нейтронах нет необходимости замедлять нейтроны, и во-вторых, в рассматриваемом случае величина $K = \nu\phi\theta$ может быть гораздо больше, чем в случае систем, работающих на медленных нейтронах⁹.

Если размеры системы велики по сравнению с длиной свободного пробега нейтронов, то для описания цепной реакции можно пользоваться диффузационной картиной; в этом случае плотность нейтронов удовлетворяет диффузационному уравнению. Если размеры системы сравнимы с длиной свободного пробега, то диффузационная теория неприменима. В этом случае следует исходить из точного кинетического уравнения для функции распределения нейтронов. Решение кинетического уравнения представляет собой чрезвычайно сложную задачу, т.к. мы должны учитывать зависимость эффективных сечений деления и неупротого рассеяния от энергии нейтронов, энергетический спектр неупротого рассеяния нейтронов и т.д. Для получения полукачественных результатов мы сделаем следующие упрощающие предположения:

1. Длина свободного пробега нейтрона l (с учетом возможности деления, радиационного захвата и рассеяния) не зависит от энергии нейтрона. Иными словами, не зависит от энергии величина:

⁹Напомним, что критические размеры (линейные) обратно пропорциональны $(K - 1)^{1/2}$.

$$\alpha = \frac{1}{l} = N(\sigma_f + \sigma_r + \sigma_s),$$

где $\sigma_f, \sigma_r, \sigma_s$ – соответственно сечения деления, радиационного захвата и рассеяния нейтронов, N – число ядер в единице объема.

2. Не зависит от энергии величина:

$$\beta = (\sigma_s + \nu\sigma_f)N,$$

где ν – число нейтронов, возникающих при одном акте деления ядра.

3. Все рождающиеся нейтроны имеют одинаковую энергию.

4. Отсутствует неупротое рассеяние нейтронов.

5. Упротое рассеяние нейтронов является сферически симметричным.

При выполнении этих предположений вместо функции распределения, зависящей как от координат, так и от компонент скорости нейтрона, для описания нейтронного поля можно пользоваться обычной плотностью нейтронов. Обозначим последнюю в точке (x, y, z) в момент времени t через $n(x, y, z, t)$. Общее число рассеянных и рождающихся вторичных нейтронов в элементе объема $dx'dy'dz'$ за время dt' равно

$$\beta v n(x', y', z', t') dx' dy' dz' dt',$$

где v – скорость нейтронов. Будем следить за движением этих нейтронов. На расстоянии R от точки (x', y', z') их число уменьшится в $e^{-\alpha R}$ раз. Они будут равномерно заполнять сферический слой радиуса R и толщины $v dt'$. Плотность нейтронов в точке (x, y, z) этого слоя в момент времени $t = t' + R/v$ будет равна

$$\frac{\beta}{4\pi R^2} n(x', y', z', t') e^{-\alpha R} dx' dy' dz', \quad t' = t - \frac{R}{v}.$$

Проинтегрировав это выражение по x', y', z' , мы получим очевидно, плотность в точке (x, y, z) в момент t , т.е. величину $n(x, y, z, t)$. Итак,

$$n(x, y, z, t) = \frac{\beta}{4\pi} \int n(x', y', z', t - \frac{R}{v}) \frac{e^{-\alpha R}}{R^2} dx' dy' dz', \quad (20.1)$$

где интегрирование совершаются по объему тела. Мы получили интегральное уравнение для плотности нейтронов $n(x, y, z, t)$, которое заменяет общее кинетическое уравнение при сделанных выше предположениях.

Перейдем к исследованию этого уравнения. Будем искать решение (20.1) в виде

$$n(x, y, z, t) = e^{\lambda t} n(x, y, z). \quad (20.2)$$

Развитию цепной реакции отвечают, очевидно, значения $\lambda > 0$. Уравнение (20.1) после подстановки (20.2) приобретает вид

$$n(x, y, z) = \frac{\beta}{4\pi} \int n(x', y', z') e^{-(\alpha + \frac{\lambda}{v})R} \frac{dx' dy' dz'}{R^2}.$$

Если система имеет критические размеры, то $\lambda = 0$. Определение критических размеров сводится поэтому к следующей математической задаче. Требуется выяснить, при каких условиях уравнение

$$n(x, y, z) = \frac{\beta}{4\pi} \int n(x', y', z') e^{-\alpha R} \frac{dx' dy' dz'}{R^2} \quad (20.3)$$

имеет нетривиальное решение. Мы рассмотрим тот случай, когда мультилицирующая система имеет форму шара, и покажем, что нетривиальное решение имеет место только при определенном критическом радиусе сферы. Заметим, что найдя решение уравнения (20.3), мы тем самым находим решение общего уравнения (20.1), стоит лишь вместо α подставить $\alpha + \lambda/v$. Очевидно, что для развития цепной реакции необходимо выполнение условия

$$\beta > \alpha. \quad (20.4)$$

Если $\beta - \alpha \ll \beta$, то требуется много столкновений для существенного возрастания числа нейтронов. Поэтому в этом случае возможно диффузионное рассмотрение задачи. Плотность нейтронов при выполнении условия $\beta - \alpha \ll \beta$ испытывает малое изменение на расстояниях порядка длины свободного пробега. Поэтому функцию $n(x', y', z')$ в интеграле (20.3) можно разложить в ряд по степеням $x' - x, y' - y, z' - z$ и сохранить в нем члены не выше второго порядка. Вдали от границы члены первого порядка при интегрировании по $dx' dy' dz'$ дают нуль, и мы приходим к диффузионному уравнению

$$\frac{\beta}{3\alpha^3} \Delta n + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) n = 0. \quad (20.5)$$

Для решения уравнения (20.5) нужно знать граничное условие на внешней поверхности мультилицирующей системы. Можно показать (см. §35), что это условие имеет вид

$$0,71 l \frac{\partial n}{\partial \nu} + n = 0, \quad (20.6)$$

где ν – направление внешней нормали к поверхности тела. Для больших систем $\frac{\partial n}{\partial \nu} \approx \frac{n}{R}$, где R по порядку величины характеризует линейные размеры системы. Так как в рассматриваемом нами случае, когда $\beta - \alpha \ll \beta$, размеры системы значительно превосходят длину свободного пробега, то при этом первый член в (20.6) представляет собой малую поправку и граничное условие (20.6) практически сводится к тому, что плотность нейтронов на границе равна нулю:

$$n = 0. \quad (20.6')$$

Возвращаясь к уравнению (20.5), найдем его решение в случае мультилицирующей сферы. Сферически симметричное решение (20.5) имеет вид

$$n(r) = \text{const} \frac{\sin kr}{r},$$

где r – расстояние до центра сферы, и

$$k = \sqrt{3\alpha^2(1 - \frac{\alpha}{\beta})}. \quad (20.7)$$

Если исходить из граничного условия (20.6), то критический радиус R найдется из уравнения

$$\sin kr = 0,$$

откуда¹⁰

$$R = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{3(1 - \alpha/\beta)}}. \quad (20.8)$$

¹⁰Плотность нейтронов является существенно положительной величиной, поэтому мы должны взять наименьший (не считая нуля) корень уравнения $\sin x = 0$.

Так как по условию $1 - \alpha/\beta \ll 1$, то из (20.8) следует, что критический радиус значительно больше длины пробега l , как это и утверждалось выше. Использование точного граничного условия (20.6) приводит к следующему уравнению для определения величины R :

$$kR \operatorname{ctg} kR = 1 - \frac{\alpha R}{0,71}. \quad (20.9)$$

Обозначая $1 - \alpha/\beta$ через ξ^2 и пренебрегая при малых ξ степенями ξ выше второй, получим из (20.9)

$$\frac{1}{\beta R} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \xi + 0,71 \frac{3}{\pi^2} \xi^2 = 0,55\xi + 0,22\xi^2. \quad (20.9')$$

Рассмотрим теперь другой предельный случай – случай больших мультиPLICATIONий, когда $\beta \gg \alpha$. Заметим, что этот случай является полностью фиктивным и практически не осуществляется, т.к. для выполнения условия $\beta \gg \alpha$ необходимо, чтобы ν было значительно больше единицы. Тем не менее, рассмотрение этого случая представляет интерес, так как при этом критические размеры получаются малыми по сравнению с длиной свободного пробега l . Зная зависимость R от эффективных сечений в предельных случаях $R \ll l$ и $R \gg l$, можно путем интерполяции найти R в промежуточной области $R \sim l$, для которой непосредственное вычисление критических размеров очень затруднительно.

При выполнении условия $\beta \gg \alpha$ можно пренебречь показателем в множителе $e^{\alpha R}$, т.к. оказывается, что радиус сферы значительно меньше длины свободного пробега. Итак, при $\beta \gg \alpha$ мы получаем из (20.3) уравнение

$$n(x, y, z) = \frac{\beta}{4\pi} \int n(x', y', z') \frac{dx' dy' dz'}{R^2}. \quad (20.10)$$

Выполнив здесь интегрирование по углам, получим:

$$n(r) = \frac{\beta}{2} \int_0^R \frac{r'}{r} n(r') \ln \frac{r+r'}{r-r'} dr'. \quad (20.11)$$

Вводя вместо $n(r)$ функцию $rn(r) = f(r)$ и обозначая $\frac{r}{R}$ через x , перепишем (20.11) в виде

$$\frac{2}{\beta R} f(x) = \int_0^1 f(x') \ln \frac{x+x'}{x-x'} dx', \quad f(0) = 0, \quad (20.12)$$

или, иначе,

$$lf = \check{L}f, \quad f(0) = 0, \quad (20.12')$$

где $l = \frac{2}{\beta R}$ и \check{L} – интегральный оператор, входящий в (20.12). Мы получили интегральное уравнение обычного типа с симметричным ядром. Нас интересует наибольшее собственное значение l этого уравнения. Чтобы приближенно вычислить наибольшее собственное значение l , которое мы обозначим через l_0 , будем исходить из следующего свойства l_0 . Пусть f – некоторая функция, не принимающая отрицательных значений, и отличающаяся тем, что отношение $\check{L}f/f$ ограничено. Тогда, если $\check{L}f/f$ заключено в пределах Λ_1 и Λ_2 ,

$$\Lambda_1 < \frac{\check{L}f}{f} < \Lambda_2,$$

то в этих же пределах находится также наибольшее собственное значение

$$\Lambda_1 < l_0 < \Lambda_2.$$

Отсюда следует, что если нам удастся подобрать такую функцию $f(x)$ (не принимающую отрицательных значений), для которой величины Λ_1 и Λ_2 будут мало отличаться друг от друга, то тем самым мы найдем с большой степенью точности l_0 . В качестве $f(x)$ мы возьмем функцию

$$f(x) = x - bx^3, \quad (20.13)$$

где b – постоянная, которую мы надлежащим образом подберем. Легко видеть, что

$$\check{L}f = \frac{1}{2}(1-x^2) \ln \frac{1+x}{1-x} + x - b \left\{ \frac{1}{4}(1-x^2) \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x \right\}.$$

Если $b = 0$, то $\frac{\check{L}f}{f}$ изменяется от 1 до 2, причем эти значения достигаются в точках $x = 1$ и $x = 0$. Мы подберем b таким

образом, чтобы на границах интервала $(0,1)$ функция $f(x)$ принимала одинаковые значения. Для этого b должно равняться $b = 0,639$. Оказывается, что если взять функцию (20.13) с этим значением b , то

$$\Lambda_1 = 1,55, \quad \Lambda_2 = 1,59.$$

Отсюда следует, что $l_0 = 1,57 \pm 0,02$. Итак, при $\beta \gg \alpha$ критический радиус R равен

$$R = \frac{2}{1,57\beta} = \frac{1}{0,78\beta}.$$

Мы видим, что в случае больших мультиликаций, когда $\beta \gg \alpha$, критические размеры оказываются меньшими длины свободного пробега.

Для промежуточных значений отношения β/α критические размеры могут быть найдены интерполяцией.

ГЛАВА III

РЕЗОНАНСНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ

§21. Основное интегральное уравнение

В мультилицирующих системах, которые мы изучали в предыдущей главе, быстрые нейтроны, рождающиеся при делении ядер, замедляются до тепловых скоростей, т.к. в этих системах тепловые нейтроны наиболее эффективно вызывают дальнейшие акты деления ядер.

В процессе замедления, вне тепловой области, возможно, однако, резонансное поглощение нейтронов, не приводящее к делению ядер и препятствующее поэтому протеканию цепной реакции.

Изучению резонансного поглощения посвящена настоящая глава.

В важном практическом случае, когда мультилицирующая система представляет собой смесь урана и одного или нескольких замедлителей, резонансное поглощение нейтронов, не приводящее к делению, обусловлено, главным образом, ядрами основного изотопа урана и имеет место при энергиях нейтронов порядка нескольких десятков или сотен вольт.

Только проскочив эту опасную энергетическую зону, нейтроны в конце концов превращаются в тепловые и приобретают возможность сильно взаимодействовать с ядрами изотопа U^{235} , благодаря возрастанию эффективного сечения по закону $1/v$.

Рассмотрим сперва систему, представляющую собой однородную смесь элемента, ядра которого способны резонансно поглощать нейтроны, и замедлителя, поглощением в котором можно пренебречь.

Мы предполагаем, что нейtronное поле можно считать в достаточной степени однородным.

Это предположение об однородности или, вернее говоря, квази-однородности¹¹ нейтронного поля дает основания пользоваться диффузионным рассмотрением. Мы видели, что в

¹¹в том смысле, что изменение поля нейтронов происходит на расстояниях, которые можно считать большими по сравнению с длиной замедления.

в этом случае резонансное поглощение может быть учтено введением величины φ – вероятности того, что быстрый нейтрон дойдет до тепловой области, не будучи резонансно захваченным ни на один из уровней ядер захватывающего элемента. Именно эта величина входит в интегральное уравнение для тепловых нейтронов.

Наша задача состоит в выяснении тех факторов, от которых зависит φ .

Рассмотрим нейтрон с некоторой энергией E . Нас интересует вероятность того, что такой нейтрон достигнет тепловой области, не будучи захваченным ни на один из резонансных уровней захватывающих ядер. В силу сделанного предположения об однородности нейтронного поля искомая вероятность зависит только от энергии нейтрона. Обозначим ее через $\varphi(E)$. Величина φ , входящая в интегральное уравнение (9.9), представляет собой, очевидно, значение функции $\varphi(E)$ при $E = E_0$, где E_0 – энергия, с которой рождаются при делении нейтроны. Эта энергия значительно больше тех энергий нейтрона, при которых главным образом происходит резонансное поглощение. Поэтому можно считать, что φ равно $\varphi(\infty)$. Мы выведем здесь прежде всего общее интегральное уравнение, которому удовлетворяет функция $\varphi(E)$.

Обозначим через $\sigma_c(E)$ эффективное сечение захвата нейтрона с энергией E ядром захватывающего элемента; пусть далее σ_s^α – сечение рассеяния нейтрона ядрами сорта α . Обозначим относительные концентрации захватывающего элемента и различных рассеивателей соответственно через C и C_α . Эти величины связаны соотношением

$$C + \sum_\alpha C_\alpha = 1.$$

Введем в рассмотрение нормированную вероятность того, что нейтрон с энергией E захватывается в ближайшем столкновении; обозначим ее через $W_c(E)$. Она равна, очевидно,

$$W_c(E) = \frac{C\sigma_c(E)}{C\sigma_c(E) + \sum_i C_i \sigma_s^i}, \quad (21.1)$$

где суммирование распространяется на все сорта ядер, включая ядра поглощающего элемента. (Условимся в дальнейшем использовать при суммировании индекс i , если суммирование

распространяется на все сорта ядер, включая и ядра поглощающего элемента; индекс же α будем относить только к ядрам рассеивателей.)

Нормированная вероятность рассеяния нейтрона с энергией E ядром сорта i (в ближайшем столкновении)

$$W_i(E) = \frac{C_i \sigma_s^i}{\sum_i C_i \sigma_s^i + C \sigma_c(E)}. \quad (21.2)$$

Напомним, что в результате упругого столкновения нейтрона с ядром сорта i энергия нейтрона будет находиться в пределах от $\varepsilon_i E$ до E , где

$$\varepsilon_i = \left(\frac{M_i - 1}{M_i + 1} \right)^2$$

(M_i – отношение массы ядра i -сорта к массе нейтрона).

Мы будем считать, что все значения энергии в этих пределах равновероятны.

Вероятность того, что ближайшее столкновение нейтрона, имеющего энергию E , происходит с ядром сорта i , причем в результате столкновения энергия нейтрона лежит в интервале $(u, u + du)$, равна, очевидно,

$$\frac{C_i \sigma_s^i}{\sum_i C_i \sigma_s^i + C \sigma_c(E)} \frac{1}{1 - \varepsilon_i} \frac{du}{E}. \quad (21.3)$$

Умножив (21.3) на $\varphi(u)$, мы найдем вероятность того, что нейтрон, испытав рассматриваемое столкновение и имея энергию, равную u , дойдет, не будучи резонансно захваченным, до тепловой области. Проинтегрировав далее это произведение по du в пределах $\varepsilon_i E$, E и просуммировав результат по всем сортам ядер i , получим искомую вероятность $\varphi(E)$, т.е. вероятность того, что нейтрон, имевший энергию E , замедлится в результате одного соударения, не подвернувшись захвату в резонансной области. Итак, $\varphi(E)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\varphi(E) = \sum_i \frac{C_i \sigma_s^i}{\sum_j C_j \sigma_s^j + C \sigma_c(E)} \frac{1}{1 - \varepsilon_i} \frac{1}{E} \int_{\varepsilon_i E}^E \varphi(u) du. \quad (21.4)$$

Основная задача, которой мы будем заниматься, состоит в изучении асимптотического поведения функции $\varphi(E)$ при больших E . Мы покажем, что существует конечное предельное значение функции $\varphi(E)$ при $E \rightarrow \infty$, и выясним, как определять этот предел.

§22. Резонансное поглощение в однородной системе с замедлителем, содержащим водород

Переходя к исследованию уравнения (21.4), рассмотрим сперва тот случай, когда в числе элементов, входящих в состав замедляющей компоненты, имеется водород (например, в замедлителях типа H_2O , CH_2 и т.д.).

В этом случае, как будет сейчас показано, уравнение (21.4) значительно упрощается. Так как большинство результатов, полученных при рассмотрении водородного замедлителя, применимо также к случаю неводородного замедлителя (§24), мы рассмотрим подробно случай водорода. Предположим, что концентрации водорода и других замедлителей таковы, что сумма $\sum_{\alpha} \sigma_s^{\alpha} C_{\alpha}$, распространенная на все сорта замедляющих ядер, кроме водорода, значительно меньше или, по крайней мере, того же порядка величины, что и $\sigma_s^H C_H$. Принимая во внимание это предположение, сводящееся по существу к тому, что слагаемое $\alpha = H$ (водородный замедлитель) играет главную роль в общей сумме ($\sum_{\alpha} \sigma_s^{\alpha} C_{\alpha}$), и замечая, что для тяжелых замедлителей выполняется неравенство $1 - \varepsilon_{\alpha} \ll 1$, $\alpha \neq H$, $\varepsilon_H = 0$, можно в первом приближении положить в (21.4) (в дальнейшем мы рассматриваем общий случай смеси нескольких рассеивателей, для которых ε не близко к единице):

$$\frac{1}{E} \int_{\varepsilon_{\alpha} E}^E \varphi(u) du \cong (1 - \varepsilon_{\alpha}) \varphi(E), \quad \alpha \neq H. \quad (22.1)$$

Уравнение (21.4) приобретает при этом следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi(E) &= \frac{C_H \sigma_s^H}{\sum_j C_j \sigma_s^j + C \sigma_c(E)} \frac{1}{E} \int_0^E \varphi(u) du + \\ &+ \sum_i' \frac{C_i \sigma_s^i}{\sum_j C_j \sigma_s^j + C \sigma_c(E)} \varphi(E), \end{aligned} \quad (22.2)$$

откуда

$$\varphi(E) = \frac{C_H \sigma_s^H}{C_H \sigma_s^H + C \sigma_c(E)} \frac{1}{E} \int_0^E \varphi(u) du$$

(символ $'$ у суммы по i в (22.2) означает, что в сумме не содержится член с $\alpha = H$).

Мы получили уравнение, соответствующее тому случаю, когда в качестве замедлителя применяется только один водород. Все члены в сумме (21.4), относящиеся к более тяжелым рассеивателям, в уравнение (22.2) вовсе не входят. Это вполне понятно, так как сделанное нами предположение означает, что замедлением, вызываемым всеми сортами ядер, кроме водорода, мы пренебрегаем.

Перейдем к исследованию уравнения (22.2). Введем обозначения

$$W(E) = \frac{\sigma_c(E)}{\sigma_c(E) + \frac{C_H}{C} \sigma_s^H}, \quad (22.3)$$

$$\Psi(E) = \int_0^E \varphi(u) du. \quad (22.4)$$

Уравнение (22.2) может быть переписано в виде

$$\frac{\Psi'(E)}{\Psi(E)} = \frac{1 - W(E)}{E}, \quad (22.5)$$

откуда

$$\Psi(E) = e^{\int \frac{1 - W(E)}{E} dE}$$

и

$$\varphi(E) = \Psi'(E) = [1 - W(E)]e^{-\int\limits_b^E W(u) \frac{du}{u}}. \quad (22.6)$$

Для определения постоянной b заметим, что при $E \rightarrow 0$ функция $\varphi(E)$ по самому смыслу ее определения должна считаться равной единице. Мы предположим, что $\sigma_c(E)$ определено таким образом, что в тепловой области $\sigma_c(E)_{E \rightarrow 0} = 0$. Такое определение соответствует тому, что нас интересует здесь только резонансный захват нейтронов, а не их поглощение в тепловой области. Итак, мы можем считать $W(0) = 0$. Отсюда следует, что b должно равняться нулю.

Функция $\varphi(E)$ имеет, следовательно, вид

$$\varphi(E) = [1 - W(E)]e^{-\int\limits_0^E W(u) \frac{du}{u}}. \quad (22.7)$$

Интересующая нас величина $\varphi = \varphi(\infty)$ равна

$$\varphi(\infty) = e^{-\int\limits_0^\infty W(u) \frac{du}{u}}. \quad (22.8)$$

(Заметим, что $W(\infty) = 0$, поэтому интеграл, входящий в (22.8), существует.)

Переходя к рассмотрению показателя в выражении для φ выясним сперва, какой вид имеет функция $W(E)$.

Предположим, что резонансные уровни, ответственные за захват нейтронов, расположены достаточно далеко друг от друга, так что эффект интерференции уровней не играет существенной роли. Ниже мы уточним условия, при которых выполняется это предположение.

В этом случае показатель в формуле (22.8) можно представить в виде суммы членов, каждый из которых относится к отдельному резонансному уровню, т.е.

$$-\ln \varphi = \int\limits_0^\infty W(u) \frac{du}{u} = \sum_i \int\limits_0^\infty W_c^i(E) \frac{dE}{E}, \quad (22.9)$$

где

$$W_c^i(E) = \frac{\sigma_c^i(E)}{\sigma_c^i(E) + p\sigma_s^H}, \quad p = \frac{C_H}{C} \quad (22.9')$$

$(\sigma_c^i(E))$ представляет собой сечение захвата нейтрона, обусловленного существованием i -го резонансного уровня с энергией E_i , σ_s^H - сечение рассеяния нейтрона ядрами водорода). Обозначим область энергии вблизи E_i , играющую существенную роль в интеграле $\int\limits_0^\infty W^i(u) \frac{du}{u}$, через ΔE_i . Мы будем называть в дальнейшем ΔE_i шириной опасной зоны i -го уровня. Далее мы оценим величину ΔE_i . Ясно, что ширина опасной зоны должна быть много меньше расстояния между уровнями D_i , если мы требуем, чтобы уровни не интерферировали друг с другом. Для наиболее низких уровней, не расположенных аномально близко к тепловой области, расстояние между уровнями D_i того же порядка величины, что и E_i . Поэтому условие $\Delta E_i \ll D_i$ может быть заменено условием

$$\Delta E_i \ll E_i \quad (22.10)$$

(это же условие должно быть выполнено для того, чтобы можно было считать γ_n в (22.11) постоянной).

Заметим, что, рассматривая захват нейтронов, необходимо, вообще говоря, учитывать эффект Допплера, т.е. уширения уровней за счет теплового движения ядер [6]. (При достаточно низких температурах эффект Допплера, однако, не играет роли.)

Приведем сперва формулу для $\sigma_c^i(E)$ без учета эффекта Допплера. Сечение захвата свободным ядром $\sigma_c^i(E)$ равно

$$\sigma_c^i(E) = \frac{\pi}{2} \left(1 \pm \frac{1}{2j+1} \right) \frac{\lambda^2 \Gamma_n(E) \Gamma_\gamma}{(E - E_i)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}, \quad (22.11)$$

где λ - длина волны нейтрона, E_i - резонансная энергия, $\Gamma_n(E)$ и Γ_γ - нейтронная и радиационная ширина i -го уровня, Γ - полная ширина уровня, равная $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma$, j - спин ядра.

Так как при интегрировании в формуле (22.9) наиболее существенную роль играют значения энергии, близкие в центре линии E_i , то мы в дальнейшем будем пользоваться следующей формулой для $\sigma_c^i(E)$:

$$\sigma_c^i(E) = \frac{\sigma_0(E_i)}{1 + (\frac{E - E_i}{\Gamma_i/2})^2}, \quad (22.11')$$

где $\sigma_0(E_i)$ - значение сечения захвата при резонансе.

Перейдем к определению $\ln \varphi$ в том случае, когда эффект Допплера не играет роли (далее мы выясним условия, при которых можно не учитывать эффект Допплера).

Пользуясь формулой (22.11') для $\sigma_c^i(E)$, представим $-\ln \varphi(\infty)$ в виде

$$\begin{aligned} -\ln \varphi(\infty) &= \sum_i \frac{1}{E_i} \int_0^\infty W^i(E) dE = \\ &= \sum_i \frac{1}{E_i} \int_0^\infty \frac{dE}{\frac{p\sigma_s^H}{\sigma_0(E_i)} [1 + (\frac{E-E_i}{\Gamma_i/2})^2] + 1} \end{aligned} \quad (22.12)$$

(множитель $1/E$, входящий в интеграл (22.9), мы заменили на $1/E_i$).

Введем вместо E новую переменную z согласно формуле

$$E - E_i = \frac{\Gamma_i}{2} \sqrt{1 + \frac{\sigma_0(E_i)}{p\sigma_s^H}} z \quad (22.12')$$

и расширим пределы интегрирования по z от $-\infty$ до $+\infty$. Такое расширение пределов интегрирования будет сейчас оправдано, так как мы убедимся, что область существенных значений энергии расположена вблизи $E = E_i$. Мы получим, таким образом,

$$-\ln \varphi = \frac{\pi}{2} \sum_i \frac{\Gamma_i}{E_i} \frac{1}{\sqrt{p \frac{\sigma_s^H}{\sigma_0(E_i)} (1 + p \frac{\sigma_s^H}{\sigma_0(E_i)})}}. \quad (22.13)$$

Определим теперь величину области существенных значений энергии в интегралах, образующих сумму (22.12). Считая в интеграле по E область эффективных значений z порядка единицы, получим

$$\Delta E_i \approx \Gamma_i \sqrt{1 + \frac{C\sigma_0(E_i)}{C_H\sigma_s^H}}. \quad (22.14)$$

Наше рассмотрение, как мы указывали выше, будет законным при выполнении условия (22.10), которое можно согласно (22.14) переписать в виде

$$\Gamma_i \sqrt{1 + \frac{C\sigma_0(E_i)}{C_H\sigma_s^H}} \ll E_i. \quad (22.14')$$

Оценим величину ΔE_i , которую можно назвать шириной "опасной" зоны i -го уровня. Рассмотрим два предельных случая, когда $C\sigma_0(E_i) \ll C_H\sigma_s^H$ и когда $C\sigma_0(E_i) \gg C_H\sigma_s^H$.

Если $C\sigma_0(E_i) \ll C_H\sigma_s^H$, то ширина опасной зоны по порядку величины равна ширине уровня и не зависит от относительной концентрации захватывающего элемента. В этом случае необходимое условие (22.10) применимости нашего рассмотрения выполняется, если только $\Gamma_i \ll E_i$.

Рассмотрим теперь практически наиболее важный предельный случай, когда $C\sigma_0(E_i) \gg C_H\sigma_s^H$. Ширина "опасной" зоны определяется здесь как

$$\Delta E_i \approx \Gamma_i \sqrt{\frac{C\sigma_0(E_i)}{C_H\sigma_s^H}}.$$

Она оказывается пропорциональной $(\frac{C}{C_H})^{1/2}$. Условие (22.10) накладывает ограничение на величину концентрации захватывающего элемента, которая должна удовлетворять неравенству

$$C \ll C_H \frac{\sigma_s^H}{\sigma_0(E_i)} \left(\frac{E_i}{\Gamma_i} \right)^2. \quad (22.15)$$

Считая $E_i \approx 10$ эВ, $\Gamma_i \approx 0,1$ эВ и полагая $\frac{\sigma_H}{\sigma_0} \sim 10^{-2}$, мы придем к условию, что концентрация захватывающего элемента должна быть много меньше $100 C_H$. В практически интересных случаях это условие выполняется. Таким образом, можно считать доказанной законность нашего рассмотрения.

Выясним, как зависит φ от концентрации захватывающего элемента в предельных случаях слабого и сильного поглощения. В первом случае $C\sigma_0(E_i) \ll C_H\sigma_s^H$, во втором случае $C\sigma_0(E_i) \gg C_H\sigma_s^H$.

Если условие $C\sigma_0(E_i) \ll C_H\sigma_s^H$ выполняется для всех уровней, то, согласно общей формуле (22.13), мы получим

$$\varphi \cong e^{-\frac{\pi}{2} \sum_i \frac{\Gamma_i}{E_i} \frac{\sigma_0(E_i)}{\sigma_s^H} \frac{C}{C_H}} \cong 1 - \frac{\pi}{2} \frac{C}{C_H} \sum_i \frac{\Gamma_i}{E_i} \frac{\sigma_0(E_i)}{\sigma_s^H}. \quad (22.16)$$

Вычислить сумму ряда, входящего в (22.16), в общем виде невозможно, так как величины Γ_i , $\sigma_0(E_i)$ сложным образом меняются от уровня к уровню.

Чтобы выяснить свойства его сходимости, можно воспользоваться данными статистической теории ядер об усредненных (по большому числу уровней) значениях ширин Γ_n, Γ_γ .

Напомним, что средняя нейтронная ширина при малых энергиях нейтронов пропорциональна $E^{1/2}$; средняя радиационная ширина практически не зависит от энергии. Для не слишком больших возбуждений ядра ($E \ll 10^4$ эВ) радиационная ширина значительно больше нейтронной ширины, так что полная ширина определяется, главным образом, радиационной шириной.

Мы оценим сумму ряда в (22.16), заменив его интегралом по dE и считая, что число уровней в интервале dE равно dE/\bar{D} , где \bar{D} - среднее расстояние между уровнями, которое будем считать постоянным. Таким образом, мы получим

$$\varphi \cong 1 - \frac{\pi}{2} \frac{C}{C_H} \frac{\bar{\Gamma}_\gamma}{\bar{D}} \int_{E_1} \frac{\sigma_0(E)dE}{\sigma_s^H E}, \quad (22.17)$$

где E_1 - энергия наименшего уровня. Сечение захвата при резонансе $\sigma_0(E_i)$ определяется по формуле

$$\sigma_0(E_i) \cong 2\pi\lambda_i^2 \left(1 \pm \frac{1}{2j+1}\right) \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{\Gamma_i^2}. \quad (22.18)$$

Заменяя здесь частичные ширины их средними значениями, получим

$$\sigma_0(E) = \text{const } E^{-1/2}, \quad (22.18')$$

поэтому

$$\varphi = 1 - \frac{\pi}{2} \frac{C}{C_H} \frac{\bar{\Gamma}_\gamma}{\bar{D}} \text{const} \int_{E_1} \frac{dE}{E^{3/2}}. \quad (22.19)$$

Входящий сюда интеграл хорошо сходится. Это значит, что сумма ряда практически сводится к сумме его первых нескольких членов. Иными словами, главную роль играют несколько первых наименее низко расположенных резонансных уровней. Считая верхний предел в интеграле (22.19) равным бесконечности, мы получим для φ следующую формулу:

$$\varphi \cong 1 - \frac{\pi C}{C_H} \frac{\bar{\Gamma}_\gamma}{\bar{D}} \frac{\sigma_0(E_1)}{\sigma_s^H}. \quad (22.20)$$

Итак, в случае достаточно малых концентраций захватывающего элемента C , когда условие $C\sigma_0(E_i) \ll C_H\sigma_s^H$ выполняется для всех резонансных уровней, разность $1 - \varphi$, т.е. $\ln \varphi$ пропорциональна концентрации захватывающего элемента. Условие $C\sigma_0(E_i) \ll C_H\sigma_s^H$ может не выполняться для всех уровней, но оно наверное будет выполняться для уровней, расположенных достаточно высоко, т.к. сечение $\sigma_0(E_i)$ обратно пропорционально $E_i^{1/2}$. Определим энергию E_0 , для которой величина $C\sigma_0(E)$ становится равной $C_H\sigma_s^H$. Используя формулу (22.18) и (22.18') для $\sigma_0(E)$, получим E_0 (энергия в электрон-вольтах):

$$E_0 = \left(\frac{C}{C_H}\right)^2 \left(\frac{2 \cdot 10^{-21}}{\sigma_s^H}\right)^2 \cong 4 \cdot 10^4 \left(\frac{C}{C_H}\right)^2. \quad (22.21)$$

Для уровней, расположенных выше E_0 , условие $C\sigma_0(E_i) \ll C_H\sigma_s^H$ выполняется, поэтому вклад, вносимый этими уровнями в выражение для φ , пропорционален концентрации захватывающего элемента.

Перейдем теперь к рассмотрению случая сильного поглощения, когда сечение захвата в резонансе (с учетом концентрации) велико по сравнению с сечением рассеяния, т.е. когда выполняется условие

$$C\sigma_0(E_i) \gg C_H\sigma_s^H.$$

Согласно общей формуле (22.13), мы имеем в этом случае

$$\varphi \cong e^{-\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C}{C_H}} \sum_i \frac{\Gamma_i}{E_i} \sqrt{\frac{\sigma_0(E_i)}{\sigma_s^H}}}. \quad (22.22)$$

Выясним прежде всего, как сходится ряд

$$\sum_i \frac{\Gamma_i}{E_i} \sqrt{\frac{\sigma_0(E_i)}{\sigma_s^H}}. \quad (22.22')$$

Пользуясь усредненными значениями ширин и заменяя сумму интегралом, получим

$$\sum_i \frac{\Gamma_i}{E_i} \sqrt{\frac{\sigma_0(E_i)}{\sigma_s^H}} \approx \frac{\bar{\Gamma}_r}{\bar{D}} \sqrt{\frac{\sigma_0(E_1)}{\sigma_s^H}} E_1^{1/4} \int_{E_1} \frac{dE}{E^{5/4}}. \quad (22.22'')$$

Последний интеграл существует. Поэтому ряд (22.22') сходится, но сходится он медленнее ряда, входящего в формулу (22.16) и относящегося к случаю слабого поглощения. Это значит, что высоко расположенные уровни играют в случае сильного поглощения сравнительно более важную роль, чем в случае слабого поглощения.

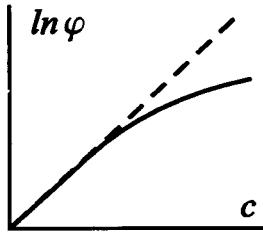


Рис. 23

§23. Учет эффекта Допплера

Перейдем теперь к учету эффекта Допплера [6]. Напомним, что сечение захвата с учетом эффекта Допплера можно представить в виде¹²

$$\sigma_C^i(E, \xi) = \sigma_0(E_i)\psi(\xi, x), \quad (23.1)$$

где

$$x = \frac{E - E_i}{\Gamma_i/2}, \quad \xi = \frac{\Gamma_i}{\Delta_i},$$

$$\psi(\xi, x) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4}\xi^2(x-y)^2}}{1+y^2} dy. \quad (23.1')$$

Величина Δ представляет собой так называемую "допплеровскую ширину" уровня, равную

$$\Delta = 2 \left(\frac{m E_i k T}{M} \right)^{1/2} \quad (23.2)$$

(m и M - массы нейтрона и ядра, T - температура, k - постоянная Больцмана).

¹²Мы не будем при рассмотрении эффекта Допплера учитывать усложнения, связанные с химической связью атомов в кристаллах.

Эффект Допплера играет существенную роль, если $\xi = \frac{\Gamma_i}{\Delta_i} \ll 1$ и $x \ll \xi^{-2}$, т.е. если $|E - E_i| \ll \frac{\Delta_i^2}{\Gamma_i}$.

Благодаря эффекту Допплера происходит деформация контура линии поглощения - уширение линии и понижение ее высоты в центре (площадь, ограниченная контуром линии поглощения не изменяется). Функция $\psi(\xi, x)$ в том случае, когда эффект Допплера играет существенную роль, имеет следующий вид:

$$\psi(\xi, x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi e^{-\frac{1}{4}\xi^2 x^2}; \quad \xi \ll 1, \quad x \ll \xi^{-2}. \quad (23.3)$$

Далекие области линии поглощения ($x \gg \xi^{-2}$) не подвергаются действию эффекта Допплера и всегда имеют естественную форму, т.е. для них

$$\psi(\xi, x) = \frac{1}{1+x^2}. \quad (23.4)$$

Если $\xi = \frac{\Gamma_i}{\Delta} \gg 1$, эффект Допплера не играет роли и линия поглощения имеет естественную форму.

Выясним, какое влияние оказывает эффект Допплера на резонансное поглощение. Мы предположим, что ширина "опасной" зоны i -го уровня, определенная выше (формула (22.14)) и относящаяся к естественной форме линии поглощения, порядка или меньше допплеровской ширины

$$\Delta E_i < \Delta_i. \quad (23.5)$$

При выполнении этого условия вся "опасная" зона, а не только центр линии, подвергается действию эффекта Допплера. Мы можем при этом считать, что линия поглощения имеет допплеровскую форму (23.3).

Подставляя в общую формулу (22.9), определяющую $\ln \varphi$, вместо $\sigma_0^i(E)$ выражение

$$\sigma_0^i(E) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_0(E_i) \frac{\Gamma_i}{\Delta_i} e^{-\frac{(E-E_i)^2}{\Delta_i}}, \quad (23.6)$$

получим

$$-\ln \varphi = \sum_i \frac{1}{E_i} \int_0^\infty W_i(E) dE, \quad (23.7)$$

где

$$\int_0^\infty W_i(E) dE = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma_i}{\Delta_i} \sigma_0(E_i) \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{(E-E_i)^2}{\Delta_i^2}}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma_i}{\Delta_i} \sigma_0(E_i) e^{-\frac{(E-E_i)^2}{\Delta_i^2}} + \frac{C_H}{C} \sigma_s^H} dE. \quad (23.8')$$

(здесь и далее мы будем вместо $W^i(E)$ писать $W_i(E)$).

Вводя новую переменную $z = \frac{(E-E_i)}{\Delta_i}$ и расширяя предел интегрирования по z от $-\infty$ до $+\infty$, перепишем последний интеграл в виде

$$\int_0^\infty W_i(E) dE = \Delta_i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-z^2}}{e^{-z^2} + q_i} dz, \quad (23.8)$$

где

$$q_i = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{C_H}{C} \frac{\sigma_s^H}{\sigma_0(E_i)} \frac{\Delta_i}{\Gamma_i}.$$

Рассмотрим аналогично тому, как мы это делали выше, случаи слабого и сильного поглощения. В первом случае $q_i \gg 1$, т.е.

$$C\sigma_0(E_i) \ll C_H \sigma_s^H \frac{\Delta_i}{\Gamma_i}.$$

Во втором случае $q_i \ll 1$, т.е.

$$C\sigma_0(E_i) \gg C_H \sigma_s^H \frac{\Delta_i}{\Gamma_i}.$$

Напомним, что при естественной форме линии поглощения случаи слабого и сильного поглощения определяются неравенствами

$$C\sigma_0(E_i) \ll C_H \sigma_s^H, \quad C\sigma_0(E_i) \gg C_H \sigma_s^H.$$

Если $q_i \gg 1$, то в знаменателе подинтегральной функции в (23.8) можно вычеркнуть e^{-z^2} . Мы получим при этом

$$\int_0^\infty W_i(E) dE = \frac{\Delta_i}{q_i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\pi}{2} \Gamma_i \frac{C}{C_H} \frac{\sigma_0(E_i)}{\sigma_s^H} \quad (23.9')$$

и, следовательно, φ будет равно

$$\varphi = e^{-\frac{\pi}{2} \frac{C}{C_H} \sum_i \frac{\Gamma_i}{E_i} \frac{\sigma_0(E_i)}{\sigma_s^H}}. \quad (23.9)$$

Формула (23.9) совпадает с формулой (22.16), относящейся к случаю слабого поглощения при естественной форме линии поглощения.

Итак, в случае слабого поглощения эффект Допплера не меняет вида φ , т.е. не играет роли. Это обстоятельство легко понять, если иметь в виду, что в случае слабого поглощения интеграл $\int_0^\infty W_i(E) dE$ сводится к площади, ограниченной контуром линий поглощения, которая, как мы знаем, не изменяется благодаря эффекту Допплера.

Рассмотрим теперь предельный случай сильного поглощения, когда $q_i \ll 1$.

Вводя в интеграле (23.8) новую переменную $u = e^{-z^2}$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-z^2}}{e^{-z^2} + q_i} dz = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{-1/2} \frac{du}{u + q_i}. \quad (23.10)$$

Последний интеграл при малых q_i равен приближенно¹³

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{-1/2} \frac{du}{u + q_i} = 2 \left(\ln \frac{1}{q_i} \right)^{1/2},$$

¹³Действительно, представим (23.10) в виде

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{-1/2} \frac{du}{u + q} &= \int_q^1 \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{-1/2} \frac{du}{u} + \int_0^q \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{-1/2} \frac{du}{u + q} - \\ &- q \int_q^1 \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{-1/2} \frac{du}{u(u + q)}. \end{aligned}$$

Второй из этих интегралов меньше интеграла

$$\left(\ln \frac{1}{q} \right)^{-1/2} \int_0^q \frac{du}{u + q} = \ln 2 \cdot \left(\ln \frac{1}{q} \right)^{-1/2}.$$

поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-z^2}}{e^{-z^2} + q_i} dz = 2 \left(\ln \frac{1}{q_i} \right)^{1/2}, \quad q_i \ll 1. \quad (23.10')$$

Заметим, что область существенных значений энергии в интеграле (23.8') в том случае, когда $q_i \ll 1$, по порядку величины равна $\Delta_i \ln \frac{1}{q_i} \approx \Delta_i$. Используя (23.10'), получим следующее выражение для φ , справедливое при условии $q_i \ll 1$:

$$-\ln \varphi = 2 \sum_i \frac{\Delta_i}{E_i} \sqrt{\ln \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{C}{C_H} \frac{\sigma_0(E_i)}{\sigma_s^H} \frac{\Gamma_i}{\Delta_i} \right)}. \quad (23.11)$$

Напомним, что эта формула выведена нами в предположении, что линия поглощения имеет допплеровскую форму. Такое предположение является законным, если ширина "опасной" зоны i -го уровня порядка или меньше допплеровской ширины. Действительно, при выполнении последнего условия вся "опасная" зона подвергается действию эффекта Допплера и поэтому форма линии поглощения может считаться допплеровской.

Третий интеграл меньше интеграла

$$q \int_q^1 \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{-1/2} \frac{du}{u^2} = q \int_1^{1/q} (\ln z)^{-1/2} dz.$$

Последний интеграл вблизи верхнего предела можно представить в виде

$$\begin{aligned} q \int_a^{1/q} (\ln z)^{-1/2} dz &= q \left\{ \left[z(\ln z)^{-1/2} \right]_a^{1/q} + \frac{1}{2} \int_a^{1/q} (\ln z)^{-3/2} dz \right\} = \\ &= \left(\ln \frac{1}{q} \right)^{-1/2} + \frac{1}{2} (\ln q)^{-3/2} + \dots + \text{const} \cdot q. \end{aligned}$$

Поэтому асимптотически интеграл (23.10) при $q_i \ll 1$ действительно равен $2 \left(\ln \frac{1}{q_i} \right)^{1/2}$.

В рассматриваемом случае сильного поглощения ширина опасной зоны i -го уровня ΔE_i равна по порядку величины

$$\Delta E_i = \Gamma_i \sqrt{\frac{C \sigma_0(E_i)}{C_H \sigma_s^H}}.$$

Поэтому формула (23.11) справедлива в том случае, если

$$\Delta_i \gtrsim \Gamma_i \sqrt{\frac{C \sigma_0(E_i)}{C_H \sigma_s^H}}. \quad (23.12)$$

Покажем, что влияние эффекта Допплера сводится в случае сильного поглощения к увеличению резонансного поглощения, т.е. к уменьшению φ .

Сравним для этого выражение (23.11) с выражением (22.22), определяющим $\ln \varphi$ в случае сильного поглощения при естественной форме линии поглощения.

Отношение соответствующих членов обоих рядов (23.11) и (22.22) равно

$$\frac{4 \Delta_i}{\pi \Gamma_i} \sqrt{\frac{C_H \sigma_s^H}{C \sigma_0(E_i)}} \left(\ln \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{C}{C_H} \frac{\sigma_0(E_i)}{\sigma_s^H} \frac{\Gamma_i}{\Delta_i} \right] \right)^{1/2}. \quad (23.12')$$

Это отношение, согласно (23.12), больше единицы, чем и доказывается выше утверждение. (Входящий в (23.12') логарифм больше единицы.)

Мы видим, таким образом, что если эффект Допплера оказывает влияние на резонансное поглощение (случай сильного поглощения), то это влияние приводит обязательно к увеличению поглощения, т.е. к уменьшению φ .

Выясним более подробно, какие уровни подвержены действию эффекта Допплера.

Так как допплеровская ширина растет с ростом энергии, а естественная ширина остается постоянной, то влияние эффекта Допплера оказывается тем больше, чем выше расположены уровни.

С другой стороны эффективное сечение при резонансе падает с увеличением энергии. Если контур линии поглощения имеет естественную форму, то максимальное значение сечения падает с увеличением энергии E по закону

$$\sigma_0(E) \sim \pi \lambda^2 \frac{\Gamma_n}{\Gamma} = \frac{\text{const}}{\sqrt{E}}.$$

В случае допплеровской формы линии поглощения падение $\sigma_0(E)$ происходит более быстро, а именно по закону

$$\sigma_0(E) \sim \frac{\text{const}}{E}.$$

Эти соотношения показывают, что при достаточно больших энергиях поглощение становится слабым и поэтому эффект Допплера никакого влияния на него не оказывает.

Мы видим, таким образом, что при изучении резонансного поглощения следует различать три группы резонансных уровней: наиболее низко расположенные уровни с естественной формой линии поглощения, уровни средних энергий, характеризующиеся допплеровской формой линии поглощения, и, наконец, высоко расположенные уровни, попадающие в область слабого поглощения, для которых поэтому форма линии поглощения не играет роли.

Эффект Допплера оказывает существенное влияние на резонансное поглощение, обусловленное уровнями второй группы.

Энергия, разделяющая первую и вторую группы, может быть определена, как энергия, при которой допплеровская ширина становится равной естественной ширине.

Допплеровская ширина Δ равна, как мы знаем,

$$\Delta = 2\sqrt{\frac{m}{M} E kT}.$$

Поэтому энергия E , при которой естественная (радиационная) ширина Γ_γ равна Δ , определяется из соотношения

$$E = \frac{\Gamma_\gamma^2 M}{4kT m}.$$

Эта энергия не зависит от концентрации захватывающего элемента и обратно пропорциональна температуре.

Полагая $\Gamma_\gamma \sim 0,1$ эВ, $kT \sim \frac{1}{40}$ эВ, мы получим для урана

$$E \approx 25 \text{ эВ.}$$

Выше мы видели, что при $E > E_0$ (22.21) поглощение становится слабым. Таким образом эффект Допплера оказывает влияние на резонансное поглощение, обусловленное теми уровнями, которые расположены между E и E_0 .

§24. Асимптотическое решение основного уравнения

В предыдущем параграфе мы рассмотрели резонансное поглощение в том случае, когда замедление нейтронов вызывалось в основном водородом.

Изучим теперь влияние более тяжелых замедлителей. Рассмотрим сперва случай, когда замедлитель состоит из ядер одного сорта.

Основное уравнение, определяющее $\varphi(E)$, т.е. вероятность того, что нейtron с энергией E дойдет до тепловой области, не будучи резонансно захваченным, имеет вид (см. (21.4))

$$\varphi(E) = \frac{1 - W(E)}{(1 - \varepsilon)E} \int_{\varepsilon E}^E \varphi(u) du, \quad (24.1)$$

где

$$W(E) = \left[1 + \frac{C_s}{C} \frac{\sigma_s}{\sigma_c(E)} \right]^{-1}, \quad (24.1')$$

σ_s и $\sigma_c(E)$ - соответственно сечения рассеяния и захвата нейтрона, C и C_s - концентрации захватывающего элемента и рассеивателя.

Наша задача состоит в нахождении $\varphi(\infty)$. Приступая к изучению уравнения (24.1), заметим предварительно, что если E_1 есть первый наиболее низкий резонансный уровень, то $W(E)$ может считаться равной нулю для значений энергии нейтрона $E < E'$, где $E' = E_1 - \Delta E_1$, ΔE_1 - ширина "опасной" зоны уровня E_1 . Ясно, что в области энергий $E < E'$, где $W(E) = 0$, функция $\varphi(E)$ равна единице:

$$\varphi(E) = 1, \quad E < E'. \quad (24.2)$$

Будем предполагать, что резонансные уровни не перекрываются. Легко видеть, в этих условиях достаточно ограничиться рассмотрением того случая, когда имеется только один резонансный уровень, и указать метод определения φ в этом случае. Действительно, найдя φ , обязанное существованию одного уровня, и взяв полученное значение φ за исходное (см. формулу (24.2)), мы сможем найти φ при наличии двух уровней и т.д.

Пользуясь соотношением (24.2), легко найти решение уравнения (24.1) в интервале энергии E' , $\frac{E'}{\varepsilon}$. Действительно, введем в рассмотрение функцию $\Phi(E)$, определенную соотношением

$$\Phi(E) = \int_0^E \varphi(u) du. \quad (24.3)$$

Уравнение (24.1) перепишется тогда в виде

$$\Phi'(E) - \frac{1 - W(E)}{(1 - \varepsilon)E} \Phi(E) = -\frac{1 - W(E)}{(1 - \varepsilon)E} \Phi(\varepsilon E). \quad (24.4)$$

В интервале энергии $(E', \frac{E'}{\varepsilon})$ функция $\Phi(\varepsilon E)$ известна: она равна εE . Поэтому уравнение (24.4) можно рассматривать, как неоднородное дифференциальное уравнение с известной правой частью

$$\Phi'(E) - \frac{1 - W(E)}{(1 - \varepsilon)E} \Phi(E) = -\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} [1 - W(E)], \quad E' < E < \frac{E'}{\varepsilon}, \quad (24.5)$$

которое легко интегрируется.

Определив $\Phi(E)$ в интервале $(E', \frac{E'}{\varepsilon})$, мы можем, пользуясь уравнением (24.4), найти $\Phi(E)$ в интервале $(\frac{E'}{\varepsilon}, \frac{E'}{\varepsilon^2})$, так как правая часть уравнения (24.4), содержащая $\Phi(\varepsilon E)$, будет в этом интервале известной функцией.

Аналогичным образом мы сможем последовательно находить $\Phi(E)$ в интервалах $(\frac{E'}{\varepsilon^2}, \frac{E'}{\varepsilon^3})$, $(\frac{E'}{\varepsilon^3}, \frac{E'}{\varepsilon^4})$, ...

Поступая указанным образом несколько раз, мы выйдем в конце концов за пределы "опасной зоны", т.е. перейдем некоторое значение энергии E'' , выше которого $W(E)$ может считаться равной нулю.

Задача, которую нам предстоит теперь решить, заключается в следующем. Известно решение уравнения (24.1) в интервале E' , E'' . Требуется найти решение этого уравнения за пределами этого интервала, где уравнение имеет вид

$$\varphi(E) = \frac{1}{(1 - \varepsilon)E} \int_{\varepsilon E}^E \varphi(u) du, \quad E > E''. \quad (24.6)$$

Заметим, что в написанное уравнение не входят значения функции $\varphi(u)$ для значений $u < \varepsilon E''$. Поэтому для нахождения решения уравнения (24.6) нет необходимости знать $\varphi(u)$ во всем интервале, достаточно определить функцию $\varphi(u)$ в интервале $(\varepsilon E'', E'')$.

Введем функцию $\varphi_0(u)$, совпадающую с $\varphi(u)$ в интервале $(\varepsilon E'', E'')$ и равную нулю всюду вне этого интервала.

Из сказанного выше следует, что если некоторая функция $\Psi(E)$ удовлетворяет уравнению (24.6) при $E > E''$ и совпадает с $\varphi_0(E)$ при $E \leq E''$, то функции $\Psi(E)$ и $\varphi(E)$ совпадают при $E > E''$.

Покажем, как найти $\Psi(E)$. Функция $\Psi(E)$ удовлетворяет уравнению

$$\Psi(E) = \frac{1}{(1 - \varepsilon)E} \int_{\varepsilon E}^E \Psi(u) du, \quad E > E'' \quad (24.6')$$

и условию

$$\Psi(E) = \varphi_0(E), \quad E \leq E''. \quad (24.6'')$$

Уравнение для $\Psi(E)$ вместе с условием, которому удовлетворяет $\Psi(E)$ при $E < E''$, можно записать в виде одного неоднородного интегрального уравнения

$$\Psi(E) - \frac{1}{(1 - \varepsilon)E} \int_{\varepsilon E}^E \Psi(u) du = g(E), \quad (24.7)$$

где функция $g(E)$ равна

$$g(E) = \varphi_0(E) - \frac{1}{(1 - \varepsilon)E} \int_{\varepsilon E}^E \varphi_0(u) du, \quad E \leq E'',$$

$$g(E) = 0, \quad E > E''. \quad (24.8)$$

Заметим, что нижний предел в интеграле, входящем в (24.8), можно заменить на $\varepsilon E''$, так как в интервале $(\varepsilon E'', E)$ при $E < E''$ функция $\varphi_0(u)$ по определению равна нулю. Ясно, что $g(E) = 0$, если $E < \varepsilon E''$.

Для решения уравнения (24.7) применим к нему преобразование Лапласа - Меллина.

Умножая (24.7) на E^{s-1} и интегрируя по E от 0 до ∞ , получим

$$\Psi_s = \frac{1}{(1-\epsilon)} \int_0^\infty E^{s-2} dE \int_{\epsilon E}^E \Psi(u) du = g_s, \quad (24.9)$$

где

$$\Psi_s = \int_0^\infty \Psi(E) E^{s-1} dE, \quad (24.10)$$

$$g_s = \int_0^\infty g(E) E^{s-1} dE = \int_{\epsilon E''}^{E''} g(E) E^{s-1} dE. \quad (24.10')$$

Заметим, что для того, чтобы Ψ_s имело смысл, достаточно считать $s = \operatorname{Re} s < 0$. Вычислим интеграл, входящий в (24.9).

Вводя вместо u новую переменную $z = u/E$ и меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_0^\infty E^{s-2} dE \int_{\epsilon E}^E \Psi(u) du = \int_\epsilon^1 dz \int_0^\infty E^{s-1} \Psi(Ez) dE = \Psi_s \frac{1 - \epsilon^{-s+1}}{-s + 1}. \quad (24.9')$$

Пользуясь этим выражением, перепишем (24.9) в виде

$$\Psi_s \left[1 - \frac{1}{(1-\epsilon)(s-1)} (\epsilon^{-s+1} - 1) \right] = g_s, \quad (24.11')$$

откуда

$$\Psi_s = \frac{g_s}{1 - \frac{\epsilon^{-s+1} - 1}{(1-\epsilon)(s-1)}}. \quad (24.11)$$

Воспользуемся теперь формулой обращения

$$\Psi(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} E^{-s} \Psi_s ds \quad (24.12)$$

и найдем

$$\Psi(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{E^{-s} g_s ds}{1 - \frac{\epsilon^{-s+1} - 1}{(1-\epsilon)(s-1)}}. \quad (24.13)$$

Входящий сюда интеграл можно представить в виде бесконечной суммы членов вида $A_n E^{-s_n}$, где s_n - полюсы подинтегральной функции.

Действительно, замкнем прямую, вдоль которой производится интегрирование, бесконечной полуокружностью, охватывающей правую полуплоскость. По теореме о вычетах будем иметь

$$\Psi(E) = \sum_n A_n E^{-s_n}, \quad (24.14)$$

где s_n - полюсы подинтегральной функции, лежащие справа от прямой $\operatorname{Re} s = c < 0$, а A_n - соответствующие вычеты.

Мы можем теперь найти интересующее нас значение предела

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \varphi(E) = \lim_{E \rightarrow \infty} \Psi(E).$$

Этот предел определяется, очевидно, вычетом относительно точки $s = 0$ и равен

$$\varphi(\infty) = -g_0 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + \frac{1-\epsilon^{-s+1}}{(1-\epsilon)(s-1)}} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon \ln \epsilon - \epsilon} g_0, \quad (24.15)$$

где, согласно (24.10'),

$$g_0 = \int_{\epsilon E''}^{E''} g(E) \frac{dE}{E} \quad (24.15')$$

(знак минус в формуле (24.15) происходит из-за того, что прямая, вдоль которой производится интегрирование, замыкается кривой охватывающей правую полуплоскость). Подставляя в (24.15') вместо $g(E)$ выражение (24.8), получим

$$\begin{aligned} g_0 &= \int_{\epsilon E''}^{E''} \varphi_0(E) \frac{dE}{E} - \frac{1}{1-\epsilon} \int_{\epsilon E''}^{E''} \frac{dE}{E^2} \int_{\epsilon E}^E \varphi_0(u) du = \\ &= \int_{\epsilon E''}^{E''} \varphi_0(E) \frac{dE}{E} - \frac{1}{1-\epsilon} \int_{\epsilon E''}^{E''} \frac{dE}{E^2} \int_{\epsilon E''}^{E''} \varphi_0(u) du. \end{aligned} \quad (24.16)$$

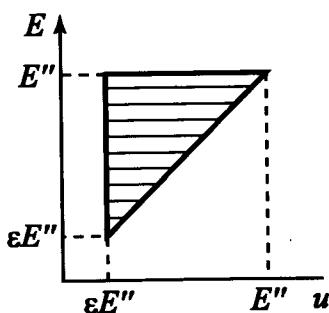


Рис. 24

На рис. 24 изображена область интегрирования в последнем интеграле. Меняя в этом интеграле порядок интегрирования, получим

$$g_0 = \int_{\epsilon E''}^{E''} \varphi_0(E) \frac{dE}{E} -$$

$$- \frac{1}{1-\epsilon} \int_{\epsilon E''}^{E''} \varphi_0(u) du \int_u^{E''} \frac{dE}{E^2} =$$

$$= \frac{1}{(1-\epsilon)E''} \int_{\epsilon E''}^{E''} \varphi(u) du - \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \int_{\epsilon E''}^{E''} \varphi_0(u) \frac{du}{u}.$$

Подставляя это значение g_0 в формулу (24.15), получим окончательно следующее выражение для φ :

$$\varphi \equiv \varphi(\infty) = \frac{1}{1 + \epsilon(\ln \epsilon - 1)} \left\{ \frac{1}{E''} \int_{\epsilon E''}^{E''} \varphi_0(u) du - \epsilon \int_{\epsilon E''}^{E''} \varphi(u) \frac{du}{u} \right\}. \quad (24.17)$$

Покажем теперь, что аналогичная формула может быть получена для φ и в том случае, когда замедлитель представляет собой смесь ядер нескольких сортов.

В последнем случае $\varphi(E)$ удовлетворяет уравнению (21.4), которое мы перепишем в виде

$$\varphi(E) = \sum_i \frac{\gamma_i}{1 - \epsilon_i} [1 - W(E)] \frac{1}{E} \int_{\epsilon_i E}^E \varphi(u) du, \quad (24.18)$$

где

$$1 - W(E) = \frac{\sum_j C_j \sigma_s^j}{\sum_j C_j \sigma_s^j + C \sigma_c(E)}, \quad \gamma_i = \frac{C_i \sigma_s^i}{\sum_j C_j \sigma_s^j}, \quad \sum_i \gamma_i = 1. \quad (24.18')$$

Пусть "опасная" зона простирается до энергии E'' , так что при $E > E''$ сечение захвата $\sigma_c(E)$ может считаться равным нулю, а, следовательно, и $W(E) = 0$ при $E > E''$.

Будем по-прежнему считать, что решение уравнения (24.18) известно для значений энергий $E \leq E''$ и найдем $\varphi(E)$ в области $E > E''$.

Нахождение $\varphi(E)$ при $E < E''$ производится так же, как и в случае, когда замедлитель содержит ядра только одного сорта. Введем в рассмотрение функцию $\Phi(E)$:

$$\Phi(E) = \int_0^E \varphi(u) du.$$

Уравнение (24.18) перепишется тогда в виде

$$\Phi'(E) - \frac{1 - W(E)}{E} \sum_i \frac{\gamma_i}{1 - \epsilon_i} \Phi(E) = -\frac{1 - W(E)}{E} \sum_i \frac{\gamma_i}{1 - \epsilon_i} \Phi(\epsilon_i E). \quad (24.19)$$

В интервале $(0, E')$ функция $\varphi(E) = 1$ и, следовательно, $\Phi(E) = E$. Поэтому в интервале $(E', \frac{E'}{\epsilon_n})$ ($\epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots < \epsilon_n$) уравнение (24.19) можно рассматривать, как неоднородное уравнение относительно $\Phi(E)$ с известной правой частью.

Найдя решение последнего уравнения, можно использовать его для нахождения $\Phi(E)$ в интервале $(\frac{E'}{\epsilon_n}, \frac{E'}{\epsilon_1^2})$ и т.д.

После того, как $\Phi(E)$ определена, $\varphi(E)$ находится дифференцированием $\Phi(E)$.

Итак, будем считать, что функция $\varphi(E)$ известна вплоть до значения энергии $E = E''$. Для значений энергии $E > E''$ $\varphi(E)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(E) = \sum_i \frac{\gamma_i}{1 - \epsilon_i} \frac{1}{E} \int_{\epsilon_i E}^E \varphi(u) du, \quad E > E'', \quad (24.20)$$

где суммирование распространяется на все сорта ядер рассеивателя.

В написанное уравнение не входят значения функции $\varphi(E)$ для $u < \epsilon_1 E''$ (ϵ_1 - наименьшее из чисел ϵ_i). Поэтому достаточно знать функцию $\varphi(u)$ в интервале $(\epsilon_1 E'', E'')$. Обозначим через $\varphi_0(u)$ функцию, совпадающую с $\varphi(u)$ в интервале $(\epsilon_1 E'', E'')$ и равную нулю повсюду вне этого интервала.

Аналогично рассмотренному ранее случаю одного сорта рассеивающих ядер задача сводится теперь к решению уравнения

$$\Psi(E) = \sum_i \frac{\gamma_i}{1 - \varepsilon_i} \frac{1}{E} \int_{\varepsilon_i E}^E \Psi(u) du, \quad E > E'', \quad (24.21)$$

если известно, что

$$\Psi(E) = \varphi_0(E), \quad E \leq E''. \quad (24.21')$$

Уравнение (24.21) вместе с условием (24.21') можно записать в виде одного неоднородного интегрального уравнения

$$\Psi(E) - \sum_i \frac{\gamma_i}{1 - \varepsilon_i} \frac{1}{E} \int_{\varepsilon_i E}^E \Psi(u) du = g(E), \quad (24.22)$$

где

$$g(E) = \varphi_0(E) - \sum_i \frac{\gamma_i}{1 - \varepsilon_i} \frac{1}{E} \int_{\varepsilon_i E}^E \varphi_0(u) du, \quad E \leq E'',$$

$$g(E) = 0, \quad E > E''. \quad (24.22')$$

Для решения уравнения (24.22) применяем к нему преобразование Лапласа-Меллина.

Умножая (24.22) на E^{s-1} и интегрируя по E в пределах от 0 до ∞ , получим, используя формулу (24.9'),

$$\Psi_s \left[1 - \sum_i \frac{\gamma_i}{(1 - \varepsilon_i)(s - 1)} (\varepsilon_i^{-s+1} - 1) \right] = g_s, \quad (24.23)$$

где

$$\Psi_s = \int_0^\infty \Psi(E) E^{s-1} dE, \quad (24.23')$$

$$g_s = \int_0^\infty g(E) E^{s-1} dE = \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} g(E) E^{s-1} dE, \quad (24.23'')$$

причем мы должны считать что $s = \operatorname{Re} s < 0$.

По формуле обращения (24.12) найдем отсюда

$$\Psi(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{E^{-s} g_s ds}{1 - \sum_i \frac{\gamma_i}{(1 - \varepsilon_i)(s-1)} (\varepsilon_i^{-s+1} - 1)}. \quad (24.24)$$

Значение $\Psi(E)$ при $E = \infty$ определяется, очевидно, вычетом подинтегральной функции относительно полюса $s = 0$. Поэтому

$$\varphi(\infty) = -g_0 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 - \sum_i \frac{\gamma_i}{1 - \varepsilon_i} \frac{\varepsilon_i^{-s+1} - 1}{s-1}} = g_0 \frac{1}{1 + \sum_i \gamma_i \frac{\varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i}}, \quad (24.25)$$

где, согласно (24.23''),

$$g_0 = \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} g(E) \frac{dE}{E}.$$

Преобразуем несколько выражение для g_0 . Представим для этой цели $g(E)$ в виде

$$g(E) = \varphi_0(E) - \sum_i \frac{\gamma_i}{1 - \varepsilon_i} \frac{1}{E} \int_{\varepsilon_i E}^E \mu\left(\frac{u}{\varepsilon_i E}\right) \varphi_0(u) du, \quad (24.26)$$

где функция $\mu(x)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= 0, & x < 1, \\ \mu(x) &= 1, & x > 1. \end{aligned} \quad (24.26')$$

Подставим (24.26) в формулу для g_0 :

$$g_0 = \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \varphi_0(E) \frac{dE}{E} - \sum_j \frac{\gamma_j}{1 - \varepsilon_j} \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \frac{dE}{E^2} \int_{\varepsilon_1 E''}^E \mu\left(\frac{u}{\varepsilon_j E}\right) \varphi_0(u) du. \quad (24.27)$$

Рассмотрим двойной интеграл, входящий в (24.27). Пользуясь тем, что $\varphi_0(u)$ отлична от нуля только в интервале $(\varepsilon_1 E'', E'')$, представим интеграл в виде

$$\int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \frac{dE}{E^2} \int_{\varepsilon_1 E}^E \mu\left(\frac{u}{\varepsilon_j E}\right) \varphi_0(u) du = \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \frac{dE}{E'^2} \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \mu\left(\frac{u}{\varepsilon_j E}\right) \varphi_0(u) du. \quad (24.27')$$

Меняя в последнем интеграле порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \frac{dE}{E^2} \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \mu\left(\frac{u}{\varepsilon_j E}\right) \varphi_0(u) du = \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \varphi_0(u) du \int_u^{E''} \mu\left(\frac{u}{\varepsilon_j E}\right) \frac{dE}{E^2} = \\ & = \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \varphi_0(u) du \int_u^{\min(E'', \frac{u}{\varepsilon_j})} \frac{dE}{E^2} = \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \varphi_0(u) \left\{ \frac{1}{u} - \max\left(\frac{1}{E''}, \frac{\varepsilon_j}{u}\right) \right\} du = \\ & = \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \varphi_0(u) \frac{du}{u} - \varepsilon_j \int_{\varepsilon_1 E''}^{\varepsilon_j E''} \varphi_0(u) \frac{du}{u} - \frac{1}{E''} \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \varphi_0(u) du. \quad (24.27'') \end{aligned}$$

Подставим (24.27'') в выражение для g_0 :

$$\begin{aligned} g_0 = & \left(1 - \sum_j \frac{\gamma_j}{1 - \varepsilon_j}\right) \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \varphi_0(u) \frac{du}{u} + \sum_j \frac{\varepsilon_j \gamma_j}{1 - \varepsilon_j} \int_{\varepsilon_1 E''}^{\varepsilon_j E''} \varphi_0(u) \frac{du}{u} + \\ & + \frac{1}{E''} \sum_j \frac{\gamma_j}{1 - \varepsilon_j} \int_{\varepsilon_j E''}^{E''} \varphi_0(u) du. \end{aligned}$$

После упрощений получим

$$g_0 = \sum_j \frac{\gamma_j \varepsilon_j}{1 - \varepsilon_j} \int_{\varepsilon_j E''}^{E''} \varphi_0(u) \left[\frac{1}{\varepsilon_j E''} - \frac{1}{u} \right] du. \quad (24.28')$$

Подставляя (24.28') в формулу (24.25), найдем окончательно следующее выражение для φ :

$$\varphi(\infty) = \frac{1}{1 + \sum_j \frac{\gamma_j \varepsilon_j \ln \varepsilon_j}{1 - \varepsilon_j}} \sum_j \frac{\gamma_j \varepsilon_j}{1 - \varepsilon_j} \int_{\varepsilon_j E''}^{E''} \varphi_0(u) \left[\frac{1}{\varepsilon_j E''} - \frac{1}{u} \right] du. \quad (24.28)$$

Если имеется только один сорт рассеивающих ядер, то эта формула переходит в формулу (24.17)

Формулы (24.17) и (24.28) дают возможность определить $\varphi(\infty)$, если функция $\varphi(E)$ известна в интервале энергий $(\varepsilon E'', E'')$.

§25. Резонансное поглощение в однородной системе с неводородным замедлителем

Формулы (24.17), (24.28) в принципе решают поставленную задачу. В общем виде они приводят однако к очень громоздким выражениям, которые мы поэтому не будем здесь выписывать.

Рассмотрим подробнее тот практически важный случай, когда φ , обусловленное наличием одного уровня, близко к единице, т.е. когда каждый отдельный уровень поглощает малую часть нейтронов.

Считая для простоты, что замедлитель содержит ядра только одного сорта, мы будем предполагать, что выполняется условие

$$\beta = \int_{E'}^{\infty} W(E) \frac{dE}{E} \ll 1, \quad (25.1)$$

где $W(E)$ вероятность захвата, обусловленного одним уровнем, была определена в (24.1'). Мы увидим далее, что условие $\beta \ll 1$ приводит к результату $1 - \varphi \ll 1$, где φ – вероятность избежать резонансного захвата одним уровнем. Заметим, что, строго говоря, (25.1) представляет собой менее жесткое условие, чем требование малости $1 - \varphi$, так как (см. ниже)

$$1 - \varphi = \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon} \beta > \beta. \quad (25.6)$$

Обратимся к основному уравнению

$$\varphi(E) = \frac{1 - W(E)}{(1 - \varepsilon)E} \int_{\varepsilon E}^E \varphi(u) du \quad (25.2)$$

и разложим $\varphi(E)$ в ряд по степеням β

$$\varphi(E) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \varphi_k(E). \quad (25.3)$$

Вводя обозначение

$$W(E) = \beta W_0(E),$$

получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \varphi_k(E) = \frac{1 - \beta W_0(E)}{(1 - \varepsilon)E} \int_{\varepsilon E}^E \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \varphi_k(u) du. \quad (25.4)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях β , найдем

$$\varphi_k(E) = \frac{1}{(1 - \varepsilon)E} \int_{\varepsilon E}^E \varphi_k(u) du - \frac{W_0(E)}{(1 - \varepsilon)E} \int_{\varepsilon E}^E \varphi_{k-1}(u) du, \quad (25.5)$$

$\varphi_{-1} \equiv 0$.

Полагая здесь $k = 0$, получим

$$\varphi_0(E) = \frac{1}{(1 - \varepsilon)E} \int_{\varepsilon E}^E \varphi_0(u) du. \quad (25.6)$$

Рассматривая случай слабого поглощения, мы должны считать

$$\varphi_0(E) = 1. \quad (25.6')$$

Соотношение (25.5) приводит при $k = 1$ к уравнению

$$\varphi_1(E) = \frac{1}{(1 - \varepsilon)E} \int_{\varepsilon E}^E \varphi_1(u) du - W_0(E). \quad (25.7)$$

Мы получили неоднородное интегральное уравнение, для решения которого применим преобразование Лапласа-Меллина.

Введем обозначения

$$\Psi_s = \int_0^\infty E^{s-1} \varphi_1(E) dE = \int_{E'}^\infty E^{s-1} \varphi_1(E) dE, \quad \operatorname{Re} s = -a < 0,$$

$$V_s = \int_0^\infty W_0(E) E^{s-1} dE = \int_{E'}^\infty E^{s-1} W_0(E) dE \quad (25.8)$$

(мы заменили нижний предел интегрирования на E' , т.к. при $E < E'$ $\varphi = 1$, $\varphi_1 = 0$). Величину a следует выбрать столь большой, чтобы первый интеграл сходился (второй интеграл в силу условия (25.1) сходится, очевидно, при любом $\operatorname{Re} s \leq 0$).

Умножим (25.7) на E^{s-1} и проинтегрируем по E , в результате получим

$$\Psi_s = \int_0^\infty \frac{E^{s-2}}{1 - \varepsilon} dE \int_{\varepsilon E}^E \varphi_1(u) du - V_s. \quad (25.9)$$

Входящий сюда интеграл легко вычисляется:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{E^{s-2}}{1 - \varepsilon} dE \int_{\varepsilon E}^E \varphi_1(u) du &= \int_0^\infty \frac{\varphi_1(u) du}{1 - \varepsilon} \int_u^{u/\varepsilon} E^{s-2} dE = \\ &= \frac{(1/\varepsilon)^{s-1} - 1}{(1 - \varepsilon)(s - 1)} \Psi_s. \end{aligned} \quad (25.10')$$

Итак,

$$\Psi_s = \Psi_s \frac{(1/\varepsilon)^{s-1} - 1}{(1 - \varepsilon)(s - 1)} - V_s.$$

Откуда

$$\Psi_s = V_s \left[\frac{(1/\varepsilon)^{s-1} - 1}{(1 - \varepsilon)(s - 1)} - 1 \right]^{-1}. \quad (25.10)$$

Пользуясь формулой обращения, получим

$$\varphi_1(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a-i\infty}^{-a+i\infty} \frac{V_s E^{-s}}{\frac{(1/\varepsilon)^{s-1}-1}{(1-\varepsilon)(s-1)} - 1} ds. \quad (25.11)$$

Чтобы найти $\lim_{E \rightarrow \infty} \varphi(E)$, заметим, что при достаточно большом E вероятность $W(E)$ может считаться равной нулю. Пусть при $E > E_0$ $W(E) = 0$. Легко видеть, что при $\operatorname{Re} s > 0$

$$|V_s| < E^{\operatorname{Re} s}.$$

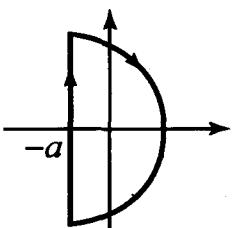


Рис. 25

Поэтому при $E > E_0$ интеграл (25.11) можно вычислить, замыкая контур интегрирования, как показано на рис.25. Подинтегральная функция имеет в качестве полюсов только нуль знаменателя, причем все они, кроме полюса $s = 0$, лежат в правой полуплоскости.

Поэтому все вычеты подинтегральной функции, кроме вычета относительно точки $s = 0$, стремятся к нулю с возрастанием E . Отсюда следует, что предел $\varphi_1(\infty)$ равен

$$\varphi_1(\infty) = -\frac{V_0}{\frac{d}{ds} \left[\frac{(1/\varepsilon)^s - 1}{(1-\varepsilon)(s-1)} - 1 \right]_{s=0}} = -\frac{V_0(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon}. \quad (25.12)$$

Пользуясь формулой (25.8) для V_s , получим

$$\varphi_1(\infty) = -\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon} \int_{E'}^{\infty} W_0(E) \frac{dE}{E}. \quad (25.13)$$

Переходя от φ_1 и W_0 к величинам φ и W , найдем окончательно

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \varphi(E) = 1 - \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon} \int_{E'}^{\infty} W(E) \frac{dE}{E}. \quad (25.14)$$

Положив здесь $\varepsilon = 0$, получим формулу, справедливую в том случае, когда замедлителем является водород:

$$\varphi_H = 1 - \int_{E'}^{\infty} W(E) \frac{dE}{E}. \quad (25.14')$$

Сравнивая эту формулу с формулой (25.14) и считая в них функцию $W(E)$ одинаковой, получим соотношение

$$1 - \varphi = (1 - \varphi_H) \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon}, \quad (25.15)$$

из которого следует, что резонансное поглощение в нейводородном замедлителе больше, чем в водороде (при одинаковом $W(E)$).

Это обстоятельство связано с тем, что водород отличается наибольшей замедляющей способностью. Ясно, что чем меньше скорость замедления, тем больше времени проводят замедляющийся нейtron в опасной зоне вблизи уровней резонансного поглощения и тем больше поэтому вероятность захвата.

Переходя от φ , обязанного одному уровню, к общему φ с учетом всех резонансных уровней, получим

$$\varphi = \prod_i \left[1 - \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon} \int W_i(E) \frac{dE}{E} \right], \quad (25.16)$$

где $W_i(E)$ – вероятность захвата, обусловленного i -м уровнем.

Эта формула справедлива в том случае, если для всех уровней выполняется условие

$$\int W_i(E) \frac{dE}{E} \ll 1. \quad (25.17)$$

Если к этому же для всех уравнений выполнено более жесткое условие

$$\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon} \int W_i(E) \frac{dE}{E} \ll 1,$$

то есть малость резонансного поглощения каждым уровнем, то мы можем представить φ в следующем виде:

$$\varphi = \exp \left[-\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon} \int W \frac{dE}{E} \right], \quad (25.18)$$

где интеграл $\int W \frac{dE}{E}$, также как и в §22, определяется как сумма интегралов $\int W_i \frac{dE}{E}$, каждый из которых относится к отдельному резонансному уровню.

В §22 мы видели, что в случае водородного замедлителя φ имело вид

$$\varphi_H = e^{-\int W \frac{dE}{E}}. \quad (25.19)$$

Сравнение формул (25.18), (25.19) показывает, что при одинаковых $\int W \frac{dE}{E}$ имеет место соотношение

$$\varphi = (\varphi_H)^{\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon}}. \quad (25.20)$$

Отметим, что для применения формул (25.20), (25.18) требуется выполнение лишь одного условия: вероятность поглощения отдельным уровнем должна быть мала. Общее φ , обусловленное действием всех уровней, может сильно отличаться от единицы.

Благодаря этому, формула (25.20) охватывает практически все наиболее важные случаи резонансного поглощения в однородных системах.

Заметим, что для протекания цепной реакции в системах с естественным ураном φ должно дать больше 0,7, поэтому $1 - \varphi$ для каждого из уровней меньше 0,3, т.е. мало по сравнению с единицей.

Это показывает, что условия применимости формул (25.18) и (25.20) практически выполнены.

§26. Малые блоки¹⁴

В предыдущих параграфах мы рассмотрели резонансное поглощение в однородных системах, когда плотность вещества, ядра которого способны резонансно захватывать нейтроны, одинакова вдоль всей системы.

Мы покажем теперь, что резонансное поглощение можно уменьшить, если вещество, захватывающее нейтроны (например, уран), распределить неравномерно, сосредоточив его в виде отдельных блоков, разделенных замедлителем.

Легко понять причину, вследствие которой применение системы блоков приводит к уменьшению резонансного поглощения.

В случае однородной смеси захватывающего вещества и замедлителя нейтроны, замедлившись до резонансных энергий, продолжают двигаться в среде с равномерным повсюду содержанием захватывающего вещества и поэтому с большой вероятностью поглощаются ядрами последнего. Если же захватывающий элемент расположен в виде блоков, то при достаточно больших расстояниях между ними нейtron может стать тепловым раньше, чем он дойдет до блока. Иными словами, если

¹⁴Теория резонансного поглощения в гетерогенных системах (малые блоки) была построена И.И.Гуревичем и И.Я.Померанчуком в 1943 г. (И.И.Гуревич, И.Я.Померанчук, Отчет Лаб. № 2, 1943) и опубликована в [7]. (Прим. ред.)

энергия, теряемая при переходе от одного блока к другому, достаточно велика, то вероятность того, что нейтрон подойдет к блоку с энергией, в точности равной резонансной, будет относительно малой. Вследствие этого резонансное поглощение в блоковой системе меньше, чем в однородной.

Переходя к изучению блоковых систем, начнем с рассмотрения малых блоков, имеющих шарообразную форму.

Пусть радиус блока r меньше длины свободного пробега l , нейтронов в замедлителе. При выполнении этого условия можно пренебречь возмущением нейтронного поля, вызываемым присутствием блоков, и считать нейтронное поле так же, как и в случае гомогенных систем, однородным, не меняющимся при переходе от одного блока к другому.

Если нейтронное поле является однородным, то имеет смысл по-прежнему пользоваться введенной ранее функцией $\varphi(E)$. Наша задача сводится к нахождению в случае блоковой системы относительной вероятности захвата W , входящей в уравнение для $\varphi(E)$.

Будем рассматривать блоковую систему как однородную смесь ядер замедлителя и блоков вещества, захватывающего нейтроны. Иными словами, будем трактовать малые блоки, как некоторый газ примесей,

Определим длину пробега нейтрона по отношению к столкновениям с блоками. Обозначим число последних в единице объема через N . Если n_0 и n – числа ядер захватывающего элемента в единице объема блока и единице объема смеси замедлителя и блоков, то N равняется

$$N = \frac{n}{\frac{4\pi r^3}{3} n_0}, \quad (26.1)$$

где r – радиус блока.

Длина пробега нейтрона по отношению к столкновениям с блоками, которую мы обозначим через Λ_s , равна

$$\Lambda_s = \frac{1}{N\sigma}, \quad (26.2)$$

где $\sigma = \pi r^2$ представляет собой эффективное сечение столкновения нейтрона со сферой радиуса r .

Определим теперь длину пробега нейтрона по отношению к захвату его блоками. Обозначая эту длину через Λ_c , будем

иметь

$$\Lambda_c = \frac{1}{N\pi r^2 \xi}, \quad (26.3)$$

где ξ - коэффициент "прилипания" нейтрона к блоку.

Для нахождения ξ рассмотрим сферу радиуса r в однородном нейтронном потоке (см. рис.26, v означает скорость нейтронов). Обозначим путь нейтрона в блоке через a .

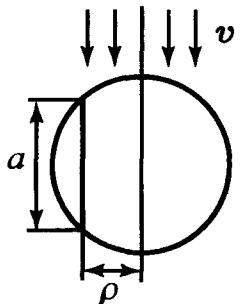


Рис. 26

Найдем распределение падающих нейтронов по величинам пробегов a . Распределение по величинам прицельных параметров ρ дается, как известно, формулой $A\rho d\rho$ (A - постоянная). Так как $\rho^2 + \frac{a^2}{4} = r^2$, то распределение по величинам пробегов a будет

$$W(a)da = Bada. \quad (26.4')$$

Постоянную B определяем из условия нормировки

$$\int_0^{2r} W(a)da = 1.$$

Откуда

$$B = \frac{1}{2r^2}$$

и

$$W(a)da = \frac{ada}{2r^2}. \quad (26.4)$$

Вероятность того, что нейtron, попавший в блок, пройдет путь без захвата, равна $e^{-a\sigma_c n_0}$ ($\sigma_c(E)$ - сечение захвата нейтрона с энергией E веществом блока). Поэтому вероятность поглощения нейтрона на этом пути равна

$$\xi(a) = 1 - e^{-a\sigma_c n_0}.$$

Мы получим коэффициент "прилипания" ξ , усреднив эту вероятность по всем значениям a :

$$\xi(E) = \frac{1}{2r^2} \int_0^{2r} (1 - e^{-a\sigma_c n_0}) da = 1 - \frac{2}{\mu^2} + \frac{2}{\mu} e^{-\mu} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right), \quad (26.5)$$

где

$$\mu = 2rn_0\sigma_c(E).$$

Относительная вероятность захвата $W(E)$ может быть представлена в виде

$$W(E) = \frac{1/\Lambda_c}{1/\Lambda_c + 1/l_s} = \frac{\xi}{\xi + \frac{4}{3} \frac{r}{l_s} \frac{n_0}{n}}. \quad (26.6)$$

В основу дальнейших расчетов положим общую формулу (25.18), определяющую $\ln \varphi$:

$$-\ln : \varphi = \sum_i \frac{1}{E_i} \int_0^\infty W_i(E) dE \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon}, \quad (26.7)$$

где

$$W_i(E) = \frac{\xi_i(E)}{\xi_i(E) + \frac{r}{\rho}},$$

$$\rho = \frac{3}{4} \frac{n}{n_0} l_s \quad (26.7')$$

($\xi(E)$ определяется по формуле (26.5), в которую вместо σ_c следует поставить $\sigma_c^i(E)$ - сечение захвата, обусловленного наличием i -го резонансного уровня).

Начнем с рассмотрения предельного случая очень малых блоков, радиус которых удовлетворяет неравенству

$$\sigma_c(E_i)n_0r \ll 1, \quad (26.8)$$

где $\sigma_c(E_i)$ сечение захвата при резонансе ($E = E_i$).

Заменяя в этом случае $e^{-n_0a\sigma_c}$ на $1 - n_0a\sigma_c$, найдем коэффициент прилипания

$$\xi = \sigma_c(E)n_0 \int_0^{2r} \frac{a^2 da}{2r^2} = \frac{4}{3} r \sigma_c(E) n_0. \quad (26.9)$$

Согласно (26.6), $W(E)$ будет равно

$$W(E) = \frac{\frac{4}{3} r \sigma_c(E) n_0}{\frac{4}{3} r \sigma_c(E) n_0 + \frac{4}{3} \frac{r}{l_s} \frac{n_0}{n}} = \frac{\sigma_c(E)}{\sigma_c(E) + \frac{n_0 \sigma_c}{n}} \quad (26.10)$$

(σ_c - сечение рассеяния, n_s - число ядер рассеивателя в единице объема). Это выражение совпадает с полученным ранее для однородной системы.

Таким образом, если $r \ll r_0 = [n_0 \sigma_c(E_i)]^{-1}$, то остаются в силе результаты, относящиеся к однородным системам.

Условие $r \ll r_0$ означает, что блоки поглощают малую долю падающих на них нейтронов даже в центре линии поглощения.

Оценим порядок величины r_0 для урановой системы. Считая $\sigma_0 \sim 10^{-20} \text{ см}^2$, $n_0 \sim 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, получим $r_0 \sim 2 \cdot 10^{-3} \text{ см}$.

Покажем теперь, что результаты, относящиеся к однородным системам, остаются справедливыми и в том случае, когда радиус блока r превосходит r_0 , если только $r < \rho = \frac{3}{4} \frac{n}{n_0} l_s$ (последняя величина обычно больше r_0 для графитовых и дейтоновых систем, $\rho \sim 2 \cdot 10^{-2} \text{ см}$, $r_0 \sim 2 \cdot 10^{-3} \text{ см}$).

Заметим прежде всего, что в том случае, когда $r \ll r_0$, величина $\sigma_c(E)n_0r$ мала по сравнению с единицей для всех значений, в том числе и в центре линии поглощения.

Если радиус блока больше r_0 , но меньше ρ , то условие $\sigma_c(E_i)n_0r < 1$ не имеет места, однако, наиболее существенную роль в интеграле (26.7) играют значения энергии, далекие от центра линии, для которых выполняется неравенство $\sigma_c(E_i)n_0r \ll 1$.

Это обстоятельство разъясняет рис.27, на котором схематически изображен ход зависимости $W(E)$ от энергии в том случае, когда $r \ll \rho$. Вблизи центра линии $W(E) \approx 1$, с увеличением энергии функция $W(E)$ медленно уменьшается и становится равной $1/2$ при $E = E_m$, где E_m определяется из условия

$$\xi(E_m) = \frac{r}{\rho}.$$

Так как $\frac{r}{\rho} \ll 1$, то E_m лежит далеко от центра линии. Ясно, что значения энергии, находящиеся в непосредственной близости к центру линии E_i , не играют исключительной роли в интеграле $\int W dE$; существенные значения энергии вплоть до $E = E_m$. Можно считать, что в этой области энергий почти всюду выполняется условие $\sigma_c(E)n_0r \ll 1$. Поэтому так же,

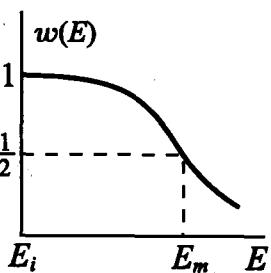


Рис. 27

как и в случае $r \ll r_0$, мы можем заменить при вычислении коэффициента прилипания $\xi e^{-n_0 \sigma_c a}$ на $1 - n_0 \sigma_c a$. В результате получим прежнее выражение для ξ .

Отсюда следует, что $W(E)$ будет выражаться формулой (26.10), справедливой для гомогенных систем.

Назовем ρ радиусом гомогенизации. Мы показали, следовательно, что если радиус блока меньше радиуса гомогенизации, то вероятность резонансного поглощения в блоковой системе не отличается от вероятности резонансного поглощения в однородной системе.

Выясним теперь, как меняется $\varphi(E)$, если радиус блока возрастает от $r = \rho$ до $r = l_s$, (концентрации элементов считаем неизменными).

Рассмотрим тот случай, когда $r \gg \rho$.

Если $r \gg \rho$, то интеграл, входящий в (26.7), можно приближенно представить в виде

$$\begin{aligned} \int_0^\infty W(E)dE &= \frac{\rho}{r} \int_0^\infty \xi(E)dE = \\ &= \frac{\rho}{2r^3} \int_0^\infty dE \int_0^{2r} (1 - e^{-a\sigma_c(E)n_0})ada. \end{aligned} \quad (26.11)$$

В этом интеграле несущественны малые a . Поэтому область существенных значений энергии ΔE определяется из условия, что величина $r\sigma_c(E)n_0$ должна быть больше или порядка единицы:

$$r\sigma_c(E)n_0 \geq 1.$$

Заметим, что если выполняется условие $r n_0 \sigma_c(E) \gg 1$, то значение интеграла (26.11) практически не зависит от точного вида $\sigma_c(E)$ вблизи центра линии.

Для проверки этого утверждения выясним, при каких условиях область существенных значений энергии ΔE будет больше допплеровской ширины. Пользуясь естественной формой линии поглощения, мы получим из условия $r\sigma_c(E)n_0 \geq 1$ соотношение

$$\sigma_0 \frac{rn_0 \Gamma^2}{4((\Delta E)^2 + \Gamma^2/4)} \sim 1.$$

Считая $\Delta E \gg \Gamma$, найдем

$$\Delta E \sim \frac{\Gamma}{2} \sqrt{\sigma_0 r n_0}.$$

Отношение ΔE к допплеровской ширине Δ равно

$$\frac{\Delta E}{\Delta} \cong \frac{\Gamma}{2} \frac{\sqrt{\sigma_0 r n_0}}{2 \sqrt{\frac{m}{M} E k T}} = \frac{\Gamma}{4} \sqrt{\frac{M}{m} \frac{\sigma_0 r n_0}{E k T}}.$$

Полагая $r \sim 1$ см, $\sigma \sim 500 \cdot 10^{-24}$ см², $E \sim 5$ эВ, $kT \sim \frac{1}{40}$ эВ, $\Gamma \sim 0,05$ эВ, найдем

$$\frac{\Delta E}{\Delta} \sim 2 - 3. \quad (26.11')$$

При таких значениях ΔE влияние эффекта Допплера не слишком существенно. (Следует однако отметить, что для более высоко расположенных уровней величина ΔE может оказаться сравнимой с Δ .)

Таким образом, действительно, точная форма линии поглощения не существенна.

Этим обстоятельством мы воспользуемся для вычисления интеграла, а именно, будем исходить из следующей приближенной формулы для $\sigma_c(E)$:

$$\sigma_c(E) = \sigma_c(E_i) \frac{\Gamma_i^2}{4(E - E_i)^2}. \quad (26.12)$$

Эта формула справедлива вдали от центра линии, так как в этой области линия поглощения всегда имеет естественную форму. При $E = E_i$ она дает $\sigma_c(E_i) = \infty$, т.е. условие $r n_0 \sigma_c(E_i) \gg 1$ выполняется. Поэтому при вычислении интеграла (26.11) формулой (26.12) можно пользоваться повсюду.

Подставляя (26.12) в (26.11), получим следующее выражение для $\int_0^\infty W_i(E) dE$:

$$\int_0^\infty W_i(E) dE = \frac{\rho}{2r^3} \int_0^{2r} da \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - e^{-\beta/u^2}\right) du, \quad (26.13)$$

где

$$\beta = \frac{\Gamma_i^2}{4} \sigma_c(E_i) n_0 a.$$

Чтобы вычислить интеграл

$$J(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - e^{-\beta/u^2}\right) du, \quad (26.13')$$

продифференцируем его по β :

$$J'(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta/u^2} \frac{du}{u^2} = 2 \int_0^\infty e^{-\beta z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}},$$

откуда, принимая во внимание, что $J(0) = 0$, найдем

$$J(\beta) = 2\sqrt{\pi\beta}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty W_i(E) dE &= \frac{\rho}{2r^3} \Gamma_i \sqrt{\pi \sigma_c(E_i) n_0} \int_0^{2r} a^{3/2} da = \\ &= \frac{4}{5} \sqrt{2\pi} \frac{\rho \Gamma_i}{\sqrt{r}} \sqrt{\sigma_c(E_i) n_0}. \end{aligned} \quad (26.14)$$

Подставляя (26.14) в (26.7), найдем $\ln \varphi$:

$$-\ln \varphi = \frac{4}{5} \sqrt{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{r}} \sum_i \frac{\Gamma_i}{E_i} \sqrt{n_0 \sigma_c(E_i)} \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon}, \quad (26.15)$$

откуда

$$\varphi = e^{-C/\sqrt{r}}, \quad C = \frac{4}{5} \sqrt{2\pi} \rho \sum_i \frac{\Gamma_i}{E_i} \sqrt{n_0 \sigma_c(E_i)} \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon}. \quad (26.16)$$

Из этой формулы следует, что при увеличении r величина φ возрастает.

Это заключение относится к блокам, радиус которых заключен в пределах $\rho < r < l_s$. К большим блокам изложенная теория неприменима, т.е. она не учитывает искажений нейтронного поля, вызываемых присутствием блоков. Эти искажения начинают, очевидно, сказываться, если радиус блока становится по порядку величины равным длине пробега l_s . Поэтому предел применимости изложенной теории лежит при $r \sim l_s$.

Так как нейтронное поле предполагается однородным, то поглощение нейтронов в тепловой области не меняется по сравнению с гомогенной системой и величина $K = \nu\varphi\theta$ монотонно возрастает при увеличении радиуса блока от $r = \rho$ до $r = l_s$ при фиксированном ρ , т.е. при одновременном увеличении шага решетки. Изложенная теория не дает возможности ответить на вопрос, как меняется величина $\nu\varphi\theta$ для блоков, радиус которых превосходит l_s . Ясно, однако, что при определенных размерах блоков мы получим оптимальные условия, отвечающие максимуму $\nu\varphi\theta$. Этот оптимум лежит вне области $r < l_s$, и осуществляется для больших блоков. Таким образом, возникает задача определить наиболее выгодные размеры и форму блоков и установить, как они должны быть расположены, чтобы величина $\nu\varphi\theta$ была максимальной. Выбор оптимальных параметров блоковой системы или, как мы будем говорить, решетки, посвящен следующий параграф.

Если φ не очень отличается от единицы, то, введя величину $\psi = 1 - \varphi$, мы можем на основании (26.16) заключить, что резонансное поглощение падает с ростом r обратно пропорционально \sqrt{r} при фиксированном ρ :

$$\psi = \frac{\text{const}}{\sqrt{r}}, \quad \rho < r < l_s.$$

Резонансное поглощение в блоковой системе, состоящей из блоков, радиус которых порядка l_s , оказывается меньше резонансного поглощения в гомогенной системе в \sqrt{n} раз. Таким образом, блок-эффект в резонансном поглощении особенно велик у систем с малой концентрацией расщепляющегося материала. Это естественно, поскольку при фиксированном радиусе блока малая концентрация расщепляющегося материала осуществляется, когда блоки стоят далеко друг от друга.

Рассмотрим еще малые цилиндрические блоки, радиус которых мал по сравнению с длиной свободного пробега рассеяния в замедлителе и в блоке. Будем считать, что эти цилиндры расположены параллельно друг другу.

Мы применим здесь иной метод расчета, чем в случае сферических блоков, имея в виду использовать этот метод при расчете резонансного поглощения большими блоками (см. §29).

Введем коэффициент прилипания нейтронов ζ к цилиндрическому блоку. Если нейtron проходит в блоке путь l , то веро-

ятность поглощения нейтрона на этом пути будет

$$\zeta(l) = 1 - e^{-\sigma_c(E)n_0 l}.$$

Для определения коэффициента прилипания ζ нужно усреднить $\zeta(l)$ по величинам пробегов l .

Используя малость блоков, мы можем в дальнейшем не учитывать рассеяние нейтронов в них. Найдем распределение нейтронов по величинам пробегов l .

Введем полярные координаты с осью z , совпадающей с образующей цилиндра.

Длина пути нейтрона внутри блока равна

$$l = \frac{2r \cos \chi}{\sin \theta}, \quad (26.17)$$

где χ - азимутальный угол. Коэффициент прилипания (усредненный по всем углам θ, χ) имеет вид

$$\zeta(E) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\chi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \left[1 - e^{-2\sigma_c(E)n_0 r \frac{\cos \chi}{\sin \theta}} \right] \cos \theta \cos \chi \quad (26.18)$$

(множитель $\cos \theta \cos \chi$ возникает от нормальной компоненты скорости нейтрона).

Зная $\zeta(E)$, легко найти вероятность поглощения нейтрона блоком.

Мы предполагаем блоки малыми, поэтому нейтронное поле n можно считать однородным (не путать n здесь с введенным ранее числом ядер захватывающего элемента в единице объема смеси замедлителя и блоков).

Число нейтронов с энергией E , которые поглощаются блоком в единицу времени, равно при этом

$$2\pi r \frac{v}{2} \zeta(E)n, \quad (26.19')$$

где v - скорость нейтронов. Это выражение отнесено к единице длины цилиндра, множитель $\frac{1}{2}$ при скорости учитывает тот факт, что только нейтроны, движущиеся по направлению к блоку, могут им поглотиться.

Разделив (26.19') на na^2 , где a^2 - средняя площадь, приходящаяся на цилиндр, мы найдем вероятность поглощения нейтрона $W(E)$, отнесенную к единице времени

$$W(E) = \frac{\pi r v \zeta(E)}{a^2}. \quad (26.19)$$

Входящая сюда величина a^2 в предположении однородности поля равна

$$a^2 = \pi r^2 \frac{n_0}{n_s c}, \quad (26.20)$$

где n_s - число ядер замедлителя в единице объема, c - концентрация делящегося вещества по числу ядер, которую следует здесь считать малой по сравнению с единицей.¹⁵

Для нахождения полной вероятности поглощения нейтрона нужно проинтегрировать (26.19) по времени.

Это интегрирование, как легко видеть, сводится в интегрированию по энергии. Действительно, мы предполагаем нейтронное поле однородным, поэтому диффузационное уравнение (5.20) имеет в этом случае вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial n}{\partial \tau},$$

из которого следует, что мы можем заменить dt на $\frac{d\tau}{D}$.

Согласно (5.20), получим

$$dt = \frac{d\tau}{D} = \frac{1}{D} \frac{d\tau}{dE} dE = \frac{l\psi}{v} \frac{dE}{E}, \quad (26.21)$$

где ψ определено в (5.14').

Таким образом, интегрирование по времени сводится к интегрированию по энергии. В этом интегрировании существенны области энергии, расположенные вблизи резонансных уровней.

В соответствии с формулой (26.19) мы можем написать следующее выражение для величины φ :

$$\varphi = \prod_i \left\{ 1 - \frac{\pi r l\psi}{a^2 E_i} \int_{(i)} \zeta(E) dE \right\}, \quad (26.22)$$

¹⁵В случае регулярной решетки цилиндрических блоков a^2 равно площади ячейки. (Прим.ред.)

где индекс i у интеграла означает, что интегрирование производится вблизи i -го уровня.

Произведение распространяется на все резонансные уровни E_i (мы вынесли за знак интеграла значение энергии при резонансе).

Вычислим интеграл $\int_{(i)} \zeta(E) dE$.

Используя для сечения захвата выражение (26.12) и произведя те же преобразования, что и при выводе формулы (26.13), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\pi r l\psi}{a^2 E_i} \int_{(i)} \zeta(E) dE &= \frac{2rl\psi}{a^2 E_i} \int_0^{\pi/2} d\chi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \chi \cos \theta \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[1 - e^{-\sigma_c(E_i) \frac{\Gamma_i^2 n_0 r \cos \chi}{2x^2 \sin \theta}} \right] = \frac{l\psi r}{a^2 E_i} \sqrt{8\pi r n_0 \sigma_c(E_i) \Gamma_i^2} \times \\ &\times \int_0^{\pi/2} d\chi \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^3 \chi} \sqrt{\sin \theta} \cos \theta d\theta = \frac{2\Gamma(\frac{1}{4})}{9} \frac{l\psi r^{3/2} \Gamma_i}{a^2 E_i} \sqrt{n_0 \sigma_c(E_i)}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\varphi = \prod_i \left(1 - \frac{2\Gamma(\frac{1}{4})}{9} \frac{l\psi r^{3/2} \Gamma_i}{a^2 E_i} \sqrt{n_0 \sigma_c(E_i)} \right). \quad (26.23)$$

Если поглощение каждым уровнем мало, то аналогично тому, как это было сделано при выводе (25.18), можно представить (26.23) в виде

$$\varphi = \exp \left[-\frac{2\Gamma(\frac{1}{4})}{9} \frac{l\psi r^{3/2}}{a^2} \sum_i \frac{\Gamma_i}{E_i} \sqrt{n_0 \sigma_c(E_i)} \right]. \quad (26.24)$$

Это выражение показывает, что резонансное поглощение, обусловленное одним блоком, пропорционально не площади перечного сечения блока, а $r^{3/2}$. Заметим, что аналогичная ситуация имеет место и для блоков сферической формы, где, согласно (26.15), поглощение, обусловленное одним блоком, пропорционально $r^{5/2}$, а не объему сферы (множитель ρ , входящий в (26.14), пропорционален r^3).

Подставляя в (26.24) вместо a^2 выражение (26.20), получим:

$$\varphi = \exp \left[-\frac{2\Gamma(\frac{1}{4})}{9\pi} \frac{n_s l \psi c}{\sqrt{n_0 r}} \sum_i \frac{\Gamma_i}{E_i} \sqrt{\sigma_c(E_i)} \right]. \quad (26.25)$$

Эта формула справедлива, если r заключено в пределах

$$\rho \sim cl_s \ll r \ll l_s.$$

Сравнение (26.25) с формулой (22.22), относящейся к случаю однородной системы, показывает, что если $1 - \varphi$ мало по сравнению с единицей, то имеет место соотношение

$$1 - \varphi \sim (1 - \varphi)_{\text{гом}} \frac{\sqrt{cl_s}}{r}. \quad (26.26)$$

Аналогичная формула справедлива и для сферических блоков.

Сравнение (26.24) и (26.16) показывает, что резонансное поглощение цилиндрами обнаруживает ту же зависимость от r , что и для шаров. При неизменной концентрации c с увеличением радиуса цилиндра $\ln \varphi$ падает обратно пропорционально корню квадратному из радиуса. Блоковая цилиндрическая система при $\rho \sim l_s$ имеет резонансное поглощение примерно в \sqrt{c} раз меньше, чем в гомогенной системе с той же концентрацией.

ГЛАВА IV

НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

§27. Теория бесконечной решетки. Выбор оптимальных параметров

В предыдущем параграфе мы говорили, что только в случае малых блоков можно пренебречь возмущением нейтронного поля, вызываемым присутствием блоков. Большие блоки вызывают сильное искажение нейтронного поля. При определении последнего нельзя, вообще говоря, пользоваться диффузионным рассмотрением. Это обстоятельство приводит к большим математическим трудностям при построении точной теории блоковых систем.

Мы изложим здесь приближенную теорию, дающую возможность произвести выбор оптимальных параметров решетки. В этой теории мы исходим из диффузионного рассмотрения, считая, что и тепловые и быстрые нейтроны подчиняются уравнениям диффузионного типа, наличие же блоков вместе с примыкающей к ним областью, где нейтронное поле особенно сильно искажено присутствием блоков, заменяем некоторыми граничными условиями.

Следует иметь в виду, что излагаемая теория является макроскопической; поэтому граничные условия, о которых идет речь, теорией не устанавливаются, а предполагаются известными из опыта.

В первом приближении их можно установить, пользуясь диффузионным рассмотрением.

Рассмотрим поле тепловых нейтронов.

Плотность тепловых нейтронов $N(r, t)$ вдали от блоков удовлетворяет диффузионному уравнению

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \Delta N - \frac{N}{T} + q, \quad (27.1)$$

где D - коэффициент диффузии тепловых нейтронов, T - время их жизни по отношению к поглощению в замедлителе и q - плотность источников тепловых нейтронов. Этими источниками служат блоки, в которых рождаются быстрые нейтроны, замедляющиеся затем до тепловых скоростей.

Как сказано выше, уравнение (27.1) справедливо вдали от блоков. Вблизи блоков на расстояниях меньших или порядка длины свободного пробега из-за сильного поглощения нейтронов диффузионное рассмотрение, строго говоря, не применимо.

Диффузионное рассмотрение справедливо вплоть до поверхностей, находящихся от блока на расстоянии порядка длины свободного пробега. При этом на таких поверхностях должны быть удовлетворены граничные условия, отличные от диффузионных.

Мы будем, однако, пользоваться уравнением (27.1) везде, вплоть до поверхностей самих блоков, считая, что на этих поверхностях выполняются некоторые эффективные граничные условия, отличающиеся, конечно, от граничных условий диффузионного типа.

Мы предположим, что у поверхности блока плотность тепловых нейтронов имеет такой же вид, как в некотором эквивалентном однородном нейтронном поле, возмущенном присутствием данного блока. Это эквивалентно предположению, что поле, создаваемое всеми стержнями, кроме данного, почти не отличается от однородного вблизи данного блока. Такое предположение выполняется, если радиус блока мал по сравнению с расстоянием между ними.

Возвратимся к уравнению (27.1) и выясним, какой вид имеет q .

Найдем предварительно число быстрых нейтронов, испускаемых блоком. Каждый тепловой нейtron, поглощенный блоком, дает $\nu\theta_0$ новых быстрых нейтронов, где ν - число рождающихся нейтронов, отнесенное к одному акту захвата ядром мультилиплицирующего вещества, а θ_0 - относительная вероятность захвата нейтрона ядром этого вещества, а не каких-либо иных веществ, могущих содержаться в блоке (например, U^{238} в естественном уране).

Индекс нуль при θ поставлен для того, чтобы не путать величину θ_0 с введенной нами ранее при рассмотрении гомогенных систем величиной θ , учитывающей возможность захвата нейтронов ядрами замедлителя.

Если i_α - ток тепловых нейтронов на блок, центр которого расположен в точке r_α (в случае цилиндрических блоков i_α - ток, отнесенный к единице длины цилиндра), то общее число быстрых нейтронов, возникающих в блоке в единицу времени, равно $i_\alpha\nu\theta_0$.

Для нахождения q предположим сперва, что резонансный захват нейтронов отсутствует. В этом случае $q(r)$ можно, очевидно, представить в виде

$$q(r) = \nu\theta_0 \sum i_\alpha W_\tau(r - r_\alpha), \quad (27.2)$$

где $W_\tau(r - r_\alpha)$ - вероятность того, что нейtron, родившийся быстрым в точке r_α , сделается тепловым в точке r .

В случае блоков, размеры которых малы по сравнению с длиной замедления, и занимающих малую долю объема, функция $W_\tau(r - r_\alpha)$ имеет, как мы знаем, следующий вид:

$$W_\tau(r - r_\alpha) = \frac{e^{-\frac{(r-r_\alpha)^2}{4\tau}}}{(4\pi\tau)^{3/2}}, \quad (27.3)$$

согласно (5.27), $\tau = A \ln \frac{E_0}{E}$ (E - энергия нейтрона, E_0 - начальная энергия рождающихся при делении нейтронов, $A = const$).

Мы в дальнейшем будем рассматривать тот случай, когда блоки имеют форму параллельных друг другу стержней. Для этого случая в двумерной плоской геометрии

$$W_\tau(r - r_\alpha) = \frac{e^{-\frac{(r-r_\alpha)^2}{4\tau}}}{4\pi\tau}. \quad (27.4)$$

Учтем теперь влияние резонансного поглощения. Будем для простоты предполагать, что имеется только один резонансный уровень.

Предположим далее, что ширина "опасной" зоны (см. §22) мала по сравнению с энергией, теряемой в среднем нейтроном при одном столкновении с ядром замедлителя. При этих предположениях резонансное поглощение эквивалентно наличию монохроматического "отрицательного" источника, т.е. стока нейтронов с энергией E_r , равной энергии резонансного уровня.

Мы можем считать, что поле быстрых нейтронов, энергия которых меньше энергии стока, создается как бы двумя источниками: истинным источником с энергией E_0 и "отрицательным" источником с энергией E_r . Поэтому при $E < E_r$ мы имеем

$$q = \nu\theta_0 \sum_\alpha i_\alpha W_{\tau_T}(r - r_\alpha) - \sum_\alpha \psi_\alpha W_{\tau_r}(r - r_\alpha), \quad (27.5)$$

где $\tau_T = A \ln \frac{E_0}{kT}$; $\tau_r = A \ln \frac{E_r}{kT}$, ψ_α - величина, характеризующая интенсивность "стока" нейтронов.

Для того, чтобы определить эту величину, заметим, что при резонансе происходит "выедание" нейтронного поля, пропорциональное невозмущенной функции $\sum_\alpha i_\alpha W_{\tau_r}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha)$,

$\tau_r = A \ln \frac{E_0}{E_r}$, взятой в месте расположения блока. Иными словами, можно считать, что ψ_α имеет следующий вид:

$$\psi_\alpha = \psi' \nu \theta_0 \sum_\beta i_\beta W_{\tau_r}(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta), \quad (27.6)$$

где ψ' - некоторая константа, которая уже не зависит от взаимного расположения блоков.

Мы будем предполагать число блоков очень большим (бесконечным) и считать, что они образуют правильную периодическую решетку. В этом случае i_α и ψ_α не зависят от индекса α . Поэтому выражение (27.5) приобретают следующий вид:

$$q = \nu \theta_0 i \sum_\alpha W_{\tau_T}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) - \nu \theta_0 i \psi \sum_\alpha W_{\tau_r}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha), \quad (27.7)$$

где

$$\psi = \psi' \sum_\beta W_{\tau_r}(\mathbf{r}_\beta) \quad (27.7')$$

(точка \mathbf{r}_α в (27.6) изъята за начало координат), i - ток тепловых нейтронов на блок.

Легко выяснить физический смысл величины ψ . Определим для этого общее число тепловых нейтронов, появляющихся в единицу времени во всей системе. Это число равно, очевидно, интегралу по всему объему от выражения (27.7). Так как $W_\tau(\mathbf{r})$ представляет собой вероятность, нормированную согласно условию

$$\int W_\tau(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1,$$

то

$$\int q(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \nu \theta_0 i (1 - \psi) S, \quad (27.8)$$

где S - число блоков.

Найдем число быстрых нейтронов, генерируемых в системе в единицу времени. Оно равно, очевидно, $i \nu \theta_0 S$.

Сравнение этого выражения с (27.8) показывает, что вероятность быстрому нейтрону дойти до тепловой области, не будучи резонансно захваченным, равна $1 - \psi$.

Ранее (см. §21) мы обозначали эту вероятность через φ . Итак

$$\varphi = 1 - \psi. \quad (27.9)$$

Перепишем теперь, пользуясь выражением (27.7), определяющим $q(\mathbf{r})$, основное дифференциальное уравнение (27.1) в виде

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \Delta N - \frac{N}{T} + i \nu \theta_0 \left\{ \sum_\alpha W_{\tau_T}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) - \psi \sum_\alpha W_{\tau_r}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) \right\}. \quad (27.10)$$

В дальнейшем мы будем интересоваться главным образом тем случаем, когда блоки имеют форму тонких бесконечно длинных параллельных друг другу цилиндров, образующих правильную периодическую решетку.

В этом случае достаточно рассмотреть нейтронное поле в плоскости перпендикулярной стержням. Подставляя в (27.10) вместо $W_\tau(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha)$ выражение (27.4), мы получим следующее уравнение для определения $N(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \Delta N - \frac{N}{T} + i \nu \theta_0 \left\{ \sum_\alpha \frac{e^{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha)^2}{4\tau_T}}}{4\pi\tau_T} - \psi \sum_\alpha \frac{e^{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha)^2}{4(\tau_T-\tau_r)}}}{4\pi(\tau_T-\tau_r)} \right\}, \quad (27.11)$$

где \mathbf{r} и \mathbf{r}_α - двухмерные векторы, лежащие в упомянутой выше плоскости, а Δ - двухмерный лапласиан.

Величина ψ , входящая в (27.11), может быть записана согласно (27.7') в виде

$$\psi = \psi_0 \sum_\alpha e^{-\frac{r_\alpha^2}{4\tau_r}}, \quad (27.12)$$

где константа ψ_0 не зависит от взаимного расположения стержней.

Решение уравнения (27.11) мы будем искать в виде

$$N(\mathbf{r}, t) = e^{\lambda t} N(\mathbf{r}), \quad (27.11')$$

где λ - экспонента размножения нейтронов.

Подставляя (27.11') в (27.11), получим следующее уравнение для определения функции $N(\mathbf{r})$:

$$\Delta N - \kappa^2 N = -\frac{i\nu\theta_0}{D} \left\{ \sum_{\alpha} \frac{e^{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\alpha})^2}{4\tau}}}{4\pi\tau} - \psi \sum_{\alpha} \frac{e^{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\alpha})^2}{4(\tau-\tau_r)}}}{4\pi(\tau-\tau_r)} \right\}, \quad (27.13)$$

где

$$\kappa^2 = \frac{\lambda}{D} + \frac{1}{DT}. \quad (27.14)$$

Переходя к исследованию этого уравнения, заметим, что наша конечная цель заключается в определении оптимальных параметров решетки. Последние должны находиться из условия максимума экспоненты размножения λ , или, согласно (27.14), из условия максимума величины κ^2 , входящей в стационарное уравнение (27.13).

Условие максимума величины κ^2 имеет простой физический смысл.

Действительно, представим себе, что мы искусственно добавляем в замедлитель некоторое количество поглотителя нейтронов и добиваемся того, что решение уравнения (27.11) становится стационарным; если при этом расположение стержней не является оптимальным, то, изменяв расстояния между стержнями, мы сможем добиться того, что при той же концентрации поглотителя будет иметь место нарастание плотности нейтронов со временем, отвечающее нестационарному решению уравнения (27.11). Представим себе теперь, что концентрация поглотителя такова, что плотность нейтронов стационарна при оптимальном расположении стержней. Ясно, что, сместив несколько стержней из их оптимальных положений, мы вызовем этим затухание во времени нейтронной плотности. Отсюда следует, что оптимальные параметры решетки могут быть найдены из условия максимальной "загрязненности" замедлителя, т.е. максимально возможной концентрации поглотителя, при которой уравнение (27.11) все еще имеет стационарное решение.

Это условие эквивалентно, очевидно, условию минимума времени захвата нейтронов в "загрязненном" замедлителе, т.е.

условию минимума диффузионной длины \tilde{L} "загрязненного" замедлителя. Последняя величина связана с κ соотношением

$$\tilde{L}^2 = \frac{1}{\kappa^2},$$

так что условию минимума \tilde{L}^2 соответствует условие максимума κ^2 , как об этом уже говорилось выше.

Для решения уравнения (27.13) представим его правую часть в виде интеграла Фурье, пользуясь формулами

$$e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{4\tau}} = \int a(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{qr}} d\mathbf{q},$$

$$a(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{4\tau} - i\mathbf{qr}}}{4\pi\tau} d\mathbf{r} = \frac{1}{4\pi^2} e^{-\tau q^2} \quad (27.15)$$

(\mathbf{r}, \mathbf{q} - двухмерные векторы). Уравнение (27.13) приобретает при этом следующий вид:

$$\Delta N - \kappa^2 N = -\frac{B}{4\pi^2} \sum_{\alpha} \left[\int e^{-\tau_{\alpha} q^2 + i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\alpha})} d\mathbf{q} - \psi \int e^{-(\tau_{\alpha} - \tau_r) q^2 + i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\alpha})} d\mathbf{q} \right], \quad (27.16)$$

где

$$B = \frac{i\nu\theta_0}{D}.$$

Ищем решение уравнения (27.16) в виде

$$N = \int N_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{qr}} d\mathbf{q} - B\beta \sum_{k,l} K_0(\kappa | \mathbf{r} - \mathbf{r}_{kl} |), \quad \beta = const, \quad (27.17)$$

где интеграл, стоящий в правой части этого уравнения, представляет собой частное решение уравнения (27.16), а сумма бесселевых функций $K_0(\kappa | \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha} |)$ есть решение однородного уравнения, имеющее особенности в местах расположения стержней.

Напомним, что функция $K_0(z)$, называемая также функцией Макдональда, имеет логарифмическую особенность в точке

$z = 0$. При малых значениях аргумента она имеет следующий вид:

$$K_0(z) = -\ln \frac{z}{2} - C, \quad (27.18)$$

где C – постоянная Эйлера.

Определим компоненту Фурье $N_{\mathbf{q}}$ функции N . Из уравнения (27.16) легко видеть, что

$$N_{\mathbf{q}} = \frac{B}{4\pi^2} \sum_{\alpha} \frac{e^{-q^2 r_{\alpha}} - \psi e^{-q^2(r_{\alpha} - r_r)}}{q^2 + \kappa^2} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_{\alpha}}. \quad (27.19)$$

Подставляя (27.19) в (27.17), получим плотность тепловых нейтронов в точке \mathbf{r} в виде (индекс t у τ опущен):

$$N(\mathbf{r}) = \frac{B}{4\pi^2} \int \left\{ \frac{e^{-q^2 \tau} - \psi e^{q^2(\tau - r_r)}}{q^2 + \kappa^2} \sum_{\alpha} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha})} \right\} d\mathbf{q} - B\beta \sum_{\alpha} K_0(\kappa | \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha} |). \quad (27.20)$$

Остается найти входящую в выражение для $N(\mathbf{r})$ постоянную β . Определим для этого число тепловых нейтронов, поглощаемых в единицу времени каким-либо стержнем. Пусть рассматриваемый стержень проходит через начало координат.

Поток тепловых нейтронов на стержень равен, очевидно,

$$i = D \left(2\pi \rho \frac{\partial N}{\partial \rho} \right)_{\rho=r_0}, \quad (27.21)$$

где ρ – радиус вектор, проведенный из стержня, r_0 – его радиус. Так как стержни мы считаем очень тонкими, то r_0 можно положить равным нулю.

Определим плотность нейтронов вблизи стержня. Пользуясь общим выражением (27.20) для $N(\mathbf{r})$, мы представим ее в виде

$$N(\rho) = -B\beta K_0(\kappa\rho) + \frac{B}{4\pi^2} \int \frac{e^{-q^2 \tau} - \psi e^{-q^2(\tau - r_r)}}{q^2 + \kappa^2} \sum_{\alpha} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_{\alpha}} d\mathbf{q} -$$

$$-B\beta \sum'_{\alpha} K_0(\kappa r_{\alpha}), \quad (27.22)$$

где штрих над суммой означает, что в сумме отсутствует член с $r_{\alpha} = 0$.

В выражении (27.22) мы выделили особенность – член, содержащий $K_0(\kappa\rho)$, а в остальных слагаемых суммы положили $\rho = 0$.

Ясно, что производная $\partial N / \partial \rho$ определяется только первым слагаемым – $B\beta K_0(\kappa\rho)$. Для вычисления ее мы можем воспользоваться асимптотическим выражением (27.18) для $K_0(z)$. Она равна:

$$\frac{\partial N}{\partial \rho} = B\beta \frac{1}{\rho}, \quad \rho \rightarrow 0 \quad (\rho^2 \ll DT). \quad (27.22')$$

Подставляя это выражение в (27.21), получим:

$$i = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(2\pi D \frac{\partial N}{\partial \rho} \right) = 2\pi\beta BD = 2\pi\beta i\nu\theta_0,$$

откуда

$$2\pi\beta = \frac{1}{\nu\theta_0}. \quad (27.23)$$

Используя найденное значение β , перепишем формулу для $N(\mathbf{r})$ в виде

$$N(\mathbf{r}) = \frac{i\nu\theta_0}{4\pi^2 D} \left\{ \int \left[\frac{e^{-q^2 \tau} - \psi e^{q^2(\tau - r_r)}}{q^2 + \kappa^2} \sum_{\alpha} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha})} \right] d\mathbf{q} - \frac{2\pi}{\nu\theta_0} \sum_{\alpha} K_0(\kappa | \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha} |) \right\}. \quad (27.24)$$

Приведем еще выражение для $N(\mathbf{r})$ вблизи стержня. Подставляя (27.23) в (27.22), получим:

$$N(\rho) = -\frac{i}{2\pi D} K_0(\kappa\rho) + \frac{i\nu\theta_0}{4\pi^2 D} \left\{ \int \left[\frac{e^{-q^2 \tau} - \psi e^{-q^2(\tau - r_r)}}{q^2 + \kappa^2} \times \sum_{\alpha} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_{\alpha}} \right] d\mathbf{q} - \frac{2\pi}{\nu\theta_0} \sum'_{\alpha} K_0(\kappa r_{\alpha}) \right\}. \quad (27.25)$$

Мы будем предполагать, что число стержней очень велико и что они расположены в виде правильной решетки. Последнее предположение означает, что радиус-вектор, определяющий положение стержня с индексом α , можно представить в виде

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{a}_1 k + \mathbf{a}_2 l,$$

где: \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 – базисные вектора решетки, а k и l целые числа, определяющие положение стержня.

Легко показать, что при сделанных предположениях в формулах (27.24), (27.25) может быть выполнено интегрирование по \mathbf{q} . Действительно, так как число стержней предполагается бесконечным, то имеет место формула

$$\sum_{\alpha} e^{-i\mathbf{qr}_{\alpha}} \equiv \sum_{k,l} e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{a}_1 k + \mathbf{a}_2 l)} = \frac{4\pi^2}{|\mathbf{[a}_1 \mathbf{a}_2]|} \delta(\mathbf{q} - 2\pi\mathbf{H}), \quad (27.26)$$

где $|\mathbf{[a}_1 \mathbf{a}_2]| = a^2$ – площадь элементарной ячейки, \mathbf{H} – вектор обратной решетки, равный

$$\mathbf{H} = \mathbf{h}_1 p_1 + \mathbf{h}_2 p_2,$$

$$\mathbf{h}_1 = \frac{[\mathbf{a}_2 \mathbf{h}]}{\mathbf{a}_1 [\mathbf{a}_2 \mathbf{h}]}, \quad \mathbf{h}_2 = \frac{[\mathbf{h} \mathbf{a}_1]}{\mathbf{a}_2 [\mathbf{h} \mathbf{a}_1]}, \quad \mathbf{h} = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2] \quad (27.27)$$

(p_1 и p_2 – целые числа).

Используя формулу (27.26), выполним в выражениях (27.24), (27.25) интегрирование по $d\mathbf{q}$, заменив вектор \mathbf{q} на $2\pi\mathbf{H}$. Суммируя затем результат по векторам обратной решетки, получим следующее выражение для плотности нейтронов:

$$N(\mathbf{r}) = \frac{i\nu\theta_0}{D} \left\{ \sum_{p_1, p_2} (a^{-4\pi^2\tau(h_1 p_1 + h_2 p_2)^2} - \psi e^{-4\pi^2(\tau - \tau_r)(h_1 p_1 + h_2 p_2)^2}) \times \right. \\ \left. \times \frac{e^{i2\pi r(h_1 p_1 + h_2 p_2)}}{[4\pi^2(h_1 p_1 + h_2 p_2)^2 + \kappa^2]a^2} - \frac{1}{2\pi\nu\theta_0} \sum_{\alpha} K_0(\kappa |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}|) \right\}. \quad (27.28)$$

Плотность нейтронов вблизи стержня можно представить согласно (27.25) в виде

$$N(\rho) = -\frac{i}{2\pi D} K_0(\kappa\rho) + \frac{i\nu\theta_0}{D} \times \\ \times \sum_{p_1, p_2} \frac{e^{-4\pi^2\tau(h_1 p_1 + h_2 p_2)^2} - \psi e^{-4\pi^2(\tau - \tau_r)(h_1 p_1 + h_2 p_2)^2}}{[4\pi^2(h_1 p_1 + h_2 p_2)^2 + \kappa^2]a^2} - \\ - \frac{i}{2\pi D} \sum_{\alpha} K_0(\kappa r_{\alpha}). \quad (27.29)$$

Если выполнены условия

$$4\pi^2\tau h_1^2 \gg 1, \quad 4\pi^2\tau h_2^2 \gg 1, \quad (27.30)$$

то в суммах по p_1 и p_2 основную роль играет член с $p_1 = p_2 = 0$. Заметим, что для графитовых систем при расстояниях между стержнями $\simeq 20$ см условия (27.30) очень хорошо выполняются, т.к. для этих систем $\tau_r \simeq 300$ см² и поэтому $4\pi^2\tau_r h^2 \geq 30$. Примерно такие же соотношения имеют место и в дейтонном реакторе.

Мы будем в дальнейшем предполагать, что условия (27.30) выполняются. Формулы (27.28) и (27.29) приобретают при этом следующий вид:

$$N(\mathbf{r}) = \frac{i\nu\theta_0}{D\kappa^2} \frac{1 - \psi}{a^2} - \frac{i}{2\pi D} \sum_{\alpha} K_0(\kappa |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}|), \quad (27.31)$$

$$N(\rho) = \frac{i\nu\theta_0}{D\kappa^2} \frac{1 - \psi}{a^2} - \frac{i}{2\pi D} K_0(\kappa\rho) - \frac{i}{2\pi D} \sum_{\alpha} K_0(\kappa r_{\alpha}). \quad (27.32)$$

Первое слагаемое в этих формулах имеет простой физический смысл. Оно представляет собой частное решение диффузационного уравнения (27.1) в том случае, когда плотность источников тепловых нейтронов q не зависит от координат. Легко убедиться в том, что при выполнении условий (27.30) величина q оказывается равной

$$q = \frac{i\nu\theta_0}{a^2}(1 - \psi). \quad (27.33)$$

Мы видим, что если расстояние между стержнями мало по сравнению с длиной замедления, то поле нейтронов, замедлившихся до тепловых энергий, практически однородно.

Если блоки имеют форму шаров, образующих бесконечную периодическую решетку, то заменяя формулы (27.31), (27.32) имеют место следующие формулы для плотности нейтронов:

$$N(\mathbf{r}) = \frac{i\nu\theta_0}{D\kappa^2} \frac{1 - \psi}{a^3} - \frac{i}{4\pi D} \sum_{\alpha} \frac{e^{-\kappa|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}|}}{\kappa |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}|}, \quad (27.34)$$

$$N(\rho) = \frac{i\nu\theta_0}{D\kappa^2} \frac{1 - \psi}{a^3} - \frac{i}{4\pi D} \frac{e^{-\kappa\rho}}{\kappa\rho} - \frac{i}{4\pi D} \sum_{\alpha} \frac{e^{-\kappa r_{\alpha}}}{\kappa r_{\alpha}}, \quad (27.35)$$

где i – ток тепловых нейтронов на блок, a^3 – объем элементарной ячейки.

Заметим, что формула (27.33) для q остается справедливой и для шаровых блоков, если заменить в ней площадь элементарной ячейки a^2 на объем ячейки a^3 . Входящая в выражения (27.31) – (27.33) величина ψ , согласно (27.12), равна

$$\psi = \psi_0 \sum_{k,l} e^{-\frac{r_{kl}^2}{4\tau_r}} = \psi_0 \sum_{k,l} e^{-(\mathbf{a}_1 k + \mathbf{a}_2 l)^2 / 4\tau_r}. \quad (27.36)$$

Для квадратной решетки ψ можно представить в виде

$$\psi = \psi_0 \left| \sum_k e^{-\frac{k^2 a^2}{4\tau_r}} \right|^2. \quad (27.37)$$

Если число слагаемых в этой сумме велико, то, как известно, она сводится к функции Якоби $\vartheta_3(0, \frac{a}{4\pi^2\tau_r})$, так что в случае квадратной решетки

$$\psi = \psi_0 \vartheta_3^2 \left(0, \frac{a}{4\pi^2\tau_r} \right). \quad (27.37')$$

Предполагая условия (27.30) выполненными, мы можем заменить в формуле (27.36) суммирование интегрированием по k

и l . Так как решетка предполагается бесконечной, то мы получим при этом:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{-(\mathbf{a}_1 k + \mathbf{a}_2 l)^2 / 4\tau_r} dk dl = \\ &= \frac{4\tau_r}{a_1 a_2} \psi_0 \int \int e^{-(x^2 + y^2 + 2xy \cos\vartheta)} dx dy, \end{aligned} \quad (27.38)$$

где: ϑ – угол между векторами \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 . Последний интеграл равен $\pi / \sin \vartheta$, поэтому

$$\psi = \psi_0 \frac{4\pi\tau_r}{a_1 a_2 \sin\vartheta}. \quad (27.38')$$

Подставив (27.38) в (27.9), мы получим следующее выражение для вероятности нейтрону дойти до тепловой области, не будучи резонансно захваченным:

$$\varphi = 1 - \psi = 1 - \psi_0 \frac{4\pi\tau_r}{a^2}. \quad (27.39)$$

Это выражение справедливо при выполнении условий (27.30).

Мы видим, что в блоковой системе с возрастанием расстояний между блоками величина φ увеличивается, как этого и следовало ожидать. Имея выражение для плотности тепловых нейтронов, легко определить число нейтронов, поглощаемых в единицу времени в замедлителе. Это число равно, очевидно,

$$\frac{1}{T} \int N d\mathbf{r}, \quad (27.40)$$

где интегрирование совершается по всему объему замедлителя.

Пользуясь формулой (27.24) и замечая, что в двухмерном случае

$$\int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d\mathbf{r} = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}),$$

мы получим

$$\frac{1}{T} \int N d\mathbf{r} = \frac{4\pi^2}{T} \left(N_{\mathbf{q}} \right)_{\mathbf{q}=0} S - \frac{i}{2\pi D} \sum_{\alpha} \int K_0(\kappa |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}|) d\mathbf{r}. \quad (27.41)$$

Так как

$$\int_0^\infty K_0(z)z dz = 1$$

и

$$4\pi^2 \left(N_{\mathbf{q}} \right)_{\mathbf{q}=0} = \frac{i\nu\theta_0}{D} \frac{1-\psi}{\kappa^2} S,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int N d\mathbf{r} &= \frac{i\nu\theta_0}{TD\kappa^2} (1-\psi) S - \frac{i}{TD\kappa^2} S = \\ &= \frac{iS}{TD\kappa^2} [(1-\psi)\nu\theta_0 - 1] = \frac{iS}{TD\kappa^2} (\nu\theta_0\varphi - 1), \end{aligned} \quad (27.42)$$

где S – общее число стержней.

Мы введем теперь в рассмотрение относительную вероятность захвата теплового нейтрона блоком (а не веществом замедлителя). Эта вероятность, которую мы обозначим через θ_1 , определяется следующим образом:

$$\theta_1 = \frac{i}{i + \frac{1}{T} \int N(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}, \quad (27.43)$$

причем интегрирование совершается по площади (или соответственно по объему в трехмерном случае) одной элементарной ячейки; i – ток тепловых нейтронов на блок.

Заметим, что введенная в гомогенном случае величина θ связана с θ_1 соотношением: $\theta = \theta_0\theta_1$. Легко видеть, что

$$\frac{1 - \theta_1}{\theta_1} = \frac{1}{T} \int \frac{N(\mathbf{r})}{i} d\mathbf{r}. \quad (27.44)$$

Пользуясь выражением (27.42), мы получим

$$\frac{1 - \theta_1}{\theta_1} = \frac{\nu\theta_0\varphi - 1}{L^2\kappa^2}, \quad L^2 = DT. \quad (27.45)$$

Нам остается теперь выяснить условия на границе со стержнями. Выше мы говорили, что диффузионное рассмотрение теряет смысл вблизи поверхности стержней. Мы учитываем это обстоятельство введением некоторого граничного условия на поверхности стержней. Именно, будем считать, что у

поверхности стержня плотность нейтронов имеет такой же вид, как в некотором эквивалентном однородном поле, возмущенном присутствием стержня. Иными словами, мы считаем, что у поверхности стержня $N(\rho)$ (ρ – радиус-вектор, проведенный из стержня) имеет следующий вид:

$$N(\rho) \cong \text{const}(p - K_0(\kappa\rho)), \quad (27.46)$$

где p – некоторая неизвестная константа, которая в нашей феноменологической теории должна определяться из опытных данных. Определение p в том случае, когда применима диффузионная картина, см. ниже.

В выражении (27.46) первое слагаемое представляет собой поле нейтронов на бесконечности, а второе слагаемое описывает возмущение, вносимое стержнем.

Из (27.46) следует, что у поверхности стержня должно выполняться условие

$$\left(\frac{\rho}{N(\rho)} \frac{\partial N}{\partial \rho} \right)_{\rho=r_0} = \frac{1}{p - K_0(\kappa r_0)} \equiv \gamma_1, \quad (27.47)$$

где r_0 – радиус стержня.

Если блоки имеют форму шаров, то поле тепловых нейтронов у поверхности блока мы считаем имеющим вид

$$N(\mathbf{r}) = \text{const} \left(p - \frac{e^{-\kappa r}}{\kappa r} \right) \quad (27.48)$$

(r – радиус вектор, проведенный из центра шара).

В случае малых блоков, радиус которых удовлетворяет условию

$$r_0 \ll l_s, \quad (27.49)$$

где l_s – длина пробега нейтрона по отношению к рассеянию в замедлителе, величина p может быть легко найдена из диффузионного рассмотрения.

Действительно в этом случае плотность нейтронов мало меняется в области, занимаемой блоком. Поэтому количество нейтронов, поглощаемое в единицу времени стержнем, равно

$$N_{r=r_0} \frac{v}{l_c^u} \pi r_0^2, \quad (27.50)$$

где v – скорость тепловых нейтронов, а l_c^u – длина их пробега по отношению к захвату в блоке. (Выражение (27.50) отнесено к единице длины стержня.) Предполагается также, что плотность нейтронов мало меняется внутри блока, т.е.

$$r_0 \ll L_i, \quad (27.49')$$

где L_i – диффузационная длина в блоке.

Приравнивая (27.50) току тепловых нейтронов на блок, получим

$$N_{r=r_0} \frac{v}{l_c^u} \pi r_0^2 = D \left(\frac{\partial N}{\partial r} \right)_{r=r_0} 2\pi r_0 = \frac{2\pi}{3} v l_s \left(\frac{\partial N(r)}{\partial r} \cdot r \right)_{r=r_0}, \quad (27.51')$$

откуда:

$$\frac{1}{\gamma_1} = \left(\frac{N}{r \frac{\partial N}{\partial r}} \right)_{r=r_0} = \frac{2}{3} \frac{l_c^u l_s}{r_0^2}. \quad (27.51)$$

В случае больших блоков, когда условие (27.49) и/или (27.49') не выполняются, точное определение величины γ_1 (или p) без использования диффузационного уравнения представляет собой сложную задачу. Как уже указывалось выше, в нашей теории мы считаем эту величину известной из опытных данных.

Плотность нейтронов вблизи стержня определяется формулой (27.29). Сравнение этой формулы с выражением (27.46) приводит к следующему соотношению:

$$\frac{2\pi\nu\theta_0}{|[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]|} \sum_{p_1p_2} \frac{e^{-4\pi^2\tau(h_1p_1+h_2p_2)^2} - \psi e^{-4\pi^2(\tau-\tau_r)(h_1p_1+h_2p_2)^2}}{4\pi^2(h_1p_1+h_2p_2)^2 + \kappa^2} - \sum_{\alpha} K_0(\kappa r_{\alpha}) = p. \quad (27.52)$$

При известном p это соотношение определяет κ^2 , иными словами экспоненту размножения λ (см.(27.14)) как неявную функцию параметров решетки a_1, a_2 .

Мы предполагаем выполненные условия (27.30). Поэтому первая сумма сводится к $\frac{2\pi\nu\theta_0(1-\psi)}{a^2\kappa^2}$. Мы будем далее предполагать, что расстояния между соседними стержнями малы по

сравнению с диффузационной длиной в замедлителе. При выполнении этого условия сумму $\sum_{\alpha} K_0(\kappa r_{\alpha})$ можно заменить интегралом взятым по k и l :

$$\sum_{\alpha} K_0(\kappa r_{\alpha}) = \sum_{k,l} K_0(\kappa |a_1 k + a_2 l|) = \\ = \frac{1}{a_1 a_2 \kappa^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int K_0(\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos\vartheta}) dx dy$$

(ϑ – угол между базисными векторами \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2).

Легко убедиться в том, что последний интеграл равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int K_0(\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos\vartheta}) dx dy = \frac{2\pi}{\sin\vartheta} \int_0^{\infty} K_0(z) z dz = \frac{2\pi}{\sin\vartheta}.$$

Поэтому:

$$\sum_{\alpha} K_0(\kappa r_{\alpha}) = \frac{2\pi}{\kappa^2 a_1 a_2 \sin\vartheta}. \quad (27.53)$$

Заметим, что в действительности нижний предел в интеграле $\int_0^{\infty} K_0(z) z dz$ не равен нулю. Численные расчеты показывают, что этот предел приблизительно равен $\frac{a}{\sqrt{\pi L}}$, где a – постоянная решетки.

В рассматриваемом нами приближении без особенно заметной ошибки можно считать нижний предел равным нулю.

Подставляя (27.53) в (27.52) и используя выражение (27.38') для ψ , получим следующее уравнение для определения величины κ^2 :

$$\frac{2\pi\nu\theta_0}{a^2\kappa^2} \left(1 - \frac{4\pi\tau_r\psi_0}{a^2} \right) - \frac{2\pi}{a^2\kappa^2} = p,$$

откуда

$$\kappa^2 = \frac{2\pi}{a^2} \frac{\nu\theta_0 \left(1 - \frac{4\pi\tau_r\psi_0}{a^2} \right) - 1}{p}, \quad a^2 = a_1 a_2 \sin\vartheta. \quad (27.54)$$

Экспонента размножения, согласно (27.14), равна

$$\lambda = \frac{2\pi D}{a^2 p} \left[\nu \theta_0 \left(1 - \frac{4\pi \tau \psi_0}{a^2} \right) - 1 \right] - \frac{1}{T}. \quad (27.55)$$

Мы получили λ как функцию площади элементарной ячейки. Обратим внимание на то обстоятельство, что в выражение для κ^2 , также как и в формулы (27.38), (27.53), постоянные решетки входят не отдельно, а в виде комбинации $a_1 a_2 \sin \vartheta$, представляющей собой площадь элементарной ячейки. Это связано с выполнением условий (27.30), т.е. предположением о малости параметров решетки по сравнению с длиной замедления нейтронов и диффузионной длиной в замедлителе.

В этих условиях разница в значениях λ для различных типов решетки очень мала. Она может быть вычислена, если суммы (27.52) не заменять интегралами, а использовать более точные формулы суммирования.

Величина λ , рассматриваемая как функция площади элементарной ячейки a^2 , достигает при некотором определенном, оптимальном значении a^2 максимума (см. рис. 28, на котором схематически изображена зависимость κ^2 от $a^2/4\pi\tau$). Приравняв нулю производную $\frac{d\kappa^2}{da^2}$ получим уравнение для определения оптимальной площади элементарной ячейки, которая оказывается равной:

$$a_{\text{опт}}^2 = 8\pi\tau \frac{\nu \theta_0 \psi_0}{\nu \theta_0 - 1}. \quad (27.56)$$

Итак в рассматриваемом нами случае малых параметров оптимальные условия решетки касаются только площади элементарной ячейки, так что отношение a_1/a_2 и угол ϑ_1 могут быть любыми. Отметим далее, что оптимальное значение a^2 не зависит вовсе от величины p , входящей в граничное условие (27.47).

Пользуясь полученным выражением для κ^2 , можно выразить введенную выше величину θ_1 через площадь элементарной ячейки. Подставляя (27.54) в (27.45), получим

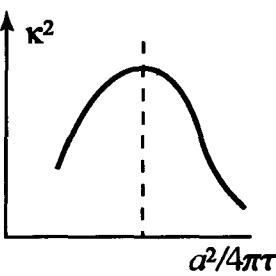


Рис. 28

$$\frac{1 - \theta_1}{\theta_1} = \frac{p}{2\pi} \frac{a^2}{L^2}. \quad (27.57')$$

Откуда

$$\theta_1 = \frac{1}{1 + \frac{p}{2\pi} \frac{a^2}{L^2}}. \quad (27.57)$$

С уменьшением расстояний между блоками величина θ_1 , как и следовало ожидать, увеличивается.

В первом приближении можно вычислить p , пользуясь уравнением диффузии. При этом внутри блока поле нейтронов удовлетворяет уравнению

$$\Delta n - \frac{n}{L_i^2} = 0.$$

Его радиально симметричным решением является $AI_0(\rho/L_i)$, где A – постоянная.

Поле снаружи n_e имеет вид (27.46)¹⁶

$$n_e = p - K_0(r/L_e)$$

(рассматривается стационарный случай, когда $\lambda = 0$ и $\kappa^2 = 1/2$. Общая нормировка несущественна). Диффузионные граничные условия дают (r_0 – радиус стержня)

$$AI_0\left(\frac{r_0}{L_i}\right) = p - K_0\left(\frac{r_0}{L_e}\right),$$

¹⁶Формула в тексте, равно как и (27.46), не пригодны для нахождения распределения нейтронов по ячейке вне блока, т.е. внешнего блок-эффекта – они не учитывают влияние других блоков решетки на поле в данной ячейке. Поэтому последующие равенства (27.57'), (27.57'') верны только в приближении $r/L_e \rightarrow 0$, что соответствует пренебрежению внешним блок-эффектом, но учету неравномерности распределения нейтронов внутри блока. В этом случае вместо (27.57'') мы имеем

$$\theta = \frac{\theta_0}{1 + q_{\text{гом}} Q}, \quad q_{\text{гом}} = \frac{a^2 l_{ci}}{\pi r_0^2 l_{ce}}$$

где $Q = I_0(r_0/L_i)/(2L_i/r_0)I_1(r_0/L_i)$ – отношение плотности нейтронов на поверхности блока к средней по блоку. Правильное выражение для внешнего блок-эффекта в приближении $\ln(a^2/\pi r_0^2) \gg 1$ дано в (28.17). (Прим. ред.)

$$\frac{D_i A I'_0}{L_i} \left(\frac{r_0}{L_i} \right) = - \frac{D_e K'_0}{L_e} \left(\frac{r_0}{L_e} \right).$$

Отсюда находим r :

$$p = K_0 \left(\frac{r_0}{L_e} \right) - \frac{D_e}{D_i} \frac{L_i}{L_e} \frac{K'_0(r_0/L_e)}{I'_0(r_0/L_i)} I_0(r_0/L_i). \quad (27.58)$$

Подставляя полученное значение p в (27.57), находим тепловое использование θ :

$$\theta = \frac{\theta_0}{1 + \frac{a^2}{2\pi L_e^2} [K_0(r_0/L_e) - \frac{D_e}{D_i} \frac{L_i}{L_e} \frac{K'_0(r_0/L_e)}{I'_0(r_0/L_i)} I_0(r_0/L_i)]}. \quad (27.57'')$$

Когда $r_0/L_i \rightarrow 0$, мы получаем гомогенное значение $\theta = \tilde{\theta}$. При малых концентрациях расщепляющего материала $\tilde{\theta}$ равно

$$\tilde{\theta} = \frac{\pi r_0^2 (L_i)^{-1} \theta_0}{\frac{\pi r_0^2}{L_i} \theta_0 + \frac{a^2}{L_e}} = \frac{\theta_0}{1 + \frac{L_i}{L_e} \frac{a^2}{\pi r_0^2}},$$

L_i – диффузионная длина в блоке, L_e – диффузионная длина в замедлителе.

Отношение теплового использования в блоковой системе к тепловому использованию в гомогенной системе с той же концентрацией делящегося материала равно

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{1 + \frac{L_i}{L_e} \frac{a^2}{\pi r_0^2}}{1 + \frac{a^2}{2\pi L_e^2} [K_0(\frac{r_0}{L_e}) - \frac{D_e}{D_i} \frac{L_i}{L_e} \frac{K'_0(r_0/L_e)}{I'_0(r_0/L_e)} I_0(r_0/L_e)]} < 1. \quad (27.57''')$$

В блоковой системе, состоящей из больших блоков, $r_0 \sim L_i$, тепловое использование ухудшается по сравнению с гомогенной системой с той же концентрацией делящегося материала. Этот эффект вызван тем, что большой блок "выедает" заметную часть нейтронов, падающих на его поверхность, и поэтому концентрация нейтронов вблизи него меньше, чем в замедлителе. Таким образом, ядра замедлителя окружены большей плотностью нейтронов, чем блоки.

Подчеркнем еще раз, что блок-эффект на θ наступает только при $r_0 \sim L_i$.

Заметим, что экспонента размножения может быть просто выражена через величины $\varphi = 1 - \psi$ и θ_1 . Действительно, используя формулу (27.57), мы представим (27.55) в виде

$$\frac{\lambda}{D} = \frac{\theta_1}{(1 - \theta_1)L^2} (\nu\theta_0\varphi - 1) - \frac{1}{L^2} = \frac{\nu\varphi\theta - 1}{(1 - \theta_1)L^2}. \quad (27.59)$$

Приведем еще выражение для вероятности резонансного поглощения при оптимальных параметрах решетки. Подставляя (27.56) в (27.39), получим

$$\psi_{\text{опт}} = \frac{\nu\theta - 1}{2\nu\theta_0}. \quad (27.60)$$

Вероятность нейтрону дойти до тепловой области не будучи резонансно захваченным при оптимальных параметрах решетки имеет следующий вид:

$$\varphi_{\text{опт}} = 1 - \psi_{\text{опт}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\nu\theta_0} \right). \quad (27.61)$$

В оба эти выражения, как мы видим, не входит константа ψ_0 .

§28. Усредненные уравнения

В §27 была рассмотрена плотность нейтронов в бесконечной решетке. В такой решетке плотность нейтронов является периодической функцией координат – распределение нейтронов в каждой элементарной ячейке одно и то же. Если решетка имеет конечные размеры, как это имеет место в реальных реакторах, то наряду с быстрым периодическим измерением концентрации нейтронов в пределах одной элементарной ячейки возникает медленный систематический ход плотности при переходе от одной ячейки к следующей за ней. Если ввести среднее значение плотности нейтронов по элементарной ячейке \bar{N} , то эта средняя плотность является в случае достаточно больших реакторов (например у графитового или у промышленного дейтонного) медленно меняющейся функцией координат элементарной ячейки. Введение средней плотности \bar{N} целесообразно при определении критических размеров гетерогенного блокового реактора. Мы пользуемся микроскопической,

детальной картиной нейтронной плотности при рассмотрении зависимости коэффициента размножения $K = \nu\phi\theta$ от расстояния между стержнями, от радиуса стержня и т.д. Однако, определение критических размеров с помощью микроскопических уравнений очень затруднительно в том случае, когда число элементарных ячеек велико. Но именно в этом случае можно пользоваться средней плотностью нейтронов при вычислении критических размеров. Используя медленное изменение средней плотности \bar{N} при переходе от одной элементарной ячейки к соседней, можно из точных микроскопических уравнений §27 вывести приближенное уравнение, куда входит только средняя нейтронная плотность. Полученное усредненное уравнение дает возможность простого вычисления критических размеров реактора. Мы займемся сейчас выводом этого уравнения.

Точное уравнение для плотности тепловых нейтронов в блоковой системе имеет вид (9.9)

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\Delta N - \frac{N}{T_0} + \eta\gamma \sum_{kl} W(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{kl})N(\mathbf{r}_{kl}) - \eta\gamma\psi_0 \sum_{k'l'} \frac{e^{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{k'l'})^2}{4(\tau-\tau_r)\pi}}}{4(\tau-\tau_r)\pi} \times \\ \times \sum_{k''l''} \frac{1}{4\pi\tau_r} e^{-\frac{(\mathbf{r}_{k''l''}-\mathbf{r}_{k'l'})^2}{4\tau_r}} N(\mathbf{r}_{k''l''}) - \gamma \sum_{kl} N(\mathbf{r}_{kl})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{kl}) = 0, \quad (28.1)$$

T_0 – время жизни тепловых нейтронов в замедлителе, $\eta = \nu\theta_0$, ν – число быстрых нейтронов на один акт деления (в ν может быть включено деление на быстрых нейтронах в блоке), θ_0 – относительная вероятность захвата нейтронов делящимся изотопом:

$$\theta_0 = \frac{\sigma_f C_f}{\sigma_{cf} C_f + \sigma_c (1 - C_f)},$$

C_f – концентрация делящегося изотопа, σ_{cf} и σ_c – соответственно сечения захвата делящимся и неделящимся изотопами, γ – коэффициент, связывающий поток нейтронов на стержень

S_{kl} с концентрацией нейтронов в месте, где находится стержень.¹⁷ Мы считаем при этом стержень тонким (радиус стержней мал по сравнению с расстоянием между ними):

$$S_{kl} = \gamma N(\mathbf{r}_{kl}).$$

Далее, $W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{kl})$ – плотность вероятности того, что быстрый нейtron, возникший в точке \mathbf{r}_{kl} , к моменту замедления до тепловых энергий окажется вблизи точки \mathbf{r} . Вдали от изоляции, в том случае, если изоляция обладает иными замедляющими свойствами, чем замедлитель, используемый в реакторе (например, дейтонный реактор с графитовой изоляцией), W является обычной Гауссовой функцией (7.1):

$$W = \frac{e^{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{kl})^2}{4\pi\tau_r}}}{4\pi\tau_r}. \quad (28.2)$$

В случае графитового реактора с графитовой изоляцией W выражается формулой (28.2) всюду. ψ имеет то же значение, что и в §27.

Двойная сумма описывает резонансное поглощение в соответствии с (27.6). Количество нейтронов, резонансным образом поглощенных стержнем k', l' , равно

$$\psi_0 \gamma \eta \frac{1}{4\pi\tau_r} \sum e^{-\frac{(\mathbf{r}_{k''l''}-\mathbf{r}_{k'l'})^2}{4\pi\tau_r}} N(\mathbf{r}_{k''l''}).$$

Резонансное поглощение эквивалентно отрицательному источнику нейтронов, что и приводит к двойной сумме в (28.1). Введем среднюю по элементарной ячейке плотность нейтронов

$$\bar{N}a^2 = \int N(\mathbf{r})d\mathbf{r},$$

a^2 – площадь элементарной ячейки. Интегрирование справа распространено по одной элементарной ячейке.

¹⁷ Величина γ , введенная здесь, пропорциональна γ_1 , определенной в (27.47), (27.51); в приближении $r_0 \ll L$; $\gamma = 2\pi D_i \gamma_1$. Отношение потока на блок к плотности нейтронов на поверхности блока называют тепловой постоянной блока. Предложение характеризовать блок этой феноменологической постоянной было выдвинуто Ландау. (Прим. ред.)

Усредним (28.1) по площади, содержащей большое количество элементарных ячеек, но размеры которой малы по сравнению с теми, на которых заметно меняется \bar{N} :

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} = D\Delta \bar{N} - \frac{\bar{N}}{T_0} + \eta\gamma \sum_{k'l'} \frac{1}{a^2} \int d\mathbf{r} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k'l'}) N(k', l') - \frac{1}{a^2} \gamma \bar{N} - \eta\gamma\psi_0 \sum_{k'l'} \int \frac{d\mathbf{r}}{a^2} W_{\tau-\tau_r}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k'l'}) \sum_{k''l''} W_{\tau_r}(\mathbf{r}_{k'l'} - \mathbf{r}_{k''l''}) N(k'', l''), \quad (28.3)$$

где $\bar{N} \equiv \bar{N}(k, l)$ – среднее значение N по площади с координатами центра \mathbf{r}_{kl} , $N(k, l)$ – плотность нейтронов в стержне с координатами \mathbf{r}_{kl} . Считая, что $N(k, l)$ мало меняется на длине замедления, разложим $N(k', l')$ в ряд по степеням $k' - k$ и $l' - l$:

$$N(k', l') = N(k, l) + \frac{\partial N}{\partial k}(k' - k) + \frac{\partial N}{\partial l}(l' - l) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial k^2}(k' - k)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial l^2}(l' - l)^2 + \frac{\partial^2 N}{\partial k \partial l}(k' - k)(l' - l).$$

Интегралы и суммы, содержащие члены первого порядка и $\frac{\partial^2 N}{\partial k \partial l}$, исчезают, так как площадь a^2 расположена симметрично относительно точки k, l (также, как и в гомогенном случае – см. §11). Остаются только суммы:

$$\sum_{k'l'} \int W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k'l'}) d\mathbf{r}, \quad \frac{1}{a^2} \sum_{k'l'} (x_k - x_{k'})^2 \int W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k'l'}) d\mathbf{r}, \\ \frac{1}{a^2} \sum_{k'l'} (y_l - y_{l'})^2 \int W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k'l'}) d\mathbf{r}. \quad (28.4)$$

Как было указано ранее в §27 (см. (27.30)), $\sum W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k'l'})$ и $\sum W_{\tau_r}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k'l'})$ в практически интересных случаях почти не зависит от \mathbf{r} . Поэтому мы можем первую сумму в (28.4) заменить на

$$\sum_{k'l'} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k'l'}) = \frac{1}{a^2}. \quad (28.5)$$

Вторая и третья суммы с хорошей степенью точности заменяются на интегралы:

$$\sum_{k'l'} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k'l'})(x_k - x_{k'})^2 = \int dk' dl' W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{k'l'})(x_k - x_{k'})^2 = \\ = \frac{1}{a^2} \int d\mathbf{r} W(\mathbf{r}) x^2 = \frac{1}{2a^2} \int r^2 W(\mathbf{r}) dr = \frac{\bar{r}^2}{3a^2} = \frac{2\tau}{a^2}, \quad (28.6)$$

\bar{r}^2 – средний квадрат длины замедления, $\bar{r}^2 = 6\tau$, a^2 – площадь одной элементарной ячейки. Сопоставление (28.4), (28.5) и (28.6) показывает, что (28.6) справедливо в том случае, когда на площади порядка \bar{r}^2 содержится много стержней (блоков). Заметим, что именно это условие необходимо для того, чтобы $\sum W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{kl})$ и $\sum W_{\tau_r}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{kl})$ можно было считать не зависящими от \mathbf{r} .

Вместо (28.3) мы теперь получаем:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} = D\Delta \bar{N} - \frac{\bar{N}}{T_0} + \eta\gamma \frac{\tau_r}{a^2} \Delta N(kl) - \eta\gamma\tau_r \frac{\psi_0}{a^2} \Delta N(kl) + \\ + \frac{1 - \psi_0}{a^2} \eta\gamma N(kl) - \gamma N(kl) \frac{1}{a^2}. \quad (28.7)$$

Выразим здесь $N(k, l)$ (плотность нейтронов в стержне k, l) через среднюю плотность нейтронов в ячейке:

$$N(k, l) = \alpha \bar{N}(k, l). \quad (28.7')$$

Вычислением коэффициента α мы займемся позднее. В наших условиях α не зависит от координат. Подставляя (28.7') в (28.7), находим:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} = (D + \eta\alpha\gamma \frac{1}{a^2} \varphi\tau) \Delta \bar{N} + \left(\frac{\eta\alpha\gamma\varphi}{a^2} - \frac{1}{T_0} \right) \bar{N} - \frac{\alpha\gamma\bar{N}}{a^2}. \quad (28.8)$$

Мы получили для \bar{N} уравнение того же типа, что и (11.8). В блоковом реакторе эффективным коэффициентом диффузии D_e является величина

$$D_e = D + \frac{\eta\alpha\gamma\varphi}{a^2}\tau_{\text{tr}}. \quad (28.9)$$

Среднее время жизни тепловых нейтронов в решетке равно:

$$\frac{1}{T_e} = \frac{(\eta\varphi - 1)\gamma\alpha}{a^2} - \frac{1}{T_0}. \quad (28.10)$$

Эффективная диффузационная длина L_e равна:

$$L_e^2 = D_e T_e = \frac{D + \frac{\eta\alpha\gamma\varphi\tau_{\text{tr}}}{a^2}}{\frac{(\eta\varphi - 1)\gamma\alpha}{a^2} - \frac{1}{T_0}}. \quad (28.11)$$

Таким образом, усредненная плотность нейтронов удовлетворяет тому же уравнению, что и плотность нейтронов в гомогенном реакторе. Наличие блоков оказывается только на значении эффективного коэффициента диффузии D_e и эффективной диффузационной длины L_e , входящих в уравнение

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} = D_e \Delta \bar{N} + \frac{D_e}{L_e^2} \bar{N}. \quad (28.8')$$

Мы перейдем сейчас к определению коэффициентов γ и α . Начнем с γ . Нам необходимо установить связь между концентрацией нейтронов вблизи блока (стержня) и потоком нейтронов на блок. Рассмотрим случай цилиндрических блоков. В качестве первого приближения можно использовать диффузционное приближение для вычисления γ через характеристики блока. (В §27 связанный с γ постоянный p_1 выражалась через характеристики как блока, так и замедлителя – см. (27.58)). Внутри цилиндрического стержня (блока) можно считать поле нейтронов обладающим цилиндрической симметрией. Это справедливо в том случае, если радиус блока мал по сравнению с расстоянием между блоками, иначе говоря, если на длине порядка радиуса блока мало меняется поле тепловых нейтронов, создаваемое всеми блоками, кроме данного.

Поле нейтронов внутри блока N_i имеет вид:

$$N_i = AI_0(r/L_i), \quad (28.12)$$

L_i диффузационная длина внутри блока. Границные условия на границе блока (ρ радиус блока>):

$$AI_0(\rho/L_i) = N_e,$$

$$\frac{1}{L_i} D_i A I'_0(\rho/L_i) = D \frac{\partial N_e}{\partial \rho}. \quad (28.13)$$

Отсюда находим отношение потока нейтронов на стержень к внешней концентрации нейтронов в том месте, где находится стержень (точнее, к внешней концентрации нейтронов на границе стержня):

$$\frac{S}{N_e} = \frac{2\pi\rho D \frac{\partial N_e}{\partial \rho}}{N_e} = 2\pi\rho \frac{D_i I_1(\rho/L_i)}{L_i I_0(\rho/L_i)} = \gamma. \quad (28.13')$$

Необходимо помнить, что пользование диффузионным приближением внутри уранового блока дает не очень точные результаты.

Установим теперь α , т.е. связь между средним по элементарной ячейке полем \bar{N} и полем вблизи блока. Если среднее поле мало меняется при переходе от одной элементарной ячейки к соседней, то α в конечной решетке будут приближенно таким же, как в бесконечной решетке. Согласно (27.24), поле нейтронов в бесконечной решетке имеет вид:

$$N(\mathbf{r}) = \frac{i\eta}{4\pi^2 D} \left\{ \int \left[\frac{e^{-q^2 \tau} - \psi e^{-q^2(\tau - \tau_r)}}{q^2 + \frac{1}{L^2}} \sum_{\alpha} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha})} \right] d\mathbf{q} - \frac{2\pi}{\eta} \sum_{\alpha} K_0\left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}|}{L}\right) \right\}. \quad (28.14)$$

Напомним, что множитель i перед фигурной скобкой есть ток тепловых нейтронов на блок и мы рассматриваем стационарную задачу, когда в (27.24) вместо κ^2 следует подставить $1/L^2$.

Как указывалось выше, см. (27.31), при выполнении условий (27.30) первый член в фигурных скобках можно заменить на $\frac{(2\pi)^2 \varphi L^2}{a^2}$:

$$N(\mathbf{r}) = \frac{i\eta}{2\pi D} \left[\frac{2\pi\varphi L^2}{a^2} - \frac{1}{\eta} \sum_{\alpha} K_0\left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}|}{L}\right) \right]. \quad (28.15)$$

Усредняем N по одной элементарной ячейке:

$$\bar{N} = \frac{i\eta}{D} \left[\frac{L^2\varphi}{a^2} - \frac{1}{2\pi\eta a^2} \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha} K_0 \left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}|}{L} \right) \right]. \quad (28.15')$$

Во втором члене в квадратных скобках под знаком интеграла заменим сумму $\sum_{\alpha} K_0 \left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}|}{L} \right)$ на интеграл

$$\frac{1}{a^2} \int K_0 \left(\frac{r}{L} \right) dr$$

(в интеграле область вблизи блока не играет существенной роли). Условия применимости замены суммы интегралом такие же, как и при выводе (27.53). Мы получаем тот же результат, что и в (27.53), т.е. что второй член в квадратных скобках в (28.15') равен $L^2/\eta a^2$. Окончательно имеем:

$$\bar{N} = \frac{i\eta}{D} \left(\frac{L^2\varphi}{a^2} - \frac{L^2}{\eta a^2} \right) = \frac{iL^2(\eta\varphi - 1)}{Da^2}. \quad (28.16)$$

Поле вблизи стержня мы получим из (28.15), если выделим $K_0(\rho/L)$ в сумме по α (см. (27.53)):

$$N(r_{kl}) = \frac{i}{2\pi D} \left[\frac{2\pi\eta\varphi L^2}{a^2} - \sum' K_0 \left(\frac{r_{\alpha}}{L} \right) - K_0(\rho/L) \right] = \\ = \frac{i}{2\pi D} \left[\frac{2\pi\eta\varphi L^2}{a^2} - \frac{2\pi L^2}{a^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{4\pi L^2}{a^2} - K_0(\rho/L) \right].$$

При выводе этой формулы проведено более точное вычисление интеграла, чем в (27.53): учтено, что нижний предел в интеграле $\int_0^{\infty} K_0(z) dz$ равен $a/\sqrt{\pi}L$, а не нулю. В результате такого уточнения возник третий член в квадратных скобках. Отсюда находим¹⁸

¹⁸Формула (28.17) получена в приближении $\ln(a^2/\pi\rho^2) \gg 1$ (опущена константа по сравнению с $\ln(a^2/\pi\rho^2)$), $a^2/4\pi L^2 \ll 1$ и для бесконечной решетки. С учетом этой константы в случае квадратной решетки $\ln(a^2/\pi\rho^2)$ заменяется на $\ln(a^2/\pi\rho^2) - 3/2$. Для реактора конечных размеров стоящее в знаменателе (28.17) выражение $\eta\varphi - 1$ должно быть заменено на $q_{\text{том}}Q$, где $q_{\text{том}}$ и Q определены в примечании на стр. 275. (Прим. ред.)

$$\alpha = \frac{N(r_{kl})}{\bar{N}} = 1 - \frac{K_0(\rho/L)a^2 - \frac{a^2}{2} \ln \frac{4\pi L^2}{a^2}}{2\pi(\eta\varphi - 1)L^2} = 1 - \frac{a^2 \ln \frac{a^2}{\pi\rho^2}}{4\pi(\eta\varphi - 1)L^2}. \quad (28.17)$$

На основании (28.13) и (28.17) находим D_e и L_e^2 :

$$D_e = D + \frac{\eta\varphi\tau_T}{a^2} \left[1 - \frac{K_0(\rho/L)a^2}{(\eta\varphi - 1)L^2} \right] \frac{2\pi\rho D_i I'_0(\rho/L_i)}{L_i I_0(\rho/L_i)}, \quad (28.18)$$

$$L_e^2 = \frac{D + \frac{\eta\varphi\tau_T}{a^2} \left[1 - \frac{K_0(\rho/L)a^2}{(\eta\varphi - 1)L^2} \right] \frac{2\pi\rho D_i I'_0(\rho/L_i)}{L_i I_0(\rho/L_i)}}{\frac{\eta\varphi - 1}{a^2} \left[1 - \frac{K_0(\rho/L)a^2}{(\eta\varphi - 1)L^2} \right] \frac{2\pi\rho D_i I'_0(\rho/L_i)}{L_i I_0(\rho/L_i)} - \frac{1}{T_0}}. \quad (28.19)$$

При ρ/L_i стремящемся к нулю, D_e и L_e^2 переходят в гомогенные выражения

$$D_e \rightarrow D + \frac{\nu\theta\varphi\tau}{T}, \\ L_e^2 \rightarrow D_e T,$$

T - время жизни теплового нейтрона в гомогенном реакторе.

Для вычисления критических размеров реактора необходимо решить (28.8) с соответствующими граничными условиями на границе с изоляцией. В некоторых случаях можно пользоваться в качестве граничных условий гомогенными граничными условиями (если блоки достаточно близки друг к другу).

Вместо пользования уравнением (28.8), в котором фигурируют только тепловые нейтроны (с соответствующими граничными условиями), можно рассматривать систему двух уравнений:

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \Delta n + \bar{N}\delta(\tau),$$

$$D\Delta\bar{N} - \frac{\bar{N}}{T_e} = n(\tau_T).$$

Для решения этой системы иногда целесообразно пользоваться методом многих групп.

§29. Большие блоки¹⁹

При рассмотрении резонансного поглощения блоками в §26 мы считали их размеры малыми по сравнению с длиной свободного пробега рассеяния в замедлителе и в веществе блока. В этих условиях можно вблизи блока считать невозмущенным поле замедляющихся нейтронов. Однако, выполнение этого условия не обязательно связано с малостью размеров блока по сравнению с длиной свободного пробега рассеяния в замедлителе. Поле замедляющихся нейтронов вблизи блока будет мало возмущено, если интервал энергии ΔE около центра резонансной линии, в пределах которого падающие на блок нейтроны эффективно им поглощаются, оказывается малым по сравнению с изменением энергии нейтрона при одном соударении с ядром замедлителя $((1 - \varepsilon)E)$

$$\Delta E \ll (1 - \varepsilon)E. \quad (29.1)$$

Это условие (как будет показано ниже) может быть выполнено и в том случае, когда размеры блока больше длины свободного пробега. Очевидно, что такой случай может встретиться чаще у сильных замедлителей - обычной или тяжелой воды и реже у замедлителей типа углерода. В случае углерода может иметь место такое положение, при котором резонансное поглощение высокими резонансными линиями удовлетворяет соотношению (29.1), в то время как поглощение самыми низкими резонансными уровнями не удовлетворяет этому соотношению. В подобных условиях полученные здесь результаты могли бы применяться к рассмотрению только части резонансного поглощения. Так как рассмотрение блоков с размерами порядка длины свободного пробега представляет значительные математические трудности, мы будем рассматривать два предельных случая - малых и больших блоков, соответственно считая в первом случае $r \ll l_s$, а во втором $r \gg l_s$, где r характерный

¹⁹Теория резонансного поглощения в больших блоках была развита А.Д.Галаниным в 1947 г. (А.Д.Галанин, Диссертация, отчет Лаб. № 3, 1947) и опубликована в виде раздела в работе [7]. (Прим. ред.)

размер блока, l_s длина свободного пробега рассеяния в блоке. Хотя случай $r \gg l_s$ не вполне реален, тем не менее его рассмотрение дает возможность составить себе впечатление о промежуточной области $r \approx l_s$, при помощи интерполяции результатов, полученных в двух предельных случаях $r \ll l_s$ и $r \gg l_s$.

Мы будем здесь рассматривать только цилиндрические блоки, ρ – будет означать радиус блока.

Начнем с рассмотрения случая $\rho \gg l_s$. Вдали от центра линии сечение захвата в блоке мало по сравнению с сечением рассеяния в нем. Поэтому можно пользоваться диффузионным уравнением для описания поля замедляющихся нейтронов внутри блока (и вне его).

Вне блока мы имеем:

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial \tau}. \quad (29.2)$$

Внутри блока:

$$\Delta n - \alpha(\tau)n = \frac{1}{a} \frac{\partial n}{\partial \tau}, \quad (29.2')$$

$a \gg 1$, в соответствии с большой массой ядер расщепляющегося материала. Внутри блока мы можем пренебречь замедлением нейтронов при их столкновении с тяжелыми ядрами, т.е. вычеркнуть член $\frac{1}{a} \frac{\partial n}{\partial \tau}$. В дальнейшем мы оценим погрешность, вносимую таким пренебрежением. Таким образом, мы будем рассматривать систему уравнений:

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial \tau}, \quad r > \rho,$$

$$\Delta n - \alpha n = 0, \quad r < \rho, \quad (29.3)$$

ρ – радиус стержня. Как было указано ранее, поле нейтронов, замедлившихся до резонансных энергий, можно считать в большинстве случаев однородным. Поэтому снаружи блока мы имеем обычное невозмущенное поле:

$$n_e = const = \frac{Q}{4\pi\tau_r} \sum_{kl} e^{-\frac{r^2_{kl}}{4\tau_r}}. \quad (29.4)$$

Такой выбор постоянной соответствует нормировке, при которой каждый стержень испускает Q быстрых нейтронов в 1 секунду. Сумма по k и l , как обычно, распространяется по всем стержням решетки, τ_r имеет обычный смысл. Решение (29.3) внутри стержня можно записать в виде

$$n_i = AI_0(\sqrt{\alpha}r), \quad (29.5)$$

где $I_0(\sqrt{\alpha}r)$ – функция Макдональда нулевого порядка. Постоянная A определяется из граничного условия $n_i = n_e$ при $r = \rho$:

$$A = Q \frac{\sum_{kl} \frac{1}{4\pi\tau_r} e^{-\frac{r^2_{kl}}{4\tau_r}}}{I_0(\sqrt{\alpha}\rho)}. \quad (29.6)$$

Число нейтронов, поглощенных в стержне за время dt , равно

$$2\pi \int_0^\rho D_i \alpha n_i r dr dt, \quad (29.7)$$

D_i – коэффициент диффузии внутри стержня. Введем вместо dt дифференциал энергии – см. (5.31'):

$$dt = \frac{d\tau}{dE} \frac{d\tau}{dE} dE = \frac{1}{D_e} \frac{dE}{E} \frac{d\tau}{dy}. \quad (29.8)$$

Здесь D_e и τ относятся к замедлителю. Используя (29.6) и (29.8), получаем выражение для числа нейтронов $d\nu$, поглощаемых в интервале энергий dE ,

$$\begin{aligned} d\nu &= 2\pi \frac{D_i}{D_e} \alpha \frac{d\tau}{dy} \frac{dE}{E} Q \frac{\sum_{kl} e^{-\frac{r^2_{kl}}{4\tau_r}}}{4\pi\tau_r} I_0(\sqrt{\alpha}\rho) \int_0^\rho r I_0(\sqrt{\alpha}r) dr = \\ &= 2\pi \frac{D_i}{D_e} \frac{d\tau}{dy} \frac{dE}{E} \frac{I_1(\sqrt{\alpha}\rho)}{I_0(\sqrt{\alpha}\rho)} \sqrt{\alpha}\rho Q \frac{\sum e^{-r^2/4\tau_r}}{4\pi\tau_r}. \end{aligned} \quad (29.9)$$

Интегрируем теперь (29.9) по энергии нейтронов E (исключая область вблизи центра линии, где сильный захват). При этом интегрировании мы можем заменить $\frac{D_i}{D_e} \frac{1}{4E\tau_r} \frac{d\tau}{dy} \sum e^{-r^2/4\pi\tau_r}$

на его значение в центре резонансной линии, так как ширина "опасной зоны" ΔE , в пределах которой происходит заметное резонансное поглощение, может считаться малой по сравнению с энергией резонансного уровня E_r :

$$\begin{aligned} \nu &= 2\pi \frac{D_i}{D_e E_r} \frac{d\tau}{dy} Q \frac{\sum_{kl} e^{-\frac{r^2_{kl}}{4\tau_r}}}{4\pi\tau_r} \rho \left[\int_{E_r + \epsilon}^{\infty} dE \sqrt{\alpha} \frac{I_1(\sqrt{\alpha}\rho)}{I_0(\sqrt{\alpha}\rho)} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{E_r - \epsilon} dE \sqrt{\alpha} \frac{I_1(\sqrt{\alpha}\rho)}{I_0(\sqrt{\alpha}\rho)} \right]. \end{aligned} \quad (29.10)$$

Значение ϵ определяется из двух условий. Во-первых, необходимо, чтобы сечение захвата при энергии $E_r + \epsilon$ было еще малым по сравнению с сечением рассеяния. Практически хорошая точность достигается например, если $\sigma_c(E_r \pm \epsilon) = \frac{1}{3}\sigma_s$.

Когда энергия нейтрона приближается к центру линии на расстояние меньше ϵ , и захват оказывается сравнимым с рассеянием, пользование диффузионным уравнением недопустимо. Захват в интервале энергий нейтронов $|E - E_r| < \epsilon$ мы вычислим ниже иным способом. Тогда же будет наложено второе условие на ϵ .

Рассмотрим интеграл, входящий в (29.10). Вдали от центра линии можно считать форму линии поглощения естественной, т.е. пользоваться выражением

$$\alpha = \alpha_0 \frac{\Gamma^2}{4(E - E_r)^2 + \Gamma^2} \cong \frac{\alpha_0 \Gamma^2}{4(E - E_r)^2}, \quad (29.11)$$

Γ – полная ширина уровня. Мы получаем интеграл

$$\frac{1}{2} \Gamma \sqrt{\alpha_0} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta} \frac{I_1(\sqrt{\alpha_0} \frac{\Gamma}{2} \frac{\rho}{\eta})}{I_0(\sqrt{\alpha_0} \frac{\Gamma}{2} \frac{\rho}{\eta})}. \quad (29.12)$$

При $\eta \rightarrow \infty$ I_0 заменяется на 1, I_1 – на $\frac{\sqrt{\alpha_0}}{4} \frac{\rho \Gamma}{\eta}$, и интеграл быстро сходится. Область существенных значений η определяется соотношением

$$\eta_0^2 \sim \frac{\alpha_0 \rho^2 \Gamma^2}{4}. \quad (29.12')$$

Этот результат следует непосредственно из (29.12). Его также можно легко вывести на основании следующего соображения. Нейтроны, падающие на блок радиуса ρ , могут проходить в нем путь порядка ρ^2/l_{si} прежде чем будут выходить наружу (l_{si} длина свободного пробега рассеяния внутри блока). Введя длину пробега по отношению к захвату внутри блока l_{ci} , получаем вероятность захвата W_c на пути ρ^2/l_{si} :

$$W_c \cong \frac{\rho^2}{l_{si} l_{ci}} \approx \alpha \rho^2 \sim \alpha_0 \frac{\rho^2 \Gamma^2}{4\eta^2}. \quad (29.13)$$

Отметим, что (29.13) справедливо только тогда, когда $W_c < 1$. Сравнивая (29.12') и (29.13), мы видим, что η_0 совпадает с энергией (отсчитываемой от центра линии), при которой вероятность захвата нейтрона на среднем пути внутри блока оказывается порядка единицы. При $\eta \gg \eta_0$ захват очень мал и эти энергии не играют роли в (29.12). Вероятность захвата нейтрона, падающего на блок, оказывается порядка единицы при $\eta \sim \eta_0$. Отсюда и следует (29.12').

Следует иметь в виду, что $W_c \approx 1$ на пути $\frac{\rho^2}{l_{si}} \gg l_{si}$, вероятность захвата на длине l_{si} при этом мала по сравнению с единицей (необходимое условие применимости диффузационного уравнения внутри блока).

Вводим переменную $x = \frac{\sqrt{\alpha_0} \rho \Gamma}{2\eta}$, $\frac{d\eta}{\eta} = -\frac{dx}{x}$:

$$\nu = \frac{2\pi D_i \Gamma}{D_e E_r} \frac{dt}{dy} Q \frac{\sum e^{-r^2/4\tau_r}}{4\pi \tau_r} \rho \sqrt{\alpha_0} \int_0^{x_0} \frac{dx}{x} \frac{I_1(x)}{I_0(x)}, \quad x_0 = \frac{\sqrt{\alpha_0} \rho \Gamma}{2\epsilon} \gg 1. \quad (29.14)$$

Как было указано ранее, сумму $\frac{1}{4\pi \tau_r} \sum e^{-r^2/4\tau_r}$ можно заменить на $\frac{1}{a^2}$, где a^2 – площадь, приходящаяся на один стержень:

$$\nu = \frac{2\pi D_i}{D_e E_r} \frac{dt}{dy} \frac{\Gamma \sqrt{\alpha_0} \rho}{a^2} Q J, \quad J = \int_0^{x_0} \frac{dx}{x} \frac{I_1(x)}{I_0(x)}. \quad (29.14')$$

Рассмотрим теперь область энергий нейтрона вблизи центра линии: $|E - E_r| < \epsilon$. При таких энергиях захват сравним с рассеянием и употребление диффузационных методов незаконно. Но как раз в этих условиях нейtron, падающий на блок,

пройдет в нем (из-за сильного поглощения) малый путь по сравнению с радиусом стержня, прежде чем он поглотится или выйдет наружу. Поэтому в рассматриваемом сейчас интервале энергий нейтрона блок можно читать плоским²⁰ и воспользоваться для определения захвата коэффициентом прилипания нейтронов $\xi(E)$, который вычислен для плоскости Хальперном, Люнебургом и Кларком [8]. Им удалось найти альбедо, равное $1 - \xi$, в случае плоской геометрии для любых соотношений между рассеянием и захватом.

Число нейтронов, падающих на 1 см длины блока в единицу времени, равно $\frac{n_e v}{4}$, где v – скорость нейтрона. Умножая это число на ξ , получаем число нейтронов, захватываемых в единицу времени:

$$\frac{n_e v}{4} \xi. \quad (29.15)$$

Интегрируя (29.15) по энергиям и умножая на $2\pi\rho$, получаем:

$$\frac{1}{4\pi \tau_r} \frac{Q \sum e^{-r_{kl}^2/4\tau_r}}{D_e a^2} \frac{dt}{dy} \frac{2\pi \rho v}{E_r} 2 \int_0^\epsilon \xi(\eta) d\eta. \quad (29.16)$$

Складывая (29.14') и (29.16), заменив $\frac{\sum e^{-r_{kl}^2/4\tau_r}}{4\pi \tau_r}$ на $1/a^2$ и разделив на Q , находим общее поглощение ψ_r резонансным уровнем E_r :

$$\psi_r = \frac{2\pi D_i}{D_e} \frac{\sqrt{\alpha_0}}{a^2} \frac{dt}{dy} \frac{\rho \Gamma}{E_r} \left[\int_0^{x_0} \frac{dx}{x} \frac{I_1(x)}{I_0(x)} + \frac{3\rho}{8l} \int_{x_0}^\infty \xi(x) \frac{dx}{x^2} \right]. \quad (29.17)$$

Так как в наших условиях x_0 велико по сравнению с единицей, то первый член в (29.17) равен $\ln \frac{\sqrt{\alpha_0} \rho \Gamma}{2\epsilon} + C_1$, а второй не содержит ρ и равен постоянной C_2 , которая получается путем численного интегрирования (29.16) при использовании результатов Хальперна, Люнебурга и Кларка.

Величина ϵ не содержится в окончательном результате, так как подинтегральные функции во втором и первом членах в

²⁰Отсюда следует второе условие, которое должно быть наложено на ϵ : захват при $|E - E_r| = \epsilon$ должен быть достаточно большим, так чтобы блок можно было считать плоским.

(29.17) непрерывно переходят друг в друга. Окончательно ψ_r имеет вид

$$\psi_r = \frac{2\pi D_i}{D_e} \frac{1}{a^2} \frac{d\tau}{dy} \frac{\rho\Gamma\sqrt{\alpha_0}}{E_r} \left[\ln \frac{\rho\Gamma\sqrt{\alpha_0}}{2\varepsilon} + C \right], \quad C = C_1 + C_2. \quad (29.18)$$

Отметим, что первому члену в (29.17) можно придать вид (29.16), введя при $|E - E_r| > \varepsilon$ коэффициент прилипания $\xi(E)$, вычисляя его, однако, не на основании работы Хальперна, Люнебурга и Кларка, а на основании диффузионного уравнения (29.3) для цилиндрической геометрии. Таким образом, в нашем вычислении необходимость учета цилиндрической геометрии имела место тогда, когда можно было пользоваться диффузионным уравнением, а в условиях сильного захвата и невозможности употребления диффузионных методов геометрия сводилась к плоской, для которой был известен коэффициент прилипания при любых соотношениях между захватом и рассеянием.

Вероятность φ дойти нейтрону до тепловых энергий, не испытав резонансного поглощения, связана с ψ_r соотношением (считая $1 - \varphi \ll 1$)

$$\varphi = 1 - \sum_r \psi_r. \quad (29.19)$$

При этом мы пренебрегаем взаимным возмущающим влиянием различных уровней, что, по-видимому, имеет место. Если представляется возможным заменить действие всех уровней одним уровнем, то $\varphi = 1 - \psi$.

Выясним теперь условия применимости полученных результатов. Прежде всего мы пренебрегали замедлением в стержне. С помощью решения $I_0(\sqrt{\alpha}r)$ мы можем сравнить $\frac{1}{a} \frac{\partial n}{\partial \tau}$ и αn :

$$\frac{1}{a} I'_0(\sqrt{\alpha}r) r \frac{d\sqrt{\alpha}}{d\tau} = \frac{r}{a} I'_0(\sqrt{\alpha}r) \frac{d\sqrt{\alpha}}{dE} \frac{dE}{d\tau} = \frac{r}{a} I'_0(\sqrt{\alpha}r) \frac{\sqrt{\alpha_0}\Gamma}{2\eta^2} \frac{dy}{d\tau} E_r,$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{1}{\alpha n} \lesssim 2 \frac{E_r}{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{\alpha_0}r} \frac{r^2}{a} \frac{dy}{d\tau}.$$

Подставляя сюда $\frac{2E_r}{\sqrt{\alpha_0}\rho\Gamma} = a$, находим, что $\frac{1}{a} \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{1}{\alpha n} \ll 1$. Сравним теперь интервал ΔE с $(1-\varepsilon)E$. Согласно (29.12'), $\Delta E \sim \sqrt{\alpha_0}\rho\Gamma$,

$$\frac{\Delta E}{(1-\varepsilon)E_r} \approx \frac{\sqrt{\alpha_0}\rho\Gamma}{(1-\varepsilon)E_r} = \sqrt{\frac{3\rho^2 N \sigma_c(E_r)}{l_{si}}} \frac{\Gamma}{(1-\varepsilon)E_r}. \quad (29.20)$$

Подставляя сюда $\sigma_c(E_r) = 10^{-21} \text{ см}^2$, $\frac{\Gamma}{E_\rho} = 1/50$, $l_s = 1 \text{ см}$, $1 - \varepsilon = \frac{4mM}{(m+M)^2}$, мы видим, что для H_2O и D_2O ΔE меньше, чем $(1-\varepsilon)E_r$ вплоть до $\rho \sim (5-6)l_s$.

В то время как поглощение малыми цилиндрическими блоками пропорционально $\rho^{3/2}$, поглощение большими блоками пропорционально $\rho \ln \rho$, т.е. растет медленнее с увеличением радиуса ρ . Этот результат объясняется большей степенью экранирования внутренних слоев блока внешними в случае $\rho \gg l_s$ по сравнению со случаем $\rho \ll l_s$. С помощью полученной зависимости φ от ρ и a можно, используя зависимость θ от ρ и a , получить $K = \nu\varphi\theta$ как функцию ρ и a .

§30. Отклонения от диффузионности

Мы неоднократно указывали, что применение дифференциального уравнения диффузии законно только в тех случаях, когда сечение захвата много меньше сечения рассеяния. Между тем, часто бывает необходимо определять плотность нейтронов внутри тел и с сильным поглощением или рядом с поглощающими телами. В этих случаях необходимо обратиться к кинетическому уравнению и разработать метод его приближенного решения. Этой задаче посвящено много работ [9-12]. Все авторы однако рассматривают либо плоский, либо сферически симметричный случай. Практически же наибольшее значение представляет задача с цилиндрической симметрией (цилиндрические урановые стержни в реакторе, регулирующие поглощающие стержни). Поэтому мы будем решать интегральное кинетическое уравнение применительно к цилиндрической симметрии.

Мы будем предполагать, что все нейтроны обладают скоростями, одинаковыми по абсолютной величине:

$$\mathbf{v} = v \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} – единичный вектор, направленный по скорости. Рассеяние будем считать сферически симметричным, длину пробега

рассеяния обозначим через λ_s , захвата – λ_a . Введем полную длину пробега:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_s} + \frac{1}{\lambda_a}.$$

Если $N = N(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ есть плотность нейтронов в точке \mathbf{r} , скорость которых направлена по вектору \mathbf{n} внутри телесного угла $d\Omega$, то имеет место следующее уравнение, дающее баланс нейтронов, приходящих и уходящих из элемента объема $d\mathbf{r} d\Omega$ (в стационарном случае):

$$\mathbf{v} \cdot \nabla N + \frac{\mathbf{v}}{\lambda} N - \frac{\mathbf{v}}{4\pi\lambda_s} \int \mu(\phi) N(\mathbf{r}, \mathbf{n}') d\Omega' = Q(\mathbf{r}, \mathbf{n}), \quad (30.1)$$

где $Q(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ – источник нейтронов, $\mu(\phi)$ – вероятность рассеяния на угол ϕ ,

$$\frac{1}{4\pi} \int \mu(\phi) d\Omega = 1.$$

Введем обозначения:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \frac{\mathbf{v}}{\lambda_s} N(\mathbf{r}, \mathbf{n}), \quad (30.2)$$

$$n = \frac{\lambda}{\lambda_s}, \quad 1 - n = \frac{\lambda_s}{\lambda_a + \lambda_s}. \quad (30.3)$$

Уравнения (30.1) перепишем так:

$$\lambda \mathbf{v} \cdot \nabla f + f - \frac{n}{4\pi} \int \mu(\phi) f(\mathbf{r}, \mathbf{n}') d\Omega' = nQ. \quad (30.4)$$

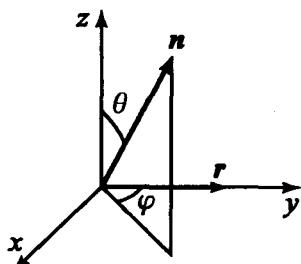


Рис. 29

Пусть ось z является осью цилиндрической симметрии, рис.29. Функция f может зависеть только от расстояния r до оси z и двух углов θ, φ , определяющих положение вектора \mathbf{n} относительно оси z и \mathbf{r} . Мы предполагаем, что источники зависят только от $r = |\mathbf{r}|$:

$$Q(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = Q(r). \quad (30.5)$$

Уравнение (30.4) можно переписать так:

$$\lambda \left[\sin\theta \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta \sin\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right] + f - \frac{n}{4\pi} \int \mu(\phi) f(r, \theta', \varphi') d\Omega' = nQ(r). \quad (30.6)$$

Разложим теперь $f(r, \theta, \varphi)$ и $\mu(\phi)$ в ряд по сферическим функциям:

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta, \varphi) f_{lm}(r), \quad (30.7)$$

где $Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{P}_{lm}(\theta) e^{im\varphi}$, \bar{P}_{lm} – нормированные присоединенные полиномы Лежандра

$$\bar{P}_{lm}(\theta) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\theta),$$

$$\mu(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) c_n P_n(\cos\phi). \quad (30.8)$$

Интегральный член в (30.6), проинтегрированный по всем углам, равен

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) c_n P_n(\cos\phi) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m|\leq l} Y_{lm}(\theta', \varphi') f_{lm}(r) d\Omega' = c_l Y_{lm}(\theta, \varphi) f_{lm}(r). \quad (30.9)$$

Подставив разложение (30.7) в уравнение (30.6) и учитывая (30.9), получим:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m|\leq l} [(1 - nc_l) Y_{lm}(\theta) f_{lm}(r) + \lambda (\cos\varphi \sin\theta \frac{\partial f_{lm}}{\partial r} - \frac{ims\sin\varphi \sin\theta}{r} f_{lm}) Y_{lm}(\theta)] = nQ. \quad (30.10)$$

Для дальнейших преобразований заменим $\cos\varphi$ и $i \sin\varphi$ через экспоненциальные функции и применим формулы для преобразования сферических функций:

$$\begin{aligned} \sin\theta P_{lm}(\theta) &= \sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)}} P_{l+1,m+1} - \\ &- \sqrt{\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l+1)(2l-1)}} P_{l-1,m+1}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sin\theta P_{lm}(\theta) &= -\sqrt{\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{(2l+1)(2l+3)}} P_{l+1,m-1} + \\ &+ \sqrt{\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l+1)(2l-1)}} P_{l-1,m-1}. \end{aligned}$$

Выполнив соответствующие выкладки, получим следующую бесконечную систему дифференциальных уравнений, связывающих коэффициенты при последовательных сферических гармониках:

$$\begin{aligned} (1-n c_l) f_{lm} + \frac{\lambda}{2} \left\{ \frac{\sqrt{(l+m)(l+m-1)} [f'_{l-1,m-1} - \frac{m-1}{r} f_{l-1,m-1}]}{\sqrt{(2l-1)(2l+1)}} - \right. \\ - \frac{\sqrt{(l-m-1)(l-m)} [f'_{l-1,m+1} + \frac{m+1}{r} f_{l-1,m+1}]}{\sqrt{(2l-1)(2l+1)}} + \\ + \frac{\sqrt{(l+m+1)(l+m+2)} [f'_{l+1,m+1} + \frac{m+1}{r} f_{l+1,m+1}]}{\sqrt{(2l+1)(2l+3)}} - \\ - \left. \frac{\sqrt{(l-m+1)(l-m+2)} [f'_{l+1,m-1} - \frac{m-1}{r} f_{l+1,m-1}]}{\sqrt{(2l+1)(2l+3)}} \right\} = \\ = 2\sqrt{\pi n} Q \delta_{ol} \delta_{om}. \end{aligned} \quad (30.11)$$

К этой системе надлежит добавить граничные условия, которым следует подчинить функции f_{lm} на границе между двумя средами с разными λ . Очевидно, на границе должно быть

$$N^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = N^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{n}),$$

или

$$\lambda_s^{(1)} f^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \lambda_s^{(2)} f^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{n}).$$

Разлагая $f(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ в ряд, получаем в силу ортогональности сферических функций

$$\lambda_s^{(1)} f_{lm}^{(1)} = \lambda_s^{(2)} f_{lm}^{(2)} \quad (30.12)$$

при любых l, m .

Для того, чтобы практически использовать систему (30.11) с граничными условиями (30.12), надо ее оборвать на каком-либо члене. Если мы положим все $f_{lm} = 0$ кроме f_{0m} и f_{1m} , то получается обычное диффузионное уравнение. Следующее приближение получается при сохранении f_{lm} при $l \leq 3$ (при обрывании системы (30.11) на четном номере l получаются противоречия с граничными условиями).

Как указывают авторы, исследовавшие аналогичную задачу для сферической геометрии, в практически важных случаях основную поправку содержит первое приближение после диффузионного уравнения. Использование высших приближений составит только незначительное уточнение ($\sim 10\%$ от первой поправки). Поэтому рассмотрим систему (30.11) при $l \leq 3$. Введем следующие обозначения:

$$\varphi_0 = f_{0,0}, \quad \varphi_3 = f_{2,0},$$

$$\varphi_1 = f_{1,1} - f_{1,-1}, \quad \varphi_4 = f_{3,3} - f_{3,-3},$$

$$\varphi_2 = f_{2,2} + f_{2,-2}, \quad \varphi_5 = f_{3,1} - f_{3,-1}.$$

Система (30.11) дает тогда 6 дифференциальных уравнений:

$$(1-n)\varphi_0 + \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \varphi_1 = 2\sqrt{\pi n} Q,$$

$$(1-n c_1)\varphi_1 + \frac{2\lambda}{\sqrt{6}} \frac{d\varphi_0}{dr} + \frac{\lambda}{\sqrt{5}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) \varphi_2 - \frac{2\lambda}{\sqrt{30}} \frac{d\varphi_3}{dr} = 0,$$

$$\varphi_2 + \frac{\lambda}{\sqrt{5}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \varphi_1 + \lambda \sqrt{\frac{3}{14}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{3}{r} \right) \varphi_4 - \frac{\lambda}{\sqrt{70}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \varphi_5 = 0,$$

$$\varphi_3 - \frac{\lambda}{\sqrt{30}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \varphi_1 + \lambda \sqrt{\frac{3}{35}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \varphi_5 = 0,$$

$$\varphi_4 + \lambda \sqrt{\frac{3}{14}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{2}{r} \right) \varphi_2 = 0,$$

$$\varphi_5 + \lambda \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{35}} \frac{d\varphi_3}{dr} - \frac{\lambda}{\sqrt{70}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) \varphi_2 = 0 \quad (30.13)$$

с граничными условиями

$$\lambda_s^{(1)} \varphi_i^{(1)} = \lambda_s^{(2)} \varphi_i^{(2)}. \quad (30.14)$$

Если положить $f_{lm} = 0$ при $l \geq 2$, то получим

$$(1-n)f_{0,0} + \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) (f_{1,1} - f_{1,-1}) = 2\sqrt{\pi}nQ,$$

$$(1-nc_1)(f_{1,1} - f_{1,-1}) + \frac{2\lambda}{\sqrt{6}} f'_{0,0} = 0, \quad (30.15)$$

или

$$f''_{0,0} + \frac{1}{2} f'_{0,0} - \frac{3(1-n)(1-nc_1)}{\lambda^2} f_{0,0} = -\frac{6\sqrt{\pi}n}{\lambda^2} (1-nc_1)Q.$$

Решением уравнений (30.15) является линейная комбинация бесселевых функций мнимого аргумента $I_0(r/L)$ и $K_0(r/L)$, где

$$L^2 = \frac{\lambda^2}{3(1-n)(1-nc_1)} \cong \frac{\lambda \lambda_a}{3(1-c_1)}. \quad (30.16)$$

Диффузионная длина, определенная по (30.16), отличается от обычной тем, что вместо λ_s стоит $\lambda_t = \lambda/(1-c_1)$. При $n \sim 1$ (когда только и можно пользоваться этим приближением) получаем:

$$L^2 = \frac{1}{3} \lambda_t \lambda_a. \quad (30.16')$$

Решим теперь систему (30.13) в общем виде. Положим $Q = 0$, т.е. рассмотрим однородную систему, соответствующую (30.13). Нетрудно видеть, что частное решение (30.13) может быть записано в виде

$$\varphi_0 = A_0 I_0(\alpha r) + B_0 K_0(\alpha r),$$

$$\varphi_1 = A_1 I_1(\alpha r) + B_1 K_1(\alpha r),$$

$$\varphi_2 = A_2 I_2(\alpha r) + B_2 K_2(\alpha r),$$

$$\varphi_3 = A_3 I_0(\alpha r) + B_3 K_0(\alpha r),$$

$$\varphi_4 = A_4 I_3(\alpha r) + B_4 K_3(\alpha r),$$

$$\varphi_5 = A_5 I_1(\alpha r) + B_5 K_1(\alpha r). \quad (30.17)$$

Подстановка в (30.13) показывает, что A_i удовлетворяет следующей однородной системе линейных уравнений:

$$(1-n)A_0 + \frac{x}{\sqrt{6}} A_1 = 0,$$

$$(1-nc_1)A_1 + \frac{2x}{\sqrt{6}} A_0 + \frac{x}{\sqrt{5}} A_2 - \frac{2x}{\sqrt{70}} A_3 = 0,$$

$$A_2 + \frac{x}{\sqrt{5}} A_1 + x \sqrt{\frac{3}{14}} A_4 - \frac{x}{\sqrt{70}} A_5 = 0,$$

$$A_3 - \frac{x}{\sqrt{30}} A_1 + x \sqrt{\frac{3}{35}} A_5 = 0,$$

$$A_4 + x \sqrt{\frac{3}{14}} A_2 = 0,$$

$$A_5 + 2x \sqrt{\frac{3}{35}} - \frac{x}{\sqrt{70}} A_2 = 0, \quad (30.18)$$

где $x = \alpha\lambda$. Постоянные B_i удовлетворяют этому же уравнению при замене x на $-x$. Приравняв детерминант системы уравнений (30.18) нулю, получим характеристическое уравнение для определения x . Это уравнение имеет 3 корня, в силу чего каждая φ_i получается как линейная комбинация шести бесселевых функций. Шесть граничных условий (30.14) определяет шесть произвольных постоянных. Если обозначить $\varepsilon = 1 - n$, то, раскрыв детерминант, получим следующее уравнение для x :

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{x^2}{7}\right) \left[x^4 + \frac{35}{9} \left(1 + \frac{11}{7}(1-n) - \frac{27}{35}(1-n)nc_1\right)x^2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{35}{3}(1-n)(1-nc_1) \right] = 0, \\ & x_{1,2}^2 = \frac{35}{18} \left[1 + \varepsilon \left(\frac{11}{7} - \frac{27}{35}c_1 \right) \right] \times \\ & \quad \times \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{108}{35} \frac{(1-c_1)\varepsilon}{[1 + \varepsilon(\frac{11}{7} - \frac{27}{35}c_1)]^2}} \right\}, \end{aligned} \quad (30.19)$$

Величина $\varepsilon(\frac{11}{7} - \frac{27}{35}c_1)$ представляет собой поправку к диффузионной длине (30.16), получаемой в нулевом приближении. Если $\varepsilon \ll 1$, то из (30.19) следует:

$$L^2 = \frac{\lambda^2}{3\varepsilon(1-c_1)} \left[1 + \varepsilon \left(\frac{11}{7} - \frac{27}{35}c_1 \right) \right],$$

т.е. в первом приближении по ε для диффузионной длины сохраняется формула (30.16'), как и следовало ожидать.

ГЛАВА V

КИНЕТИКА И ТЕМПЕРАТУРНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ РЕАКТОРА

§31. Глубина выработки активного изотопа

По мере работы реактора уменьшается содержание активного изотопа U^{235} , так что в конце концов реакция останавливается. Поэтому на начальной стадии работы реактора его размер должен быть больше критического, а излишек в коэффициенте размножения должен погашаться путем введения какого-либо поглотителя. По мере вырабатывания активного изотопа поглотитель удаляется из реактора, так чтобы поддерживать реакцию на определенной мощности.

Назовем глубиной выработки относительное уменьшение концентрации изотопа:

$$x = \frac{C_0 - C}{C_0}, \quad (31.1)$$

где $C_0 = N_0^{235}/N_0^{238}$ – начальная концентрация изотопа U^{235} , $C = N^{235}/N^{238}$ – конечная концентрация. Концентрация активного изотопа определяет собой величину $\eta = \nu\theta_0$:

$$\eta = \frac{\nu\sigma_f^{235}C}{\sigma_a^{238} + C\sigma_a^{235}}, \quad (31.2)$$

где σ_f^{235} – сечение деления U^{235} , σ_a^{238} и $\sigma_a^{235} = \sigma_f^{235} + \sigma_\gamma^{235}$ – полное сечение поглощения U^{238} , U^{235} (σ_γ^{235} – сечение радиационного захвата).

Пусть ξ – отношение значений η в конце и начале работы

$$\xi = \frac{\eta}{\eta_0}.$$

Пользуясь (31.2), легко связать глубину выработки с ξ :

$$x = \frac{(\sigma_a^{238} + C_0\sigma_a^{235})(1 - \xi)}{\sigma_a^{238} + C_0\sigma_a^{235}(1 - \xi)}.$$

Выше мы видели, как определяется критический объем реактора, если заданы его параметры. Можно решить и обратную задачу: по данному объему реактора найти критическое значение коэффициента размножения $K = \nu\varphi\theta$. Используя теорию, можно по заданным параметрам решетки, т.е. расстоянию между блоками и радиусу блоков, определить величину $\eta = \nu\theta_0$, соответствующую полученному значению коэффициента размножения. Это будет конечное значение η . Начальное значение η определяется начальным содержанием активного изотопа по формуле (31.2), если там положить $C = C_0$. Если в процессе работы реактора параметры решетки не изменять, то ξ равно отношению коэффициентов размножения в конце и начале работы

$$\xi = \frac{K}{K_0}.$$

Разница $K - K_0$ погашается введением в реактор какого-нибудь поглотителя.

§32. Замечания о влиянии температуры на работу реактора

С изменением температуры несколько меняются условия протекания цепной реакции на медленных нейтронах. Это происходит благодаря зависимости сечений захвата и рассеяния тепловых нейтронов от их энергий, а также благодаря влиянию на эти сечения теплового движения ядер. Последний эффект оказывается главным образом на резонансном поглощении. Можно указать, по-видимому, 4 главных изменения в реакторе, обвязанных действию температуры: 1) зависимость диффузионной длины (коэффициента диффузии) тепловых нейтронов от температуры; 2) влияние теплового Допплер-эффекта на резонансное поглощение; 3) зависимость θ от температуры в случае блоковых систем; 4) термодиффузия в отражателе.²¹

Кроме перечисленных, существуют и другие эффекты, играющие, однако, меньшую роль. Точный расчет суммарного действия температуры в настоящее время вряд ли возможен,

²¹ В реакторах с жидким замедлителем или (и) теплоносителем температурный коэффициент возникает также за счет изменения плотности замедлителя или (и) теплоносителя. (Прим. ред.)

ввиду запутанности влияния различных факторов, действующих при этом в противоположных направлениях. Поэтому мы ограничимся здесь только качественным рассмотрением явления и оценкой порядка величины различных эффектов.

Диффузионная длина L в однородном реакторе связана с сечениями захвата и рассеяния обычным соотношением (N – число ядер в 1 см³):

$$L^2 = \frac{1}{3N\sigma_s\sigma_c}. \quad (32.1)$$

Как известно, σ_c обратно пропорционально скорости нейтрона. Считая нейтроны находящимися в тепловом равновесии и $\sigma_s = const$, находим зависимость L^2 от температуры:

$$L^2(T) = L^2(T_0) \sqrt{\frac{T}{T_0}}. \quad (32.2)$$

Критические размеры определяются, главным образом, величиной M^2 (11.8), где

$$M^2 = L^2 + K\tau,$$

$$K = \nu\varphi\theta. \quad (32.3)$$

Здесь второй член практически не зависит от температуры, так как в τ температура входит только логарифмически.

Температурный коэффициент M^2 равен

$$\frac{1}{M^2} \frac{dM^2}{dT} = \frac{L^2(T_0)}{2M^2\sqrt{T}T_0}. \quad (32.4)$$

Считая второй и первый член в (32.3) равными друг другу, получаем положительный температурный коэффициент для величины M^2 порядка 10^{-3} при комнатной температуре. Заметим, что рост M^2 можно еще связать с возрастанием коэффициента диффузии нейтронов, так как время жизни их не зависит от их энергии. Мы считали σ_s не зависящим от температуры. Как показывает более подробный анализ рассеяния нейтронов связанных ядрами, в графитовом реакторе (вообще во всяком реакторе с высокой дебаевской температурой) σ_s может уменьшиться при повышении температуры, начиная от комнатной [13-17]. Это обстоятельство может увеличить $\frac{d\ln M^2}{dT}$

по сравнению с его значением, даваемым формулой (32.4). С другой стороны, именно в таких реакторах есть основания считать, что не существует тепловое равновесие между нейтронами и решеткой. Поэтому изменение температуры реактора может слабее отражаться на энергии нейтронов и на значении M^2 , чем мы считали при выводе (32.4). В блоковой системе L^2 выражается формулой (28.19). Согласно (28.19)²², в случае блоков, имеющих размеры r , сравнимые с диффузионной длиной нейтронов внутри блока, L_i^2 будет меньше зависеть от температуры, чем в случае гомогенной системы. Этот результат обязан следующей причине. Внутренние части блоков при $\rho \sim L_i$ частично заэкранированы от нейтронов наружными слоями блоков. С повышением температуры нейтронов увеличивается L_i , т.е. экранирующее действие уменьшается. Дело обстоит таким образом, как если бы с повышением температуры увеличивалось количество расщепляющегося материала в реакторе. Отсюда следует, что температурный коэффициент гетерогенного M^2 может быть меньше, чем (32.4).

Увеличение M^2 приводит к увеличению критических размеров, т.е. к кажущемуся уменьшению $K = \nu\varphi\theta$. Введем эффективное изменение K из требования, чтобы одинаково менялась величина $\frac{M^2}{K-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} \frac{M}{\sqrt{K-1}} &= \frac{1}{\sqrt{K-1}} \frac{dM}{dT} = -\frac{M}{2(K-1)^{3/2}} \left(\frac{dK}{dT} \right)_{eff}, \\ \left(\frac{dK}{dT} \right)_{eff} &= -(K-1) \frac{1}{M^2} \frac{dM^2}{dT}. \end{aligned} \quad (32.5)$$

Полагая $K-1 \lesssim 10^{-1}$ и пользуясь (32.4), находим порядок величины

$$\left(\frac{dK}{dT} \right)_{eff} \approx -10^{-4}. \quad (32.6)$$

Таким образом, с повышением температуры критические размеры растут благодаря увеличению диффузионной потери нейтронов наружу. Мы свели это к эффективному уменьшению K , хотя в бесконечной системе K было бы неизменно,

²²См. также примечание на стр. 275. (Прим. ред.)

пока мы ограничились бы рассмотрением M^2 . Перечисленные ранее тепловые действия – пункты 2 и 3 в начале этого параграфа – непосредственно связаны с влиянием температуры на K . Допплер-эффект приводит к увеличению резонансного поглощения в гомогенной системе. Порядок величины эффекта сильно зависит от соотношения между естественной и допплеровской ширинами тех уровней, которые дают главный вклад в резонансное поглощение. Если $\Delta E \sim \Delta$ (где ΔE – ширина "опасной зоны" (22.14) и Δ – допплеровская ширина (23.2)), то, согласно (23.11), мы находим следующий вклад в $\frac{dK}{dT}$ из-за увеличения резонансного поглощения под влиянием Допплер-эффекта в гомогенной системе (считая $1 - \varphi \ll 1$, а также предполагая, что для всех уровней выполнено условие $\Gamma \sim \Delta$):

$$\left(\frac{dK}{dT} \right)_\varphi = \nu\theta \frac{\partial\varphi}{\partial T} \cong \nu\theta(1-\varphi) \frac{1}{2T} \sim -10^{-4}. \quad (32.7)$$

Отметим, что знак эффектов (32.6) и (32.7) одинаков. Что касается порядка величины (32.7), то в блоковой системе $|\frac{dK}{dT}|$ будет значительно меньше, чем (32.7), так как главную роль в резонансном поглощении в этом случае играют далекие крылья резонансных линий (26.11), для которых Допплер-эффект несущественен. И в гомогенных системах при выполнении условия $\Delta E \gg \Delta$ значение $(\frac{dK}{dT})_\varphi$ будет меньше, чем согласно (32.6).

Кроме резонансного поглощения температура влияет также на тепловое использование θ в блоковых системах. Этот эффект улучшает условия работы реактора, увеличивая K благодаря росту θ . Возрастание θ обязано увеличению всех диффузионных длин (в замедлителе и в блоках). Благодаря этому сглаживается отрицательный блок-эффект на θ . Вклад этого эффекта в dK/dT мы получаем, дифференцируя по температуре выражение для θ в блоковой системе. Используя (28.17) для внешнего блок-эффекта и вытекающее из (28.13) выражение для отношения плотности нейтронов на поверхности блока $N(\rho)$ к его среднему значению по блоку²³

²³См. также примечания на стр. 275 и 284. (Прим. ред.)

$$\frac{N(\rho)}{N(r)} \approx 1 + \frac{1}{8} \frac{\rho^2}{L_i^2},$$

$(\rho^2 < L_i^2)$, находим

$$\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dT} = \left[\frac{D_e}{2D_i} + \ln \frac{a^2}{\pi\rho^2} \right] \frac{a^2}{4\pi L_e^2} \frac{1}{T}. \quad (32.8)$$

При $a^2 = 200 \text{ см}^2$, $L^2 = 2000 \text{ см}^2$, $\rho = 1,2 \text{ см}$, имеем численно:

$$dK/dT \sim 3 \cdot 10^{-5}. \quad (32.9)$$

Таким образом этот положительный эффект скорее меньше, чем (32.6).

Мы видим, что увеличение T приводит к двум противоположно действующим эффектам – увеличению критических размеров и увеличению θ . Первый эффект является наибольшим.

Сделаем теперь замечание о термодиффузии нейтронов. В действующем реакторе температура изоляции ниже, чем температура активной зоны. Поэтому отношение концентрации нейтронов в изоляции и в активной зоне будет расти с ростом температуры, что приведет к увеличению поглощения в изоляции, т.е. к ухудшению ее качества. Такой вывод является следствием термодиффузии нейтронов в изоляцию [18]. Мы не будем останавливаться детально на рассмотрении этого эффекта, поскольку его величина определяется конструкцией реактора.

Кроме разобранных здесь тепловых эффектов имеются и другие, меньшего масштаба, (например, отклонение сечений захвата тепловых нейтронов от закона $1/v$ и др.). Мы не будем их касаться.

Резюмируя, мы видим, что условия работы реактора ухудшаются с повышением температуры, т.е. мы имеем дело с регулирующим действием температуры. Эффективное изменение K порядка $10^{-4} - 10^{-5}$ на 10^{24} .

²⁴Авторы не рассматривают реакторы, где теплоносителем или (и) замедлителем является простая вода. В таких реакторах возможен положительный температурный коэффициент. Положительный температурный коэффициент может также возникнуть при высоких концентрациях плутония. (Прим. ред.)

§33. Кинетика цепной реакции

Рассмотрим развитие во времени цепной реакции, протекающей на медленных нейтронах. При этом следует учесть особую роль так называемых запаздывающих нейтронов, т.е. нейтронов, вылетающих из продуктов деления в процессе их β -распада.

Диффузионное уравнение, учитывающее наличие запаздывающих нейтронов, может быть получено из обычного диффузионного уравнения

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \Delta N + \frac{K-1}{T} N \quad (33.1)$$

добавлением к нему члена, учитывающего β -распад продуктов деления, за которым непосредственно следует вылет запаздывающих нейтронов. Пусть n_i – число нейтронно-активных продуктов деления в 1 см^3 , имеющих период распада T_i ; тогда число запаздывающих нейтронов, которые испускаются в 1 секунду в 1 см^3 , равно:

$$\sum \frac{n_i}{T_i}.$$

Поэтому дополненное уравнение (33.1) имеет вид:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \Delta N + \frac{K-1}{T} N + \sum_i \frac{\varphi \theta}{T_i} n_i \quad (33.2)$$

(мы считаем при этом, что каждое β -активное ядро испускает один нейtron).

Выпишем еще уравнение для изменения со временем величин n_i ; при этом, очевидно, коэффициент диффузии нейтронно-активных продуктов деления следует считать равным нулю. Пусть при каждом акте деления создается ν_i нейтронно-активных ядер с периодом T_i ; тогда n_i удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = \frac{N \nu_i}{T} - \frac{n_i}{T_i}. \quad (33.3)$$

Решая (33.3), находим:

$$n_i = \frac{\nu_i}{T} \int_{-\infty}^t N(s) e^{-\frac{t-s}{T_i}} ds. \quad (33.4)$$

Выбор нижнего предела в интеграле соответствует тому, что нейтронно-активные ядра нарабатывались в течение всего времени работы реактора, т.е. начиная с $t = -\infty$. Подставляя (33.4) в (33.2), получаем:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\Delta N + \frac{K-1}{T}N + \sum_i \frac{K_i}{TT_i} \int_0^t N(s)e^{-\frac{t-s}{T_i}} ds, \\ K_i = \nu_i \varphi \theta. \quad (33.5)$$

Уравнение в изоляции имеет обычный вид:

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} = D_e \Delta N_e - \frac{N_e}{T_e}. \quad (33.6)$$

На границе с изоляцией должны быть удовлетворены эффективные граничные условия:

$$N = N_e, \quad \frac{\partial N_e}{\partial \nu} = q \frac{\partial N}{\partial \nu}. \quad (33.7)$$

Так как в (33.5) и (33.6) время явно не входит, то эти уравнения обладают решениями, экспоненциально растущими во времени.

Рассмотрим их для случая сферического реактора, заключенного в бесконечную изоляцию.

Решение внутри реактора ищем в виде:

$$N = \frac{\sin \alpha r}{r} e^{\lambda t}, \quad r \leq R. \quad (33.8)$$

Решение в изоляции:

$$N_e = A \frac{e^{-\beta(r-R)}}{r} e^{\lambda t}. \quad (33.9)$$

Для величин α , β и λ получаем уравнения:

$$\lambda = -D\alpha^2 + \frac{K-1}{T} + \sum_i \frac{K_i}{T(1+\lambda T_i)}, \\ \lambda = D_e \beta^2 - \frac{1}{T_e}. \quad (33.10)$$

Используя граничные условия (33.7), находим:

$$\frac{q\alpha \cos \alpha R}{\sin \alpha R} = -\beta + \frac{q-1}{R}. \quad (33.11)$$

Выражаем β согласно (33.10) и подставляем в (33.11):

$$\beta = \sqrt{\left(\lambda + \frac{1}{T_e}\right) \frac{1}{D_e}}, \quad (33.12)$$

$$q\alpha \operatorname{ctg} \alpha R = -\sqrt{\frac{\lambda}{D_e} + \frac{1}{L_0^2}} + \frac{q-1}{R}, \quad L_0^2 = D_e T_e. \quad (33.13)$$

Соотношение (33.13) и первое равенство (33.10)

$$\lambda = -D\alpha^2 + \frac{K-1}{T} + \sum_i \frac{K_i}{T(1+\lambda T_i)} \quad (33.14)$$

дают нам возможность найти λ и α для каждого значения радиуса сферы R .

При $\lambda = 0$ мы имеем решение, не зависящее от времени. Ему соответствует, очевидно, критический радиус сферы R_0 :

$$q\alpha_0 \operatorname{ctg} \alpha_0 R_0 = -\frac{1}{L_0} + \frac{q-1}{R_0}, \quad \alpha_0^2 = \frac{K_0-1}{DT},$$

$$K_0 = K + \sum_i K_i, \quad K_0 = \nu_0 \varphi \theta, \quad \nu_0 - \nu = \sum_i \nu_i, \quad (33.15)$$

ν_0 – полное число нейтронов, выделяющихся при одном делении, $\nu_0 - \nu$ – число запаздывающих нейтронов, приходящихся на одно деление.

Для установления качественной картины зависимости λ от радиуса R заменим сумму по периодам в (33.14) одним членом, т.е. будем считать, что все запаздывающие нейтроны обладают одинаковым периодом. В этом случае λ определяется из квадратного уравнения:

$$\lambda = -D\alpha^2 + \frac{K-1}{T} + \frac{K_1}{T(1+\lambda T_1)},$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_1} + D\alpha^2 - \frac{K-1}{T} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{T_1} - D\alpha^2 + \frac{K-1}{T} \right)^2 + \frac{K_1}{TT_1}}. \quad (33.16)$$

Рассмотрим зависимость экспоненты размножения λ от размеров системы в том случае, когда размеры находятся вблизи критических. Из двух значений λ (33.16) только то, которому соответствует знак "+" перед корнем, практически описывает нарастание числа нейтронов со временем. Второй корень меньше первого. Он описывает рассасывание со временем начального (произвольного) поля нейтронов. В общем случае произвольного числа периодов нарастание числа нейтронов также практически будет определяться одним, наибольшим, корнем:

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_1} + D\alpha^2 - \frac{K-1}{T} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{T_1} - D\alpha^2 + \frac{K-1}{T} \right)^2 + \frac{K_1}{TT_1}}. \quad (33.16')$$

При $R < R_0$ λ меньше нуля. В небольшой области значений R вблизи R_0 играют существенную роль запаздывающие нейтроны. Наряду с критическим радиусом R_0 (33.15), полученным с учетом наличия запаздывающих нейтронов, существует второй критический радиус R_1 , характеризующийся тем, что при $R > R_1$ цепная реакция может развиваться и без участия запаздывающих нейтронов. R_1 определяется аналогично R_0 , но только вместо ν_0 нужно подставить ν :

$$q\alpha_1 \operatorname{ctg}\alpha_1 R_1 = -\frac{1}{L_0} + \frac{q-1}{R_1}, \quad \alpha_1^2 = \frac{K-1}{DT}. \quad (33.17)$$

При $R \geq R_1$ цепная реакция развивается без участия запаздывающих нейтронов. Мы имеем здесь "быструю" кинетику (λ_6). Пренебрегая $1/T_1$, получаем λ в этом случае:

$$\lambda_6 = -D\alpha^2 + \frac{K-1}{T}. \quad (33.18)$$

При малых превышениях радиуса R над критическим радиусом R_1 λ_6 выражается формулой:

$$\lambda_6 = -2D\alpha_1 \Delta\alpha. \quad (33.19)$$

По порядку величины (см.(33.20'))

$$\Delta\alpha_1 \sim -p \frac{\Delta R}{R_1^2}, \quad p \sim 1.$$

При отсутствии изоляции $p = \pi$. В присутствии изоляции $p < \pi$. Отсюда

$$\lambda_6 = 2p^2 D \frac{\Delta R}{R_1^3}. \quad (33.19')$$

Перейдем теперь к вычислению λ в условиях, когда существенную роль играют запаздывающие нейтроны. Комбинируя (33.13), (33.15) и (33.16') и разлагая α в ряд по степеням $\rho = R - R_0$ при малых ρ , находим λ как функцию $\rho = R - R_0$:

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha,$$

$$q\Delta\alpha \operatorname{ctg}\alpha_0 R_0 - \frac{q\alpha_0(R_0\Delta\alpha + \rho\alpha_0)}{\sin^2 \alpha_0 R_0} =$$

$$= -\frac{(q-1)\rho}{R_0^2} + \frac{1}{L_0} - \sqrt{\frac{1}{L_0^2} + \frac{\lambda}{D_e}} \approx -\frac{(q-1)\rho}{R_0^2} - \frac{\lambda L_0}{2D_e},$$

$$\lambda = -2D\alpha_0 \Delta\alpha - \frac{K_1 \lambda T_1}{T(1+\lambda T_1)},$$

$$\Delta\alpha = -\frac{\lambda + \frac{K_1 \lambda T_1}{T(1+\lambda T_1)}}{2D\alpha_0}. \quad (33.20)$$

$$q\Delta\alpha \left(\operatorname{ctg}\alpha_0 R_0 - \frac{\alpha_0 R_0}{\sin^2 \alpha_0 R_0} \right) - \left(\frac{q\alpha_0^2}{\sin^2 \alpha_0 R_0} - \frac{q-1}{R_0^2} \right) \rho = -\frac{\lambda L_0}{2D_e}. \quad (33.20')$$

Обозначая:

$$\frac{2D_e}{L_0} \left(\frac{q\alpha_0^2}{\sin^2 \alpha_0 R_0} - \frac{q-1}{R_0^2} \right) = A, \quad A \gtrsim \frac{5D_e}{L_0 R_0^2}, \quad (33.21)$$

$$B = \frac{D_e}{DL_0\alpha_0} \left(-\operatorname{ctg}\alpha_0 R_0 + \frac{\alpha_0 R_0}{\sin^2 \alpha_0 R_0} \right), \quad B \sim \frac{R_0}{L_0} > 1 \quad (33.22)$$

и пользуясь (33.20), преобразовываем (33.20') к виду ($K_1 = \nu_1 \varphi \theta$):

$$B\lambda \left(1 + \frac{K_1 T_1}{T(1 + \lambda T_1)} \right) = A\rho - \lambda.$$

Отсюда:

$$\lambda = \frac{1}{2(1+B)} \left(A\rho - \frac{1+B}{T_1} - \frac{BK_1}{T} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\left(A\rho + \frac{1+B}{T_1} - \frac{BK_1}{T} \right)^2 + 4(1+B)A\frac{\rho}{T_1}} \right). \quad (33.23)$$

При $T_1 = \infty$ и $K_1 = 0$ мы приходим к (33.19'). Когда $\rho \rightarrow 0$, (33.23) дает (λ_M означает λ с участием запаздывающих нейтронов):

$$\lambda_M = \frac{A\rho}{1+B} \frac{1}{1+BK_1 \frac{T_1}{(1+B)T}}. \quad (33.24)$$

Сравнивая (33.24) и (33.19'), мы видим согласно (33.21) и (33.22), что в условиях медленной кинетики, т.е. кинетики с участием запаздывающих нейтронов, скорость нарастания числа нейтронов меньше, чем в случае "быстрой кинетики":

$$\frac{\lambda_M}{\lambda_6} = \frac{1}{1 + \frac{B}{1+B} \frac{K_1 T_1}{T}}. \quad (33.25)$$

Полагая $K_1 = 10^{-2}$, $T_1 = 10$ с, $B \sim \frac{R_0}{L_0} \approx 5$ согласно (33.22), имеем:

$$\frac{\lambda_M}{\lambda_6} = \frac{1}{1 + \frac{10^{-1}}{T}}.$$

Время жизни тепловых нейтронов в гомогенной системе (а по порядку величины и в блоковой системе) выражается обычной формулой:

$$\frac{1}{T} = v\nu\bar{\sigma}_c,$$

v —число ядер в 1 см³, $\bar{\sigma}_c$ —среднее сечение захвата, v —скорость нейтронов.

Подставляем сюда следующие типичные значения v , $\bar{\sigma}_c$ и v :

$$v = 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}, \quad v = 2 \cdot 10^5 \text{ см/с}, \quad \bar{\sigma}_c = 7 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2,$$

$$\frac{1}{T} = 700 \text{ с}^{-1}.$$

Отсюда:

$$\frac{\lambda_M}{\lambda_6} = \frac{1}{70}. \quad (33.26)$$

Таким образом, при $R_0 < R < R_1$ цепная реакция развивается во много раз медленнее, чем при отсутствии запаздывающих нейтронов (при тех же превышениях над критическими размерами, один раз над R_0 , а другой — над R_1). Определим теперь интервал размеров $R_1 - R_0$, в пределах которого имеет место "медленная кинетика".

Согласно (33.15) и (33.17), $R_1 - R_0$ равно:

$$R_1 - R_0 = \frac{K_1}{2(K-1)\alpha_0} \left(\frac{2\alpha_0 R_0}{\sin 2\alpha_0 R_0} - 1 \right) \frac{\sin^3 \alpha_0 R_0}{\cos \alpha_0 R_0 \left(1 - \frac{q-1}{q} \frac{\sin \alpha_0 R_0}{\alpha_0^2 R_0^2} \right)}. \quad (33.27)$$

По порядку величины формула (33.27) дает:

$$R_1 - R_0 \approx \frac{K_1}{10(K-1)} R_0. \quad (33.28)$$

При $K_1 = 10^{-2}$, $K-1 = \frac{1}{2}10^{-1}$ $R_1 - R_0$ оказывается порядка $2 \cdot 10^{-2} R_0$. В практических случаях $R_1 - R_0$ оказывается порядка нескольких сантиметров.

Когда радиус R , увеличиваясь, приближается к R_1 , λ_M переходит в λ_6 . Этот переход осуществляется в типичных случаях на интервале размером порядка 1 см.

Хотя все вычисления относились только к сферической геометрии, полученные результаты по порядку величины применимы и к случаю произвольной геометрии.

До сих пор мы считали постоянными все величины, определяющие нейтронную мультиплексацию.

Рассмотрим теперь изменение во времени числа нейтронов, обусловленное изменению параметров реактора (например, K , L^2 и т.д.).

Пусть величины, определяющие λ , меняются. Эти изменения могут быть достигнуты, например, в результате движения регулирующих стержней, изменения количества реагирующего вещества и т.д. Другой величиной, вызывающей изменение λ , является уменьшение $K = \nu\varphi\theta$ при повышении температуры. Движение регулирующих стержней также может быть связано с изменением температуры реактора и поэтому действовать в том же направлении, что и температурные регулирующие влияния на K .

Изменение полного числа нейтронов в 1 секунду без запаздывающих нейтронов равно:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N. \quad (33.29)$$

Введем уравнение, описывающее изменение λ :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \alpha - \beta N. \quad (33.30)$$

βN включает температурное регулирование и регулирование, связанное с выделяемой мощностью. α учитывает движение регулирующих стержней, не связанное с мощностью реактора, и другие подобные эффекты.

Для выполнимости (33.29) необходима достаточная медленность изменения λ .

Учтем теперь наличие запаздывающих нейтронов. Пусть M обозначает число нейтронно-активных ядер с периодом T_1 :

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N + \frac{M}{T_1} \quad (33.29')$$

(здесь мы предполагаем, что каждое нейтронно-активное ядро испускает один нейtron).

Изменение M записывается следующим образом:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M}{T_1} + \frac{K_1 N}{T}. \quad (33.31)$$

Система (33.29'), (33.30), (33.31) дает возможность исследовать кинетику при изменении параметров. (Разумеется, (33.30) не является общим уравнением регулировки. Возможно введение в правую часть членов, пропорциональных $\frac{dN}{dt}$. Здесь мы ограничимся простейшим случаем.)

В стационарном состоянии

$$\begin{aligned} \lambda &= \text{const} = -\frac{K_1}{T}, \\ M &= \text{const} = M_0 = \frac{K_1 T_1 \alpha}{T \beta}, \\ N &= \text{const} = N_0 = \frac{\alpha}{\beta}. \end{aligned} \quad (33.32)$$

Рассмотрим малые колебания λ , M , N около их стационарных значений (33.32):

$$\begin{aligned} N &= N_0 + n, \quad M = M_0 + m, \quad \lambda = \lambda_0 + l, \\ n &\ll N_0, \quad m \ll M_0, \quad |l| \ll |\lambda_0|. \end{aligned}$$

Линеаризуя (33.29'), (33.30), (33.31), находим:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \lambda_0 n + l N_0 + \frac{m}{T_1}, \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{m}{T_1} + \frac{n K_1}{T}, \\ \frac{dl}{dt} &= -\beta n. \end{aligned} \quad (33.33)$$

Ищем решение в виде:

$$n = n_0 e^{i\omega t}, \quad m = m_0 e^{i\omega t}, \quad l = l_0 e^{i\omega t}. \quad (33.34)$$

Для частоты ω получаем уравнение:

$$\alpha \left(i\omega + \frac{1}{T_1} \right) = \omega^2 \left(i\omega + \frac{1}{T_1} + \lambda_0 \right). \quad (33.35)$$

Минимальные частоты, согласно этому уравнению, тем меньше, чем меньше α , т.е. чем медленнее происходит изменение параметров реактора.

В отсутствии запаздывающих нейтронов, т.е. при

$\lambda_0 = 0$, $T_1 = \infty$, (33.35) дает незатухающие колебания с частотой ω_6 :

$$\alpha = \omega_6^2, \quad T_6 = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}},$$

T_6 – период колебаний.

Если колебания совершаются с очень малой частотой, $\alpha \rightarrow 0$, то (33.35) переходит в соотношение:

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{1 + \frac{KT_1}{T}}. \quad (33.36)$$

Мы снова получили незатухающие колебания с периодом T_M , равным:

$$T_M = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{1 + \frac{KT_1}{T}}. \quad (33.37)$$

Действие запаздывающих нейтронов приводит к появлению фактора $\sqrt{1 + \frac{KT_1}{T}} \approx 10$, с которым мы уже встречались ранее (33.25).

В общем случае решение уравнения (33.35) представляет собой затухающие колебания. Затухание колебаний (33.37) может быть введено также добавлением члена, пропорционального $\frac{dN}{dt}$, в правую часть (33.30).

В заключение отметим еще, что при внезапном быстром изменении параметров реактора (α или β) нейtronная плотность вначале меняется так, как если бы запаздывающих нейтронов не было, и только через промежуток времени порядка T_1 кинетика переходит в медленную. Это следует из рассмотрения решения уравнений (33.33) для δ -образного возмущения (или, иначе говоря, из рассмотрения функции Грина этих уравнений).

ГЛАВА VI

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ ДВУХ СРЕД

§34. Альбедо нейтронов от плоской границы

В настоящем параграфе мы рассмотрим задачу об отражении нейтронов от плоской границы бесконечно протяженного тела.

При своем движении в теле нейтроны испытывают, вообще говоря, как упругое, так и неупругое рассеяние, кроме того, возможен захват нейтронов атомами тела.

Мы будем в дальнейшем предполагать, что столкновения нейтронов с атомами происходят без потери кинетической энергии нейтронов, т.е. имеет место только упругое рассеяние нейтронов. Мы предполагаем его сферически симметричным в лабораторной системе координат.

Эти предположения хорошо оправдываются в случае тепловых нейтронов. Они выполняются также и для более быстрых нейтронов, если только последние движутся в достаточно тяжелой среде.

Полученные ниже результаты использованы при изучении резонансного поглощения нейтронов большими блоками (см. §29).

Переходя к математической формулировке задачи, установим сперва общее кинетическое уравнение для определения функции распределения нейтронов.

Обозначим через $w(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) dx dy dz dv_x dv_y dv_z$ вероятность того, что частица (нейтрон) находится в момент времени t в элементе фазового объема $dF = dx dy dz dv_x dv_y dv_z$ около фазовой точки x, y, z, v_x, v_y, v_z (x, y, z – пространственные координаты частицы, v_x, v_y, v_z – проекции ее скорости на оси x, y, z).

Кинетическое уравнение выражает закон сохранения частиц, из которого следует, что изменение числа частиц в элементе объема dt в течение промежутка времени dt , равное

$\frac{\partial w}{\partial t} d\tau dt$, можно представить как разность числа частиц, уходящих и приходящих в объем $d\tau$ за время dt вследствие движения частиц и их столкновений с атомами вещества.

Разность числа частиц, уходящих и приходящих в объем $d\tau$ за время dt вследствие движения частиц, равна, очевидно,

$$-\mathbf{v} \operatorname{grad} w d\tau dt. \quad (34.1)$$

Благодаря столкновениям, положение частиц в пространстве не меняется, изменяется лишь их скорость. Пусть $\phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}' - \mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z$ представляет собой вероятность (отнесенную к единице времени) того, что частица испытала столкновение в точке $(x, y, z, v'_x, v'_y, v'_z)$ и перешла вследствие столкновения в интервал скоростей $dv_x dv_y dv_z$ около точки (x, y, z, v_x, v_y, v_z) . Полное число частиц, приходящих за время dt в элемент $d\tau$ благодаря столкновениям, равно, очевидно,

$$dtd\tau \int w(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) \phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}' - \mathbf{v}) dv'_x dv'_y dv'_z. \quad (34.2)$$

Число частиц, покидающих этот элемент, равно

$$dtd\tau w(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \int \phi(\mathbf{v}', \mathbf{v} - \mathbf{v}') dv'_x dv'_y dv'_z. \quad (34.3)$$

Последний интеграл представляет собой полную вероятность рассеяния частицы, отнесенную к единице времени. Мы обозначим эту вероятность через w_s .

Захват нейтронов ядрами вещества приводит к тому, что они покидают элемент фазового объема $d\tau$. Число частиц, покидающих элемент $d\tau$ за время dt благодаря захвату, равно

$$dtd\tau w(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) w_c, \quad (34.4)$$

где w_c – вероятность захвата, отнесенная к единице времени.

Собирая наши формулы, получим следующее уравнение, выражющее закон сохранения частиц:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} w + (w_s + w_c)w = \int w(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) \phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}' - \mathbf{v}) d\mathbf{v}'. \quad (34.5)$$

В случае сферически симметричного рассеяния уравнение (34.5) может быть записано как

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} w + (w_s + w_c)w = \frac{w_s}{4\pi} \int w(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) d\Omega', \quad (34.6)$$

где $d\Omega'$ – элемент телесного угла вектора \mathbf{v}' .

Нас в дальнейшем будет интересовать, как было сказано выше, тот случай, когда пучок нейтронов падает на плоскую границу безгранично протяженного тела, занимающего правое полупространство $x > 0$ (ось x имеет направление внутренней нормали к поверхности тела).

Функция $w(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ зависит в этом случае только от x и угла ϑ между вектором \mathbf{v} и осью x . Вводя обозначение

$$\zeta = \cos \vartheta,$$

перепишем уравнение (34.6) в виде:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v\zeta \frac{\partial w}{\partial x} + (w_s + w_c)w = \frac{w_s}{2} \int_{-1}^1 w(x, \zeta', t) d\zeta'. \quad (34.7)$$

Будем рассматривать далее только стационарный случай, поэтому можно положить $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$.

Вводя в рассмотрение длину свободного пробега нейтронов

$$\lambda = \frac{v}{w_s + w_c} \quad (34.8)$$

и используя λ как единицу длины, получим окончательно следующее интегро-дифференциальное уравнение для определения функции $w(x, \zeta)$:

$$\zeta \frac{\partial w}{\partial x} + w = \frac{\gamma}{2} \int_{-1}^1 w(x, \zeta') d\zeta', \quad (34.9)$$

где

$$\gamma = \frac{w_s}{w_s + w_c} = \frac{N}{N+1}, \quad N = \frac{w_s}{w_c}. \quad (34.10)$$

Математическая задача может быть теперь сформулирована следующим образом.

На плоскость $x = 0$ падают слева нейтроны, обладающие одной и той же величиной скорости v , но могущие различаться направлением своего движения. Функция распределения нейтронов по направлению их скоростей в области $x < 0$ при $\vartheta > \pi/2$ считается известной. Так как при $x \leq 0$ не происходит столкновений нейтронов с атомами вещества, то функция распределения на границе $x = 0$ $w(0, \zeta)$ для движущихся вперед нейтронов, т.е. при $\zeta > 0$, может также считаться известной и совпадающей с функцией распределения $f(\zeta)$ в падающем пучке частиц.

Итак,

$$w(0, \zeta) = f(\zeta), \quad \zeta > 0. \quad (34.11)$$

При $x \rightarrow \infty$ функция распределения должна, очевидно, обращаться в нуль при любых ζ :

$$w(\infty, \zeta) = 0, \quad -1 \leq \zeta \leq 1. \quad (34.12)$$

Если слой вещества имеет конечную толщину a , то (34.12) должно быть заменено следующим условием:

$$w(a, \zeta) = 0, \quad \zeta < 0. \quad (34.13)$$

Это условие выражает тот факт, что на границу $x = a$ справа не падают частицы.

Мы будем решать уравнение (34.9) вместе с условиями (34.11), (34.12), считая $f(\zeta)$ известной функцией.

Задача заключается в нахождении функции распределения $w(x, \zeta)$ при $|\zeta| < 1$.

Для определения альбедо необходимо знать $w(0, \zeta)$ при отрицательных ζ .

Будем считать, что поток падающих на плоскость $x = 0$ нейтронов равен единице. Это значит, что функция $f(\zeta)$ нормирована согласно условию

$$\int_0^1 f(\zeta) \zeta d\zeta = 1. \quad (34.14)$$

Действительно, $w(0, \zeta) d\zeta$ представляет собой по определению число частиц, движущихся в точке $x = 0$ под углом, определяемым величиной ζ . Умножив $w(0, \zeta) d\zeta$ на ζ , мы найдем число нейтронов, пересекающих плоскость $x = 0$ в единицу

времени (ζ определяет нормальную составляющую скорости). Поэтому поток частиц, падающих слева на плоскость $x = 0$, равен

$$\int_0^1 \zeta w(0, \zeta) d\zeta = \int_0^1 f(\zeta) \zeta d\zeta.$$

Число нейтронов, пересекающих плоскость $x = 0$ справа, равно

$$\int_{-1}^0 \zeta w(0, \zeta) d\zeta. \quad (34.15')$$

Если условие нормировки (34.14) выполнено, то интеграл (34.15') определяет альбедо нейтронов, которое мы обозначим через β :

$$\beta = \int_{-1}^0 \zeta w(0, \zeta) d\zeta. \quad (34.15)$$

При нормальном падении нейтронов на плоскость $x = 0$ функция $f(\zeta)$ имеет вид:

$$f(\zeta) = \delta(1 - \zeta). \quad (34.16)$$

Если распределение нейтронов по углам равномерное, то

$$f(\zeta) = 1. \quad (34.16')$$

При распределении нейтронов по закону $\cos \vartheta$

$$f(\zeta) = 2\zeta. \quad (34.16'')$$

Мы приведем сперва точное решение уравнения (34.9) с граничными условиями (34.11) и (34.12).

Это решение основано на применении метода Винера-Гопфа [19], излагаемого в Математическом приложении.

Введем в рассмотрение плотность нейтронов $\rho(x)$ в точке x :

$$\rho(x) = \int_{-1}^1 w(x, \zeta) d\zeta. \quad (34.17)$$

Уравнение (34.9) может быть записано в виде

$$\zeta \frac{\partial w}{\partial x} + w = \frac{\gamma}{2} \rho. \quad (34.18)$$

Это уравнение мы можем формально рассматривать как уравнение с известной правой частью. Формальное решение его имеет вид:

$$w(x, \zeta) = e^{-x/\zeta} \left\{ w(0, \zeta) + \frac{\gamma}{2\zeta} \int_0^x \rho(t) e^{t/\zeta} dt \right\}. \quad (34.19)$$

Если $x \rightarrow \infty$ и $\zeta < 0$, то левая часть (34.19) согласно (34.12) обращается в нуль. Отсюда следует, что при $x = \infty$ и $\zeta < 0$ выражение в фигурных скобках обращается в нуль, т.е.

$$w(0, \zeta) = -\frac{\gamma}{2\zeta} \int_0^\infty \rho(t) e^{t/\zeta} dt, \quad -1 < \zeta < 0. \quad (34.20)$$

Проинтегрируем уравнение (34.19) по ζ в пределах от -1 до $+1$. Учитывая условия (34.11) и (34.12), получим:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \int_0^1 f(\zeta) e^{-x/\zeta} d\zeta - \int_{-1}^0 \frac{\gamma}{2\zeta} e^{-x/\zeta} \int_0^\infty \rho(t) e^{t/\zeta} dt d\zeta + \\ &+ \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{2\zeta} e^{-x/\zeta} \int_0^x \rho(t) e^{t/\zeta} dt d\zeta = \int_0^1 f(\zeta) e^{-x/\zeta} d\zeta - \end{aligned}$$

$$- \int_{-1}^0 \frac{\gamma}{2\zeta} e^{-x/\zeta} \int_x^\infty \rho(t) e^{t/\zeta} dt d\zeta + \int_0^1 \frac{\gamma}{2\zeta} e^{-x/\zeta} \int_0^x \rho(t) e^{t/\zeta} dt d\zeta. \quad (34.21)$$

Меняя в (34.21) порядок интегрирования, получим:

$$\rho(x) = \int_0^1 f(\zeta) e^{-x/\zeta} d\zeta - \frac{\gamma}{2} \int_x^\infty \rho(t) \int_{-1}^0 \frac{e^{|t-x|/\zeta}}{\zeta} d\zeta dt +$$

$$+ \frac{\gamma}{2} \int_0^x \rho(t) \int_0^1 \frac{e^{-|t-x|/\zeta}}{\zeta} d\zeta dt. \quad (34.21')$$

Замечая, что

$$-\int_{-1}^0 e^{\frac{|t-x|}{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_0^1 e^{-\frac{|t-x|}{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta} = -Ei(-|t-x|) \equiv E(t-x), \quad (34.22)$$

перепишем уравнение (34.21) в виде:

$$\rho(x) = \int_0^1 f(\zeta) e^{-x/\zeta} d\zeta + \frac{\gamma}{2} \int_0^\infty \rho(t) E(t-x) dt. \quad (34.23)$$

Мы получили для плотности нейтронов неоднородное интегральное уравнение типа Винера-Гопфа, метод решения которого изложен в разделе Математическое приложение.

Прежде чем переходить к исследованию этого уравнения, мы выведем еще необходимое нам в дальнейшем интегральное уравнение, которому удовлетворяет функция $w(0, \zeta)$ при $\zeta < 0$.

Умножим уравнение (34.18) на e^{-sx} , где s – комплексная величина с положительной вещественной частью, и проинтегрируем по x от 0 до ∞ :

$$\int_0^\infty \zeta \frac{\partial w}{\partial x} e^{-sx} dx + \int_0^\infty w e^{-sx} dx = \frac{\gamma}{2} \int_{-1}^1 d\zeta \int_0^\infty w(x, \zeta) e^{-sx} dx.$$

Интегрируя в первом члене по частям и пользуясь обозначением

$$\int_0^\infty w(x, \zeta) e^{-sx} dx = W_s(\zeta),$$

получим:

$$-\zeta w(0, \zeta) + s\zeta W_s(\zeta) + W_s(\zeta) = \frac{\gamma}{2} \int_{-1}^1 W_s(\zeta) d\zeta.$$

$$W_s(\zeta) = \frac{\zeta}{s\zeta + 1} w(0, \zeta) + \frac{\gamma}{2} \int_0^\infty \rho(x) e^{-sx} dx.$$

Проинтегрируем это уравнение по ζ в пределах от -1 до 1 . Вводя обозначение

$$\int_0^\infty \rho(x) e^{-sx} dx = \rho_s,$$

получим

$$\rho_s = \int_{-1}^1 \frac{\zeta d\zeta}{s\zeta + 1} w(0, \zeta) + \frac{\gamma}{2} \rho_s \int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{s\zeta + 1},$$

откуда

$$\begin{aligned} \rho_s \left(1 - \frac{\gamma}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{s\zeta + 1} \right) &= \int_{-1}^1 \frac{\zeta w(0, \zeta)}{s\zeta + 1} d\zeta = \\ &= \int_0^1 \frac{\zeta w(0, \zeta)}{s\zeta + 1} d\zeta + \int_{-1}^0 \frac{\zeta w(0, \zeta)}{s\zeta + 1} d\zeta. \end{aligned} \quad (34.24)$$

Рассмотрим прежде всего тот случай, когда нейтроны падают на плоскость $x = 0$ под углом ϑ . В этом случае

$$w(0, \zeta) = f(\zeta) = \delta(\zeta - \zeta_0), \quad \zeta > 0, \quad \zeta_0 = \cos \vartheta \quad (34.25)$$

и уравнение (34.24) приобретает вид:

$$\rho_s \left(1 - \frac{\gamma}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{s\zeta + 1} \right) = \frac{\zeta_0}{s\zeta_0 + 1} + \int_{-1}^0 \frac{\zeta}{s\zeta + 1} w(0, \zeta) d\zeta. \quad (34.24')$$

Положим в этом выражении $s = -\frac{1}{z}$, $\operatorname{Re} z < 0$, и воспользуемся формулой (34.20), связывающей $\rho(x)$ и $w(0, \zeta)$ при $\zeta < 0$. Мы получим

$$\rho_{-1/z} = \int_0^\infty \rho(x) e^{x/z} dx = -\frac{2z}{\gamma} w(0, z)$$

и

$$-\frac{2z}{\gamma} w(0, z) \left(1 - \frac{\gamma}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{z - \zeta} \right) = \frac{\zeta_0}{1 - \frac{\zeta_0}{z}} + \int_{-1}^0 \frac{\zeta}{1 - \frac{\zeta}{z}} w(0, \zeta) d\zeta,$$

т.е.

$$-w(0, z) \left(1 - \frac{\gamma}{2} z \int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{z - \zeta} \right) = \frac{\gamma}{2} \frac{\zeta_0}{z - \zeta_0} + \frac{\gamma}{2} \int_{-1}^0 \frac{\zeta}{z - \zeta} w(0, \zeta) d\zeta. \quad (34.26)$$

Это уравнение определяет аналитическую функцию $w(0, z)$ комплексной переменной. На отрезке вещественной оси $-1 < z < 0$ эта функция совпадает с интересующей нас функцией $w(0, \zeta)$.

Из (34.26) вытекает важное соотношение:

$$-\lim_{z \rightarrow -\infty} z w(0, z) (1 - \gamma) = \frac{\gamma}{2} \zeta_0 + \frac{\gamma}{2} \int_{-1}^0 \zeta w(0, \zeta) d\zeta, \quad (34.27)$$

откуда следует, что

$$\beta = \int_{-1}^0 \zeta w(0, \zeta) d\zeta = -\frac{2}{\gamma} (1 - \gamma) \lim_{z \rightarrow -\infty} z w(0, z) - \zeta_0. \quad (34.28)$$

Мы видим отсюда, что для определения альбедо достаточно найти предел $\lim_{z \rightarrow -\infty} z w(0, z)$.

Перейдем теперь к исследованию уравнения (34.23). Полагая

$$f(\zeta) = \delta(\zeta - \zeta_0),$$

перепишем уравнение (34.23) в виде

$$\rho(x) = e^{-x/\zeta_0} + \frac{\gamma}{2} \int_0^\infty \rho(t) E(t - x) dt. \quad (34.29)$$

Для решения уравнения (34.29) достаточно, как показано в Математическом приложении, найти какое-либо решение однородного уравнения

$$u(x) = \frac{\gamma}{2} \int_0^\infty u(t) E(t-x) dt. \quad (34.29')$$

Если $u(x)$ – некоторое решение уравнения (34.29'), то одно из решений уравнения (34.29) может быть представлено в виде:

$$\rho_1(x) = c \int_0^x e^{-\frac{x-t}{\zeta_0}} u(t) dt, \quad (34.30)$$

где

$$c = -\frac{1}{\int_{-\infty}^0 e^{t/\zeta_0} u(t) dt}. \quad (34.30')$$

Для решения однородного уравнения (34.29') находим прежде всего согласно §36 функцию $K(\omega)$:

$$K(\omega) = \frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x) e^{x\omega} dx = \frac{\gamma}{2\omega} \ln \frac{1+\omega}{1-\omega}. \quad (34.31)$$

Так как $K(0) = \gamma < 1$, то уравнение

$$1 - K(\omega) = 0 \quad (34.31')$$

имеет только два нуля κ и $-\kappa$, лежащих на действительной оси.

В рассматриваемом случае $k = 0$ (см. (36.19')), поэтому $\delta = 1$ и $|\kappa| < 1$. Величину α (см. Математическое приложение) выбираем между κ и 1:

$$\kappa < \alpha < 1.$$

Находим далее функции $\tau(\omega)$, $\tau_+(\omega)$ и $\tau_-(\omega)$:

$$\tau(\omega) = \frac{\omega^2 - 1}{(\omega - \kappa)(\omega + \kappa)} \left(1 - \frac{\gamma}{2\omega} \ln \frac{1+\omega}{1-\omega}\right), \quad \operatorname{Re} \omega \leq \beta_1, \quad (34.32')$$

$$\tau_-(\omega) = \exp \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z-\omega} dz \right), \quad \operatorname{Re} \omega \leq \beta, \quad (34.32'')$$

$$\tau_+(\omega) = \exp \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta_1-i\infty}^{-\beta_1+i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z-\omega} dz \right), \quad \operatorname{Re} \omega \geq -\beta. \quad (34.32''')$$

Здесь β и β_1 – произвольные числа, удовлетворяющие условию:

$$\alpha < \beta < \beta_1 < 1.$$

Решение уравнения (34.29') может быть представлено в виде:

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} F_+(\omega) e^{-x\omega} d\omega, \quad x > 0, s > \alpha,$$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s'-i\infty}^{-s'+i\infty} F_-(\omega) e^{-x\omega} d\omega, \quad x < 0, s' \leq \alpha, \quad (34.33)$$

где

$$F_+(\omega) = \frac{\omega - 1}{(\omega - \kappa)(\omega + \kappa)} \tau_-(\omega), \quad \operatorname{Re} \omega \leq \beta,$$

$$F_-(\omega) = -\frac{1}{\omega + 1} \tau_+(\omega), \quad \operatorname{Re} \omega \geq -\beta. \quad (34.33')$$

Рассмотрим асимптотическое поведение функции $u(x)$ при больших x .

Согласно §38, при $x \gg 1$ (см. (38.18))

$$u(x) = a_1 e^{\kappa x} + a_2 e^{-\kappa x} + O(e^{-\alpha x}) \approx a_1 e^{\kappa x}.$$

Отсюда следует, что функция $\rho_1(x)$, определяемая формулой (34.30), при больших x имеет следующий вид:

$$\rho_1(x) \approx c \int_0^x e^{-\frac{x-t}{\zeta_0}} a_1 e^{\kappa t} dt = a_1 c \frac{e^{\kappa x} - e^{-x/\zeta_0}}{1/\zeta_0 + \kappa}.$$

Нас интересует решение уравнения (34.29), обращающееся в нуль на бесконечности. Это решение связано с функциями $\rho_1(x)$ и $u(x)$, которые мы только что определили, следующим образом:

$$\rho(x) = \rho_1(x) - \frac{c}{1/\zeta_0 + \kappa} u(x), \quad (34.34')$$

т.е.

$$\rho(x) = \frac{1}{\int_{-\infty}^0 e^{t/\zeta_0} u(t) dt} \left(\int_0^x e^{-\frac{x-t}{\zeta_0}} u(t) dt - \frac{u(x)}{\frac{1}{\zeta_0} + \kappa} \right). \quad (34.34)$$

Вычислим входящий сюда интеграл. Пользуясь формулой (34.33), получим:

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-\frac{x-t}{\zeta_0}} u(t) dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_0^x e^{-\frac{x-t}{\zeta_0}} dt \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} F_+(\omega) e^{-t\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} F_+(\omega) d\omega \int_0^x e^{-\frac{x-t}{\zeta_0}} e^{-t\omega} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} F_+(\omega) \frac{e^{-\omega x} - e^{-x/\zeta_0}}{\frac{1}{\zeta_0} - \omega} d\omega. \end{aligned}$$

Выражение (34.34) приобретает поэтому вид:

$$\rho(x) = \frac{c}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} F_+(\omega) \left(\frac{e^{-\omega x} - e^{-x/\zeta_0}}{\frac{1}{\zeta_0} - \omega} - \frac{e^{-\omega x}}{\frac{1}{\zeta_0} + \kappa} \right) d\omega. \quad (34.34'')$$

Подставляя (34.34) в (34.20) и меняя порядок интегрирования, получим:

$$w(0, \zeta) = -\frac{\gamma}{2\zeta} \frac{c}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} F_+(\omega) d\omega \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{t/\zeta} \left(\frac{e^{-wt} - e^{-t/\zeta_0}}{\frac{1}{\zeta_0} - \omega} - \frac{e^{-wt}}{\frac{1}{\zeta_0} + \kappa} \right) dt =$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\gamma}{2\zeta} \frac{c}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} F_+(\omega) \left[\frac{1}{1/\zeta - \omega} \left(\frac{1}{1/\zeta_0 + \kappa} - \frac{1}{1/\zeta_0 - \omega} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1/\zeta - 1/\zeta_0} \frac{1}{1/\zeta_0 - \omega} \right] d\omega, \quad -1 \leq \zeta < 0. \end{aligned} \quad (34.35)$$

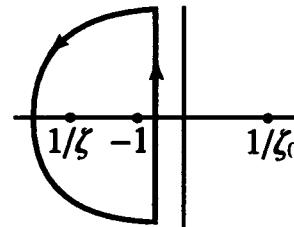


Рис. 30

В последнем интеграле можно замкнуть путь интегрирования полуокружностью в левой полуплоскости (см. рис. 30). Действительно, функция $F_+(\omega)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} \omega \leq \beta$ и стремится к нулю, когда $|\omega| \rightarrow \infty$ в этой полуплоскости.

Пользуясь теоремой о вычетах, получим:

$$w(0, \zeta) = \frac{\gamma}{2\zeta} c \sqrt{2\pi} F_+(1/\zeta) \left(\frac{1}{1/\zeta_0 + \kappa} - \frac{1}{1/\zeta_0 - 1/\zeta} \right) =$$

$$= \frac{\gamma}{2\zeta} c \sqrt{2\pi} F_+(1/\zeta) \frac{1/\zeta + \kappa}{1/\zeta_0 + \kappa} \frac{1}{1/\zeta - 1/\zeta_0}, \quad -1 \leq \zeta < 0. \quad (34.36)$$

Перейдем к вычислению $F_+(1/\zeta)$. Согласно (34.33'),

$$F_+(1/\zeta) = \frac{1/\zeta - 1}{(1/\zeta - \kappa)(1/\zeta + \kappa)} \exp \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z - 1/\zeta} dz \right),$$

$$\zeta < 0.$$

(34.37)

Так как

$$\tau(\omega) = \frac{\omega^2 - 1}{\omega^2 - \kappa^2} (1 - K(\omega)),$$

то

$$I = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z - 1/\zeta} dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dz}{z - 1/\zeta} \ln \frac{z - 1}{z - \kappa} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dz}{z - 1/\zeta} \ln \frac{z + 1}{z + \kappa} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dz}{z - 1/\zeta} \ln(1 - K(z)) \quad (34.37')$$

(мы сместили путь интегрирования и выбрали в качестве него мнимую ось, т.к. $\ln \tau(z)$ голоморфна в области $|\operatorname{Re} z| < 1$ и стремится к нулю, когда $|z| \rightarrow \infty$).

Первый из интегралов в (34.37') равен:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dz}{z - 1/\zeta} \ln \frac{z - 1}{z - \kappa} = \ln \frac{1/\zeta - \kappa}{1/\zeta - 1}, \quad \zeta < 0.$$

Второй интеграл равен нулю, и, наконец, третий интеграл может быть представлен в виде:

$$\chi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln(1 - K(z))}{z - 1/\zeta} dz =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln(1 - K(z))}{|z|^2 + 1/\zeta^2} \left(z^* - \frac{1}{\zeta} \right) dz = \frac{\zeta}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln(1 - K(z))}{\zeta^2 |z|^2 + 1} dz$$

(мы воспользовались тем, что $K(z)$ – четная функция, z^* – комплексно сопряженная величина z).

Полагая $z = it$ и замечая, что

$$K(it) = \frac{\gamma}{2it} \ln \frac{1+it}{1-it} = \frac{\gamma}{t} \operatorname{arctg} t,$$

получим следующее выражение для $\chi(z)$:

$$\chi(z) = \frac{\zeta}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln \left(1 - \frac{\gamma}{t} \operatorname{arctg} t \right)}{1 + \zeta^2 t^2} dt. \quad (34.38)$$

Функция $F_+(1/\zeta)$ согласно (34.37), (34.37') имеет вид:

$$F_+(1/\zeta) = \frac{1}{1/\zeta + \kappa} \exp I(1/\zeta), \quad \zeta < 0. \quad (34.39')$$

Наконец, исходная функция $w(0, \zeta)$ ($\zeta < 0$), определяемая формулой (34.36), может быть представлена в виде:

$$w(0, \zeta) = \frac{c\sqrt{2\pi}\gamma}{2\zeta} \left[\left(\frac{1}{\zeta_0} - \kappa \right) \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta_0} \right) \right]^{-1} \exp \chi(\zeta), \quad \zeta < 0. \quad (34.39)$$

Определим входящую сюда постоянную c . Согласно (34.30'), имеем:

$$-\frac{1}{c} = \int_{-\infty}^0 e^{t/\zeta_0} u(t) dt = \int_{-\infty}^0 e^{t/\zeta_0} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} F_-(\omega) e^{-t\omega} d\omega.$$

Меняя в последнем интеграле порядок интегрирования и применяя теорему о вычетах, получим:

$$-\frac{1}{c} = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} \frac{F_-(\omega)}{1/\zeta_0 - \omega} d\omega = \sqrt{2\pi} F_-(1/\zeta_0).$$

Согласно (34.33'), $F_-(1/\zeta_0)$ равно:

$$F_-\left(\frac{1}{\zeta_0}\right) = -\frac{\tau_+\left(\frac{1}{\zeta_0}\right)}{\frac{1}{\zeta_0} + 1} = -\frac{1}{\frac{1}{\zeta_0} + 1} \exp \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z - \frac{1}{\zeta_0}} dz \right)$$

(путь интегрирования выбран вдоль мнимой оси, см. замечание, сделанное после формулы (34.37')).

Вычислим интеграл

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z - \frac{1}{\zeta_0}} dz =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dz}{z - \frac{1}{\zeta_0}} \left\{ \ln \frac{z-1}{z-\kappa} + \ln \frac{z+1}{z+\kappa} + \ln(1-K(z)) \right\}.$$

Легко видеть, что интеграл от первого слагаемого в фигурных скобках равен нулю.

Второе слагаемое дает

$$\ln \frac{1/\zeta_0 + 1}{1/\zeta_0 + \kappa},$$

и интеграл от третьего слагаемого равен $\chi(\zeta_0)$. Поэтому

$$\frac{1}{c} = \frac{\sqrt{2\pi}}{1/\zeta_0 + \kappa} e^{\chi(\zeta_0)}.$$

Подставляя это значение $1/c$ в (34.29), получим следующее выражение для функции $w(0, \zeta)$:

$$w(0, \zeta) = \frac{\gamma}{2} \frac{\zeta_0}{\zeta_0 - \zeta} \exp[\chi(\zeta) - \chi(\zeta_0)], \quad -1 \leq \zeta < 0. \quad (34.40)$$

Этой формулой и решается задача о нахождении углового распределения отраженных от плоскости $x = 0$ нейтронов в том случае, когда нейтроны падают на тело под определенным углом ϑ_0 ($\zeta_0 = \cos \vartheta_0$).

Альбедо может быть найдено по формуле

$$\beta = \int_{-1}^0 \zeta w(0, \zeta) d\zeta.$$

Однако нет необходимости вычислять этот интеграл, т.к. из (34.28) следует, что он просто выражается через

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} z w(0, z).$$

Этот предел, согласно (34.40), равен:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} z w(0, z) = -\frac{\gamma}{2} \zeta_0 \exp[\chi(-\infty) - \chi(\zeta_0)].$$

Можно показать, что

$$\chi(-\infty) = -\ln(1 - \gamma)^{1/2}.$$

Поэтому окончательно мы получим следующее выражение для альбено:

$$\beta = \int_{-1}^0 z w(0, z) dz = \zeta_0 \left[(1 - \gamma)^{1/2} e^{-\chi(\zeta_0)} - 1 \right]. \quad (34.41)$$

Эта формула относится к тому случаю, когда нейтроны падают на плоскость $x = 0$ под определенным углом ϑ_0 ($\zeta_0 = \cos \vartheta_0$).

В общем случае, когда угловое распределение падающих нейтронов задается функцией $f(\zeta)$, альбено может быть найдено путем соответствующего усреднения выражения (34.41).

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\int_0^1 \left[-(1 - \gamma)^{1/2} e^{-\chi(\zeta_0)} + 1 \right] \zeta_0 f(\zeta_0) d\zeta_0}{\int_0^1 \zeta_0 f(\zeta_0) d\zeta_0} = \\ &= 1 - \sqrt{1 - \gamma} \frac{\int_0^1 z f(z) e^{-\chi(z)} dz}{\int_0^1 z f(z) dz}. \end{aligned} \quad (34.42)$$

Мы видим, что альбено имеет вид:

$$\beta = 1 - \sqrt{1 - \gamma} C(\gamma),$$

где $C(\gamma)$ — некоторая сложная функция $\gamma = w_s/(w_s + w_c)$.

При $\gamma = 1$, т.е. при отсутствии захвата, альбено равно единице, как и следовало ожидать.

Действительно, если захват отсутствует, то частица, попавшая в тело, в результате ряда столкновений с атомами вернется

к границе $x = 0$ и выйдет из него, так как вероятность того, что частица после бесконечного числа столкновений дойдет до бесконечности ($x = \infty$), а не вернется к границе, равна нулю. Потому альбето равно единице, иными словами, все падающие частицы в конце концов покидают тело.

При наличии захвата существует конечная вероятность того, что нейtron будет поглощен, прежде чем он успеет вернуться к границе. По этой причине альбето меньше единицы.

При произвольном значении величины γ для определения β приходится численным интегрированием находить $C(\gamma)$.

В случае малых сечений захвата достаточно вычислить значение функции $C(1)$.

В наиболее важных случаях равномерного распределения падающих частиц ($f(z) = 1$) и распределения по закону косинуса ($f(z) = 2z$) нахождение β сводится к вычислению двух интегралов

$$\int_0^1 ze^{-\chi(z)} dz, \quad \int_0^1 z^2 e^{-\chi(z)} dz. \quad (34.43)$$

Для вычисления этих интегралов можно поступить следующим образом.

Подставив в интеграл, входящий в (34.15), вместо $w(0, \zeta)$ выражение

$$w(0, \zeta) = \frac{\gamma}{2} \frac{\zeta_0}{\zeta_0 - \zeta} \exp[\chi(\zeta) - \chi(\zeta_0)],$$

получим:

$$\frac{\gamma}{2} \zeta_0 e^{-\chi(\zeta_0)} \int_{-1}^0 \frac{ze^{\chi(\zeta)}}{\zeta_0 - z} dz = -\zeta_0 \left[1 - (1 - \gamma)^{1/2} e^{-\chi(\zeta_0)} \right].$$

Так как функция $\chi(z)$ нечетная, то это выражение можно переписать в виде

$$\int_0^1 \frac{z}{\zeta_0 + z} e^{-\chi(z)} dz = \frac{2}{\gamma} \left(e^{\chi(\zeta_0)} - \sqrt{1 - \gamma} \right).$$

Разложим $\frac{z}{\zeta_0 + z}$ в ряд по степеням z/ζ_0 :

$$\frac{1}{\zeta_0} \left\{ \int_0^1 ze^{-\chi(z)} dz - \frac{1}{\zeta_0} \int_0^1 z^2 e^{-\chi(z)} dz + \dots \right\} = \frac{2}{\gamma} \left(e^{\chi(\zeta_0)} - \sqrt{1 - \gamma} \right).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} I_1(\gamma) &= \int_0^1 ze^{-\chi(z)} dz = \frac{2}{\gamma} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\chi(x)} - \sqrt{1 - \gamma} \right), \\ I_2(\gamma) &= \int_0^1 z^2 e^{-\chi(z)} dz = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ \int_0^1 ze^{-\chi(z)} dz - \frac{2}{\gamma} \left(e^{\chi(x)} - \sqrt{1 - \gamma} \right) x \right\}. \end{aligned} \quad (34.44)$$

Можно показать, что

$$I_1(1) = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad I_2(1) = 0,826. \quad (34.45)$$

Пользуясь формулой (34.45), мы получим следующие выражения для альбето в случае малого захвата.

Если нейтроны падают перпендикулярно границе, то

$$\beta = 1 - 2,91(N+1)^{-1/2}, \quad N = w_s/w_c. \quad (34.46)$$

При сферически симметричном распределении падающих нейтронов

$$\beta = 1 - 2,31(N+1)^{-1/2}. \quad (34.47)$$

При распределении по закону косинуса

$$\beta = 1 - 2,48(N+1)^{-1/2}. \quad (34.48)$$

§35. Условие на плоской границе с вакуумом

Изучая диффузию нейтронов в замедлителе, мы неоднократно использовали граничное условие на границе замедлителя с вакуумом, имеющее вид:

$$N + \alpha \lambda \frac{\partial N}{\partial \nu} = 0, \quad (35.1)$$

где N – плотность нейтронов, ν – внешняя нормаль к поверхности тела, λ – длина пробега нейтронов в теле и α – численный

коэффициент, зависящий от формы граничной поверхности.

В этом параграфе мы покажем, что в случае плоской границы

$$\alpha = 0,71.$$

Будем считать, что тело, в котором происходит диффузия нейтронов, занимает правое полупространство и граничит с вакуумом вдоль плоскости $x = 0$.

Диффузионное рассмотрение, которым мы пользовались в предыдущих параграфах, предполагает, что захват нейтронов мал. Поэтому мы установим здесь граничное условие для плотности нейтронов, пренебрегая захватом нейтронов. Кроме того, так же как и в §34, мы будем считать рассеяние нейтронов сферически симметричным.

Функция распределения нейтронов $w(x, \zeta)$ удовлетворяет согласно (34.9) уравнению

$$\zeta \frac{\partial w}{\partial x} + w = \frac{\gamma}{2} \int_{-1}^1 w(x, \zeta') d\zeta' \quad (35.2')$$

(x измеряется в единицах, равных длине свободного пробега нейтронов).

Так как мы пренебрегаем захватом, то $\gamma = 1$ и уравнение (35.2') приобретает вид:

$$\zeta \frac{\partial w}{\partial x} + w = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 w(x, \zeta') d\zeta' = \frac{1}{2} \rho(x). \quad (35.2)$$

На границе $x = 0$ выполняется условие

$$w(0, \zeta) = 0, \quad \zeta > 0, \quad (35.3)$$

означающее, что снаружи на тело не падают нейтроны.

Плотность нейтронов $\rho(x)$ удовлетворяет следующему уравнению (34.23):

$$\rho(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty E(x-y) \rho(y) dy, \quad x > 0, \quad (35.4)$$

где

$$E(x) = \int_0^1 \frac{e^{-|\zeta|}}{\zeta} d\zeta. \quad (35.4')$$

Наша задача заключается в нахождении асимптотического вида функции $\rho(x)$ при больших x .

Для решения этого вопроса можно применить метод Винера-Гопфа (см. раздел Математическое приложение).

Следуя алгоритму, изложенному в §36, мы находим сперва функцию

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} E(x) e^{x\omega} dx = \frac{1}{2\omega} \ln \frac{1+\omega}{1-\omega}, \quad |\operatorname{Re} \omega| < 1 \quad (35.5)$$

и далее определяем корни уравнения

$$K(\omega) - 1 = 0. \quad (35.5')$$

Так как $K(0) = 1$, то уравнение не имеет корней, за исключением точки $\omega = 0$. Точка $\omega = 0$ является двойным корнем.

Строим функции

$$\begin{aligned} \tau(\omega) &= \frac{\omega^2 - 1}{\omega^2} (1 - K(\omega)), \quad \operatorname{Re} \omega \leq \beta_1, \\ \tau_-(\omega) &= \exp \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z-\omega} dz \right), \quad \operatorname{Re} \omega \leq \beta, \\ F_+(\omega) &= \frac{\omega - 1}{\omega^2} \tau_-(\omega) \end{aligned} \quad (35.6)$$

(величины β , β_1 выбираем произвольно, но так, чтобы выполнялись условия $0 < \alpha < \beta < \beta_1 < \delta = 1$). Асимптотическое выражение $\rho(x)$ имеет вид:

$$\rho(x) = \operatorname{const} \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}_{\omega=\omega_j} (F_+(\omega) e^{-x\omega}), \quad (35.7)$$

где ω_j , $j = 1, 2, \dots, n$ суть корни уравнения (35.5') в полосе $|\operatorname{Re} \omega| \leq \alpha$.

В нашем случае последняя формула приобретает особенно простой вид:

$$\rho(x) = \operatorname{const} \operatorname{Res}_{\omega=0} F_+(\omega) e^{-x\omega} = C \operatorname{Res}_{\omega=0} \left[\frac{\omega - 1}{\omega^2} \tau_-(\omega) e^{-x\omega} \right]. \quad (35.8)$$

Функция $\tau_-(\omega)$ регулярна в полосе $|\operatorname{Re} \omega| \leq \beta$ и, в частности, в точке $\omega = 0$.

Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\omega=0} \left[\frac{\omega - 1}{\omega^2} \tau_-(\omega) e^{-x\omega} \right] &= \tau_-(0) - [\tau_-(\omega) e^{-x\omega}]'_{\omega=0} = \\ &= \tau_-(0) \left(x + 1 - \frac{\tau'_-(0)}{\tau_-(0)} \right). \end{aligned}$$

Итак,

$$\rho(x) = \operatorname{const}(x + p_\infty), \quad (35.9)$$

где

$$p_\infty = 1 - \frac{\tau'_-(0)}{\tau_-(0)}. \quad (35.9')$$

Найдем p_∞ . Используя определение функции $\tau_-(\omega)$ (см. формулу (35.6)), получим:

$$\frac{\tau'_-(0)}{\tau_-(0)} = [\ln \tau_-(\omega)]'_{\omega=0} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z^2} dz. \quad (35.10)$$

В последнем интеграле можно сместить путь интегрирования и выбрать его вдоль мнимой оси. Действительно, функция $\ln \tau(z)$ ограничена и голоморфна в полосе $|\operatorname{Re} \omega| < \beta$; кроме того, вычет подинтегральной функции в точке $z = 0$ в силу ее четности равен нулю. Итак,

$$\frac{\tau'_-(0)}{\tau_-(0)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z^2} dz.$$

Последний интеграл следует понимать в смысле главного значения. Его можно представить в виде

$$\frac{\tau'_-(0)}{\tau_-(0)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left[\frac{\ln(1-z^2)}{z^2} + \frac{\ln \frac{K(z)-1}{z^2}}{z^2} \right] dz. \quad (35.11)$$

Легко видеть, что

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln(1-z^2)}{z^2} dz = 1.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln(1-z^2)}{z^2} dz &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln(1-z)}{z^2} dz - \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln(1+z)}{z^2} dz &= -\frac{1}{\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln(1+z)}{z^2} dz = \\ &= \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\ln(1+z)}{z^2} = [\ln(1+z)]'_{z=0} = 1. \end{aligned}$$

Из (35.9'), (35.11) следует, что p_∞ имеет следующий вид:

$$p_\infty = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln \frac{K(z)-1}{z^2}}{z^2} dz = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2} \ln \frac{1-K(it)}{t^2}. \quad (35.12)$$

Интегрируя по частям, найдем:

$$p_\infty = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} \left(\frac{2}{t} + \frac{iK'(it)}{1-K(it)} \right).$$

Вспоминая, что

$$K(z) = \frac{1}{2z} \ln \frac{1+z}{1-z},$$

и делая замену

$$t = \operatorname{tg} \varphi,$$

получим окончательно

$$p_\infty = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{\sin^2 \varphi} - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi - \varphi} \right) d\varphi. \quad (35.13)$$

Численное интегрирование дает

$$p_\infty = 0,71. \quad (35.14')$$

Итак, плотность нейтронов вдали от границы имеет вид:

$$N(x) = \text{const}(x + 0,71\lambda) \quad (35.14)$$

(мы перешли здесь к обычным единицам измерения длин).

Диффузионное уравнение, которым мы пользовались в главе II, справедливо, как там указывалось, вдали от границы.

Мы пользовались им, однако, вплоть до самой границы, считая, что на ней выполняется некоторое эффективное граничное условие. Теперь мы можем установить это условие. Мы должны, очевидно, потребовать, чтобы решение диффузионного уравнения вблизи границы с вакуумом имело такой же вид, как решение точного интегро-дифференциального уравнения вдали от границы. Иными словами, пользуясь диффузионным уравнением, мы должны считать, что плотность нейтронов вблизи границы с вакуумом имеет вид (35.14).

Из выражения (35.14) следует, что на границе должно выполняться условие

$$N(0) = N'(0) \cdot 0,71\lambda,$$

о котором мы говорили в начале этого параграфа.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

§36. Однородное интегро-дифференциальное уравнение

В настоящем параграфе мы изложим общий метод решения интегральных уравнений с ядром, зависящим от разности переменных в полу бесконечном интервале, а также интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} & \{D^l + p_1 D^{l-1} + p_2 D^{l-2} + \dots + p_l\}f(x) \equiv \mathcal{P}(D)f(x) = \\ & = \int_0^\infty H(x-y)f(y)dy, \end{aligned} \quad (36.1)$$

где p_1, p_2, \dots, p_l — константы, $D = \frac{d}{dx}$.

Функцию $H(x)$ мы предполагаем удовлетворяющей единственному условию

$$\int_{-\infty}^\infty |H(x)e^{\eta|x|}|^2 dx < \infty \quad (36.2)$$

для всякого $\eta < \delta$, где δ — некоторое положительное число.

Заметим, что отсюда следует для всех $\eta < \delta$ и произвольного $N > 0$:

$$\int_{-N}^N |H(x)e^{\eta|x|}| dx = \int_{-N}^N |H(x)e^{\frac{\eta+\delta}{2}|x|}| e^{\frac{\eta-\delta}{2}|x|} dx \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_{-N}^N |H(x)e^{\frac{\eta+\delta}{2}|x|}|^2 dx} \sqrt{\int_{-\infty}^\infty e^{(\eta-\delta)|x|} dx} \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_{-\infty}^\infty |H(x)e^{\frac{\eta+\delta}{2}|x|}|^2 dx} \sqrt{\frac{2}{\delta - \eta}},$$

то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(x)e^{\eta|x|}| dx < \infty, \quad \eta < \delta. \quad (36.3)$$

Фиксируя некоторое $\alpha < \delta$, будем искать те решения (36.1), для которых

$$f(x) = O(e^{\alpha x}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (36.4)$$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что (36.4) выполнено.

Оценим функцию $\varphi(x) = \int_0^{\infty} H(x-y)f(y)dy$ при $x < 0$. Выбирая произвольно λ в интервале (α, δ) , имеем:

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= \int_0^{\infty} |H(x-y)|Ge^{\alpha y} dy < G \int_0^{\infty} |H(x-y)|e^{\lambda y} dy < \\ &< G \int_{-\infty}^{\infty} |H(x-y)|e^{\lambda y} dy = G \int_{-\infty}^{\infty} |H(t)|e^{-\lambda t} dt - e^{\lambda x} \leq \\ &\leq Ge^{\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} |H(t)|e^{\lambda|t|} dt. \end{aligned}$$

Итак,

$$\varphi(x) = O(e^{-\lambda|x|}), \quad x < 0, \quad (36.5)$$

где λ – любое число, меньшее δ .

Уравнение (36.1) определяет функцию $f(x)$ на всей оси (при отрицательных x это есть обыкновенное дифференциальное уравнение с известной правой частью после того, как $f(x)$ найдена при $x > 0$). Среди различных решений уравнения

$$\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right)f(x) = \varphi(x), \quad x < 0$$

рассмотрим то из них, которое задается формулой Коши²⁵

$$f(x) = \sum_{j=1}^l A_j \int_{a_j}^x e^{c_j(x-t)} \varphi(t) dt$$

(здесь c_j , $j = 1, 2, \dots, l$ – корни полинома $\mathcal{P}(x)$, которые для простоты мы предполагаем различными). A_j удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^l A_j c_j^k = \delta_{k,l-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, l-1, \quad (36.6)$$

и числа a_j определяются следующим образом. Выберем β между α и δ : $\alpha < \beta < \delta$. Положим

$$a_j = -\infty, \quad \operatorname{Re} c_j < \beta,$$

$$a_j = 0, \quad \operatorname{Re} c_j \geq \beta.$$

Легко видеть, что все входящие в формулу Коши интегралы сходятся. Более того, имеют место следующие оценки.

Если $\operatorname{Re} c_j < \beta$, то

$$\left| \int_{-\infty}^x e^{c_j(x-t)} \varphi(t) dt \right| < \text{const} \int_{-\infty}^x e^{\beta(x-t)} e^{\lambda t} dt =$$

²⁵В справедливости формулы Коши легко убедиться проверкой, если заметить, что в силу условий (36.6) производные $f(x)$ имеют вид:

$$f'(x) = \sum_{j=1}^l A_j c_j \int_{a_j}^x e^{c_j(x-t)} \varphi(t) dt,$$

$$f''(x) = \sum_{j=1}^l A_j c_j^2 \int_{a_j}^x e^{c_j(x-t)} \varphi(t) dt,$$

...

$$f^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^l A_j c_j^n \int_{a_j}^x e^{c_j(x-t)} \varphi(t) dt + \sum_{j=1}^l A_j c_j^{n-1} \varphi(x).$$

$$= \text{const} \frac{e^{\lambda x}}{\lambda - \beta} = O(e^{-\beta|x|}), \quad \lambda > \beta.$$

Если $\operatorname{Re} c_j \geq \beta$, то

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x e^{c_j(x-t)} \varphi(t) dt \right| &< \text{const} \int_0^x e^{\beta(x-t)} e^{\lambda t} dt = \\ &= \text{const} \frac{e^{\lambda x} - e^{\beta x}}{\lambda - \beta} = O(e^{-\beta|x|}), \quad \lambda \geq \beta. \end{aligned}$$

Поэтому

$$f(x) = O(e^{-\beta|x|}), \quad x \rightarrow -\infty.$$

Из формул для производных $f(x)$ (см. сноску на предыдущей странице) немедленно вытекает, что производные $f(x)$ всех порядков вплоть до l убывают не медленнее, чем $e^{-\beta|x|}$:

$$f^{(k)}(x) = O(e^{-\beta|x|}), \quad k = 1, 2, \dots, l; \quad x < 0. \quad (36.7)$$

Введем в рассмотрение комплексные компоненты Фурье

$$F_+(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(x) e^{ix\omega} dx, \quad \operatorname{Re} \omega < -\alpha, \quad (36.8)$$

$$F_-(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{ix\omega} dx, \quad \operatorname{Re} \omega > -\beta. \quad (36.9)$$

Важным для описываемого метода является то обстоятельство, что функции $F_+(\omega)$ и $F_-(\omega)$ имеют общую полосу голоморфности $-\beta < \operatorname{Re} \omega < -\alpha$. Формула обращения дает:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} F_+(\omega) e^{-x\omega} d\omega + \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} F_-(\omega) e^{-x\omega} d\omega, \\ s &= \frac{\alpha + \beta}{2}, \end{aligned} \quad (36.10)$$

причем первый интеграл обращается в нуль при $x < 0$, а второй — при $x > 0$.

Вычислим компоненты Фурье производных $f(x)$. Интегрируя (36.8) по частям, находим:

$$\begin{aligned} F_+(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -\frac{f(0)}{\omega} + \frac{f'(0)}{\omega^2} - \dots + (-1)^m \frac{f^{(m-1)}(0)}{\omega^m} \right\} + \\ &\quad + \frac{(-1)^m}{\omega^m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f^{(m)}(x) e^{ix\omega} dx. \end{aligned}$$

Из этой формулы видно, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) e^{ix\omega} dx = \mathcal{P}(-\omega) F_+(\omega) - Q_{l-1}(\omega), \quad \operatorname{Re} \omega < -\alpha. \quad (36.8')$$

и $Q_{l-1}(\omega)$ — полином степени $l-1$. Легко убедиться в том, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) e^{ix\omega} dx = \mathcal{P}(-\omega) F_-(\omega) + Q_{l-1}(\omega), \quad \operatorname{Re} \omega > -\beta. \quad (36.9')$$

Умножим теперь (36.1) на $e^{ix\omega}$ ($-\beta < \operatorname{Re} \omega < -\alpha$) и проинтегрируем по x от $-\infty$ до ∞ . Воспользовавшись формулами (36.8') и (36.9'), получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(-\omega) \{F_+(\omega) + F_-(\omega)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{ix\omega} dx \int_0^\infty H(x-y) f(y) dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(y) dy \int_{-\infty}^\infty e^{ix\omega} H(x-y) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(y) e^{iy\omega} dy \int_{-\infty}^\infty H(t) e^{it\omega} dt = F_+(\omega) K(\omega), \end{aligned}$$

где

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{t\omega} dt. \quad (36.11)$$

Итак,

$$\mathcal{P}(-\omega)\{F_+(\omega) + F_-(\omega)\} = F_+(\omega)K(\omega),$$

или

$$F_+(\omega)\{\mathcal{P}(-\omega) - K(\omega)\} + F_-(\omega)\mathcal{P}(-\omega) = 0, \\ -\beta < \operatorname{Re}\omega < -\alpha. \quad (36.12)$$

Сделаем несколько замечаний о функции $K(\omega)$. Из определения $K(\omega)$ и предположения (36.2) следует, что $K(\omega)$ есть голоморфная функция в полосе $|\operatorname{Re}\omega| < \delta$. Покажем, что $K(\omega)$ стремится к нулю, если $\omega \rightarrow \infty$, оставаясь в полосе $|\operatorname{Re}\omega| < \delta$, и притом равномерно, если $|\operatorname{Re}\omega| < \lambda < \delta$.

Для доказательства в равенстве

$$K(q+ip) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{t(q+pi)} dt, \quad |q| < \lambda < \delta$$

преобразуем интеграл с помощью замены $t' = t - \frac{\pi}{p}$:

$$K(q+ip) = - \int_{-\infty}^{\infty} H(t' + \frac{\pi}{p}) e^{it'p} e^{(t'+\frac{\pi}{p})q} dt'.$$

Складывая, находим:

$$2K(q+ip) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(H(t)e^{tq} - H(t + \frac{\pi}{p})e^{(t+\frac{\pi}{p})q} \right) e^{itp} dt.$$

Отсюда

$$|2K(q+ip)| < \int_{-\infty}^{\infty} \left| H(t)e^{tq} - H(t + \frac{\pi}{p})e^{(t+\frac{\pi}{p})q} \right| dt < \\ < \int_{-\infty}^{\infty} \left| H(t) - H(t + \frac{\pi}{p}) \right| e^{tq} dt + \left| 1 - e^{\frac{\pi q}{p}} \right| \int_{-\infty}^{\infty} \left| H(t + \frac{\pi}{p}) \right| e^{tq} dt <$$

$$< \int_{-\infty}^{\infty} \left| H(t) - H(t + \frac{\pi}{p}) \right| e^{|t|\lambda} dt + \left| 1 - e^{\frac{\pi}{p}\lambda} \right| \int_{-\infty}^{\infty} \left| H(t + \frac{\pi}{p}) \right| e^{\lambda|t|} dt, \\ q < \lambda < \delta.$$

Последнее выражение не зависит от q (поскольку $q < \lambda$) и стремится к нулю вместе с p^{-1} . Этим доказано наше утверждение.

Из него, в частности, следует, что уравнение

$$\mathcal{P}(-\omega) - K(\omega) = 0 \quad (36.13)$$

в полосе $|\operatorname{Re}\omega| < \beta$ имеет не более конечного числа нулей.

Введем в рассмотрение функцию

$$\tau(\omega) = \frac{\mathcal{P}(-\omega) - K(\omega)}{(w - \omega_1) \dots (w - \omega_n)} \frac{(\omega^2 - \delta^2)^{\frac{n}{2}}}{(-1)^l (\omega^2 - \delta^2)^{\frac{l}{2}}} \left(\frac{\omega - \delta}{\omega + \delta} \right)^k, \quad (36.14)$$

где $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ – корни уравнения (36.13), расположенные в полосе $|\operatorname{Re}\omega| < \beta$, а k – целое число, окончательный выбор которого будет сделан несколько ниже.

Отметим некоторые свойства $\tau(\omega)$.

1. $\tau(\omega)$ голоморфна в полосе $|\operatorname{Re}\omega| \leq \beta$.

2. $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \tau(\omega) = 1, \quad |\operatorname{Re}\omega| \leq \beta$.

3. $\tau(\omega)$ не имеет нулей в полосе $|\operatorname{Re}\omega| \leq \beta$.

Из второго свойства следует, что разность

$$\lim_{\operatorname{Im}\omega \rightarrow +\infty} \arg \tau(\omega) - \lim_{\operatorname{Im}\omega \rightarrow -\infty} \arg \tau(\omega), \quad |\operatorname{Re}\omega| \leq \beta,$$

равна целому кратному 2π . Так как

$$\lim_{\operatorname{Im}\omega \rightarrow +\infty} \arg \frac{\omega - \delta}{\omega + \delta} - \lim_{\operatorname{Im}\omega \rightarrow -\infty} \arg \frac{\omega - \delta}{\omega + \delta} = 2\pi,$$

то число k можно выбрать так, что

4. $\lim_{\operatorname{Im}\omega \rightarrow -\infty} \arg \tau(\omega) = \lim_{\operatorname{Im}\omega \rightarrow \infty} \arg \tau(\omega), \quad |\operatorname{Re}\omega| \leq \beta$.

Свойство 4 показывает, что для одной из ветвей функции $\ln \tau(\omega)$ имеет место равенство

5. $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \ln \tau(\omega) = 0, \quad |\operatorname{Re}\omega| \leq \beta$.

В дальнейшем под $\ln \tau(\omega)$ мы будем понимать именно эту ветвь.

Далее, из третьего свойства вытекает, что

6. $\ln \tau(\omega)$ голоморфна в полосе $|\operatorname{Re} \omega| \leq \beta_1$ ($\beta < \beta_1 < \delta$), где β_1 выбрано таким образом, чтобы в полосе $|\operatorname{Re} \omega| \leq \beta_1$ не содержалось новых нулей уравнения $\mathcal{P}(-\omega) - K(\omega) = 0$.

По теореме Коши можно написать (учитывая свойства 5 и 6):

$$\ln \tau(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z-\omega} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta_1-i\infty}^{-\beta_1+i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z-\omega} dz, \quad |\operatorname{Re} \omega| < \beta. \quad (36.15)$$

Введем функции $\chi_-(\omega)$ и $\chi_+(\omega)$ с помощью равенств

$$\chi_-(\omega) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z-\omega} dz, \quad \operatorname{Re} \omega < \beta, \quad (36.16)$$

$$\chi_+(\omega) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta_1-i\infty}^{-\beta_1+i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z-\omega} dz, \quad \operatorname{Re} \omega > -\beta. \quad (36.17)$$

Введем кроме того

$$\tau_-(\omega) = e^{\chi_-(\omega)}, \quad \tau_+(\omega) = e^{\chi_+(\omega)}. \quad (36.18)$$

Ясно, что $\chi_+(\omega)$ и $\chi_-(\omega)$ являются голоморфными функциями и

$$\tau(\omega) = \frac{\tau_+(\omega)}{\tau_-(\omega)} = \frac{e^{\chi_+(\omega)}}{e^{\chi_-(\omega)}}. \quad (36.19)$$

Подчеркнем еще, что при $|\omega| \rightarrow \infty$ $\chi_-(\omega)$ и $\chi_+(\omega)$ стремятся к нулю (в той полуплоскости, в которой $\chi_-(\omega)$ и $\chi_+(\omega)$ определены).

Из (36.14) и (36.19) следует, что

$$\mathcal{P}(-\omega) - K(\omega) = \frac{\tau_+(\omega)}{\tau_-(\omega)} \frac{(\omega - \omega_1) \dots (\omega - \omega_n)}{(-1)^l (\omega^2 - \delta^2)^{\frac{n-l}{2}}} \left(\frac{\omega + \delta}{\omega - \delta} \right)^k. \quad (36.19')$$

Для простоты будем считать в дальнейшем, что \mathcal{P} и K – четные функции.

В этом случае $k = 0$, и последняя формула упрощается:

$$\mathcal{P}(-\omega) - K(\omega) = \frac{\tau_+(\omega)}{\tau_-(\omega)} \frac{(\omega - \omega_1) \dots (\omega - \omega_n)}{(-1)^l (\omega^2 - \delta^2)^{\frac{n-l}{2}}}, \quad |\operatorname{Re} \omega| \leq \beta.$$

Подставив это выражение в уравнение (36.12), получим:

$$\frac{F_+(\omega)}{\tau_-(\omega)} \frac{(\omega - \omega_1) \dots (\omega - \omega_n)}{(\omega - \delta)^{\frac{n-l}{2}}} + (-1)^l \mathcal{P}(-\omega) \frac{F_-(\omega)}{\tau_+(\omega)} (\omega + \delta)^{\frac{n-l}{2}} = 0, \\ -\beta < \operatorname{Re} \omega < -\alpha. \quad (36.20)$$

Рассмотрим первое слагаемое.

Функция $F_+(\omega)$ голоморфна при $\operatorname{Re} \omega < -\alpha$, ограничена в любой полуплоскости $\operatorname{Re} \omega < -\gamma < -\alpha$ и стремится к нулю, когда $\operatorname{Re} \omega \rightarrow -\infty$.

Функция $\frac{1}{\tau_-(\omega)} = e^{\chi_-(\omega)}$ голоморфна и ограничена при $\operatorname{Re} \omega \leq \beta$, и функция $\frac{(\omega - \omega_1) \dots (\omega - \omega_n)}{(\omega - \delta)^{\frac{n-l}{2}}}$ голоморфна при $\operatorname{Re} \omega < \delta$ и растет при $|\omega| \rightarrow \infty$ как $|\omega|^{\frac{n+l}{2}}$.

Поэтому функция

$$\frac{F_+(\omega)}{\tau_-(\omega)} \frac{(\omega - \omega_1) \dots (\omega - \omega_n)}{(\omega - \delta)^{\frac{n-l}{2}}} \quad (36.21)$$

голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} \omega < -\alpha$ и растет вместе с $|\omega|$ в любой полуплоскости $\operatorname{Re} \omega < -\gamma < -\alpha$ не быстрее, чем $|\omega|^{\frac{n+l}{2}}$, а при $\omega \rightarrow -\infty$ – медленнее, чем $|\omega|^{\frac{n+l}{2}}$.

Точно так же убеждаемся в том, что функция

$$(-1)^{l+1} \mathcal{P}(-\omega) \frac{F_-(\omega)}{\tau_+(\omega)} (\omega + \delta)^{\frac{n-l}{2}} \quad (36.22)$$

голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} \omega > -\beta$ и растет вместе с $|\omega|$ в любой полуплоскости $\operatorname{Re} \omega \geq -\gamma > -\beta$ не быстрее, чем $|\omega|^{\frac{n+l}{2}}$.

Так как функции (36.21) и (36.22) совпадают в полосе $-\alpha > \operatorname{Re} \omega > -\beta$, то они представляют собой одну голоморфную функцию, определенную на всей плоскости ω . Далее видно, что эта функция растет вместе с $|\omega|$ не быстрее, чем $|\omega|^{\frac{n+l}{2}}$. Поэтому (36.21) и (36.22) являются полиномами и притом степени не выше $\frac{n+l}{2} - 1$, так как при $\omega \rightarrow -\infty$ (36.21) растет медленнее, чем $|\omega|^{\frac{n+l}{2}}$.

Итак,

$$\frac{F_+(\omega)}{\tau_-(\omega)} \frac{(\omega - \omega_1) \dots (\omega - \omega_n)}{(\omega - \delta)^{\frac{n-l}{2}}} = (-1)^l \frac{F_-(\omega)}{\tau_+(\omega)} (\omega + \delta)^{\frac{n-l}{2}} = Q_{\frac{n+l}{2}-1}(\omega), \quad (36.23)$$

где $Q_{\frac{n+l}{2}-1}(\omega)$ – некоторый полином степени $\frac{n+l}{2}-1$. Формула (36.23) определяет $F_+(\omega)$ и $F_-(\omega)$ и вместе с формулой обращения (36.10) решает поставленную задачу. Можно показать, что коэффициенты полинома $Q_{\frac{n+l}{2}-1}(\omega)$ можно выбирать произвольно: формула (36.23) при любом выборе коэффициентов приводит к решению интегралного уравнения (36.1).

Сформулируем полученный основной результат в виде теоремы.

Теорема. Если в интегро-дифференциальном уравнении

$$\mathcal{P}_l \left(\frac{d}{dx} \right) f(x) = \int_0^\infty H(x-y) f(y) dy \quad (36.1')$$

функции \mathcal{P}_l и H являются четными, а ядро H удовлетворяет, кроме того, условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(x)e^{\eta|x|}|^2 dx < \infty \quad 0 < \eta < \delta, \quad (I)$$

то все решения (36.1') такие, что

$$f(x) = O(e^{\alpha x}), \quad 0 < \alpha < \delta, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (II)$$

определяются формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} F_+(\omega) e^{-x\omega} d\omega, \quad x > 0, \quad s > \alpha,$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} F_-(\omega) e^{-x\omega} d\omega, \quad x < 0, \quad s \leq \alpha. \quad (III)$$

Причем

$$F_+(\omega) = \frac{\tau_-(\omega)}{(\omega - \omega_1) \dots (\omega - \omega_n)} (\omega - \delta)^{\frac{n-l}{2}} Q_{\frac{n+l}{2}-1}; \quad (IV)$$

$$F_-(\omega) = -\tau_+(\omega) \frac{Q_{\frac{n+l}{2}-1}(\omega)}{(\omega + \delta)^{\frac{n-l}{2}}}; \quad (V)$$

$$\tau_-(\omega) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z - \omega} dz \right\}, \quad \operatorname{Re} \omega < \beta, \quad \beta_1 > \beta > \alpha; \quad (VI)$$

$$\tau_+(\omega) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta_1-i\infty}^{-\beta_1+i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z - \omega} dz \right\},$$

$$\operatorname{Re} \omega > -\beta, \quad \beta_1 > \beta > \alpha; \quad (VII)$$

$$\tau(z) = \frac{\mathcal{P}(z) - K(z)}{(z - \omega_1) \dots (z - \omega_n)} (z^2 - \delta^2)^{\frac{n-l}{2}}, \quad (VIII)$$

где $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ – корни уравнения

$$\mathcal{P}(z) - K(z) = 0 \quad (IX)$$

в полосе $|\operatorname{Re} z| < \alpha$. Величина β_1 выбирается так, чтобы полосы $-\beta_1 \leq \operatorname{Re} z \leq -\alpha$ и $\alpha \leq \operatorname{Re} z \leq \beta_1$ не содержали корней уравнения (IX).

$$K(z) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{tz} dt, \quad |\operatorname{Re} z| < \delta. \quad (X)$$

§37. Уравнение Винера-Гонфа [19]

Важным частным случаем уравнения (36.1) является уравнение Винера-Гонфа

$$f(x) = \int_0^\infty H(x-y) f(y) dy. \quad (37.1)$$

Предположим для простоты, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(t)e^{\eta|t|}|^2 dt < \infty, \quad \eta < 1 \quad (37.2)$$

(таким образом, мы считаем $\delta = 1$). Ядро H , как и прежде, является четным. Сформулированная выше теорема дает алгоритм для нахождения решений (37.1), удовлетворяющих условию

$$f(x) = O(e^{\alpha x}), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \alpha < 1. \quad (37.3)$$

1. Определяем функцию

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)e^{x\omega} dx, \quad |\operatorname{Re} \omega| < 1. \quad (37.4)$$

2. Находим корни уравнения

$$1 - K(\omega) = 0 \quad (37.5)$$

в полосе $|\operatorname{Re} \omega| < \alpha$, которые мы обозначим через $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

3. Выбираем $\beta_1 < 1$ так, чтобы полосы $-\beta_1 < \operatorname{Re} \omega < -\alpha$ и $\alpha < \operatorname{Re} \omega < \beta_1$ не содержали корней уравнения (37.5).

4. Определяем последовательно функции

$$\tau(\omega) = \frac{(\omega^2 - 1)^{\frac{n}{2}}}{(\omega - \omega_1)\dots(\omega - \omega_n)} [1 - K(\omega)], \quad \operatorname{Re} \omega < \beta_1; \quad (37.6)$$

$$\tau_-(\omega) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z - \omega} dz \right\}, \quad \operatorname{Re} \omega \leq \beta < \beta_1; \quad (37.7)$$

$$\tau_+(\omega) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta_1-i\infty}^{-\beta_1+i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z - \omega} dz \right\}, \quad \operatorname{Re} \omega > -\beta > -\beta_1; \quad (37.8)$$

$$F_+(\omega) = \frac{\tau_-(\omega)}{(\omega - \omega_1)\dots(\omega - \omega_n)} (\omega - 1)^{\frac{n}{2}} Q_{\frac{n}{2}-1}(\omega), \quad \operatorname{Re} \omega \leq \beta; \quad (37.9)$$

$$F_-(\omega) = -\frac{\tau_+(\omega)}{(\omega + 1)^{\frac{n}{2}}} Q_{\frac{n}{2}-1}(\omega), \quad \operatorname{Re} \omega \geq -\beta. \quad (37.10)$$

5. Решение уравнения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} F_+(\omega) e^{-x\omega} d\omega, \quad x > 0, \quad s > \alpha,$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} F_-(\omega) e^{-x\omega} d\omega, \quad x < 0, \quad s \leq \alpha. \quad (37.11)$$

Приведенные формулы дают принципиальное решение уравнения (37.1). Для приложений, однако, полезно произвести более подробное исследование некоторых вопросов, связанных с изложенным методом.

§38. Исследование общего решения

38.1. О корнях уравнения $1 - K(\omega) = 0$

Мы уже знаем, что если для некоторого $\delta > 0$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(x)e^{\delta|x|}|^2 dx < \infty$$

сходится, то в любой полосе $|\operatorname{Re} \omega| < \alpha, \alpha < \delta$ содержится конечное число корней уравнения

$$1 - K(\omega) = 0. \quad (38.1)$$

Остановимся на важном частном случае, когда ядро $H(x)$ можно представить в виде

$$H(x) = \int_1^{\infty} e^{-s|x|} d\rho(s), \quad (38.2)$$

где ρ — некоторая неубывающая функция. Встречающееся в дальнейшем ядро

$$E(x-y) = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{|y-x|}{\zeta}}}{\zeta} d\zeta$$

принадлежит именно к этому классу функций, т.к.

$$\int_0^1 \frac{e^{-\frac{|y-x|}{\zeta}}}{\zeta} d\zeta = \int_1^\infty e^{-s|y-x|} d\ln s.$$

Вычислим $K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)e^{i\omega x} dx$ для ядра (38.2):

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dx \int_1^\infty e^{-s|x|} d\rho(s) =$$

$$= \int_1^\infty d\rho(s) \left\{ \int_0^\infty e^{x(\omega-s)} dx + \int_{-\infty}^0 e^{x(\omega+s)} dx \right\},$$

откуда

$$K(\omega) = \int_1^\infty \left[\frac{1}{s-\omega} + \frac{1}{\omega+s} \right] d\rho(s). \quad (38.3)$$

Из этой формулы непосредственно вытекают следующие свойства функции $K(\omega)$.

$$1) K(\omega) = K(-\omega);$$

$$2) \operatorname{Im} K(\omega) = 4uv \int_1^\infty \frac{sd\rho(s)}{|s^2 - \omega^2|^2}, \quad \omega = u + iv;$$

$$3) K'(iv) = 4iv \int_1^\infty \frac{sd\rho(s)}{(s^2 + v^2)^2}, \quad K'(u) = 4u \int_1^\infty \frac{sd\rho(s)}{(s^2 - u^2)^2}.$$

Из свойства 2 вытекает, что корни уравнения (38.1) лежат только на действительной и мнимой осях. Так как вдоль пути $(i\infty, 0, +\infty)$ функция $K(\omega)$ возрастает от нуля до бесконечности, то уравнение (38.1) имеет на этом пути ровно один корень.

В силу четности $K(\omega)$ уравнение (38.1) имеет второй и последний корень на одном из отрезков $(-i\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

Итак,

если $K(0) < 1$, то уравнение (38.1) имеет два действительных корня;

если $K(0) = 1$, то уравнение (38.1) имеет точку нуль двойным корнем;

если $K(0) > 1$, то уравнение (38.1) имеет два чисто мнимых корня.

38.2. Свойства функций $\chi_-(\omega)$ и $\chi_+(\omega)$

Напомним, что по определению (см. (VI) и (VII))

$$\chi_-(\omega) = -\ln \tau_-(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z-\omega} dz, \quad \operatorname{Re} \omega < \beta_1, \quad (38.4)$$

$$\chi_+(\omega) = -\ln \tau_+(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta_1-i\infty}^{-\beta_1+i\infty} \frac{\ln \tau(z)}{z-\omega} dz, \quad \operatorname{Re} \omega > -\beta_1. \quad (38.5)$$

Для исследования асимптотического поведения решения интегро-дифференциального уравнения (38.1) нам понадобится следующая теорема.

Теорема. Функция $\chi_-(\omega)$ ($\chi_+(\omega)$), голоморфная в полу-плоскости $\operatorname{Re} \omega < \beta_1$ ($\operatorname{Re} \omega > -\beta_1$), ограничена в каждой полу-плоскости $\operatorname{Re} \omega \leq \beta < \beta_1$ ($\operatorname{Re} \omega > -\beta > -\beta_1$).

Доказательство.

Покажем прежде всего, что $\ln \tau(z) = \ln \tau(x+iy)$, рассматриваемая как функция y при $x = \pm\beta_1$, квадратично интегрируема. Это позволит применить к интегралам неравенство Шварца и получить

$$|\chi_-(\omega)|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} |\ln \tau(z)|^2 dz \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \frac{dz}{|z-\omega|^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} |\ln \tau(z)|^2 dz \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dz}{|z+(\beta_1-\beta)|^2} < \infty, \quad \operatorname{Re} \omega < \beta,$$

что и требовалось доказать (утверждение теоремы, относящееся к $\chi_+(\omega)$, доказывается с очевидными изменениями).

Итак, остается проверить, что (см. (VIII))

$$\ln \tau(x+iy) \equiv \ln \left\{ \frac{\mathcal{P}_l(z) - K(z)}{(z - \omega_1) \dots (z - \omega_n)} (z^2 - \delta^2)^{\frac{n-l}{2}} \right\}, \quad z = x + iy, \quad (38.6)$$

при $x = \pm\beta_1$ является квадратично интегрируемой функцией. Перепишем для этого (38.6) в виде

$$\ln \tau(x+iy) \equiv \ln \frac{\mathcal{P}_l(z)(z^2 - \delta^2)^{\frac{n-l}{2}}}{(z - \omega_1) \dots (z - \omega_n)} + \ln \left\{ 1 - \frac{K(z)}{\mathcal{P}(z)} \right\}. \quad (38.7)$$

Первое слагаемое правой части квадратично интегрируемо²⁶ вдоль пути $(\beta_1 - i\infty, \beta_1 + i\infty)$. Второе слагаемое, рассматриваемое на прямой $\operatorname{Re} z = \pm\beta_1$, всюду конечно, поскольку на этой прямой не лежит ни один корень уравнения $\mathcal{P}(z) - K(z) = 0$. Более того, при больших $|z| = |\pm\beta_1 + iy|$ $K(z)$ очень мало, и, следовательно,

$$\left| \ln \left\{ 1 - \frac{K(z)}{\mathcal{P}(z)} \right\} \right| < \left| \frac{K(z)}{\mathcal{P}(z)} \right| \leq |K(z)|.$$

Поэтому достаточно показать, что функция $K(\pm\beta_1 + iy)$ квадратично интегрируема.

По определению (см. (X))

$$K(\pm\beta_1 + iy) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{\pm\beta_1 t} e^{ity} dt$$

является преобразованием Фурье квадратично интегрируемой функции $H(t) e^{\pm\beta_1 t}$. Следовательно, по теореме Планшереля²⁷

²⁶Если один из корней $\mathcal{P}_l(z)$ лежит на прямой $\operatorname{Re} z = \pm\beta_1$, то β_1 можно слегка изменить (см. условия, накладываемые на β_1 перед равенством (X)).

²⁷Согласно теореме Планшереля, если $f(x)$ – квадратично интегрируемая функция, т.е. если $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$, то интеграл $\varphi(\lambda) =$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx$ сходится в среднем квадратичном к функции $\varphi(\lambda)$, которая, в свою очередь, квадратично интегрируема. Более того, имеет место равенство $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 d\lambda$.

функция $K(\pm\beta_1 + iy)$ сама является квадратично интегрируемой, что и требовалось доказать.

38.3. Асимптотическое поведение решения интегро-дифференциального уравнения при больших $x > 0$

Будем исходить из формулы

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-s-i\infty}^{-s+i\infty} F_+(\omega) e^{-x\omega} d\omega, \quad x > 0, s > \alpha.$$

Перемещая путь интегрирования вправо, получаем

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F_+(\omega) e^{-x\omega} d\omega - \sqrt{2\pi} \sum_{-s < \operatorname{Re} \omega < s} \operatorname{Res} F_+(\omega) e^{-x\omega},$$

$$x > 0, s = \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (38.8)$$

Эта операция законна, поскольку

$$F_+(\omega) \equiv \frac{Q_{\frac{n+l}{2}-1}(\omega)(\omega + \delta)^{\frac{n-l}{2}}}{(\omega - \omega_1) \dots (\omega - \omega_n)} e^{-\chi_-(\omega)}$$

стремится к нулю в полосе $|\operatorname{Re} \omega| \leq \beta$ при $|\omega| \rightarrow \infty$, так как степень знаменателя дроби в правой части последнего равенства больше степени числителя, а $e^{-\chi_-(\omega)}$ согласно теореме ограничена, и функция $F_+(\omega)$ не имеет в полосе $|\operatorname{Re} \omega| \leq \beta$ других особенностей, кроме полюсов в точках $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

Введем обозначения

$$g(x) = \sqrt{2\pi} \sum_{-s < \operatorname{Re} \omega < s} \operatorname{Res} F_+(\omega) e^{-x\omega} \quad (38.9)$$

и

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F_+(\omega) e^{-x\omega} d\omega, \quad x > 0, s = \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (38.10)$$

Согласно (38.8),

$$f(x) = r(x) - g(x). \quad (38.11)$$

Вычисляя в (38.9) вычеты, находим:

$$g(x) = \sum_{j \leq n} a_j(x) e^{-x\omega_j}, \quad (38.12)$$

где $a_j(x)$, $j \leq n$ есть полином, степень которого на единицу меньше кратности корня ω_j . Покажем, что

$$\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right)g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y)g(y)dy. \quad (38.13)$$

Для этого продифференцируем тождество

$$\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right)e^{-x\omega} = \mathcal{P}(-\omega)e^{-x\omega}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y)e^{-y\omega}dy = e^{-x\omega}K(\omega)$$

m раз ($m = 1, 2, \dots$) по ω :

$$\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right)x^m e^{-x\omega} = \mathcal{P}^{(m)}(-\omega)e^{-x\omega} + m\mathcal{P}^{(m-1)}(-\omega)xe^{-x\omega} + \dots,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x-y)y^m e^{-y\omega}dy =$$

$$= (-1)^m K^{(m)}(\omega)e^{-x\omega} + (-1)^{m-1} K^{(m-1)}(\omega)xe^{-x\omega} + \dots.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right)x^m e^{-x\omega} - \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y)y^m e^{-y\omega}dy &= \\ &= (-1)^m [\mathcal{P}(-\omega) - K(\omega)]^{(m)}e^{-x\omega} + \end{aligned}$$

$$+ (-1)^{m-1} [\mathcal{P}(-\omega) - K(\omega)]^{(m-1)}xe^{-x\omega} + \dots.$$

Подставим сюда $\omega = \omega_j$ и возьмем в качестве t любое целое число, меньшее кратности корня ω_j . Все члены в правой части обратятся в нуль, и мы получим:

$$\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right)x^m e^{-x\omega_j} - \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y)y^m e^{-y\omega_j}dy = 0.$$

Из этого равенства непосредственно вытекает формула (38.13). Докажем теперь, что $r(x) = O(e^{-\alpha x})$.

Для этого перепишем (38.13) для $x > 0$ в виде

$$\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right)g(x) = \int_0^{\infty} H(x-y)g(y)dy + \int_{-\infty}^0 H(x+|y|)g(y)dy.$$

Подставим сюда $g(x) = r(x) - f(x)$.

$$\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right)r(x) = \int_0^{\infty} H(x-y)r(y)dy + \int_{-\infty}^0 H(x+|y|)r(y)dy. \quad (38.14)$$

Оценим интегралы, стоящие в правой части. Прежде всего, ясно, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^0 H(x+|y|)g(y)dy \right| &\leq G \int_{-\infty}^0 |H(x-y)|e^{-\alpha y}dy < \\ &< G \int_{-\infty}^{\infty} |H(x-y)|e^{-\alpha y}dy = const e^{-\alpha x}. \end{aligned}$$

Переходя к первому интегралу в (38.14), заметим, что выражение

$$e^{sx}r(x) \equiv \frac{e^{sx}}{\sqrt{2\pi i}} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F_+(\omega)e^{-x\omega}d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-i\infty}^{i\infty} F_+(s+it)e^{-ixt}dt$$

является преобразованием Фурье квадратично интегрируемой функции $F_+(s+it)$, $s < \beta_1$. Поэтому по теореме Планшереля

$e^{sx}r(x)$ квадратично интегрируемо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r(x)e^{sx}|^2 dx < \infty, \quad s < \beta_1.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} H(x-y) r(y) dy \right|^2 &= \left| \int_0^{\infty} H(x-y) e^{-sy} r(y) e^{sy} dy \right|^2 \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} |H(x-y)e^{-sy}|^2 dy \int_0^{\infty} |r(y)e^{sy}|^2 dy \leq \\ &\leq \text{const} \int_{-\infty}^{\infty} |H(x-y)e^{-sy}|^2 dy = \\ &= e^{-sx} \text{const} \int_{-\infty}^{\infty} |H(t)e^{-st}|^2 dt = O(e^{-sx}). \end{aligned}$$

Выбирая $s > \alpha$, мы видим, что и первый интеграл в (38.14) убывает не медленнее, чем $e^{-\alpha x}$. Итак,

$$\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right)r(x) = O(e^{-\alpha x}).$$

Повторяя рассуждения, проведенные выше, мы приходим к заключению, что последнее уравнение имеет одно частное решение порядка $e^{-\alpha x}$. Поэтому

$$r(x) = O(e^{-\alpha x}) + \sum_{k=1}^l A_k e^{\lambda_k x}, \quad (38.15)$$

где λ_k , $k = 1, 2, \dots, l$ суть корни полинома $\mathcal{P}(x)$. Умножим (38.15) на $e^{\alpha_1 x}$, $\alpha_1 < \alpha$:

$$e^{\alpha_1 x}r(x) - O(e^{(\alpha_1 - \alpha)x}) = e^{\alpha_1 x} \sum_{k=1}^l A_k e^{\lambda_k x}.$$

Функции, стоящие в левой части равенства, квадратично интегрируемы, следовательно, функция $e^{\alpha_1 x} \sum_{k=1}^l A_k e^{\lambda_k x}$ также квадратично интегрируема.

Это, однако, возможно только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^l A_k e^{\lambda_k x} = O(e^{-\alpha_1 x}).$$

В силу произвольности $\alpha_1 < \alpha$

$$\sum_{k=1}^l A_k e^{\lambda_k x} = O(e^{-\alpha x}). \quad (38.16)$$

Из (38.15) и (38.16) следует, что $r(x) = O(e^{-\alpha x})$, и мы получаем окончательно

$$f(x) = -\sqrt{2\pi} \sum_{j=1}^n \underset{\omega=\omega_j}{\text{Res}} F_+(\omega) e^{-x\omega} + O(e^{-\alpha x}), \quad x > 0 \quad (38.17)$$

или, более подробно,

$$f(x) = \sum_{j=1}^n a_j(x) e^{-x\omega_j} + O(e^{-\alpha x}), \quad (38.18)$$

где $a_j(x)$ – полином, степень которого на единицу меньше кратности корня ω_j .

§39. Неоднородное интегро-дифференциальное уравнение

Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right)v(x) = \varphi(x) + \int_0^{\infty} H(x-y)v(y)dy, \quad (39.1)$$

ограничившись сначала случаем, когда $\varphi(x) = e^{-\gamma x}$.

$$\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right)v(x) = e^{-\gamma x} + \int_0^{\infty} H(x-y)v(y)dy, \quad \operatorname{Re} \gamma \geq \alpha. \quad (39.2)$$

Продифференцируем (39.2) по x :

$$\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right)v'(x) = -\gamma e^{-\gamma x} + \frac{d}{dx} \int_0^\infty H(x-y)v(y)dy. \quad (39.3)$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^\infty H(x-y)v(y)dy &= - \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial y} H(x-y) \right] v(y) dy = \\ &= -H(x-y)v(y) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty H(x-y)v'(y)dy = \\ &= H(x)v(0) + \int_0^\infty H(x-y)v'(y)dy. \end{aligned}$$

Будем искать решение (39.1), удовлетворяющее условию

$$v(0) = 0. \quad (39.4)$$

Для такого решения имеет место равенство:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty H(x-y)v(y)dy = \int_0^\infty H(x-y)v'(y)dy,$$

и (39.3) принимает вид:

$$\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right)v'(x) = -\gamma e^{-\gamma x} + \int_0^\infty H(x-y)v'(y)dy.$$

Прибавляя к последнему уравнению (39.2), умноженное на γ , получаем:

$$\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right)[v' + \gamma v] = \int_0^\infty H(x-y)[v' + \gamma v(y)]dy.$$

Таким образом, функция

$$f(x) = v'(x) + \gamma v(x) \quad (39.5)$$

является решением однородного уравнения

$$\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right)f(x) = \int_0^\infty H(x-y)f(y)dy.$$

Из (39.4) и (39.5) следует, что

$$v = c \int_0^x e^{-\gamma(x-t)} f(t)dt. \quad (39.6)$$

Чтобы найти постоянную c , подставим (39.6) в (39.2).

$$\int_0^\infty H(x-y)v(y)dy = c \int_0^\infty H(x-y)dy \int_0^y e^{-\gamma(y-t)} f(t)dt =$$

$$\begin{aligned} &c \int_0^\infty H(x-y)dy \int_0^y e^{-\gamma s} f(y-s)ds = \\ &= c \int_0^\infty ds \int_s^\infty H(x-y)f(y-s)e^{-\gamma s}dy = \\ &= c \int_0^\infty e^{-\gamma s} ds \int_s^\infty H(x-y)f(y-s)dy = \\ &= c \int_0^\infty e^{-\gamma s} ds \int_0^\infty H(x-y-s)f(y)dy = \\ &= c \int_0^\infty e^{-\gamma s} \mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right)f(x-s)ds = c \mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right) \int_0^\infty e^{-\gamma s} f(x-s)ds = \\ &= c \mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right) \int_{-\infty}^x e^{-\gamma(x-t)} f(t)dt = \end{aligned}$$

$$= \mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right) \left[c \int_{-\infty}^0 e^{-\gamma(x-t)} f(t) dt + c \int_0^x e^{-\gamma(x-t)} f(t) dt \right] =$$

$$= e^{-\gamma x} c \mathcal{P}(-\gamma) \int_{-\infty}^0 e^{\gamma t} f(t) dt + \mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right) v(x).$$

Итак,

$$\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right) v(x) = e^{-\gamma x} c \mathcal{P}(-\gamma) \int_{-\infty}^0 e^{\gamma t} f(t) dt + \int_0^\infty H(x-y) v(y) dy.$$

Отсюда

$$c = -\frac{1}{\mathcal{P}(-\gamma) \int_{-\infty}^0 e^{\gamma t} f(t) dt}$$

или, согласно (36.9),

$$c = -\frac{1}{\sqrt{2\pi} \mathcal{P}(-\gamma) F_-(\gamma)}.$$

Мы видим, что одно из частных решений уравнения

$$\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right) v(x) = e^{-\gamma x} + \int_0^\infty H(x-y) v(y) dy$$

определяется формулой

$$v_\gamma(x) = -\frac{\int_0^x e^{-\gamma(x-t)} f(t) dt}{\sqrt{2\pi} \mathcal{P}(-\gamma) F_-(\gamma)}, \quad (39.7)$$

где $f(t)$ – некоторое решение однородного уравнения

$$\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right) v(x) = \int_0^\infty H(x-y) v(y) dy,$$

$F_-(\gamma)$ определяется формулой

$$F_-(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(t) e^{\gamma t} dt.$$

Теперь нетрудно найти общее решение уравнения (39.1). Будем предполагать, что $\varphi(x) = O(e^{-\beta x})$, $\beta > \alpha$. Введем функцию

$$\psi(x) = \int_0^\infty \varphi(x) e^{\gamma x} dx, \quad \operatorname{Re} \gamma < \beta.$$

По формуле обращения Лапласа-Меллина

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \psi(\gamma) e^{-\gamma x} d\gamma, \quad s = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Решение уравнения (39.1) теперь очевидно. Оно имеет вид:

$$v(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \psi(\gamma) v_\gamma(x) d\gamma, \quad s = \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (39.8)$$

Литература

1. R. E. Marshak, Rev. Mod. Phys. **19** (1947) 185.
2. Э. Гурса, Курс математического анализа, т. II, Гостехиздат, 1933; В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ГТГЛ, 1939.
3. E. Fermi, Science, Jan. 10 (1947) (русский перевод: Э. Ферми, УФН, **32** (1947) 54).
4. Я. Б. Зельдович, Ю. Б. Харитон, УФН, **23** (1940) 329.
5. X. C. Карлслу, Теория теплопроводности, Гостехиздат, 1947.
6. H. Bethe, G. Placzek, Phys. Rev. **51** (1937) 450.
7. И. И. Гуревич, И. Я. Померанчук. В кн.: Реакторостроение и теория реакторов, Доклады советской делегации на I Международной конференции по мирному использованию атомной энергии, Женева, 1955, Изд-во АН СССР, 1955, с.220.
8. O. Halpern, R. Lueenberg, O. Clark, Phys. Rev. **53** (1938) 173.
9. W. Bothe, Zs. f. Physik, **118** (1941) 401, **119** (1942) 493.
10. G. C. Wick, Zs. f. Physik, **121** (1943) 702.
11. G. Waller, Arkiv für Math., Astronomy und Physik, **39A**, № 3 (1947).
12. Е. Л. Фейнберг, С. М. Фейнберг, Отчет Лаб. № 2, 1947.
13. G. Wick, Phys. Zs. **38** (1937) 403, 689.
14. И. Я. Померанчук, Sow. Phys. **13** (1938) 65.
15. R. Weinstock, Phys. Rev. **65** (1944) 1.
16. O. Halpern, M. Hammermesh and M. Johnson, Phys. Rev. **59** (1941) 981.
17. А. И. Ахиезер и И. Я. Померанчук, ЖЭТФ, **17** (1947) 769.
18. В. В. Владимирский. Отчет Лаб. № 3 (1947).
19. N. Wiener, E. Hopf, Berl. Ber., Math. Phys. Klasse **1** (1931) 696.

Монографии по теории ядерных реакторов*

- Г. Судэк и Э. Кэмпбелл, УФН, **42** (1950) 93.
- С. Глесстон и М. Эдлунд, Основы теории ядерных реакторов, ИИЛ, 1954.
- А. Д. Галанин, Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах, Атомиздат, М., 1957.
- А. Вейнберг и Е. Вигнер, Физическая теория ядерных реакторов, ИИЛ, М., 1961.
- Д. Белл и С. Глесстон, Теория ядерных реакторов, Атомиздат, М., 1974.
- С. М. Фейнберг, С.В. Шизов и В. Б. Троянский, Теория ядерных реакторов, Атомиздат, М., 1978.
- А. Д. Галанин, Теория гетерогенного реактора, Атомиздат, М., 1971.
- А. Д. Галанин, Введение в теорию ядерных реакторов на тепловых нейтронах, Энергоатомиздат, М., 1990.
- Д. Хетрик, Динамика ядерных реакторов, Атомиздат, М., 1975.
- Б. Дэвисон, Теория переноса нейронов, Атомиздат, М., 1960.

* Добавлено редакторами.

Александр Ильич Ахиезер
Исаак Яковлевич Померанчук

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ НЕЙТРОННЫХ
МУЛЬТИПЛИЦИРУЮЩИХ СИСТЕМ
(РЕАКТОРОВ)**

Под редакцией члена-корреспондента РАН Б.Л.Иоффе
и доктора технических наук А.С.Герасимова

Подписано в печать 10.03.2002. Формат 60x90/16
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 23. Тираж 500 экз.
Заказ 5857

Издательство по Атомной науке и технике ИздАТ
Международной Ассоциации Союзов «Чернобыль-Атом»
123182, Москва, ул. Живописная, д. 46; тел. 19090 97

Отпечатано в ППП «Типография «Наука»
121099, Москва, Г-49, Шубинский пер. 6