

539.17  
А 95

А. АХИЕЗЕР и И. ПОМЕРАНЧУК

# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ЯДРА

3641

ИТЭФ  
БИБЛИОТЕКА

ОГИЗ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1948 ЛЕНИНГРАД

## АННОТАЦИЯ

Обзорная монография, посвящённая ряду вопросов ядерной физики, для решения которых несущественна точная теория ядерных сил. Предназначена для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся по физике атомного ядра.

Редактор В. А. Лешковцев. Техн. редактор Р. А. Негримова.

Подписано к печати 24/IX 1948 г. 20 печ. л. 16,87 уч.-изд. л. 33730 тип. зн. в печ. л. А-07546. Тираж 7000 экз. Цена книги 10 руб. Переплёт 2 руб. Заказ № 383.

16-я типогр. треста «Полиграфнига» ОГИЗа при Совете Министров СССР, Москва, Трёхпрудный пер., 9.

## Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По вине
13	ф-ла (1.4')	$\left(\frac{u_0}{u_0}\right)_{r=r_0} =$	$\left(\frac{u'_0}{u_0}\right)_{r=r_0} =$	Тип.
76	14 св.	$J^2$	$J^2_2$	»
80	ф-ла (7.32)	$(\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon'})^2$	$(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon'})^2$	Ред.
204	3 св.	$\Gamma$	$\Gamma_\gamma$	Тип.
237	ф-ла (25.1)	$-\frac{1}{2} \Gamma((n'_s))$	$-\frac{i}{2} \Gamma((n'_s))$	Авт.
242		В формулах (25.8) и (25.9) интеграл по $\rho$ должен следовать за интегралом по $\mu$		»
244	ф-ла (25.13)	$(1+n_e) e^{i\mu\varepsilon} + n_e e^{-i\mu\varepsilon}$	$(1+n_e) e^{-i\mu\varepsilon} + n_e e^{i\mu\varepsilon}$	»
246	12 св.	(25.8)	(25.18)	»
261	6 св.	$\bar{A}_l^2 - 2\bar{A}_l\bar{A} + \bar{A}^2 =$ $= \bar{A}^2 - \bar{A}^2$	$\bar{A}_l^2 - 2\bar{A}_l\bar{A} + \bar{A}^2 =$ $= \bar{A}^2 - \bar{A}^2$	Тип.
269	24 св.	$\pi^2$	$\pi$	Авт.
274	21 св.	$sf_0 = k\theta$	$sf_0 = \theta$	»
288	Рис. 13	На оси абсцисс должно быть $\frac{M}{m} \left(\frac{\theta}{\varepsilon_0}\right) \theta$		»
292	ф-ла (29.7)	$(E^2 - E'^2)^2$	$(E^2 - E'^2)$	»
304	18 св.	$e^{i(kr_p - \omega r_{pz}/v)}$	$e^{i(kr_p - \omega r_{pz}/v)}$	Ред.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
<b>Глава I. Взаимодействие нейтронов с протонами . . . . .</b>	<b>7</b>
§ 1. Рассеяние медленных нейтронов протонами . . . . .	7
§ 2. Классификация состояний системы нейтрон—протон и основное состояние дейтрона . . . . .	17
§ 3. Рассеяние нейтронов в пара- и ортоводороде . . . . .	33
§ 4. Рассеяние нейтронов связанными протонами . . . . .	48
§ 5. Замечания о рассеянии быстрых нейтронов протонами . . . . .	54
§ 6. Рассеяние протонов протонами . . . . .	57
§ 7. Захват нейтронов протонами . . . . .	65
§ 8. Фоторасщепление дейтрона . . . . .	81
<b>Глава II. Статистические свойства тяжёлых ядер . . . . .</b>	<b>91</b>
§ 9. Составное ядро . . . . .	91
§ 10. Статистические свойства тяжёлых ядер . . . . .	97
§ 11. Связь между шириной уровня и сечением образования составного ядра . . . . .	106
§ 12. Эффективные сечения для упругих и неупругих столкновений . . . . .	111
§ 13. Вероятность прилипания . . . . .	125
§ 14. Распределение частиц, вылетающих при распаде составного ядра, по энергиям . . . . .	133
§ 15. Радиационные свойства ядра . . . . .	135
<b>Глава III. Резонансные явления . . . . .</b>	<b>141</b>
§ 16. Дисперсионная формула . . . . .	141
§ 17. Теория резонансного рассеяния . . . . .	149
§ 18. Захват медленных нейтронов свободными ядрами . . . . .	162
§ 19. Усреднённые эффективные сечения . . . . .	176
§ 20. Замечания о ядерных реакциях, происходящих с участием заряженных частиц . . . . .	183
<b>Глава IV. Деление тяжёлых ядер . . . . .</b>	<b>191</b>
§ 21. Механизм деления . . . . .	191
§ 22. Вероятность деления . . . . .	202

§ 23. Цепная реакция . . . . .	209
§ 24. Пример определения критических размеров при реакции на быстрых нейтронах . . . . .	225
Глава V. Взаимодействие медленных нейтронов с веществом . . . . .	236
§ 25. Захват медленных нейтронов в кристаллах . . . . .	236
§ 26. Упругое рассеяние медленных нейтронов в кристаллах . . . . .	250
§ 27. Неупругое рассеяние медленных нейтронов в кристаллах . . . . .	270
§ 28. Переход к рассеянию свободными ядрами . . . . .	283
§ 29. Функция распределения нейтронов в кристаллах . . . . .	288
§ 30. Рефракция нейтронов . . . . .	296
Дополнение. Расщепление быстрых дейтронов . . . . .	303
Литература . . . . .	315
Предметный указатель . . . . .	319

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Теоретическое изучение свойств атомных ядер находится в настоящее время в самой начальной стадии, ввиду отсутствия точной теории ядерных сил.

Имеются, однако, такие ядерные процессы, многие свойства которых не зависят от детальной картины взаимодействия между ядерными частицами. Рассмотрению таких процессов посвящена настоящая книга. При этом главное внимание уделено процессам, в которых участвуют нейтроны.

Первые четыре главы представляют собой изложение ряда работ, опубликованных в различных журналах. Последняя (пятая) глава основана на уже опубликованных ранее работах авторов.

Авторы, не претендуя ни на полноту, ни на оригинальность изложения, тем не менее решились на издание этой книги ввиду отсутствия монографии, содержащей сколько-нибудь полное и современное изложение рассматриваемых ниже вопросов.

Мы хотели бы здесь поблагодарить Л. Д. Ландау, И. Е. Тамма и Я. А. Смородинского за их ценные критические замечания.

*А. Ахиезер, И. Померанчук*



## ГЛАВА I

### ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕЙТРОНОВ С ПРОТОНАМИ

**§ 1. Рассеяние медленных нейтронов протонами.** Действующие между нейтроном и протоном ядерные силы обуславливают рассеяние нейтронов протонами, а также приводят к образованию связанного состояния — дейтрона.

Систематическое изучение различных процессов, связанных с существованием взаимодействия между нейтроном и протоном, требует детальной теории ядерных сил, о природе которых мы знаем, к сожалению, очень мало. Поэтому такое систематическое изучение в настоящее время не может быть проведено.

Однако, как показали Бете и Пайерлс <sup>[1]</sup> в области малых энергий, когда длина волны, отвечающая относительному движению нейтрона и протона, велика по сравнению с радиусом действия ядерных сил, для описания различных процессов, происходящих в системе нейтрон—протон, не требуется детальной теории ядерных сил.

Вероятность этих процессов, а также энергия связи и другие величины, характеризующие дейтрон, выражаются через небольшое число параметров совершенно независимо от природы ядерных сил. Существенным здесь является лишь то, что ядерные силы характеризуются очень малым радиусом действия.

В этой главе мы будем, главным образом, рассматривать именно этот случай малых относительных энергий нейтрона и протона.

Мы будем сначала предполагать, что силы, действующие между нейтроном и протоном, центральны, но могут,

однако, зависеть от взаимной ориентации спинов обеих частиц. Иными словами, мы предполагаем, что эти силы зависят от расстояния между частицами и от взаимной ориентации их спинов.

Из этого предположения следует, что рассеяние медленных нейтронов протонами, когда длина волны, отвечающая относительному движению частиц, значительно превосходит радиус действия сил, должно быть сферически симметричным (в системе отсчёта, где покоится центр инерции частиц).

Если ядерные силы зависят от взаимной ориентации спинов нейтрона и протона, то сечение рассеяния будет различным для обеих ориентаций спинов. Далее мы покажем, что при заданной ориентации спинов сечение рассеяния медленных нейтронов протонами в предположении бесконечно малого радиуса действия ядерных сил определяется только одним параметром; этим параметром является значение логарифмической производной от радиальной волновой функции системы нейтрон—протон по расстоянию между частицами, когда это расстояние по порядку величины равно радиусу действия ядерных сил. (В первом приближении можно считать, что частицы просто совпадают.)

Сечение рассеяния неполяризованных нейтронов и протонов определяется, следовательно, двумя параметрами, если только силы взаимодействия зависят от взаимной ориентации спинов частиц. Опыты по рассеянию медленных нейтронов протонами показывают, что ядерные силы, действующие между нейтроном и протоном, зависят от взаимной ориентации спинов частиц.

Чрезвычайно существенным является то обстоятельство, что только отрицательным значениям введённого выше параметра может отвечать связанное состояние системы нейтрон—протон. Поэтому весьма важно выяснить, какой знак имеет этот параметр при параллельной и антипараллельной ориентации спинов нейтрона и протона. Теоретически на этот вопрос при современном состоянии теории ядерных сил ответить нельзя.

Опыты по рассеянию медленных нейтронов свободными протонами также не дают возможности ответить на инте-

ресующий нас вопрос, так как в формулу для сечения рассеяния медленных нейтронов протонами входит квадрат этого параметра. Ниже мы увидим, что, изучая рассеяние медленных нейтронов в молекулярном пара- и ортоводороде, можно путём сравнения теоретических выводов с экспериментальными результатами показать, что связанное состояние системы нейтрон—протон возможно только при параллельной ориентации спинов. Иными словами, в дейтроне спины частиц имеют одинаковую ориентацию.

Оказывается, что дейтрон не может находиться в возбуждённых состояниях и что энергия его единственного уровня, т. е. энергия связи дейтрона, очень просто выражается через значение указанного выше параметра, относящегося к случаю параллельной ориентации спинов частиц. Таким образом рассеяние медленных нейтронов протонами с одинаковой ориентацией спинов определяется в конечном счёте энергией связи дейтрона.

Мы видим, что задача о рассеянии нейтронов протонами тесно связана с задачей об основном состоянии дейтрона. Волновая функция последнего должна быть сферически симметричной, если предположить центральный характер сил. Иначе говоря, основное состояние дейтрона должно быть  $S$ -состоянием (пользуясь оптической терминологией, можно сказать, что это будет  ${}^3S_1$ -состояние).

Опыты показывают, что дейтрон обладает квадрупольным электрическим моментом. Это обстоятельство противоречит, однако, сделанному выше выводу о том, что основным состоянием дейтрона является  $S$ -состояние, так как в последнем распределение зарядов обладает сферической симметрией, и поэтому в  $S$ -состоянии квадрупольный момент должен равняться нулю. Для того чтобы объяснить существование квадрупольного момента дейтрона, необходимо предположить, что основное состояние дейтрона не описывается чистой  $S$ -волной, а является суперпозицией  $S$ -волны и одной или нескольких волн, отвечающих значениям углового момента, отличным от нуля. Ниже мы увидим, что основным состоянием дейтрона следует считать суперпозицию  $S$ - и  $D$ -волн. Для того чтобы получить необходимую величину квадруполь-

ного момента, необходимо предположить, что «примесь»  $D$ -волны к  $S$ -волне составляет всего лишь несколько процентов.

Наличие  $D$ -волны в основном состоянии дейтрона показывает, что предположение о центральном характере сил является неверным. В действительности силы, действующие между нейтроном и протоном, не являются строго центральными. Это значит, что они, помимо расстояния между частицами, зависят ещё от ориентации общего спина по отношению к радиусу-вектору, соединяющему обе частицы. Отклонением от центрального характера сил и объясняется существование квадрупольного момента дейтрона.

Однако это отклонение в области малых энергий, которые мы будем главным образом изучать, в общем несущественно (если не считать квадрупольного момента дейтрона); и поэтому при рассмотрении целого ряда вопросов вполне законно пользоваться предположением о центральном характере сил и считать основным состоянием дейтрона  $S$ -состояние.

Приступая сейчас к подробному рассмотрению различных процессов, связанных с существованием взаимодействия между нейтроном и протоном, мы будем вначале исходить из предположения о центральном характере сил, действующих между нейтроном и протоном.

Начнём с рассмотрения рассеяния медленных нейтронов протонами.

Напомним сначала, как решается общая задача о рассеянии частиц некоторым силовым центром.

Предположим, что на частицу действуют центральные силы. В этом случае дифференциальное сечение рассеяния определяется следующей формулой [2]:

$$d\sigma = \frac{\pi}{2k^2} \left| \sum_l (2l+1) P_l(\cos\theta) (e^{2i\delta_l} - 1) \right|^2 \sin\theta d\theta, \quad (1.1)$$

где  $k$  — волновой вектор частицы,  $\theta$  — угол рассеяния,  $P_l(\cos\theta)$  — полином Лежандра  $l$ -го порядка, а  $\delta_l$  — так называемые фазы на бесконечности, определяющие асимптотическое поведение волновой функции вдали от силового центра.

Волновая функция частицы может быть представлена в виде

$$\psi = \sum_l \frac{u_l(r)}{r} P_l(\cos\theta),$$

где  $u_l$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\hbar^2}{M} \left( \frac{d^2 u_l}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u_l \right) + (E - V) u_l = 0 \quad (1.2)$$

( $E$  — энергия частицы,  $V$  — её потенциальная энергия и  $M$  — масса частицы).

Вдали от силового центра, при больших  $r$ , функция  $u_l(r)$  определяется следующей асимптотической формулой:

$$u_l(r) = \text{const} \cdot \sin \left( kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right) \quad (1.2')$$

(в аргумент  $\sin$  входит  $-\frac{l\pi}{2}$ , благодаря чему фаза  $\delta_l$  обращается в нуль для свободного движения).

Приведённые выше формулы могут быть использованы при рассмотрении рассеяния нейтронов протонами.

Дифференциальное сечение рассеяния нейтронов протонами в системе координат, где покоится центр инерции сталкивающихся частиц, определяется общей формулой (1.1). Волновой вектор  $k$  равен при этом

$$k = \frac{\sqrt{ME}}{\hbar} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} ME_0}}{\hbar},$$

где  $E$  — энергия относительного движения нейтрона и протона в системе инерции,  $E_0$  — энергия нейтрона в лабораторной системе, где до столкновения протон покоился, и  $M$  — масса нейтрона.

Мы рассмотрим тот случай, когда длина волны нейтрона  $\lambda$  (в системе центра инерции) значительно больше радиуса действия ядерных сил ( $\sim 10^{-13}$  см). Этому условию удовлетворяют нейтроны с энергией, не превосходящей 10–15 MeV.

Так как прицельный параметр сталкивающихся частиц с моментом относительного движения  $\hbar k$  равен по

порядку величины  $l\lambda$ , то при выполнении условия

$$\lambda \gg r_0,$$

где  $r_0$  по порядку величины определяет радиус действия ядерных сил, можно считать, что все  $\delta_l$ , за исключением  $\delta_0$ , практически равны нулю.

Дифференциальное сечение рассеяния приобретает при этом вид

$$d\sigma = \frac{2\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \sin \theta d\theta. \quad (1.1')$$

Как видно из этой формулы, при выполнении условия  $\lambda \gg r_0$  в системе центра инерции рассеяние является сферически симметричным.

Итак, задача определения сечения рассеяния медленных нейтронов протонами сводится к нахождению одной величины — фазы  $\delta_0$  \*).

Для определения фазы  $\delta_0$  заметим, что в области  $r < r_0$  потенциальная энергия достигает очень больших значений, значительно превышающих энергию нейтрона  $E$  (для связанного состояния нейтрона и протона, т. е. в дейтроне эффективная величина потенциальной энергии составляет несколько десятков MeV [3]), а вне этой области  $V$  становится очень малым, так как ядерные силы чрезвычайно быстро спадают с расстоянием. Мы можем поэтому при  $r > r_0$  исходить из уравнения для свободного движения

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} = -\frac{ME}{\hbar^2} u_0, \quad r > r_0, \quad (1.3')$$

во внутренней же области ( $r < r_0$ ) в первом приближении пренебречь в уравнении (1.2)  $E$  по сравнению с  $V(r)$ , т. е. заменить уравнение (1.2) при  $l=0$  уравнением

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} = \frac{M}{\hbar^2} V(r) u_0. \quad (1.3'')$$

Чтобы «сшить» решения уравнений (1.3') и (1.3''), нужно приравнять значения функции  $u_0$  и её первой

производной  $u_0'$ , даваемые обоими уравнениями, в точке  $r = r_0$ .

В первом приближении можно считать, что величина

$$\alpha = -\left(\frac{u_0'}{u_0}\right)_{r=r_0} \quad (1.4)$$

не зависит от энергии нейтрона и определяется исключительно свойствами функции  $V(r)$  (в частности,  $\alpha$  зависит от относительной ориентации спинов нейтрона и протона).

Мы можем сформулировать нашу задачу следующим образом: необходимо найти решение уравнения (1.3'), отвечающее рассеянию частиц, т. е. имеющее асимптотическую форму (1.2') и удовлетворяющее граничному условию (1.4).

Интересующее нас решение уравнения (1.3') имеет вид

$$u_0 = C \sin(kr + \delta_0).$$

Условие (1.4) даёт:

$$\left(\frac{u_0'}{u_0}\right)_{r=r_0} = k \operatorname{ctg}(kr_0 + \delta_0) = -\alpha, \quad (1.4')$$

откуда

$$\delta_0 = -\operatorname{arccotg} \frac{\alpha}{k} - kr_0.$$

Так как предполагается, что длина волны нейтрона значительно больше, чем радиус действия ядерных сил, то в первом приближении в формуле (1.4') можно пренебречь членом  $kr_0$  по сравнению с  $\delta_0$ .

Мы получим при этом:

$$\sin \delta_0 = -\frac{k}{\sqrt{k^2 + \alpha^2}}. \quad (1.5)$$

Дифференциальное сечение рассеяния, согласно (1.1'), равняется:

$$d\sigma = \frac{2\pi}{k^2 + \alpha^2} \sin \theta d\theta. \quad (1.6')$$

\*) Об усложнении, вносимом существованием спина, см. ниже.

Интегральное сечение рассеяния равно:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{4\pi}{k^2 + a^2} = \frac{4\pi\hbar^2}{M \left( \frac{E_0}{2} + \varepsilon \right)}, \\ \varepsilon &= \frac{(\alpha\hbar)^2}{M} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

где

( $E_0$  — энергия нейтрона в лабораторной системе координат).

Величина  $\alpha$  определяется потенциалом  $V(r)$ ; в частности,  $\alpha$  зависит от взаимной ориентации спинов нейтрона и протона. При параллельной ориентации спинов мы будем снабжать  $\alpha$  индексом 1, при антипараллельной — индексом 0.

Чтобы получить сечение рассеяния неполяризованных нейтронов протонами, нужно помнить, что статистический вес состояния с общим спином, равным единице, в три раза больше веса состояния со спином, равным нулю. Поэтому средний эффективный поперечник рассеяния нейтронов протонами, усреднённый по всем направлениям спинов, может быть представлен в виде<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned} \sigma &= \pi \left( \frac{3}{k^2 + a_1^2} + \frac{1}{k^2 + a_0^2} \right) = \\ &= \frac{4\pi\hbar^2}{M} \left( \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{1}{2} E_0 + \varepsilon'} + \frac{3}{4} \frac{1}{\frac{1}{2} E_0 + \varepsilon} \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\varepsilon' = \frac{(\alpha_0\hbar)^2}{M}, \quad \varepsilon = \frac{(\alpha_1\hbar)^2}{M}.$$

В следующем параграфе будет показано, что  $\varepsilon$  представляет собой энергию связи дейтрона.

Формула (1.7) выведена в предположении, что длина волны нейтрона значительно больше, чем радиус действия ядерных сил. (Вывод формулы (1.7) из общего выражения для вероятности ядерных реакций приводится в § 17.)

Мы введём теперь поправку, учитывающую конечность радиуса действия ядерных сил.

Для определённости будем аппроксимировать энергию взаимодействия нейтрона и протона в виде прямоугольной потенциальной ямы, глубина которой равна  $V_0$  и ширина  $r_0$ ; обе эти величины зависят, вообще говоря, от взаимной ориентации спинов частиц.

Волновая функция  $S$ -состояния системы нейтрон — протон в области  $r \leq r_0$  может быть в этом случае представлена в виде

$$\frac{u_0}{r} = A \frac{\sin \kappa r}{r}, \quad r \leq r_0,$$

где

$$\kappa = \frac{1}{\hbar} [M(V_0 + E)]^{1/2}.$$

При  $r \geq r_0$

$$u_0 = B \sin(kr + \delta_0), \quad k = \sqrt{ME}/\hbar.$$

Эти решения нужно «сшить» в точке  $r = r_0$ . Мы получим при этом:

$$\operatorname{ctg}(kr_0 + \delta_0) = \frac{\kappa}{k} \operatorname{ctg} \kappa r_0. \quad (1.8)$$

Заметим, что, решая задачу об основном состоянии дейтрона с энергией взаимодействия в виде прямоугольной ямы, мы придём на основании граничного условия (1.4) к соотношению

$$\kappa_0 \operatorname{ctg} \kappa_0 r_0 = -\alpha, \quad (1.9)$$

где

$$\kappa_0 = \frac{\sqrt{M(V_0 - \varepsilon)}}{\hbar}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{M\varepsilon}}{\hbar}$$

и  $\varepsilon$  — энергия связи дейтрона (см. § 2).

Так как  $kr_0 \ll 1$  и  $\alpha \ll \kappa_0$ , то мы можем разложить  $\chi$  и  $\chi \operatorname{ctg} \kappa_0 r_0$  в ряд по степеням  $k$  и  $\alpha$ :

$$\chi = \kappa_0 + \frac{\alpha^2 + k^2}{2\kappa_0},$$

$$\chi \operatorname{ctg} \kappa_0 r_0 = \kappa_0 \operatorname{ctg} \kappa_0 r_0 + \frac{\alpha^2 + k^2}{2\kappa_0} (\operatorname{ctg} \kappa_0 r_0 - \kappa_0 r_0 \sin^{-2} \kappa_0 r_0).$$

Замечая, что  $\operatorname{ctg} \alpha_0 r_0 \ll 1$  и  $\sin \alpha_0 r_0 \approx 1$ , получим:

$$\alpha \operatorname{ctg} \alpha r_0 = \alpha_0 \operatorname{ctg} \alpha_0 r_0 - \frac{\alpha^2 + k^2}{2\alpha_0} = -\alpha - \frac{1}{2}(\alpha^2 + k^2) r_0. \quad (1.9')$$

Подставляя (1.9') в правую часть равенства (1.8) и разлагая  $\operatorname{ctg}(kr_0 + \delta_0)$  в ряд, получим:

$$\operatorname{ctg} \delta_0 - \frac{kr_0}{\sin^2 \delta_0} = -\frac{\alpha}{k} - \frac{(\alpha^2 + k^2) r_0}{2k}.$$

В первом приближении (когда  $r_0$  считается равным нулю)  $\operatorname{ctg} \delta_0 \approx -\frac{\alpha}{k}$  и  $\sin^{-2} \delta_0 \approx 1 + \frac{\alpha^2}{k^2}$ . В следующем приближении

$$\operatorname{ctg} \delta_0 \approx -\frac{\alpha}{k} + kr_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{k^2}\right) - \frac{\alpha^2 + k^2}{2k} r_0 \approx -\frac{\alpha}{k} + \frac{(\alpha^2 + k^2) r_0}{2k}.$$

Сечение рассеяния, согласно (1.6'), может быть представлено в виде

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \approx \frac{4\pi(1 + \alpha r_0)}{\alpha^2 + k^2}. \quad (1.6'')$$

Эта формула показывает, что, учитывая конечность радиуса действия ядерных сил, мы получим вместо (1.7) следующую формулу для сечения рассеяния нейтронов протонами\*):

$$\sigma = \frac{4\pi \hbar^2}{M} \left( \frac{1}{4} \frac{1 + \alpha_0 r_0}{E_0 + \varepsilon'} + \frac{3}{4} \frac{1 + \alpha_1 r_0}{E_0 + \varepsilon} \right), \quad (1.7'')$$

где  $r_0$  по порядку величины определяет радиус действия ядерных сил (см. также § 17).

Величина  $\varepsilon'$  по порядку величины составляет около 100 keV,  $r_0 \approx 2 \cdot 10^{-13}$  см [115].

Выше мы всё время считали, что величина  $\alpha$ , входящая в граничное условие (1.4), не зависит от энергии. Это верно, однако, только в первом приближении. Можно показать, что учёт зависимости  $\alpha$  от энергии нейтрона эквивалентен введению конечного радиуса действия ядерных сил в выражение для сечения рассеяния [5].

\*) Здесь для простоты считается, что радиус действия ядерных сил одинаков в триплетном и синглетном состояниях, что по всей вероятности, не отвечает действительности (см. § 3).

Существенным является то обстоятельство, что ввиду малости величины  $\varepsilon = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{M}$  по сравнению с ядерными энергиями в разложении  $\alpha$  в ряд по степеням энергии нейтрона первый член мал, и поэтому второй член оказывается сравнимым с первым. Сохраняя первые два члена в разложении  $\alpha$  по степеням  $E$ , мы получим:

$$\alpha_0 = A_0 + B_0 E,$$

$$\alpha_1 = A_1 + B_1 E.$$

Формула (1.7) для сечения рассеяния нейтронов протонами с этими значениями  $\alpha$  приобретает вид

$$\sigma = \frac{\pi \hbar^2}{M} \left\{ \frac{3}{(A_1 + B_1 E)^2 + \frac{E}{2}} + \frac{1}{(A_0 + B_0 E)^2 + \frac{E}{2}} \right\}. \quad (1.7''')$$

Если пренебречь в знаменателе членами, содержащими  $E^2$ , и ввести обозначения

$$\frac{A_1^2}{2A_1 B_1 + \frac{1}{2}} = \varepsilon, \quad \frac{A_0^2}{2A_0 B_0 + \frac{1}{2}} = \varepsilon',$$

$$\frac{1}{2A_1 B_1 + \frac{1}{2}} = 1 + \alpha_1 r_0, \quad \frac{1}{2A_0 B_0 + \frac{1}{2}} = 1 + \alpha_0 r_0,$$

то формула (1.7''') примет вид (1.7'). Заметим, однако, что в действительности нельзя пренебрегать величиной  $E^2$  в знаменателе (1.7'''); формула (1.7''') лучше согласуется с экспериментальными данными, чем формула (1.7'). При этом в (1.7''') следует считать, что  $A_1 = -1,22$ ,  $A_0 = 0,27$ ,  $B_1 = B_0 = 0,06$  [115].

**§ 2. Классификация состояний системы нейтрон-протон и основное состояние дейтрона.** Если отвлечься от спина и считать, что между нейтроном и протоном действуют центральные силы, то можно утверждать, что основному состоянию дейтрона отвечает момент относительного количества движения нейтрона и протона, равный нулю\*). Иными словами, основным состоянием дейтрона будет S-состояние.

\*) См. любой курс квантовой механики.

Учитывая спин частиц, мы должны различать триплетное ( $^3S$ ) и синглетное ( $^1S$ )  $S$ -состояния соответственно тому, параллельны или антипараллельны спины нейтрона и протона.

Естественно возникает вопрос, оба ли эти состояния осуществляются в дейтроне. Опыты по рассеянию нейтронов протонами, в особенности по рассеянию медленных нейтронов в молекулярном пара- и ортоводороде, а также рассмотрение захвата нейтронов протонами приводят к заключению, что основным состоянием дейтрона является триплетное состояние и что синглетное состояние в дейтроне не осуществляется.

Мы покажем теперь, что величина  $\epsilon$  представляет собой энергию связи дейтрона.

Согласно сказанному выше, волновое уравнение основного состояния дейтрона можно записать в виде

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{M}{\hbar^2} (\eta + V) u, \quad (2.1)$$

где  $u = r\psi$  ( $\psi$  — волновая функция дейтрона, которая в  $S$ -состоянии зависит только от расстояния  $r$  между нейтроном и протоном,  $\eta$  — энергия связи дейтрона и  $V$  — потенциальная энергия).

Это уравнение вне области действия ядерных сил ( $r > r_0$ ) можно представить в виде

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{M\eta}{\hbar^2} u. \quad (2.2')$$

Внутри области действия ядерных сил можно пренебречь энергией связи  $\eta$  по сравнению с  $V$ . Поэтому в этой области уравнение (2.1) можно заменить уравнением

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{M}{\hbar^2} V u, \quad r \leq r_0.$$

Решение этого уравнения следует «шить» с решением уравнения (2.2') при  $r \approx r_0$ . Такое «сшивание» означает, что при  $r = r_0$  должно выполняться некоторое граничное условие, а именно — условие вида (1.4). Можно утверждать, что константа  $\alpha$  должна иметь то же значение, что и при решении задачи о рассеянии нейтро-

нов протонами, так как она находится из решения уравнения Шредингера во внутренней области ( $r < r_0$ ), а в это уравнение не входит ни энергия нейтрона, ни энергия связи дейтрона.

Различие между обеими задачами заключается лишь в том, что при рассмотрении рассеяния нейтронов протонами система нейтрон — протон имеет положительную энергию, в то время как при рассмотрении задачи об основном состоянии дейтрона мы имеем дело с отрицательной энергией. С этим связано различное асимптотическое поведение волновых функций обеих задач. В задаче о рассеянии волновая функция на бесконечности осциллирует и отлична от нуля, в задаче же об основном состоянии дейтрона она обращается в нуль.

Подчеркнём ещё раз, что использование одного и того же граничного условия с одной и той же константой  $\alpha$  является следствием малости энергии связи дейтрона и энергии относительного движения нейтрона и протона по сравнению с эффективной потенциальной энергией взаимодействия нейтрона и протона. В силу этого  $\alpha$  выступает как некоторая константа, характеризующая взаимодействие нейтрона и протона.

Интересующее нас решение уравнения (2.2') имеет следующий вид:

$$u = \text{const.} \cdot e^{-\frac{\sqrt{M\eta}}{\hbar} r}. \quad (2.2)$$

Граничное условие (1.4) даёт:

$$\frac{\sqrt{M\eta}}{\hbar} = \alpha. \quad (2.2'')$$

Сравнение этого соотношения с (1.6) показывает, что  $\eta$  совпадает с  $\epsilon$ , т. е. что  $\epsilon$  действительно представляет собой энергию связи. Формула (2.2'') показывает далее, что величина  $\alpha_1$ , входящая в выражение для сечения рассеяния нейтрона протонами, является существенно положительной. Иными словами, связанному состоянию отвечает положительный знак величины  $\alpha$ . (Напомним, что  $\alpha$  определяется как логарифмическая производная радиальной волновой функции в точке  $r = r_0$  (см. 1.4).)

Так как не существует состояний дейтрона с противоположно ориентированными спинами нейтрона и протона, то величина  $\alpha_0$  должна быть отрицательной:

$$\alpha_0 < 0.$$

Ниже мы увидим, что, рассматривая рассеяние нейтронов в пара- и ортоводороде, можно убедиться в справедливости этого утверждения.

Заметим, что дейтрон не имеет возбуждённых состояний. Это связано с тем, что энергия связи единственного  $S$ -уровня ( ${}^3S_1$ ) аномально мала, почти равна нулю по сравнению с ядерными энергиями. Отсюда можно заключить, что очень мало вероятно существование возбуждённых состояний дейтрона с не равным нулю моментом количества движения. Обычно такие уровни расположены значительно выше  $S$ -уровня, так как в состояниях с отличным от нуля орбитальным моментом добавляется центробежная энергия.

Только в том случае, если бы между спином и орбитой существовало такое взаимодействие, которое приводило бы к почти полной компенсации действия центробежной энергии, можно было бы ожидать существования возбуждённых состояний дейтрона с отличным от нуля орбитальным моментом. Эксперименты не указывают на существование возбуждённых состояний, откуда следует, что такая маловероятная компенсация действия центробежной энергии не имеет места.

Оценим теперь эффективную величину потенциальной энергии  $V$ .

Проинтегрируем уравнение (2.1) в пределах от  $r=0$  до  $r=r_0$  (величина  $r_0$  определяет область действия ядерных сил, т. е.  $V(r) \approx 0$  при  $r > r_0$ ):

$$(u')_{r=r_0} - (u')_{r=0} = \frac{M}{\hbar^2} \int_0^{r_0} V(r) u dr + \frac{M\epsilon}{\hbar^2} \int_0^{r_0} u dr. \quad (2.3)$$

Значение производной  $u'$  в точке  $r=r_0$  меньше значения  $u'$  в точке  $r=0$ , так как при  $r \approx r_0$  функция  $u$  начинает убывать (и обращается в нуль при  $r \rightarrow \infty$ ).

Внутри области действия сил, при  $r < r_0$ , величина потенциальной энергии значительно больше энергии связи нейтрона, т. е.  $|V| \gg \epsilon$ . Мы можем поэтому для получения оценки пренебречь первым слагаемым в левой части и вторым слагаемым в правой части уравнения (2.3).

Замечая ещё, что при малых  $r$  функция  $u$  ведёт себя, как  $\text{const.} \cdot r$  (в общем случае радиальная функция  $u_l$ , отвечающая моменту  $l$ , ведёт себя при  $r \rightarrow 0$ , как  $\text{const.} \cdot r^{l+1}$  \*), мы получим по порядку величины:

$$\int_0^{r_0} V(r) r dr \approx -\frac{\hbar^2}{M}. \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что глубина ямы  $V_0$  и её ширина  $r_0$  связаны приближённым соотношением

$$V_0 r_0^2 \approx \frac{\hbar^2}{M} \quad (2.4')$$

(в случае прямоугольной ямы  $V_0 r_0^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2 [6]}{4 M}$ ).

Полагая  $r_0 \approx 2 \cdot 10^{-13}$  см, мы получим  $V_0 \approx 40$  MeV<sup>[5],[6]</sup>.

Выше мы предполагали силы между нейтроном и протоном центральными и поэтому считали основным состоянием дейтрона  $S$ -состояние (точнее  ${}^3S_1$ -состояние).

Известно, что волновая функция  $S$ -состояния является сферически симметричной. Отсюда следует, что распределение заряда в дейтроне должно быть также сферически симметричным. Между тем, дейтрон обладает квадрупольным моментом, что указывает на отклонение распределения заряда от сферической симметрии.

Это значит, что основное состояние дейтрона не может описываться чистой  $S$ -волной. Оно должно представлять собой суперпозицию  $S$ -волны и волн, отвечающих отличным от нуля моментам количества движения, которые и создают отклонение в распределении заряда от сферической симметрии.

Мы покажем сейчас, что учёт сил, зависящих от ориентации спинов нейтрона и протона по отношению к радиусу-

\*) См. любой курс квантовой механики.



вектору, соединяющему частицы, приводит к нужной асимметрии \*).

Предварительно мы рассмотрим общий вопрос о классификации состояний системы, состоящей из нейтрона и протона.

Наличие сил, зависящих от ориентации спинов нейтрона и протона, может привести к существенному изменению свойств симметрии гамильтониана системы. В случае действия обычных центральных сил гамильтониан системы, состоящей из двух частиц, инвариантен по отношению к пространственным вращениям. С этим связано сохранение орбитального момента количества движения частиц и возможность классификации состояний системы по значениям момента  $l$ . В общем случае, когда силы зависят от спина частиц, гамильтониан не инвариантен по отношению к вращениям одних только пространственных координат.

Инвариантность гамильтониана сохраняется по отношению к вращениям как обычных, так и спиновых координат. С этой инвариантностью связано сохранение общего момента количества движения  $J$ , складывающегося из орбитального и спинового моментов. Последние порознь, вообще говоря, не сохраняются, и поэтому возможность классификации состояний по значениям орбитального момента при этом отпадает.

Хотя в общем случае любого числа частиц орбитальный и спиновый моменты порознь не сохраняются, в системе, состоящей из двух частиц, обладающих спином, равным  $1/2$ , величина полного спина  $S$  представляет собой константу движения.

В этом можно убедиться, если сделать естественное предположение о том, что гамильтониан системы, состоящей из двух частиц, симметричен относительно их спинов. В силу этой симметрии стационарные состояния могут быть либо симметричными, либо антисимметричными относительно спиновых координат.

\*) Ниже излагаются основные результаты работы Швингера и Рариты [7] по этому вопросу. См. также работу Гешнера и Пайерлса [8].

Симметричные состояния являются триплетными и соответствуют значению спина  $S$ , равному единице, антисимметричные состояния являются синглетными с  $S = 0$ .

В справедливости высказанного выше утверждения о постоянстве величины  $S$  можно убедиться также следующим образом.

Гамильтониан системы двух частиц, обладающих спином, равным  $1/2$ , может содержать спины частиц только в двух комбинациях:

$$\sigma_1 \sigma_2, \quad S_{12} = 3 \frac{(\sigma_1 r) \cdot (\sigma_2 r)}{r^2} - \sigma_1 \sigma_2, \quad (2.5)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2$  — матрицы Паули для обеих частиц и  $r$  — вектор расстояния между ними.

Это связано с тем, что операторы (2.5) инвариантны по отношению к вращениям пространственных и спиновых координат, причём, как мы сейчас покажем, любой оператор, характеризующийся такой инвариантностью, может быть представлен в виде линейной комбинации единичной матрицы и операторов (2.5). Так как гамильтониан системы двух частиц инвариантен по отношению к вращениям пространственных и спиновых координат, то он также может быть представлен в виде линейной комбинации единичной матрицы и операторов  $\sigma_1 \sigma_2$  и  $S_{12}$ .

Покажем, что операторы (2.5) отличаются следующим замечательным свойством: любая целая положительная степень каждого из операторов, так же как и произведения таких степеней, могут быть представлены в виде линейной комбинации самих операторов и единичной матрицы.

Чтобы убедиться в этом, отметим прежде всего соотношение [9]

$$(\sigma_1 \sigma_2)^2 = 3 - 2\sigma_1 \sigma_2,$$

которое легко выводится, если воспользоваться свойствами матриц Паули  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ . Из этого соотношения следует, что любая целая положительная степень оператора  $\sigma_1 \sigma_2$  выражается в виде линейной комбинации, содержащей оператор  $\sigma_1 \sigma_2$  и единичную матрицу.

Далее легко показать, что имеют место соотношения

$$\sigma_1 \sigma_2 \cdot S_{12} = S_{12}, \quad S_{12} \cdot \sigma_1 \sigma_2 = S_{12}.$$

Действительно, направим ось  $x$  вдоль вектора  $n = r/r$ . Оператор  $\sigma_1 \sigma_2 \cdot S_{12}$  приобретает при этом вид

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 \cdot S_{12} &= \sigma_1 \sigma_2 \{3\sigma_{1x}\sigma_{2x} - \sigma_1 \sigma_2\} = \\ &= 3\{1 - \sigma_{1z}\sigma_{2z} - \sigma_{1y}\sigma_{2y}\} - 3 + 2\sigma_1 \sigma_2 = \\ &= 3\sigma_{1x}\sigma_{2x} - \sigma_1 \sigma_2 = S_{12}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Покажем, наконец, что степени  $S_{12}$  выражаются через  $S_{12}$  и  $\sigma_1 \sigma_2$ . Рассмотрим, например, оператор  $S_{12}^2$ :

$$S_{12}^2 = 9(\sigma_1 n)^2 (\sigma_2 n)^2 - 6(\sigma_1 n)(\sigma_2 n) \sigma_1 \sigma_2 + (\sigma_1 \sigma_2)^2.$$

Так как

$$3(\sigma_1 n)(\sigma_2 n) \sigma_1 \sigma_2 = S_{12} + (\sigma_1 \sigma_2)^2,$$

то

$$S_{12}^2 = 9 - 2S_{12} - (\sigma_1 \sigma_2)^2 = 6 - 2S_{12} + 2\sigma_1 \sigma_2.$$

Отсюда следует, что любая целая положительная степень  $S_{12}$  выражается через  $S_{12}$ ,  $\sigma_1 \sigma_2$  и единичную матрицу.

Итак, мы показали, что имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1 \sigma_2)^2 &= 3 - 2\sigma_1 \sigma_2, \\ S_{12}^2 &= 6 - 2S_{12} + 2\sigma_1 \sigma_2, \\ S_{12} \sigma_1 \sigma_2 &= S_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

которые и доказывают отмеченное выше свойство операторов  $S_{12}$  и  $\sigma_1 \sigma_2$ .

Эти соотношения показывают, что наиболее общее выражение оператора потенциальной энергии системы нейтрон + протон, симметричного в спинах частиц и инвариантного по отношению к вращениям пространственных и спиновых координат, имеет вид [7]

$$V = - \left\{ 1 - \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}g\sigma_1 \sigma_2 + \gamma S_{12} \right\} U(r), \quad (2.7)$$

где  $g$ ,  $\gamma$  и  $U$  суть некоторые функции расстояния между частицами.

Вводя в рассмотрение вектор общего спина системы

$$S = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2),$$

можно представить операторы  $\sigma_1 \sigma_2$  и  $S_{12}$  в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 &= 2S^2 - 3, \\ S_{12} &= 6\frac{(Sr)^2}{r^2} - 2S^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.6')$$

Пользуясь представлением (2.6'), мы непосредственно убеждаемся в том, что оператор  $S^2$  коммутирует с операторами  $\sigma_1 \sigma_2$  и  $S_{12}$ , а, следовательно, и с гамильтонианом системы. Это значит, что  $S^2$  представляет собой константу движения, как и утверждалось выше.

Соотношения (2.6') показывают, что в синглетном состоянии ( $S=0$ )  $S_{12}$  равно нулю. В триплетном состоянии ( $S=1$ ) оператор  $S_{12}$  можно записать в виде

$$S_{12} = 6\frac{(Sr)^2}{r^2} - 4. \quad (2.6'')$$

Отметим, что собственное значение  $\sigma_1 \sigma_2$  в триплетном состоянии равно единице, а в синглетном — 3 [см. первую из формул (2.6)].

Собственные значения оператора  $S_{12}$  суть 2, 2, -4 [в этом можно убедиться из рассмотрения второго соотношения (2.6)]. Сумма этих значений равна нулю.

Итак, мы видим, что систему, состоящую из нейтрона и протона, можно характеризовать заданием квантовых чисел  $J$  и  $S$ .

Сюда следует добавить магнитное квантовое число  $m$ , т. е. проекцию полного момента количества движения  $J$  на некоторую ось, а также чётность состояния  $w$ , представляющую собой собственное значение оператора отражения (замены  $r$  на  $-r$ ). Эти четыре квантовых числа  $J$ ,  $S$ ,  $m$ ,  $w$  могут служить для классификации состояний системы нейтрон + протон.

В синглетном состоянии ( $S=0$ ) сохраняется орбитальный момент количества движения  $l$ . Поэтому такие состояния можно классифицировать по величине  $l$ .

Триплетное состояние, характеризующееся определённым значением полного момента  $J$ , можно трактовать как суперпозицию ряда состояний с различными значениями  $l$ , совместимыми с общими правилами сложения моментов. Так, например, триплетное состояние с  $J = 1$  представляет собой суперпозицию состояний  ${}^3S_1$ ,  ${}^3P_1$ ,  ${}^3D_1$ . Чётность состояния равна, как известно,  $\omega = (-1)^l$ . Поэтому для состояний  ${}^3S_1$  и  ${}^3D_1$  чётность  $\omega = 1$ , для состояния  ${}^3P_1$  чётность  $\omega = -1$ .

Ниже приведена классификация нескольких первых триплетных состояний [7].

Классификация триплетных состояний

$J$	Чётность	
	$\omega = 1$	$\omega = -1$
0		${}^3P_0$
1	${}^3S_1 + {}^3D_1$	${}^3P_1$
2	${}^3D_2$	${}^3P_2 + {}^3F_2$
3	${}^3D_3 + {}^3G_3$	${}^3F_3$

Перейдём теперь к рассмотрению вопроса об основном состоянии дейтрона.

Мы говорили выше, что из опытов по рассеянию нейтронов протонами (главным образом, в орто- и параводороде), а также из других данных следует, что в основном состоянии дейтрона спины нейтрона и протона параллельны. Мы можем, исходя из этих данных, считать, что в основном состоянии общий момент количества движения дейтрона равняется единице.

Будем считать основное состояние дейтрона чётным \*) ( $\omega = 1$ ). Согласно приведённой выше таблице,

\*) Если предположить что чётность основного состояния  $\omega = -1$ , то, как видно из приведённой выше таблицы, волновая функция основного состояния дейтрона не будет содержать  $S$ -волны. Такая функция будет слишком асимметричной, между тем как из вели-

основным состоянием дейтрона следует считать суперпозицию состояний  ${}^3S_1$  и  ${}^3D_1$ . Наличие  ${}^3D_1$ -волны приводит к отклонению распределения заряда в дейтроне от сферической симметрии, иными словами, благодаря присутствию  $D$ -волны дейтрон будет обладать квадрупольным электрическим моментом.

Квадрупольный момент представляет собой усреднённое по асимметричному распределению заряда значение величины  $\frac{1}{4} (3z^2 - r^2)$  (ось  $z$  определяется таким образом, что проекция полного момента на эту ось равна  $m = 1$ ); множитель  $1/4$  возникает по той причине, что радиус-вектор заряженной частицы — протона — равен  $r/2$ .

По данным Раби и др. [10], квадрупольный момент дейтрона равен:

$$Q = + (2,73 \pm 0,05) \cdot 10^{-27} \text{ см}^2$$

(положительный знак  $Q$  означает, что распределение заряда «вытянуто» вдоль направления общего спина дейтрона).

Таким образом существование квадрупольного момента дейтрона является указанием на нецентральность ядерных сил, которая приводит к установлению связи между волнами  ${}^3D_1$  и  ${}^3S_1$ .

Зная величину квадрупольного момента дейтрона, можно оценить веса состояний  ${}^3D_1$  и  ${}^3S_1$ . Чтобы произвести эту оценку, рассмотрим волновую функцию состояния  ${}^3S_1 + {}^3D_1$ . Покажем, что нормированная часть волновой функции  ${}^3D_1$ -состояния, содержащая спиновые и угловые переменные, может быть представлена в виде

$$\frac{1}{4} (2\pi)^{-1/2} S_{12} \chi_1^m, \quad (2.8')$$

где  $\chi_1^m$  — нормированная спиновая функция, относящаяся к триплетному состоянию с магнитным квантовым чис-

лами квадрупольного момента дейтрона следует, что асимметрия в распределении зарядов очень невелика. Отсюда видно, что  $S$ -волна должна обязательно присутствовать в основном состоянии дейтрона.

лом  $m$  ( $m$  — проекция общего момента на ось квантования, принимающая значения  $m = -1, 0, +1$ ).

Заметим для этого, что три функции  $\chi_1^m$  преобразуются при вращениях спиновых координат по представлению, характеризующему момент, равный единице. Так как оператор  $S_{12}$  инвариантен по отношению к вращениям обычных и спиновых координат, то три функции  $S_{12}\chi_1^m$  также преобразуются по представлению, характеризующему  $J=1$ . Иными словами,  $S_{12}\chi_1^m$  описывает триплетное состояние с общим моментом  $J=1$ .

Остаётся показать, что функция  $S_{12}\chi_1^m$  описывает именно  $D$ -волну.

Известно, что если некоторая функция от углов  $Y(\theta, \varphi)$ , умноженная на  $r^l$  ( $l$  — целое число), удовлетворяет уравнению Лапласа, то она описывает волну с орбитальным моментом, равным  $l$  [11]. Поэтому нам достаточно показать, что  $S_{12}\chi_1^m$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta(r^2 S_{12}\chi_1^m) = 0,$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа. Подставляя сюда выражение для  $S_{12}$ , получим:

$$\Delta(3\sigma_1 r \cdot \sigma_2 r - r^2 \sigma_1 \sigma_2) \chi_1^m = (6\sigma_1 \sigma_2 - 6\sigma_1 \sigma_2) \chi_1^m = 0,$$

что и требовалось доказать.

Итак, функция  $S_{12}\chi_1^m$  описывает именно  ${}^3D_1$ -состояние с моментом  $J=1$ . Чтобы убедиться в правильности нормировки функции (2.8'), достаточно вспомнить второе из соотношений (2.6) и заметить, что интеграл по углам от  $S_{12}\chi_1^m$  обращается в нуль.

Обозначая радиальные функции  $S$ - и  $D$ -волн соответственно через  $\frac{u(r)}{r}$  и  $\frac{w(r)}{r}$  и замечая, что в состоянии с  $S=1$  оператор  $\sigma_1 \sigma_2$  можно заменить единицей, мы можем записать  $\psi$ -функцию состояния  ${}^3S_1 + {}^3D_1$  в виде

$$\psi = (4\pi)^{-1/2} \left\{ \frac{u}{r} + 2^{-3/2} \left( \frac{3\sigma_1 r \cdot \sigma_2 r}{r^2} - 1 \right) \frac{w}{r} \right\} \chi_1^m. \quad (2.8)$$

Условие нормировки волновой функции гласит:

$$\int_0^\infty (u^2 + w^2) dr = 1. \quad (2.8'')$$

При такой нормировке значение интеграла  $\int_0^\infty w^2 dr$

представляет собой, очевидно, вероятность нахождения дейтрона в состоянии  ${}^3D_1$ .

Мы можем теперь написать выражение для квадратурного момента  $Q$  в состоянии с  $m=1$ :

$$Q = \int \psi^* \frac{1}{4} (3z^2 - r^2) \psi dV = \frac{V\sqrt{2}}{10} \int_0^\infty r^2 (uw - 2^{-3/2} w^2) dr. \quad (2.9)$$

Для вычисления  $Q$  нужно знать радиальные функции  $u$  и  $w$ . Нахождение последних требует определённых предположений о виде потенциальной энергии.

Если воспользоваться [7] выражением (2.7) для потенциальной энергии, то уравнение Шредингера для триплетного основного состояния дейтрона примет вид

$$-\varepsilon\psi = \frac{\hbar^2}{M} \Delta\psi - \left[ 1 + \gamma \left( \frac{3\sigma_1 r \cdot \sigma_2 r}{r^2} - 1 \right) \right] U(r)\psi, \quad (2.10)$$

где  $\varepsilon$  — энергия связи дейтрона.

После подстановки сюда  $\psi$  в виде (2.8) и использования соотношений (2.6) уравнение (2.10) расщепляется на два уравнения для  $u$  и  $w$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{M}{\hbar^2} [-\varepsilon + U] u &= -2^{3/2} \gamma \frac{M}{\hbar^2} U w, \\ \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{6w}{r^2} + \frac{M}{\hbar^2} [-\varepsilon + (1 - 2\gamma)U] w &= -2^{3/2} \gamma \frac{M}{\hbar^2} U u. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Вне области действия ядерных сил решения этих уравнений имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u &= A e^{-\alpha r}, \\ w &= B e^{-\alpha r} \left( 1 + \frac{3}{\alpha r} + \frac{3}{(\alpha r)^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

где  $\alpha = \sqrt{\frac{M\varepsilon}{\hbar^2}}$ , а  $A, B$  — константы.

В области действия ядерных сил решение уравнений (2.11) существенно зависит от вида функций  $\gamma$  и  $U$ , которые нам неизвестны. Поэтому отношение констант

$A$  и  $B$ , которое определяется весом  $D$ -волны, не может быть найдено теоретически. Можно, однако, определить вес  $D$ -состояния, если оценить квадрупольный момент дейтрона по формуле (2.9) и сравнить затем полученное значение с экспериментальным.

Для оценки  $Q$  по порядку величины можно в интеграл (2.9) в качестве функций  $u$  и  $w$  подставить выражения (2.12), справедливые вне области действия ядерных сил, и пренебречь при этом малым членом  $w^2$ . То обстоятельство, что внутри области действия ядерных сил выражениями (2.12) нельзя пользоваться, не может сильно повлиять на результат, так как в интеграле (2.9) расстояния  $\leq r_0$  не играют исключительной роли; область эффективных значений  $r$  в выражении для  $Q$  порядка  $1/\alpha$ , что в несколько раз превышает  $r_0$ .

Результаты расчётов [7] показывают, что для получения наблюдаемого значения квадрупольного момента дейтрона необходимо считать вероятность нахождения дейтрона в  ${}^3D_1$ -состоянии порядка нескольких процентов

$$\int_0^{\infty} w^2 dr \cong 0,04.$$

Заметим, что вес состояния  ${}^3D_1$  входит также в выражение для магнитного момента дейтрона. Это связано с тем, что в состоянии  ${}^3S_1 + {}^3D_1$  магнитный момент не равен сумме собственных магнитных моментов нейтрона и протона, так как благодаря «примеси»  $D$ -волны орбитальный момент также вносит свою долю в величину магнитного момента дейтрона.

Оператор магнитного момента дейтрона  $M$ , выраженный в ядерных магнетонах  $\left(\frac{e\hbar}{2Mc}\right)$ , имеет вид

$$M = \mu_n \sigma_n + \mu_p \sigma_p + \frac{1}{2} L, \quad (2.13)$$

где  $\mu_n$  и  $\mu_p$  — магнитные моменты нейтрона и протона в единицах  $\frac{e\hbar}{2Mc}$ ,  $\sigma_n$  и  $\sigma_p$  — спиновые матрицы Паули для нейтрона и протона и  $L$  — оператор орбитального момента (множитель  $1/2$  при орбитальном моменте учи-

тывает тот факт, что только одна из двух частиц, образующих дейтрон — протон, обладает зарядом).

Вводя спиновый и полный моменты количества движения  $S$  и  $J$ , перепишем  $M$  в виде

$$M = \frac{1}{2} J + \left( \mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) S + \frac{1}{2} (\mu_n - \mu_p) (\sigma_n - \sigma_p), \quad (2.13')$$

$$S = \frac{1}{2} (\sigma_n + \sigma_p).$$

В триплетном состоянии диагональные матричные элементы  $\sigma_n - \sigma_p$  равны, очевидно, нулю (оператор  $\sigma_n - \sigma_p$  антисимметричен относительно спиновых координат, в то время как спиновые волновые функции — симметричны), поэтому последнее слагаемое можно вовсе не учитывать.

Далее вектор  $S$  может быть заменён своей проекцией вдоль направления  $J^*$ , т. е.

$$S \rightarrow J \frac{SJ}{J^2} = J \frac{J^2 + S^2 - L^2}{2J^2} = J \frac{4 - L^2}{4} \quad (2.13'')$$

(мы заменили операторы  $J^2$  и  $S^2$  их собственными значениями, равными 2).

Пользуясь (2.13''), перепишем (2.13') в виде

$$M = J \left[ \mu_n + \mu_p - \frac{1}{4} \left( \mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) L^2 \right]. \quad (2.14)$$

\*) Смысл замены оператора  $S$  оператором  $J \frac{SJ}{J^2}$  заключается в том, что матричные элементы обоих операторов, отвечающие переходам, при которых  $J^2 = J(J+1)$  не изменяется, равны между собой.

Доказательство этого утверждения вытекает из соотношения [12]

$$J^4 T - 2J^2 T J^2 + T J^4 = 2\hbar^2 (J^2 T + T J^2) - 4\hbar^2 J (J T), \quad (*)$$

где  $T$  — произвольный оператор со свойствами момента, коммутирующий с оператором  $J - T$ .

В частности, в качестве  $T$  можно взять оператор  $S$ .

Рассматривая матричные элементы  $T$ , диагональные по отношению к  $J$ , получим из (\*):

$$(T)_{\alpha, J, m'; \alpha', J, m} = \frac{1}{J(J+1)} (J(JT))_{\alpha, J, m'; \alpha', J, m'},$$

где  $\alpha$  — совокупность собственных значений операторов, коммутирующих с  $J^2$  и  $J_z$ .

Заменяя здесь  $T$  на  $S$ , мы и получим приведённое в тексте соотношение.

Так как среднее значение  $L^2$  равно  $2 \cdot 3 \cdot \int_0^\infty \omega^2 dr$ , то выражение для магнитного момента дейтрона приобретает окончательно следующий вид:

$$\mu_D = \mu_n + \mu_p - \frac{3}{2} \left( \mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) \int_0^\infty \omega^2 dr. \quad (2.15)$$

Мы видим, что вклад орбитального движения в выражение для момента дейтрона пропорционален  $\int_0^\infty \omega^2 dr$ , т. е. очень мал. В первом приближении магнитный момент дейтрона равен просто сумме моментов нейтрона и протона.

Из (2.15) следует, что

$$\mu_n = \frac{\mu_D - \frac{3}{4} \int_0^\infty \omega^2 dr}{1 - \frac{3}{2} \int_0^\infty \omega^2 dr} - \mu_p. \quad (2.15')$$

Имеющиеся экспериментальные данные с несомненностью указывают, что магнитный момент дейтрона не равен алгебраической сумме моментов протона и нейтрона. Именно, экспериментально найдено, что [13] \*)

$$\begin{aligned} \mu_p &= 2,7896, \\ \mu_D &= 0,85647, \\ \mu_n &= -1,9103. \end{aligned}$$

Если считать вес  $D$ -волны равным 4%, то из формулы (2.15') мы получим, используя указанные выше

\*) Магнитный момент нейтрона был впервые определен Альваресом и Блохом [14], которые получили для него значение  $\mu_n = -1,935 \pm 0,03$ . Указанное в тексте значение  $\mu_n$  также получено по методу Альвареса и Блоха; ошибка в этом значении  $\mu_n$  составляет 0,001.

значения для  $\mu_p$  и  $\mu_D$ , значение магнитного момента нейтрона, равное  $\mu_n = -1,9108$ . Согласие между вычисленным и найденным экспериментально значением  $\mu_n$  можно считать удовлетворительным.

Итак, мы видим, что «примесь»  $D$ -волны в основном состоянии дейтрона очень невелика. Поэтому при рассмотрении многих вопросов можно считать основным состоянием дейтрона состояние  ${}^3S_1$ . В частности, без особой погрешности можно исходить из этого предположения при рассмотрении рассеяния медленных нейтронов протонами, что мы и делали выше.

Отметим, что под влиянием обычного магнитного взаимодействия нейтрона и протона (энергия этого взаимодействия имеет вид  $V = -\frac{\mu_n \mu_p}{r^3} S_{12}$ ) возникают некоторые изменения в характере рассеяния медленных нейтронов протонами. Во-первых, в триплетном состоянии угловое распределение рассеянных нейтронов становится не вполне изотропным и, во-вторых, появляется зависимость сечения рассеяния от проекции спина  $m$  на направление импульса падающих нейтронов. При этом состояния с  $|m| = 1$  и  $m = 0$  несколько отличаются в смысле асимметрии рассеяния. Однако отклонение от сферической симметрии столь незначительно, что мы в дальнейшем не будем учитывать этот эффект.

**§ 3. Рассеяние нейтронов в пара- и ортоводороде.** Мы вернемся теперь к рассмотрению вопроса о возможности существования состояний дейтрона с антипараллельными спинами нейтрона и протона. Этот вопрос сводится к определению знака величины  $\alpha_0$ . Согласно соотношению (2.2'') только положительный знак  $\alpha$  отвечает связанному состоянию нейтрона и протона.

Изучая рассеяние нейтронов свободными протонами, нельзя определить знак  $\alpha$ , так как сечение рассеяния определяется квадратом  $\alpha$ . Оказывается, что можно определить знак величины  $\alpha_0$ , изучая рассеяние нейтронов в молекулярном водороде, т. е. в пара- и ортоводороде \*).

\*) Мы следуем ниже изложению Швингера и Теллера [15].

Известно, что протоны, образующие молекулу ортоводорода, имеют параллельно направленные спины, в то время как спины протонов в молекуле параводорода антипараллельны.

Рассмотрим рассеяние медленных нейтронов в молекулярном водороде, предполагая, что длина волны нейтронов сравнима с расстоянием между протонами, образующими молекулу водорода.

В этом случае должны иметь место интерференционные явления, связанные с рассеянием нейтронов обоими протонами молекулы.

Предположим, что энергия нейтронов недостаточна для возбуждения ротационных уровней молекулы.

Происходящее в этих условиях упругое (без изменения энергии) рассеяние нейтронов будет отличаться для пара- и ортоводорода, если взаимодействие нейтрона и протона зависит от относительной ориентации их спинов и будет одинаковым при не зависящих от спинов ядерных силах\*).

Отсюда следует, что, изучая рассеяние очень медленных нейтронов в пара- и ортоводороде, можно получить важные сведения о величинах  $\alpha_1$  и  $\alpha_0$ .

Переходя к определению сечений рассеяния медленных нейтронов в пара- и ортоводороде, покажем предварительно, что при рассмотрении различных процессов рассеяния нейтронов можно пользоваться своеобразной теорией возмущений, если только надлежащим образом выбрать потенциал возмущения [16].

Достаточно показать, что это утверждение справедливо в случае рассеяния нейтронов свободными протонами. Предполагая, что можно пользоваться теорией возмущений, мы получим следующую формулу для

\*) Если нейтрон обладает энергией, достаточной для возбуждения ротационных уровней молекулы водорода, то рассеяние нейтронов в параводороде будет отличаться от рассеяния в ортоводороде даже при не зависящих от относительной ориентации спинов ядерных силах. Это связано с тем, что ротационные уровни молекул пара- и ортоводорода отличаются друг от друга: ротационное квантовое число  $J$  для параводорода может быть только чётным, для ортоводорода — нечётным.

амплитуды рассеяния нейтронов свободными протонами [17]:

$$f(\theta) = -\frac{M}{4\pi\hbar^2} \int U(r) e^{i(p-p_0)r} dV. \quad (3.1)$$

Здесь  $r$  — радиус-вектор, определяющий относительное положение нейтрона и протона,  $p_0$  и  $p$  — импульсы частицы до и после столкновения ( $p_0 = p$ ) и  $U(r)$  — некоторый фиктивный потенциал взаимодействия между нейтроном и протоном, который, как мы сейчас покажем, можно выбрать таким образом, что выражение (3.1) будет совпадать с точным значением амплитуды рассеяния. Последняя, как известно, для медленных нейтронов не зависит от угла рассеяния  $\theta$ .

Для того чтобы рассеяние отличалось этим свойством, необходимо считать радиус действия сил  $r_0$  в выражении (3.1) малым по сравнению с длиной волны частиц  $\lambda$ :

$$r_0 \ll \lambda. \quad (3.2)$$

Выберем фиктивный потенциал в виде прямоугольной потенциальной ямы. Обозначая глубину ямы через  $U_0$ , мы получим из (3.1) при выполнении условия (3.2)

$$a = f(\theta) \approx \frac{M}{\hbar^2} U_0 r_0^3, \quad (3.3)$$

где амплитуда рассеяния  $a$  связана с сечением рассеяния нейтронов свободными протонами соотношением

$$\sigma_0 = 4\pi a^2.$$

С другой стороны, для применимости борновского приближения, которым мы пользуемся, необходимо выполнение условия [17]

$$U_0 \ll E = \frac{\hbar^2}{M\lambda^2}. \quad (3.4)$$

Выясним, могут ли одновременно выполняться все эти условия. Из (3.3) и (3.2) следует, что

$$U_0 = \frac{\hbar^2}{M} \frac{a}{r_0^3} \gg \frac{\hbar^2}{M} \frac{a}{\lambda^3}. \quad (3.5)$$

Неравенства (3.4), (3.5) приводят к условию

$$a \ll \lambda. \quad (3.6)$$

Так как  $a \approx 10^{-12}$  см, то условие (3.6) выполняется, если энергия нейтрона меньше нескольких MeV. Вплоть до таких энергий можно, следовательно, пользоваться теорией возмущений.

Мы будем в дальнейшем, пользуясь теорией возмущений, записывать энергию взаимодействия нейтрона и протона в виде

$$\text{const. } \delta (r_n - r_p), \quad (3.7)$$

где  $r_n$  и  $r_p$  — радиусы-векторы, определяющие положение нейтрона и протона (const. не зависит от координат обеих частиц), а  $\delta$  — дельта-функция Дирака.

Написанное выражение означает, что координаты нейтрона и протона должны совпадать для того, чтобы эти частицы взаимодействовали; иными словами, радиус действия ядерных сил считается при этом равным нулю. Представление энергии взаимодействия в виде (3.7) является законным, так как радиус действий ядерных сил мал по сравнению с длиной волны.

Пользуясь энергией взаимодействия в виде (3.7), мы получим сферически симметричное рассеяние, как и должно быть в случае рассеяния медленных нейтронов.

Определим величину const. в формуле (3.7). Подставляя (3.7) вместо  $U$  в формулу (3.1), получим:

$$\text{const.} = -\frac{4\pi\hbar^2}{M} a. \quad (3.7')$$

Амплитуда рассеяния  $a$  может быть представлена в виде

$$a = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta} - 1),$$

где  $\delta$  — фаза на бесконечности для  $S$ -волны, определяемая согласно формуле (1.4'). Из формулы (1.4') видно, что для медленных нейтронов, когда  $k \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$ , если  $\alpha < 0$ , причём  $\delta > 0$  и  $\delta \rightarrow \pi$ , если  $\alpha > 0$ , причём  $\delta < \pi$ . Отсюда следует, что при  $\alpha < 0$

$$a \approx \frac{\delta}{k} > 0,$$

а при  $\alpha > 0$

$$a \approx \frac{\delta - \pi}{k} < 0.$$

Полагая в формуле (1.6'') для сечения рассеяния медленных нейтронов протонами  $k \rightarrow 0$ , мы получаем

$$a = \mp \frac{1}{2} \sqrt{1 + \alpha r_0}, \quad (3.8)$$

где знак — или + следует брать в зависимости от того, больше или меньше нуля величина  $\alpha$ .

Величины  $a$  и  $\alpha$  мы снабжаем в дальнейшем индексом 0 или 1, в зависимости от того, является ли состояние системы нейтрон + протон синглетным или триплетным.

Итак, мы видим, что при рассмотрении различных процессов рассеяния медленных нейтронов можно пользоваться теорией возмущений, считая энергию взаимодействия нейтрона и протона равной

$$-\frac{4\pi\hbar^2}{M} a \delta (r_n - r_p). \quad (3.9)$$

Введём в рассмотрение оператор  $Q$ , собственное значение которого равно +1 в триплетном состоянии и -1 в синглетном состоянии. Такой оператор можно представить в виде \*)

$$Q = \frac{1}{2} (1 + \sigma_n \sigma_p), \quad (3.10)$$

где  $\sigma_n$  и  $\sigma_p$  — матрицы Паули, определяющие спин нейтрона и протона.

\*) В этом можно убедиться следующим образом. Пользуясь соотношением (2.6)

$$(\sigma_n \sigma_p)^2 = 3 - 2\sigma_n \sigma_p,$$

получаем:

$$Q^2 = \frac{1}{4} \{1 + 2\sigma_n \sigma_p + (\sigma_n \sigma_p)^2\} = 1.$$

Таким образом собственные значения  $Q$  равны  $\pm 1$ .

Легко видеть, что триплетному состоянию отвечает собственное значение, равное +1, а синглетному -1. Действительно, среднее арифметическое собственных значений  $\sigma_n \sigma_p$  равно нулю, поэтому среднее арифметическое собственных значений  $Q$  равно  $\frac{1}{2}$ .

Так как существуют три волновые функции переменных  $\sigma_{n2}$ ,  $\sigma_{p2}$ , относящиеся к триплетному, и только одна, относящаяся к синглетному состоянию, то сопоставление собственных значений  $Q$  должно быть именно таким, как сказано выше.



Пользуясь оператором  $Q$ , перепишем оператор энергии взаимодействия между нейтроном и протоном в виде

$$V = -\frac{4\pi\hbar^2}{M} \left( a_1 \frac{1+Q}{2} + a_0 \frac{1-Q}{2} \right) \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p) = \\ = -\frac{\pi\hbar^2}{M} [3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n \sigma_p] \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p). \quad (3.11)$$

Оператор энергии взаимодействия нейтрона с молекулой водорода может быть представлен в виде

$$U = -\frac{\pi\hbar^2}{M} [3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n \sigma_1] \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_1) - \\ -\frac{\pi\hbar^2}{M} [3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n \sigma_2] \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_2), \quad (3.12')$$

где индексы 1 и 2 относятся к обоим протонам.

Удобно выделить в этом выражении симметричную и антисимметричную части по отношению к спинам протонов; именно, мы представим  $U$  в виде

$$U = -\frac{\pi\hbar^2}{M} [3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S] [\delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_1) + \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_2)] - \\ -\frac{\pi\hbar^2}{2M} (a_1 - a_0) \sigma_n (\sigma_1 - \sigma_2) [\delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_1) - \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_2)], \quad (3.12)$$

где матрица

$$S = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

представляет собой полный спин молекулы.

Ясно, что симметричная часть оператора  $U$  ответственна за такие переходы, при которых спиновая симметрия молекулы не изменяется, иными словами, эта часть оператора обуславливает переходы ортоводорода в ортоводород и параводорода в параводород.

Антисимметричная часть вызывает переходы ортоводорода в параводород и обратно.

Рассмотрим столкновение нейтрона, импульс которого равен  $\mathbf{p}_0$ , с молекулой водорода, обладающей импульсом  $-\mathbf{p}_0$  и характеризующейся квантовыми числами  $\nu$  (вибрационное число),  $J$  (ротационное число) и  $S$  (результатирующий спин)\*.

\*) В основу положена система координат, в которой центр инерции нейтрона и молекулы покоится.

Определим вероятность того, что нейтрон в результате столкновения приобретёт импульс  $\mathbf{p}$ , а молекула перейдёт в состояние, характеризующееся квантовыми числами  $-\mathbf{p}$ ,  $\nu'$ ,  $J'$ ,  $S'$ .

Волновая функция начального состояния нейтрона и молекулы имеет вид

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{p}_0 \mathbf{r}_n} \chi_m \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}} \Phi_{\nu, J, m_J}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \chi_{S, m_S}, \quad (3.13)$$

где  $\Omega^{-1/2} e^{i\mathbf{p}_0 \mathbf{r}_n}$  — волновая функция нейтрона с импульсом  $\mathbf{p}_0$ , нормированная на объём  $\Omega$ ;  $\chi_m$  — спиновая функция нейтрона ( $m$  — проекция спина нейтрона на ось  $z$ );

$\Omega^{-1/2} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}}$  — волновая функция, описывающая движение центра тяжести молекулы, импульс которой равен  $-\mathbf{p}_0$ ;  $\Phi_{\nu, J, m_J}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$  — волновая функция, описывающая относительное движение протонов в состоянии с вибрационным квантовым числом  $\nu$ , ротационным числом  $J$  и магнитным квантовым числом  $m_J$ ; наконец,  $\chi_{S, m_S}$  — спиновая функция протонов в состоянии с результирующим спином  $S$  (проекция спина на ось  $z$  равна  $m_S$ ).

Аналогичным образом волновая функция конечного состояния  $\psi_f$  может быть записана в виде

$$\psi_f = \Omega^{-1/2} e^{i\mathbf{p} \mathbf{r}_n} \chi_{m'} \Omega^{-1/2} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}} \Phi_{\nu', J', m_{J'}}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \chi_{S', m_{S'}}.$$

Вероятность перехода, отнесённая к единице времени, определяется по известной формуле

$$\frac{2\pi}{\hbar} |(\psi_f, U \psi_i)|^2 \rho_E, \quad (3.14)$$

где  $\rho_E$  — число конечных состояний в единичном интервале энергии. Энергия в конечном состоянии равняется:

$$E = \frac{3}{4M} p^2 + E_{J', \nu'},$$

где  $E_{J, \nu}$  — внутренняя энергия молекулы в состоянии с квантовыми числами  $J$ ,  $\nu$ . Согласно закону сохране-

ния энергии,

$$E = \frac{3}{4M} p^2 + E_{J',v'} = \frac{3}{4M} p_0^2 + E_{J,v}. \quad (3.15)$$

Плотность конечных состояний равна:

$$\rho_E = \frac{\Omega p^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{dp}{dE} d\Omega = \Omega \frac{Mp}{12\pi^3\hbar^3} d\Omega$$

( $d\Omega$  — элемент телесного угла вектора  $p$ ).

Выражение (3.14) следует ещё просуммировать по всем значениям  $m'$ ,  $m_{J'}$ ,  $m_{S'}$  и усреднить по значениям  $m$ ,  $m_J$ ,  $m_S$ .

Разделив полученное таким образом выражение для вероятности на поток нейтронов (относительно молекулы водорода), равный  $\frac{3}{2} \frac{p_0}{M\Omega}$ , мы найдём дифференциальное сечение рассеяния нейтрона  $d\sigma_{JvS; J'v'S'}$  в телесном угле  $d\Omega$ , сопровождающегося переходом молекулы из состояния  $J, v, S$  в состояние  $J', v', S'$ :

$$d\sigma_{J'v'S'; JvS} = \frac{4}{9} \frac{p}{p_0} \frac{1}{2(2S+1)(2J+1)} \times \\ \times \sum_{m' m_{J'} m_{S'}} \sum_{m m_J m_S} \left| \langle \psi_f, \frac{M\Omega}{2\pi\hbar^2} U \psi_i \rangle \right|^2 d\Omega. \quad (3.16)$$

Рассмотрим сначала переходы, при которых спин молекулы не изменяется. Используя симметричную часть энергии взаимодействия, будем иметь в этом случае:

$$\left( \psi_f, \frac{M\Omega}{2\pi\hbar^2} U \psi_i \right) = \\ = -\frac{1}{2\Omega} (m' S m'_S | 3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S | m S m_S) \times \\ \times \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (p_0 - p) \left[ r_n - \frac{1}{2} (r_1 + r_2) \right] \right\} \times \\ \times \Phi_{v' J' m_{J'}}^*(r_1 - r_2) \Phi_{v J m_J}(r_1 - r_2) \times \\ \times [\delta(r_n - r_1) + \delta(r_n - r_2)] dr_n dr_1 dr_2 = \\ = -(m' S m'_S | 3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S | m S m_S) \times \\ \times \int \cos \frac{(p_0 - p)r}{2\hbar} \Phi_{v' J' m_{J'}}(r) \Phi_{v J m_J}(r) dr.$$

Поэтому

$$\sum_{m' m_{S'}, m m_S} \left| \langle \psi_f, \frac{M\Omega}{2\pi\hbar^2} U \psi_i \rangle \right|^2 = \\ = \left| \int \cos \frac{(p_0 - p)r}{2\hbar} \Phi_{v' J' m_{J'}}^*(r) \Phi_{v J m_J}(r) dr \right|^2 \times \\ \times \sum_{m' m_{S'}, m m_S} |(m' S m'_S | 3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S | m S m_S)|^2.$$

Замечая, что оператор  $3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S$  является диагональным по отношению к полному спину молекулы, мы представим второй множитель в последней формуле в виде

$$\sum_{m' m_{S'}, m m_S} |(m' S' m'_S | 3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S | m S m_S)|^2 = \\ = \sum_{m m_S} (m S m_S | [3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S]^2 | m S m_S)$$

(мы использовали матричный закон умножения).

Легко видеть, что

$$(\sigma_n S)^2 = S^2 - \sigma_n S.$$

Действительно,

$$(\sigma_n S)^2 = (\sigma_x S_x + \sigma_y S_y + \sigma_z S_z)^2 = \\ = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 + \sigma_x \sigma_y S_x S_y + \sigma_y \sigma_x S_y S_x + \dots$$

Замечая, что

$$\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z$$

и

$$S_x S_y - S_y S_x = iS_z,$$

мы и получим указанное соотношение.

Поэтому

$$[3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S]^2 = (3a_1 + a_0)^2 + (a_1 - a_0)^2 S^2 + \\ + 2(3a_1 + a_0)(a_1 - a_0) \sigma_n S - (a_1 - a_0)^2 \sigma_n S.$$

Так как сумма диагональных элементов матрицы мо-

мента равна нулю, то

$$\sum_{mm_S} (mm_S | (3a_1 + a_0 + (a_1 - a_0) \sigma_n S)^2 | mm_S) = \\ = 2(2S + 1) [(3a_1 + a_0)^2 + S(S + 1)(a_1 - a_0)^2].$$

Собирая наши формулы, мы получим окончательно:

$$d\sigma_{J',v',S'; JvS} = \frac{4}{9} \frac{p}{p_0} [(3a_1 + a_0)^2 + S(S + 1)(a_1 - a_0)^2] \times \\ \times \frac{1}{2J + 1} \sum_{mJm_J} \left| \int \cos \frac{(p_0 - p)r}{2\hbar} \Phi_{v'J'm_{J'}}^*(r) \Phi_{vJm_J}(r) dr \right|^2 do. \quad (3.17)$$

Заметим, что в этом выражении  $J$  и  $J'$  должны быть числами одинаковой чётности, так как функция  $\Phi$  удовлетворяет условию

$$\Phi_{vJm_J}(-r) = (-1)^J \Phi_{vJm_J}(r).$$

Изменение знака  $r$  соответствует обмену пространственных координат обоих протонов. Пространственная волновая функция должна при этом, согласно принципу Паули, оставаться неизменной в случае противоположно ориентированных спинов протонов, т. е. при  $S = 0$ , и должна менять знак в случае одинаково ориентированных спинов, т. е. при  $S = 1$ .

Иными словами, при  $S = 0$  (параводород) возможны только чётные значения  $J$ , а при  $S = 1$  (ортоводород) — только нечётные значения  $J$ . Эти соотношения могут быть записаны в виде условия

$$(-1)^J = (-1)^S. \quad (3.18)$$

Итак, орто- ортопереходы происходят между состояниями с нечётными значениями ротационного числа  $J$ ; пара-парапереходы происходят между состоянием с чётными значениями  $J$ .

Рассмотрим теперь переходы, при которых общий спин молекул изменяется, т. е. орто- пара- и пара- орто- переходы. Эти переходы вызываются антисимметричной частью энергии возмущения (3.12).

Вычисления, аналогичные проделанным выше, приводят к следующему выражению для сечения рассеяния с изменением общего спина молекулы:

$$d\sigma_{J',v',1-S; Jv,S} = \frac{4}{9} \frac{p}{p_0} (3 - 2S)(a_1 - a_0)^2 \frac{1}{2J + 1} \times \\ \times \sum_{mJ,m_J} \left| \int \sin \frac{(p_0 - p)r}{2\hbar} \Phi_{v'J'm_{J'}}^*(r) \Phi_{vJm_J}(r) dr \right|^2 do. \quad (3.19)$$

Заметим, что орто- пара- и пара- ортопереходы связаны с изменением чётности ротационного числа  $J$ .

Минимальная энергия, которой должен обладать нейтрон (в системе центра инерции) для того, чтобы перевести молекулу из состояния  $J, v$  в состояние  $J', v'$ , равняется, согласно (3.15),

$$\frac{p_0^2 - p^2}{2M} = \frac{2}{3} (E_{J',v'} - E_{Jv}). \quad (3.15')$$

В лабораторной системе начальный импульс нейтрона равен  $3/2 p_0$ , поэтому минимальная энергия равна:

$$\frac{3}{2} (E_{J',v'} - E_{Jv}).$$

Для малых значений чисел  $J, v$  энергия молекулы (выраженная в eV) может быть приближённо найдена по формуле [13]

$$E_{Jv} = 0,015 \frac{1}{2} J(J + 1) + 0,533 v.$$

Нейтрон должен обладать энергией в 0,045 eV для того, чтобы перевести молекулу из состояния с квантовыми числами  $v = 0, J = 1$  в состояние  $v' = 0, J' = 2$ . Для перехода из состояния  $v = 0, J = 0$  в состояние  $v = 0, J = 1$  требуется энергия 0,023 eV.

Рассмотрим тот случай, когда энергия нейтрона меньше 0,045 eV. В этом случае вибрационное число  $v$  не может изменяться; что же касается  $J$ , то возможны следующие переходы:  $0 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1$ .

Для определения вероятности этих переходов будем рассматривать молекулу  $H_2$  как твёрдый ротатор. В этом

приближении волновая функция молекулы может быть представлена в виде [18]

$$\Phi_{0,J,m_J}(r) = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi} \frac{(J-|m_J|)!}{(J+|m_J|)!}} \sin^{|m_J|} \vartheta \left(\frac{d}{d \cos \vartheta}\right)^{J+|m_J|} \times \\ \times \frac{(\cos^2 \vartheta - 1)^J}{2^J J!} e^{im_J \varphi} [\delta(r - r_e)]^{1/2} \frac{1}{r_e}, \quad (3.20)$$

где  $\vartheta$  и  $\varphi$  — полярный и азимутальный углы, определяющие положение вектора  $r$ , и  $r_e$  — расстояние между обоими протонами молекулы в состоянии равновесия ( $r_e \approx 0,75 \cdot 10^{-8}$  см).

Матричный элемент, определяющий упругое рассеяние ( $0 \rightarrow 0$ ), равен:

$$\int \cos \frac{p_0 - p}{2\hbar} |r \cos \vartheta| |\Phi_{0,0,0}(r)|^2 2\pi r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta = \\ = \frac{\sin \frac{p_0 - p}{2\hbar} |r_e|}{\frac{p_0 - p}{2\hbar} |r_e|} = \frac{\sin \left\{ \frac{p_0 r_e}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2} \right\}}{\frac{p_0 r_e}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2}}$$

( $\theta$  — угол рассеяния в системе центра инерции).

Дифференциальное сечение упругого рассеяния согласно (3.17) равно

$$d\sigma_{0,0,0;0,0,0} =$$

$$= \frac{4}{9} (3a_1 + a_0)^2 \left[ \frac{\sin \left\{ \frac{p_0 r_e}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2} \right\}}{\frac{p_0 r_e}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2}} \right]^2 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Интегральное сечение имеет вид

$$\sigma_{0,0,0;0,0,0} = \frac{32\pi}{9} (3a_1 + a_0)^2 \left(\frac{\hbar}{p_0 r_e}\right)^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \\ = \frac{16}{\pi} (3a_1 + a_0)^2 \left(\frac{\hbar}{p_0 r_e}\right)^2 \left\{ \ln \frac{2p_0 r_e}{\hbar} - Ci \frac{2p_0 r_e}{\hbar} + 0,5772 \right\}, \quad (3.21)$$

где

$$Ci x = - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt.$$

Аналогичным образом могут быть определены сечения для переходов  $0 \rightarrow 1$ ,  $1 \rightarrow 0$ ,  $1 \rightarrow 1$  ( $v=0$ ) [15]:

$$\sigma_{1,0,1;0,0,0} = 32\pi (a_1 - a_0)^2 \left(\frac{\hbar}{p_0 r_e}\right)^2 \times \\ \times \left[ \frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} Ci x \right] \Big|_{(p_0 - p) r_e / \hbar}^{(p_0 + p) r_e / \hbar}, \quad (3.22)$$

$$\left( p = \sqrt{p_0^2 - \frac{4M}{3} E_{1,0}} \right) \\ \sigma_{0,0,0;1,0,1} = \frac{32\pi}{3} (a_1 - a_0)^2 \left(\frac{\hbar}{p_0 r_e}\right)^2 \left[ \frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x - 1}{x^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} Ci x \right] \Big|_{(p - p_0) r_e / \hbar}^{(p + p_0) r_e / \hbar}, \quad (3.23)$$

$$\left( p = \sqrt{p_0^2 + \frac{4M}{3} E_{1,0}} \right), \\ \sigma_{1,0,1;1,0,1} = \frac{16\pi}{3} \left\{ (3a_1 + a_0)^2 + \right. \\ \left. + 2(a_1 - a_0)^2 \frac{1}{\xi^2} \left[ -\frac{3}{\xi^2} \left( \frac{\sin \xi}{\xi} - \cos \xi \right)^2 + \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \ln 2\xi - Ci 2\xi - 0,4228 \right] \right\} \quad (3.24)$$

$$\text{где } \xi = \frac{p_0 r_e}{\hbar}.$$

Вычисления приводят к следующим результатам.

Если энергия нейтрона равна  $20^\circ \text{ K}$ , то [19]

$$\sigma_{000;000} = 6,444 (3a_1 + a_0)^2, \\ \sigma_{101;101} = 6,450 [(3a_1 + a_0)^2 + 2(a_1 - a_0)^2], \\ \sigma_{000;101} = 1,753 (a_1 - a_0)^2.$$

Экспериментально могут быть найдены величины [20]

$$\sigma_{\text{пара}} = \sigma_{0,0,0;0,0,0}; \\ \sigma_{\text{орто}} = \sigma_{1,0,1;1,0,1} + \sigma_{0,0,0;1,0,1}.$$

При энергии нейтронов  $0,000867 \text{ eV}$

$$\sigma_{\text{пара}} \approx 5 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2, \quad \sigma_{\text{орто}} = 145 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2.$$

При энергии нейтронов  $\sim 0,0024 \text{ eV}$

$$\sigma_{\text{пара}} \approx 3,58 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2, \\ \sigma_{\text{орто}} \approx 116 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2.$$

Сечение упругого рассеяния в параводороде содержит комбинацию  $(3a_1 + a_0)^2$ , в  $\sigma_{орто}$  помимо этой величины входит ещё  $(a_1 - a_0)^2$ . Из опытов по рассеянию медленных нейтронов в пара- и ортоводороде можно, следовательно, определить величины  $|3a_1 + a_0|$  и  $|a_1 - a_0|$ , т. е. определить абсолютные значения  $a_0$  и  $a_1$  и  $\text{sgn} \frac{a_1}{a_0}$ .

Величины  $a_1$  и  $a_0$  оказываются противоположных знаков. Так как  $a_1 > 0$ , то согласно (3.8)  $a_1 < 0$ . Поэтому  $a_0 > 0$ , т. е.  $\alpha_0 < 0^*$ ). Амплитуды рассеяния равны [20]

$$\begin{aligned} a_1 &\approx -0,52 \cdot 10^{-12} \text{ см}, \\ a_0 &\approx 2,34 \cdot 10^{-12} \text{ см}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_0 < 0. \quad (3.25)$$

Так как  $\alpha_0 < 0$ , то это означает, что только триплетное состояние является связанным. Мы видим, что не существует состояний дейтрона с антипараллельными спинами нейтрона и протона.

Заметим, что сечение рассеяния нейтрона свободными протонами можно представить в виде

$$\sigma_0 = \pi (3a_1^2 + a_0^2) = \frac{\pi}{4} [(3a_1 + a_0)^2 + 3(a_1 - a_0)^2]. \quad (3.26)$$

\*) Приведём некоторые данные [15], показывающие, как влияет выбор знака  $a_0$  на величину сечений различных процессов рассеяния и возбуждения молекулы  $H_2$ . Считая  $r_0 \approx 2 \cdot 10^{-13}$  см, можно показать, что значение сечения упругого рассеяния нейтронов в параводороде при отрицательном  $a_0$  примерно в 244 раза меньше значения при  $a_0 > 0$ . Различие между обоими случаями столь велико, что изучение одного только упругого рассеяния в параводороде приводит к заключению, что  $\alpha_0 < 0$ .

Если  $\alpha_0 < 0$ , то сечение рассеяния обычных тепловых нейтронов (с энергией  $E \approx 0,037$  эВ) в параводороде будет примерно в 100 раз больше сечения рассеяния нейтронов, находящихся при температуре жидкого воздуха ( $E \approx 0,012$  эВ). При  $\alpha_0 > 0$  это отношение составляет только 3/4.

Если  $\alpha_0 < 0$ , то сечение рассеяния нейтронов в ортоводороде при температуре жидкого воздуха будет в 300 раз больше сечения рассеяния тех же нейтронов в параводороде. При  $\alpha_0 > 0$  это отношение составляет только 7/5.

Это соотношение показывает, что  $\sigma_0$ , так же как и  $\sigma_{пара}$  и  $\sigma_{орто}$ , выражается через величины  $3a_1 + a_0$  и  $a_1 - a_0$ ; иными словами,  $\sigma_0$  можно выразить через  $\sigma_{орто}$  и  $\sigma_{пара}$ . Согласно имеющимся данным [21],

$$\sigma_0 = (21 \pm 1) 10^{-24} \text{ см}^2.$$

Приведённые выше данные для  $\sigma_{орто}$  и  $\sigma_{пара}$  находятся в соответствии с этим значением  $\sigma_0$  [20].

Опыты по рассеянию медленных нейтронов в пара- и ортоводороде могут быть использованы для определения порядка величины радиуса действия ядерных сил  $r_0$ . Последний входит в выражения, связывающие  $a_1$  и  $a_0$  с  $\alpha_1$  и  $\alpha_0$  (см. (3.8)). Следует иметь в виду, что радиус действия сил в триплетном состоянии может отличаться от радиуса действия в синглетном состоянии.

Считая энергию связи дейтрона равной  $\epsilon \approx 2,19 \cdot 10^6$  эВ, мы найдём, согласно (2.2''),

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{M\epsilon}{\hbar^2}} \approx 2,29 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-1}, \quad \frac{a}{a_1} = 4,36 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

Зная из опытных данных величину  $a_1$ , можно по формуле (3.8) вычислить радиус действия ядерных сил в триплетном состоянии.

Заметим, что сечение рассеяния нейтронов в параводороде очень чувствительно к выбору величины  $r_0$ . На рис. 1 и 2 [19] приведена зависимость сечений  $\sigma_{пара}$  и  $\sigma_{орто}$  от  $r_0$  для трёх значений  $\sigma_0 = 20,5; 24; 21,5 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ . Энергия нейтронов равна  $20^\circ \text{ К}$ .

Сопоставление данных по рассеянию медленных нейтронов свободными протонами и в орто- и параводороде приводит к заключению, что в триплетном состоянии

$$r_0 \approx 1,5 - 1,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

Эта величина меньше обычно принимаемого значения  $r_0 \sim 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ , которое получается из опытов по рассеянию протонов протонами (см. § 6) и относится к антипараллельной ориентации спинов протонов.

Заметим, что дальнейшие данные о зависимости ядерных сил от спинов частиц могут дать опыты по рассеянию медленных нейтронов в орто- и парадейтерии. Мы не будем, однако, подробно рассматривать здесь этот вопрос\*).

§ 4. Рассеяние нейтронов связанными протонами. Формулы (1.6'), (1.7), определяющие рассеяние нейтро-

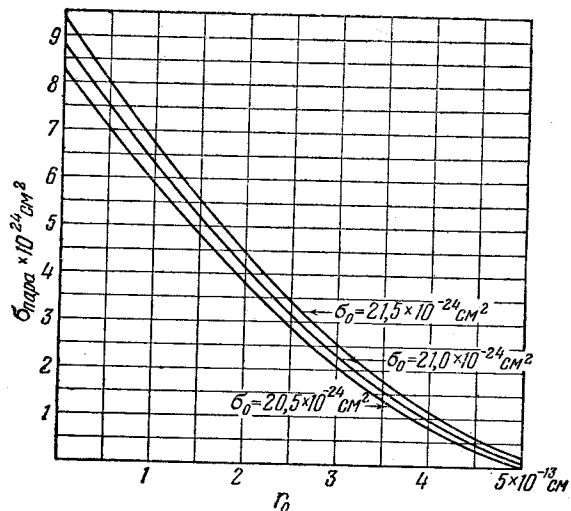


Рис. 1.

нов протонами, выведены в предположении, что протоны являются свободными. При рассмотрении рассеяния нейтронов в веществах, содержащих водород, например в парафине, этими формулами можно пользоваться только в тех случаях, когда энергия нейтрона значительно больше энергии связи протонов, т. е. больше некоторой предельной энергии  $\hbar\omega_0$ , где  $\omega_0$  по порядку величины определяет частоту колебаний протона в молекуле вещества. Для парафина эта энергия составляет около 0,4 eV [24]. При меньших энергиях нейтрона и энергиях такого же

\*) См. по этому вопросу работу [23].

порядка величины протоны нельзя уже считать свободными.

Легко получить общую формулу для сечения рассеяния нейтронов, учитывающую связь протона в молекуле [24]. Мы будем, так же как и в § 3, пользоваться теорией возмущений, считая энергию взаимодействия нейтрона и протона равной

$$-\frac{4\pi\hbar^2}{M}a\delta(r_n - r_p),$$

где  $r_n$  и  $r_p$  — радиусы-векторы, определяющие положения нейтрона и протона,  $M$  — масса нейтрона и  $a$  — кон-

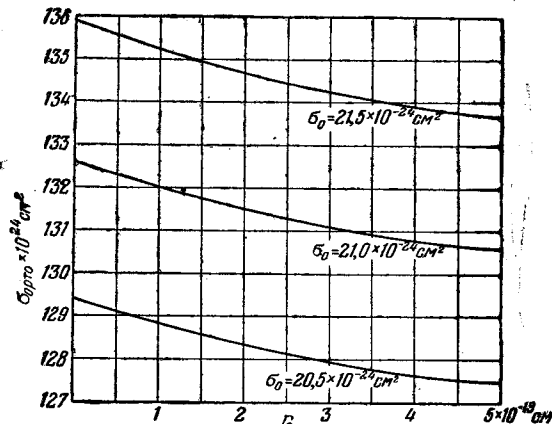


Рис. 2.

станта, связанная с сечением рассеяния нейтронов свободными протонами соотношением

$$\sigma_0 = 4\pi a^2. \quad (4.1)$$

Определим вероятность перехода нейтрона из состояния с импульсом  $p_0$  в состояние с импульсом  $p$ .

Волновые функции протона в начальном и конечном состояниях пусть будут  $\psi_0(r_p)$  и  $\psi_n(r_p)$ .

Матричный элемент перехода равняется:

$$M_{p,0}^{p,n} = -\frac{4\pi\hbar^2}{M} a \int \frac{1}{V_\Omega} e^{i p_0 r_n} \psi_0(r_n) \delta(r_n - r_p) \times \\ \times \frac{1}{V_\Omega} e^{-i p r_n} \psi_n^*(r_p) dr_n dr_p = \\ = -\frac{4\pi\hbar^2}{M\Omega} a \int e^{i(p_0-p)r_n} \psi_0(r_n) \psi_n^*(r_n) dr_n, \quad (4.2)$$

где  $\frac{1}{V_\Omega} e^{i p r_n}$  — волновая функция нейтрона с импульсом  $p$ , нормированная на объём  $\Omega$ .

Дифференциальное сечение рассеяния, при котором импульс нейтрона лежит в телесном угле  $d\Omega$ , определяется согласно формуле

$$d\sigma = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \frac{4\pi\hbar^2}{M} a \int e^{i(p_0-p)r_n} \psi_0(r_n) \psi_n^*(r_n) dr_n \right|^2 \frac{p^2 dp d\Omega}{(2\pi\hbar)^3 dE v_0} = \\ = 4a^2 \frac{v}{v_0} \left| \int e^{i(p_0-p)r_n} \psi_0(r_n) \psi_n^*(r_n) dr_n \right|^2 d\Omega \quad (4.3)$$

( $v_0$  — начальная скорость нейтрона и  $E$  — его конечная энергия).

В предельном случае очень малых энергий нейтрона возможно только упругое рассеяние, при котором состояние протона не изменяется, т. е.  $\psi_0 \equiv \psi_n$ . Замечая в этом случае экспоненциальный множитель единицей и замечая, что  $v = v_0$ , мы получим из (4.3):

$$d\sigma = 4a^2 d\Omega. \quad (4.4')$$

Полное сечение упругого рассеяния равняется:

$$\sigma = 16\pi a^2. \quad (4.4)$$

Оно в четыре раза превосходит сечение рассеяния нейтронов свободными протонами.

Рассмотрим теперь неупругое рассеяние нейтронов [24].

Мы будем рассматривать протон в молекуле вещества, содержащего водород, как гармонический осциллятор.

В случае молекулы парафина частоты колебаний протона вдоль линии, соединяющей атомы Н и С, и перпендикулярно к этой линии равны соответственно  $\nu_1 = 3000^{-1}$  см и  $\nu_2 = 800 - 900$  см $^{-1}$  [24].

В общем случае волновая функция протона представляет собой произведение трёх волновых функций линейного осциллятора

$$\psi_n(r_p) = \psi_{n_x}(\xi) \psi_{n_y}(\eta) \psi_{n_z}(\zeta),$$

где

$$\psi_m(\xi) = (2\pi)^{-1/4} (m!)^{-1/2} e^{-1/4\xi^2} H_m(\xi), \\ \xi = x \left( \frac{\hbar}{2M\omega_x} \right)^{-1/2}, \quad \eta = y \left( \frac{\hbar}{2M\omega_y} \right)^{-1/2}, \quad \zeta = z \left( \frac{\hbar}{2M\omega_z} \right)^{-1/2}.$$

Здесь  $x, y, z$  — координаты протона;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — частоты, отвечающие колебаниям вдоль осей  $x, y, z$ ,  $H_m(\xi)$  — функции Эрмита

$$H_m(\xi) = e^{1/2\xi^2} \left[ \frac{d^m}{d\xi^m} e^{-1/2(\xi-\alpha)^2} \right]_{\alpha=0},$$

$n_x, n_y, n_z$  — вибрационные квантовые числа осциллятора.

Матричный элемент, входящий в (4.2), можно представить в виде произведения трёх интегралов типа

$$A_x = (2\pi)^{-1/2} (n_x!)^{-1/2} \left( \frac{d^{n_x}}{d\alpha^{n_x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2(\xi-\alpha)^2 + i q_x \xi} d\xi \right)_{\alpha=0} = \\ = (i q_x)^{n_x} (n_x!)^{-1/2} e^{-1/2 q_x^2} \\ \left( q_x = \frac{(p-p_0)_x}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_x}} \right), \quad (4.5)$$

относящихся к координатам  $x, y, z$ .

Сечение рассеяния (4.3) на основании (4.5) приобретает вид

$$d\sigma = 4a^2 \frac{v}{v_0} \frac{q_x^{2n_x} q_y^{2n_y} q_z^{2n_z}}{n_x! n_y! n_z!} e^{-q^2} d\Omega, \quad (4.6)$$

где

$$q^2 = q_x^2 + q_y^2 + q_z^2.$$

Если частоты колебаний вдоль трёх направлений одинаковы и равны  $\omega$ , то

$$q^2 = \frac{(p-p_0)^2}{2M\hbar\omega} = (E + E_0 - 2\sqrt{EE_0} \cos \vartheta) / \hbar\omega$$

( $E_0$  — начальная энергия нейтрона,  $\vartheta$  — угол рассеяния).

В этом случае энергия осциллятора равна  $n\hbar\omega$ , где  $n = n_x + n_y + n_z$ . Суммируя (4.6) по всем значениям чисел  $n_x, n_y, n_z$ , сумма которых равна  $n$ , мы найдём сечение рассеяния нейтрона, сопровождающегося возбуждением  $n$ -го вибрационного состояния протона. Это сечение равно:

$$\begin{aligned} d\sigma_n &= \frac{4a^2}{n!} \sqrt{\frac{E}{E_0}} q^{2n} e^{-q^2} 2\pi \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{\sigma_0}{\varepsilon} \frac{q^{2n}}{n!} e^{-q^2} dq^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где

$$\sigma_0 = 4\pi a^2, \quad \varepsilon = E_0 / \hbar\omega, \quad \varepsilon - n = E / \hbar\omega.$$

Полное сечение возбуждения  $n$ -го состояния находится путём интегрирования (4.7) по  $q$  в пределах

$$q_{\min} = \varepsilon^{1/2} - (\varepsilon - n)^{1/2}, \quad q_{\max} = \varepsilon^{1/2} + (\varepsilon - n)^{1/2}. \quad (4.7')$$

Оно равно

$$\sigma_n = \frac{\sigma_0}{\varepsilon} \{f_n(q_{\min}^2) - f_n(q_{\max}^2)\}, \quad (4.8)$$

где

$$f_n(x) = e^{-x} \left( 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right).$$

Сечение упругого рассеяния, согласно (4.8), выражается формулой

$$\sigma_{n=0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon} (1 - e^{-4\varepsilon}); \quad (4.9)$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$  оно равно  $4\sigma_0$ , что совпадает с полученным выше результатом; при  $\varepsilon = 1$  оно равно  $0,98\sigma_0$ .

Для больших значений  $\varepsilon$  при любом  $n$ , не слишком близком к  $\varepsilon$ , второе слагаемое в (4.8) очень мало, а первое мало отличается от единицы. Поэтому

$$\sigma_n = \sigma_0 / \varepsilon \quad (\varepsilon \gg 1). \quad (4.10)$$

Так как максимальное значение  $n$ , согласно (4.7'), равно  $\varepsilon$ , то полное сечение при больших  $\varepsilon$  равно  $\sigma_0$ , причём одинаково вероятно любое значение потери энергии между нулём и начальной энергией нейтрона  $\varepsilon\hbar\omega$ .

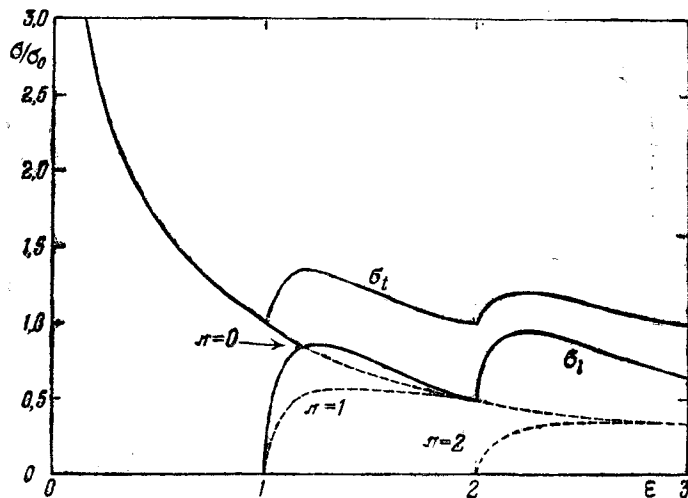


Рис. 3.

Этот результат вполне очевиден, так как при больших  $\varepsilon$  связь протона несущественна.

На рис. 3, заимствованном из обзора Бете [24], изображена зависимость сечений  $\sigma_{n=0}, \sigma_1, \sigma_2$ , а также полного сечения  $\sigma_t = \sum_n \sigma_n$  от энергии нейтрона. Здесь же приведён ход сечения для потери энергии. Это сечение определяется согласно формуле

$$\sigma_l = \frac{2}{\varepsilon} \sum_n n \sigma_n \quad (4.11)$$

(множитель  $2/\varepsilon$  введён для того, чтобы при больших энергиях  $\varepsilon$  сечение  $\sigma_l$  равнялось  $\sigma_0$ ).

Если частоты колебаний протона вдоль разных направлений неодинаковы, то формулы для сечений сильно



усложняются. Мы определим здесь только сечение упругого рассеяния нейтронов с учётом анизотропии связи протона в молекуле парафина.

Дифференциальное сечение упругого рассеяния можно, согласно (4.6), представить в виде

$$\begin{aligned} d\sigma &= 4a^2 2\pi \sin \vartheta d\vartheta \frac{1}{2} \sin \chi d\chi e^{-a_x^2 - a_y^2 - a_z^2} = \\ &= \sigma_0 e^{-2(1-\cos \vartheta)(\varepsilon_1 \cos^2 \chi + \varepsilon_2 \sin^2 \chi)} \sin \vartheta d\vartheta \sin \chi d\chi, \quad (4.12) \end{aligned}$$

где  $\vartheta$  — угол между векторами  $\rho_0$  и  $\rho$ ,  $\chi$  — угол между вектором  $\rho - \rho_0$  и направлением сильной связи, и

$$\varepsilon_1 = E_0 / \hbar \omega_1, \quad \varepsilon_2 = E_0 / \hbar \omega_2.$$

Пусть энергия нейтрона мала по сравнению с  $\hbar \omega_1$  и  $\hbar \omega_2$ . В этом случае можно разложить в ряд экспоненциальный множитель, входящий в (4.12).

В результате простых вычислений мы получим следующее выражение для сечения упругого рассеяния [24]:

$$\begin{aligned} \sigma &= 4\sigma_0 \left[ 1 - 2\varepsilon' + \frac{32}{15} \left( \varepsilon' \varepsilon_2 + \frac{1}{4} \varepsilon_1^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{64}{35} \left( \varepsilon' \varepsilon_2^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 + \frac{5}{24} \varepsilon_1^3 \right) + \dots \right], \quad (4.13) \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon' = \frac{1}{3} \varepsilon_1 + \frac{2}{3} \varepsilon_2.$$

В случае тепловых нейтронов, энергия которых равна  $kT = 180^\circ \text{K}$ , формула (4.13) приводит к результату

$$\sigma = 2,8\sigma_0$$

(мы считаем  $v_1 = 3000 \text{ см}^{-1}$ ,  $v_2 = 800 \text{ см}^{-1}$ ).

**§ 5. Замечания о рассеянии быстрых нейтронов протонами.** Рассматривая различные процессы рассеяния медленных нейтронов, мы не делали никаких специальных предположений о характере ядерных сил.

Рассеяние быстрых нейтронов протонами, когда длина волны нейтрона мала по сравнению с радиусом действия ядерных сил, в этом отношении сильно отличается от рассеяния медленных частиц.

Для определения сечения рассеяния быстрых нейтронов протонами необходима детальная теория взаимодействия нейтрона и протона.

Рассеяние быстрых частиц не будет сферически симметричным, причём характер асимметрии будет существенно зависеть от характера ядерных сил.

Заметная асимметрия в рассеянии нейтронов должна наблюдаться при энергиях нейтронов порядка нескольких десятков MeV.

Если бы между нейтроном и протоном действовали обычные силы, то в системе центра инерции большая часть нейтронов рассеивалась бы на малые углы. (Это значит, что в лабораторной системе протоны двигались бы, главным образом, под прямым углом к падающему пучку нейтронов.)

Иные соотношения должны иметь место в случае действия так называемых «обменных» сил. Под «обменными» силами понимают силы взаимодействия между нейтроном и протоном, обусловленные переходом некоторой третьей частицы от нейтрона к протону и обратно. С таким переходом связано превращение нейтрона в протон и протона в нейтрон. Нейтрон и протон рассматриваются при этом как два состояния единой ядерной частицы — нуклона.

Для формального описания обменных сил мы должны считать оператор энергии взаимодействия между нейтроном и протоном отличающимся следующим свойством: действуя на волновую функцию нейтрона и протона, этот оператор приводит к замене координат нейтрона координатами протона и обратно.

Покажем, что если действуют обменные силы, то быстрые нейтроны должны рассеиваться протонами, главным образом, назад. Такая картина будет иметь место в системе координат, связанной с центром инерции сталкивающихся нейтрона и протона. В лабораторной системе протоны будут двигаться главным образом в направлении первоначального пучка нейтронов.

Чтобы убедиться в этом, заметим, что при очень больших энергиях нейтрона (больших по сравнению с эффективной величиной потенциальной энергии взаимо-

действия нейтрона с протоном) для определения эффективного сечения рассеяния можно пользоваться приближением Борна [17], которое даёт следующее выражение для сечения рассеяния:

$$d\sigma = \frac{M^2}{8\pi\hbar^4} \left| \int \psi_f^*(\mathbf{r}) J(\mathbf{r}) \psi_i(-\mathbf{r}) d\tau \right|^2 \sin\theta d\theta.$$

Здесь  $\theta$  — угол рассеяния,  $\psi_i$  и  $\psi_f$  — волновые функции нейтрона в начальном и конечном состояниях,  $J(\mathbf{r})$  — пространственная часть оператора энергии взаимодействия частиц,  $M$  — масса нейтрона.

Под знаком интеграла стоит  $\psi_i(-\mathbf{r})$ , а не  $\psi_i(\mathbf{r})$ , ввиду обменного характера сил.

В качестве волновых функций сюда следует подставить плоские волны

$$\psi_i = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \psi_f = e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}'},$$

где  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  — волновые векторы падающего и рассеянного нейтронов. Итак,

$$d\sigma = \frac{M^2}{8\pi\hbar^4} \left| \int J(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}} d\tau \right|^2 \sin\theta d\theta. \quad (5.4)$$

При больших энергиях множитель  $e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}}$  сильно осциллирует, и поэтому интеграл, входящий в (5.4), очень мал, если только  $\mathbf{k}+\mathbf{k}'$  не близко к нулю.

Таким образом главную роль играют такие углы рассеяния, для которых  $\mathbf{k}+\mathbf{k}'$  близко к нулю, т. е. углы порядка  $\pi$ . Иными словами, рассеянные нейтроны двигаются, главным образом, назад, как и утверждалось выше.

Мы могли бы описать это рассеяние, сказав, что падающая частица отклоняется на небольшой угол, но в процессе рассеяния меняется природа частиц, так что нейтрон становится протоном, а протон — нейтроном.

Таким образом, наблюдая асимметрию в рассеянии быстрых нейтронов, можно выяснить характер ядерных сил, т. е. определить, являются ли они обычными или обменными.

Имеющиеся в настоящее время данные по рассеянию нейтронов с энергией  $\sim 100$  MeV приводят к заключению, что ядерные силы по крайней мере частично имеют обменный характер [28].

**§ 6. Рассеяние протонов протонами.** Эффективный поперечник рассеяния, обусловленного кулоновскими силами отталкивания, определяется, как известно, формулой Рёзерфорда.

В случае рассеяния протонов протонами эта формула с учётом эффекта обмена протонов имеет следующий вид [28]:

$$\begin{aligned} 2\pi\sigma_0(\theta) \sin\theta d\theta &= \\ &= \frac{e^4}{M^2v^4} \left[ \frac{1}{\sin^4\theta} + \frac{1}{\cos^4\theta} - \frac{\cos\left(\frac{e^2}{\hbar v} \ln \operatorname{tg}^2\theta\right)}{\sin^2\theta \cos^2\theta} \right] 2\pi \sin 2\theta d(2\theta), \end{aligned} \quad (6.1)$$

где  $\theta$  — угол рассеяния в лабораторной системе координат ( $2\theta$  — угол рассеяния в системе координат, связанной с центром инерции сталкивающихся протонов).

В формуле (6.1) первый член даёт число протонов, рассеянных на угол  $\theta$  (в лабораторной системе) в соответствии с обычной формулой Рёзерфорда.

Второй член даёт число протонов отдачи, движущихся под углом  $\theta$  к первоначальному пучку также в соответствии с обычной формулой Рёзерфорда. Число этих протонов равняется, очевидно, числу падающих протонов, рассеянных на угол  $\frac{\pi}{2} - \theta$ , так как при столкновении двух частиц одинаковой массы они разлетаются под углом, равным  $\frac{\pi}{2}$ .

Наконец, последний член учитывает квантовомеханический эффект обмена сталкивающихся протонов.

Опыты по рассеянию быстрых протонов протонами [27], [28], [29], [30] (в первую очередь опыты Тюва, Хавстеда и Хейденбурга [28]) показали, что формула Рёзерфорда неправильно описывает рассеяние быстрых протонов протонами.

Расхождение между экспериментальными данными и формулой (6.1) весьма велико. Наблюдаемое на опыте число протонов, рассеянных под углом в  $45^\circ$  при энергии протонов порядка 1 MeV, в несколько раз превосходит число, даваемое формулой (6.1).

Отсюда следует, что между протонами, кроме кулоновских, действуют ещё дополнительные, специфически ядерные силы.

Считая, что эти силы, так же как и в случае взаимодействия нейтрона и протона, характеризуются очень малым радиусом действия, мы можем заключить, что в случае протонов не очень больших энергий особенно сильно будет возмущена действием ядерных сил  $S$ -волна в разложении волновой функции сталкивающихся протонов в ряд по функциям, соответствующим различным значениям орбитального момента  $l$  [31], [32].

Это разложение волновой функции имеет, как известно, следующий вид:

$$\psi = \sum_l u_l(r) P_l(\cos \theta), \quad (6.2)$$

где  $u_l(r)$  — радиальная функция, отвечающая относительному моменту количества движения протонов, равному  $l$ ,  $P_l(\cos \theta)$  — полином Лежандра.

Так как протоны подчиняются статистике Ферми-Дирака, то пространственная  $\psi$ -функция (6.2) должна быть антисимметричной или симметричной в зависимости от того, параллельны или антипараллельны спины протонов. В первом случае в сумму (6.2) входят только нечётные, а во втором только чётные значения момента.

Отсюда следует, что ядерные силы, возмущающие  $S$ -волну, будут сказываться на рассеянии протонов протонами только при антипараллельной ориентации спинов протонов, т. е. в  $1/4$  всех случаев столкновений.

Определим асимптотический вид  $S$ -волны с учётом действия ядерных сил\*).

Напомним предварительно, что асимптотическое поведение волновой функции частицы в кулоновском поле имеет вид

$$\psi = e^{ikz + i\alpha \ln k(r-z)} + \frac{e^2}{r M v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{ikr - i\alpha \ln 2kr - i\alpha \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} + i\pi + 2i\eta_0}, \quad (6.3)$$

\* Мы следуем ниже изложению Бете [31].

где

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar v}, \quad k = \frac{Mv}{2\hbar}, \quad e^{i\eta_0} = \frac{\Gamma(1+i\alpha)}{|\Gamma(1+i\alpha)|},$$

$r$  — расстояние между протонами,  $z$  — разность их  $z$ -координат (ось  $z$  совпадает с направлением скорости падающих протонов),  $\theta$  — угол рассеяния в системе, связанной с центром инерции (он равен  $2\theta$ , см. (6.1)).

Первое слагаемое в (6.3) представляет собой падающую волну, возмущённую кулоновским полем, второе — рассеянную волну.

Согласно сказанному выше, нас интересует симметричная волновая функция

$$\Psi(x, y, z) = \psi(x, y, z) + \psi(-x, -y, -z). \quad (6.4)$$

Для получения асимптотического вида последней следует добавить к выражению (6.3) функцию, получающуюся в результате замены в (6.3)  $z$  на  $-z$  и  $\cos \theta$  на  $-\cos \theta$  (при этом  $\sin^2 \frac{\theta}{2}$  заменяется на  $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ ).

$S$ -волна в симметричной волновой функции двух протонов, взаимодействующих по закону Кулона, имеет следующий вид [18]:

$$u_0 = 2e^{i\eta_0} \sin(kr + \eta_0 - \alpha \ln 2kr) / kr \quad (6.5)$$

[множитель 2 возникает из-за двух слагаемых в (6.4)].

Если, кроме кулоновских, действуют ещё специфические ядерные силы, то вместо (6.5) мы будем иметь функцию

$$u = 2Ce^{i\eta_0} \sin(kr + \eta_0 + \delta_0 - \alpha \ln 2kr) / kr, \quad (6.6)$$

где  $\delta_0$  — дополнительное смещение фазы, вызываемое ядерными силами, а  $C$  — константа, которая может быть определена следующим образом.

Наша задача состоит в нахождении рассеянной волны с учётом действия ядерных сил. Для этого достаточно, очевидно, вычесть из выражения (6.3), предварительно симметризованного, функцию  $u_0$  и прибавить функцию  $u$ . Таким путём мы заменим в формуле (6.3)  $S$ -волну в чисто кулоновском поле  $S$ -волной, возмущённой

действием ядерных сил; волны же, отвечающие значениям момента  $l$ , отличным от нуля, при этом, как и должно быть, остаются неизменными. Разность  $u - u_0$  не может, очевидно, содержать сходящейся волны, т. е. члена  $e^{-ikr}$ . Чтобы удовлетворить этому требованию, мы должны выбрать константу  $C$  равной  $e^{i\delta_0}$ .

Итак,

$$u = \frac{1}{kr} \{ e^{-i(kr - \alpha \ln 2kr)} + e^{i(kr + \pi + 2\eta_0 + 2\delta_0 - \alpha \ln 2kr)} \}.$$

Возмущённая действием ядерных сил симметричная волновая функция протонов имеет следующий асимптотический вид:

$$\begin{aligned} \Psi' = & e^{ikz + i\alpha \ln k(r-z)} + e^{-ikz - i\alpha \ln k(r-z)} + \\ & + \frac{1}{r} e^{ikr - i\alpha \ln 2kr + 2i\eta_0 + i\pi} \left\{ \frac{e^2}{Mv^2} \left( e^{-\frac{i\alpha \ln \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{e^{-i\alpha \ln \cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \right) + \frac{i}{k} (e^{2i\delta_0} - 1) \right\}. \quad (6.7) \end{aligned}$$

Квадрат модуля фигурной скобки представляет собой, как известно, эффективный поперечник рассеяния, отнесенный к единице телесного угла в системе, связанной с центром инерции протонов. Он равен, следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) = & \left( \frac{e^2}{Mv^2} \right)^2 \left| e^{-\frac{i\alpha \ln \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}} + e^{-\frac{i\alpha \ln \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}} + \right. \\ & \left. + i \frac{2\hbar v}{e^2} (e^{2i\delta_0} - 1) \right|^2. \quad (6.8) \end{aligned}$$

Полагая здесь  $\delta_0 = 0$ , мы получим поперечник рассеяния в том случае, если действуют только кулоновские силы, причём протоны имеют антипараллельные спины (если спины протонов параллельны, то второе слагаемое будет входить со знаком минус; выражение (6.1)

представляет собой среднее взвешенное сечение, когда параллельной ориентации спинов приписывается вес  $3/4$  и антипараллельной — вес  $1/4$ .

Пренебрегая членом  $\alpha \ln \sin^2 \frac{\theta}{2}$ , так как  $\alpha \ll 1$ , мы получим из (6.8):

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) - \sigma(\theta)_{\delta_0=0} = & \left( \frac{e^2}{Mv^2} \right)^2 \left[ \left( \frac{4\hbar v}{e^2} \right)^2 \sin^2 \delta_0 - \right. \\ & \left. - \frac{8\hbar v}{e^2} \sin \delta_0 \cos \delta_0 \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \right]^2, \quad (6.8') \\ & \left( \theta = \frac{1}{2} \vartheta \right). \end{aligned}$$

Для получения дифференциального поперечника рассеяния с учётом действия ядерных сил нужно выражение (6.8'), умноженное на  $\frac{1}{4} 2\pi \sin 2\theta d(2\theta)$  (множитель  $1/4$  представляет собой вес состояния с антипараллельными спинами), прибавить к (6.1).

Мы получим, таким образом, следующую формулу для эффективного сечения рассеяния протонов в интервале углов  $\theta, \theta + d\theta$  с учётом действия ядерных сил:

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta = & \frac{e^4}{E^2} \cos \theta \left[ \frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} - \right. \\ & \left. - \frac{2\hbar v \sin \delta_0 \cos \delta_0}{e^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} + \left( \frac{2\hbar v}{e^2} \right)^2 \sin^2 \delta_0 \right] 2\pi \sin \theta d\theta \quad (6.9) \end{aligned}$$

( $E$  — энергия протонов). Здесь предполагается, что  $(e^2/\hbar v) \ln \sin^2 \theta \ll 1$ .

Приведём отношение сечений  $\sigma(45^\circ)/\sigma_0(45^\circ)$ :

$$\frac{\sigma(45^\circ)}{\sigma_0(45^\circ)} = \left( \frac{2\hbar v}{e^2} \sin \delta_0 \right)^2 - \frac{2\hbar v}{e^2} \sin \delta_0 \cos \delta_0 + 1. \quad (6.9')$$

Заметим, что даже при малой величине угла  $\delta_0$  это отношение может быть большим из-за фактора  $\left( \frac{2\hbar v}{e^2} \right)^2$ , который равен 160 для протонов с энергией 1 MeV.

Согласно опытам Тюва и др.<sup>[28]</sup>, отношение  $\frac{\sigma(45^\circ)}{\sigma_0(45^\circ)}$  при энергии протонов  $\sim 900$  keV равно примерно 5. При энергии 700 keV оно составляет 3 и при энергии 600 keV равно примерно 1,4<sup>[32]</sup>. При энергии  $\sim 2400$  keV  $\sigma(45^\circ)/\sigma_0(45^\circ) \approx 42,9$ <sup>[29]</sup>.

Экспериментально найденное угловое распределение рассеянных протонов очень хорошо описывается формулой вида (6.9), если только надлежащим образом выбрать

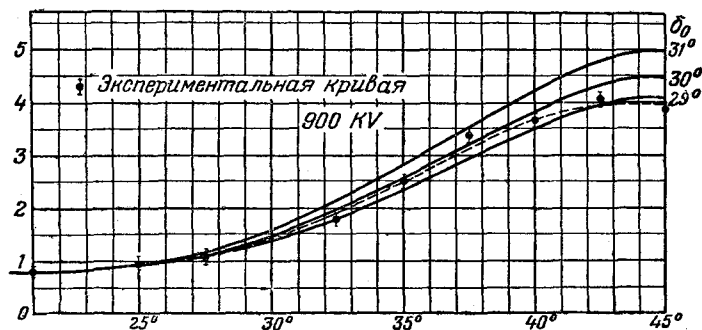


Рис. 4.

в ней фазу  $\delta_0$ . Последняя зависит от энергии протонов и должна быть взята равной  $\delta_0 \approx 30^\circ$  при энергии протонов  $\sim 900$ <sup>[32]</sup>.

При этом получается удовлетворительное согласие между экспериментальными данными и формулой (6.9) (см. рис. 4<sup>[32]</sup>), на котором изображено экспериментально наблюдаемое угловое распределение рассеянных протонов и распределение, вычисленное по формуле (6.9) для различных значений фазы  $\delta_0$ ). При энергии  $\sim 600$  keV фаза должна быть взята равной  $\delta_0 \approx 21^\circ$ <sup>[32]</sup>. При энергии протонов в 10 MeV фаза  $\delta_0$  равна  $52^\circ 30'$ <sup>[33]</sup>. В этой области энергий следует учитывать действие ядерных сил не только на  $S$ -волну, что мы делали выше, но и на волны, отвечающие значениям орбитального момента  $l$ , отличным от нуля; в первую очередь нужно учесть влияние ядерных сил на  $P$ -волну (точнее,  $^3P$ -волну). Из экспериментальных данных<sup>[30]</sup> по рассея-

нию протонов с энергией в 10 MeV следует, что смещенные фазы  $^3P$ -волны равно  $\delta_1 = -0,8^\circ$ . Остальные волны можно считать невозмущенными действием ядерных сил<sup>[33]</sup>.

Зная знак фазы  $\delta$ , можно сделать выводы о характере действующих сил. Именно, положительный знак фазы соответствует притяжению, а отрицательный — отталкиванию. В этом можно убедиться из формулы<sup>[34]</sup>\*

$$\delta_n \approx -\frac{\pi M}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r) [J_{n+\frac{1}{2}}(kr)]^2 r dr,$$

справедливой при малых  $\delta_n$ . (Здесь  $V(r)$  — потенциальная энергия,  $J_{n+\frac{1}{2}}$  — функция Бесселя.)

Таким образом опыты по рассеянию протонов протонами доказывают, что между протонами, кроме обычной силы электростатического отталкивания, на малых расстояниях действуют ещё специфические ядерные силы. В состоянии  $^1S$  (спины протонов антипараллельны) протоны притягиваются, в состоянии  $^3P$  (спины параллельны) по всей вероятности отталкиваются.

Так как в лёгких ядрах, когда роль кулоновских сил отталкивания незначительна, число протонов равняется примерно числу нейтронов, то следует считать, что между парой нейтронов также действуют ядерные силы, причём по порядку величины они не отличаются от ядерных сил, действующих между парой протонов.

Заметим, что чередование характера сил (притяжение и отталкивание) при переходе от чётных к нечётным значениям момента  $l$  является характерной особенностью обменных сил<sup>[35]</sup>. Поэтому опыты по рассеянию протонов с энергией в 10 MeV, из которых следует, что  $\delta_0 > 0$  и  $\delta_1 < 0$ , следует рассматривать как указание на то, что ядерные силы по крайней мере частично имеют обменный характер<sup>[33]</sup> (см. § 5).

Если характеризовать взаимодействие двух протонов на малых расстояниях прямоугольной потенциальной

\* См. также замечание в конце этого параграфа.

ямой, то удовлетворительное согласие с экспериментальными данными получится, если считать глубину ямы порядка  $11,5 \text{ MeV}$  и ширину  $r_0$  порядка  $2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$  [32].

Для такой ямы можно ввести величину

$$\gamma = - \left( \frac{1}{u} \frac{du}{dr} \right)_{r=r_0}$$

( $u/r$  — волновая функция двух протонов, отвечающая значению  $l=0$ ), аналогичную введённой ранее величине  $\alpha$ .

Соотношение, аналогичное (1.4'), имеет в случае двух протонов следующий вид:

$$k \operatorname{ctg}(kr_0 + \delta_0) = -\gamma. \quad (6.10')$$

Величина  $\gamma$  оказывается отрицательной, что указывает на невозможность связанного состояния для двух протонов.

Определим ещё величину энергии, аналогичную  $\epsilon'$  [см. (1.7)]:

$$\epsilon'' = \frac{\hbar^2 \gamma^2}{M}.$$

Она оказывается порядка  $100 \text{ keV}$ , то-есть того же порядка, что и величина  $\epsilon'$ . Отсюда можно заключить, что силы между нейтроном и протоном и между двумя протонами в синглетном состоянии имеют одинаковый порядок величины.

Малость  $\epsilon''$  в ядерном масштабе энергий означает, что система протон — протон в синглетном состоянии близка к резонансу (аналогично системе нейтрон — протон в синглетном состоянии). При этом под близостью к резонансу мы понимаем следующее. Если бы существовало связанное состояние у двух протонов, то величина  $\gamma$  была бы положительной. На самом деле  $\gamma$  отрицательна, но очень мала. В ядерном масштабе  $\gamma$ , так же как и  $\alpha_0$ , почти равна нулю, т. е. примыкает к области тех значений  $\gamma$ , которым соответствовал бы связанный уровень. Поэтому уже малое изменение параметров системы привело бы к появлению связанного уровня, близкого к нулю. Такое свойство системы мы и называем резонансом.

§ 7. Захват нейтронов протонами. Нейтрон может быть захвачен протоном с испусканием  $\gamma$ -кванта, уносящего избыток энергии.

В системе координат, связанной с центром инерции нейтрона и протона, энергия  $\gamma$ -кванта равняется

$$\hbar\omega = E + \epsilon, \quad (7.1)$$

где  $E$  — кинетическая энергия частиц,  $\epsilon$  — энергия связи дейтрона (энергия нейтрона в лабораторной системе, где до столкновения протон покоился, равна  $E_0 = 2E$ ).

Радиационный захват нейтрона можно рассматривать как переход системы нейтрон + протон из состояния, относящегося к непрерывному спектру, в состояние с дискретной энергией. Мы определим вероятность такого перехода.

Заметим предварительно, что длина волны  $\gamma$ -излучения, испускаемого при захвате нейтрона, всегда (точнее говоря, вплоть до энергии нейтрона  $\sim 100 \text{ MeV}$ ) значительно больше, чем радиус действия ядерных сил; иными словами, эффективные размеры излучающей системы значительно меньше длины волны  $\gamma$ -кванта. Обычно в таких условиях излучение имеет характер электрического дипольного излучения.

При захвате медленных нейтронов, который мы далее будем рассматривать, электрическое дипольное излучение не играет, однако, главной роли, и поэтому оказывается необходимым учитывать магнитное дипольное и электрическое квадрупольное излучение.

В справедливости этого утверждения можно убедиться из следующих соображений. Основным состоянием дейтрона, т. е. конечным состоянием системы нейтрон + протон, является состояние  ${}^3S_1 + {}^3D_1$  («примесь» состояния  ${}^3D_1$  очень невелика, порядка 4%, см. § 2). Для того чтобы перейти в состояние  ${}^3S_1$  с излучением электрического дипольного  $\gamma$ -кванта, нейтрон должен находиться в состоянии  ${}^3P_1$ , иными словами, момент количества движения нейтрона относительно протона должен равняться  $l=1$ . С другой стороны, известно, что эффективный параметр столкновения равен  $l\lambda$ , где  $\lambda$  —

длина волны нейтрона. Поэтому при  $l = 1$  нейтрон проходит на расстоянии порядка  $\lambda$  от протона. Для медленных нейтронов  $\lambda \gg r_0$  ( $r_0$  — радиус действия ядерных сил). Это значит, что нейтрон с моментом  $l = 1$  проходит настолько далеко от протона, что вероятность его захвата будет крайне малой.

Изложенные соображения не относятся к переходу системы нейтрон — протон из синглетного состояния  $^1S_0$  в триплетное состояние  $^3S_1$ , сопровождающемуся излучением магнитного дипольного  $\gamma$ -кванта. Нейтроны с моментом  $l = 0$  ( $S$ -нейтроны), которые испытывают лобовое столкновение с протонами, могут поглощаться последними, причём излишек энергии будет излучаться в виде магнитного дипольного  $\gamma$ -кванта.

Если считать основным состоянием дейтрона  $^3S_1$ -состояние, то сталкивающиеся нейтрон и протон должны обладать противоположно направленными спинами, т. е. должны относиться к синглетному состоянию  $^1S_0$ .

Благодаря тому, что в действительности к  $^3S_1$ -состоянию «примешано» в небольшом количестве  $^3D_1$ -состояние, возможны также переходы между триплетными состояниями, однако вероятность перехода из триплетного состояния гораздо меньше вероятности перехода  $^1S_0 \rightarrow ^3S_1$ .

Переход из триплетного состояния, относящегося к непрерывному спектру, в основное состояние дейтрона может происходить также с излучением квадрупольного кванта, так как при квадрупольном излучении допускаются переходы

$$^3S_1 \rightarrow ^3D_1, \quad ^3D_1 \rightarrow ^3S_1, \quad ^3D_1 \rightarrow ^3D_1.$$

Вероятность этих переходов однако мала по сравнению с вероятностью перехода  $^1S_0 \rightarrow ^3S_1$ , так что основную роль при захвате медленных нейтронов играют переходы из синглетного состояния  $^1S_0$  в триплетное состояние  $^3S_1$ , сопровождающиеся магнитным дипольным излучением [37].

Переходя к определению вероятности радиационного захвата нейтрона протоном, приведём сперва общие фор-

мулы для определения вероятностей излучения различных типов.

Вероятность радиационного перехода системы из состояния  $i$  в состояние  $f$ , при котором в телесном угле  $d\omega$  излучается квант  $\hbar\omega$ , определяется следующей формулой [38]:

$$w_{d\omega} = \frac{e^2}{(Mc)^2} \frac{\omega d\omega}{2\pi\hbar c} \left| \sum_n \psi_i^* p_e^{(n)} e^{ikr_n} \psi_f d\tau \right|^2, \quad (7.2)$$

где  $M$  — масса и  $e$  — заряд частицы (в интересующем нас случае  $M$  — масса протона),  $\psi_i$  и  $\psi_f$  — волновые функции начального и конечного состояний,  $p_e^{(n)}$  — проекция оператора импульса  $n$ -й частицы на направление поляризации волны,  $k$  — волновой вектор кванта,  $r_n$  — радиус-вектор  $n$ -частицы.

Предполагая, что длина волны излучения значительно превосходит размеры излучающей системы, мы разложим  $e^{ikr_n}$  в ряд, сохранив в нём два первых члена.

Используя операторное соотношение

$$\frac{p}{M} = v = \dot{r},$$

где  $v$  — оператор скорости частицы, представим матричный элемент, входящий в (7.2), в виде

$$\begin{aligned} & \left( \sum_n (v_n e) e^{ikr_n} \right)_{if} = \\ & = \left( \sum_n (v_n e) \right)_{if} + \frac{i}{2} \left( \frac{d}{dt} \sum_n (er_n)(kr_n) \right)_{if} + \\ & + \frac{i}{2} \left( \sum_n [[r_n v_n], k] e \right)_{if} \end{aligned} \quad (7.3)$$

( $e$  — единичный вектор поляризации).

Так как в квантовой механике матричный элемент, отвечающий переходу  $i \rightarrow f$ , пропорционален

$$e^{\frac{i}{\hbar}(E_i - E_f)} = e^{i\omega t}$$

( $E_n$  — энергия  $n$ -го состояния), то матричные элементы какого-либо оператора  $\mathcal{L}$  и его производной по времени  $\dot{\mathcal{L}}$  связаны соотношением

$$(\dot{\mathcal{L}})_{if} = i\omega (\mathcal{L})_{if}.$$

Используя это соотношение, перепишем (7.3) в виде

$$\left( \sum_n (v_n e) e^{ikr_n} \right)_{if} = i\omega \left( \sum_n (er_n) \right)_{if} - \frac{\omega}{2} \left( \sum_n (er_n) (kr_n) \right)_{if} + ci [ke] \cdot \left( \sum_n \frac{1}{2c} [r_n v_n] \right)_{if}. \quad (7.3')$$

Матричные элементы, входящие в (7.3'), представляют собой соответственно матричные элементы дипольного момента, квадрупольного момента и магнитного момента системы.

Соответственно этим трём слагаемым мы получим дипольное, квадрупольное и магнитное дипольное излучения.

Можно показать, что полная вероятность излучения (проинтегрированная по элементу телесного угла вылетающего  $\gamma$ -кванта) складывается из вероятностей дипольного, квадрупольного и магнитного дипольного излучений, иными словами, интерференционные члены между различными типами излучения в полной вероятности отсутствуют.

Приведём формулы для вероятностей различных типов излучения.

Вероятность дипольного излучения, при котором  $\gamma$ -квант испускается в телесном угле  $do$ , определяется по формуле

$$w_d do = \frac{e^2 \omega^3}{2\pi \hbar c^3} \left| \left( \sum_n (er_n) \right)_{if} \right|^2 do. \quad (7.4)$$

Вероятность магнитного дипольного излучения имеет вид

$$w_m do = \frac{e^2 \omega^3}{2\pi \hbar c^3} \left| \left( [k e] \sum_n \frac{1}{2c} [r_n v_n] \right)_{if} \right|^2 do, \quad (7.5)$$

где  $k$  — единичный вектор в направлении волнового вектора.

Наконец, вероятность квадрупольного излучения выражается формулой

$$w_q do = \frac{e^2 \omega^5}{8\pi \hbar c^5} \left| \left( \sum_n (er_n) (kr_n) \right)_{if} \right|^2 do. \quad (7.6)$$

В формулу (7.5) входит матричный элемент магнитного момента системы, обусловленного орбитальным движением. Если частицы обладают ещё спиновым магнитным моментом, то последний следует прибавить к сумме

$$\sum_n \frac{e}{2c} [r_n v_n]. \quad (7.5')$$

Таким образом в общем случае выражение (7.5') должно быть заменено суммарным магнитным моментом системы.

Перейдём к определению вероятностей (7.4), (7.5), (7.6)\*. Рассмотрим сначала захват, сопровождающийся излучением магнитного дипольного  $\gamma$ -кванта. Обозначая через  $M$  оператор магнитного момента системы нейтрон + протон, выраженный в ядерных магнетонах, перепишем формулу (7.5) для вероятности захвата в виде

$$w_m do = \frac{e^2}{\hbar c} \left( \frac{\hbar \omega}{Mc^2} \right)^2 \omega \left| ([k e] M)_{if} \right|^2 \frac{do}{8\pi}. \quad (7.7)$$

Оператор  $M$  может быть представлен в виде

$$M = \mu_n \sigma_n + \mu_p \sigma_p + \frac{1}{2} L = \frac{1}{2} J + \left( \mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) S + \frac{1}{2} (\mu_n - \mu_p) (\sigma_n - \sigma_p), \quad (7.8)$$

где  $\mu_n$  и  $\mu_p$  — магнитные моменты нейтрона и протона, выраженные в единицах  $e\hbar/2Mc$ ,  $\sigma_n$ ,  $\sigma_p$  — спиновые матрицы нейтрона и протона,  $L$ ,  $S$ ,  $J$  — соответственно орбитальный, спиновый и полный моменты системы нейтрон + протон.

\* При вычислении вероятностей мы следуем работе [7].



Наиболее существенную роль при захвате медленных нейтронов играют, как мы указывали выше, переходы из синглетного  $^1S_0$ -состояния, относящегося к непрерывному спектру системы нейтрон + протон, в триплетное состояние  $^3S_1 + ^3D_1$ , представляющее собой основное состояние дейтрона.

Волновая функция исходного  $^1S_0$  состояния имеет вид

$$\psi_i = \frac{u_0(r)}{r} \chi_0^0, \quad (7.9)$$

где  $u_0(r)$  — радиальная функция  $^1S_0$ -состояния, а  $\chi_0^0$  — спиновая волновая функция этого состояния.

Волновую функцию  $\psi_i$  мы предполагаем нормированной таким образом, что плотность падающих частиц равна единице. Чтобы найти  $u_0$ , нужно решить соответствующее уравнение Шредингера. Вне области действия ядерных сил  $u_0$  имеет следующую асимптотическую форму:

$$u_0 = \frac{1}{k} \sin(kr + \delta_0), \quad r > r_0,$$

где  $\delta_0$  связано с введённой ранее [см. (1.4)] величиной  $\alpha_0$  соотношением

$$\operatorname{ctg} \delta_0 = -\frac{\alpha_0}{k}.$$

Волновая функция конечного состояния, т. е. основного состояния дейтрона, может быть записана в виде

$$\psi_f = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left\{ \frac{u}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w}{r} \right\} \chi_1^{m'}, \quad (7.10)$$

где  $u$  и  $w$  — радиальные функции, описывающие  $S$ - и  $D$ -волны,  $S_{12}$  — оператор, определяемый формулой (2.6'), и  $\chi_1^{m'}$  — спиновая волновая функция триплетного состояния.

Чтобы вычислить матричный элемент, входящий в формулу для вероятности захвата (7.7), заметим, что спиновая волновая функция начального состояния  $\chi_0^0$  антисимметрична, а спиновая функция конечного состояния  $\chi_1^{m'}$  симметрична относительно спиновых координат.

нат. Поэтому только третья слагаемое в выражении для оператора магнитного момента, будучи антисимметричным относительно спиновых переменных обеих частиц, имеет отличные от нуля матричные элементы, отвечающие переходам между состояниями с различными значениями полного спина. (Член, содержащий  $[\mathcal{K}e] \mathbf{J} = J_z$ , можно не учитывать, так как, выбрав в качестве оси квантования ось  $z$ , направленную по  $[\mathcal{K}e]$ , мы приведём оператор  $J_z$  к диагональной форме.)  
Итак,

$$([\mathcal{K}e] M)_{if} = (\mu_n - \mu_p) (4\pi)^{1/2} \int_0^\infty u u_0 dr [\mathcal{K}e] \left( \chi_1^{m'}, \frac{1}{2} (\sigma_n - \sigma_p) \chi_0^0 \right) \quad (7.11)$$

(выражения вида  $(\varphi_1, L\varphi_2)$  обозначают матричные элементы оператора  $L$ ).

Для определения  $w_m$  нужно квадрат модуля матричного элемента (7.11) просуммировать по всем трём состояниям триплетного основного уровня, т. е. по числу  $m'$ . Учитывая, что диагональные матричные элементы оператора  $\frac{1}{2} (\sigma_n - \sigma_p)$  в синглетном состоянии равны нулю, мы представим эту сумму в виде

$$\begin{aligned} \sum_{m'} \left| [\mathcal{K}e] \left( \chi_1^{m'}, \frac{1}{2} (\sigma_n - \sigma_p) \chi_0^0 \right) \right|^2 &= \\ &= \sum_{m'_j, j} \left| [\mathcal{K}e] \left( \chi_j^{m'_j}, \frac{1}{2} (\sigma_n - \sigma_p) \chi_0^0 \right) \right|^2 = \\ &= \left( \chi_0^0, \left( \frac{1}{2} [\mathcal{K}e] (\sigma_n - \sigma_p) \right)^2 \chi_0^0 \right)^2 \quad (7.12) \\ &\quad (j = 0, 1; m'_1 = m', m'_0 = 0) \end{aligned}$$

(последняя часть равенства написана на основании правила перемножения матриц). Легко видеть, что

$$\left( \chi_0^0, \left( \frac{1}{2} [\mathcal{K}e] (\sigma_n - \sigma_p) \right)^2 \chi_0^0 \right) = 1.$$

Действительно, направляя единичный вектор  $[\mathcal{K}e]$  вдоль оси  $z$ , получим:

$$\left(\chi_0^0, \left(\frac{1}{2}[\mathcal{K}e](\sigma_n - \sigma_p)\right)^2 \chi_0^0\right) = \frac{1}{4}[(\sigma_n^z)^2 + (\sigma_p^z)^2 - 2\sigma_n^z \sigma_p^z]_{00} = 1.$$

Итак,

$$|([\mathcal{K}e]M)_{if}|^2 = 4\pi(\mu_n - \mu_p)^2 \left(\int_0^\infty u_0 u dr\right)^2, \quad (7.13')$$

и

$$w_m d\omega = \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar\omega}{Mc^2}\right)^2 \omega (\mu_n - \mu_p)^2 \left(\int_0^\infty u_0 u dr\right)^2 \frac{d\omega}{2}, \quad (7.13)$$

$$\hbar\omega = \varepsilon + E_0/2.$$

Суммируя это выражение по двум направлениям поляризации  $\gamma$ -кванта и интегрируя по телесному углу  $d\omega$ , получим следующее выражение для полной вероятности захвата нейтрона из синглетного в триплетное состояние:

$$\begin{aligned} w_m^{(0 \rightarrow 1)} = \\ = 4\pi \frac{e^2}{\hbar c} (\mu_n - \mu_p)^2 \left(\frac{\varepsilon + \frac{1}{2}E_0}{Mc^2}\right)^2 \frac{\varepsilon + \frac{1}{2}E_0}{\hbar} \left(\int_0^\infty u_0 u dr\right)^2, \end{aligned} \quad (7.14)$$

где  $\varepsilon$  — энергия связи нейтрона,  $E_0$  — энергия нейтрона (в лабораторной системе координат).

Определим теперь эффективное сечение захвата из синглетного в триплетное состояние. Для этого нужно разделить  $w_m$  на поток нейтронов, равный  $\sqrt{\frac{2E_0}{M}}$ . Учитывая ещё, что только один из каждых четырёх нейтронов обладает спином, противоположным спину протона, получим следующее выражение для сечения:

$$\begin{aligned} \sigma_m^{(0 \rightarrow 1)} = \pi \frac{e^2}{\hbar c} (\mu_n - \mu_p)^2 \left(\frac{\varepsilon}{2E_0}\right)^{1/2} \times \\ \times \left(\frac{\varepsilon + \frac{1}{2}E_0}{Mc^2}\right)^2 \frac{\varepsilon + \frac{1}{2}E_0}{\varepsilon} \alpha_1 \left(\int_0^\infty u_0 u dr\right)^2, \end{aligned} \quad (7.15)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{M\varepsilon}}{\hbar}.$$

Мы видим, что поперечник захвата растёт обратно пропорционально скорости нейтрона (см. по этому поводу также § 12). В области малых энергий, когда  $E_0 \ll \varepsilon$ , выражение (7.15) приобретает вид

$$\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)} = \pi \frac{e^2}{\hbar c} (\mu_n - \mu_p)^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2E_0}} \left(\frac{\varepsilon}{Mc^2}\right)^2 \alpha_1 \left(\int_0^\infty u_0 u dr\right)^2. \quad (7.15')$$

Заметим, что угловое распределение вылетающих  $\gamma$ -квантов является сферически симметричным, так как исходное состояние системы  $^1S_0$  не содержит какого-либо выделенного направления, которое могло бы дать анизотропию в угловом распределении.

Выведем теперь формулы для вероятности захвата нейтрона из триплетного состояния. Мы будем снова пользоваться общей формулой (7.7), но в качестве волновой функции исходного состояния возьмём теперь вместо (7.9) функцию

$$\psi_i = \left(\frac{u_1}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w_1}{r}\right) \chi_{11}^m. \quad (7.16)$$

Для нахождения радиальных функций  $u_1$  и  $w_1$ , описывающих  $S$ - и  $D$ -волны, необходимо решить уравнение Шредингера для непрерывного спектра системы нейтрон—протон. (Предполагается, что гамильтониан содержит член

$$S_{12} U(r),$$

обеспечивающий связь между  $S$ - и  $D$ -волнами; функции  $u_1$  и  $w_1$  удовлетворяют уравнениям (2.11), в которых  $\varepsilon$  заменяется энергией системы).

При определении функций  $u_1$  и  $w_1$  нужно иметь в виду, что волновые функции начального и конечного состояний должны быть ортогональными. Только при

выполнении этого условия имеет смысл понятие перехода из начального состояния  $i$  в конечное состояние  $f$  \*).

Легко показать, что условие ортогональности имеет вид

$$\int_0^{\infty} (uu_1 + ww_1) dr = 0. \quad (7.17)$$

Напомним, наконец, условие нормировки  $\psi_i$ : в общей формуле для излучения (7.7) предполагается, что начальная функция нормирована таким образом, что плотность падающих частиц равна единице.

Вне области действия ядерных сил функции  $u_1$  и  $w_1$  имеют следующий асимптотический вид:

$$u_1 = \frac{g_0(kr + \delta_0)}{k} = \frac{\sin(kr + \delta_0)}{k}; \quad (7.18)$$

$$w_1 = \text{const.} \frac{g_2(kr + \delta_2)}{k} = \\ = \frac{\text{const.}}{k} \left\{ -\sin(kr + \delta_2) - \frac{3}{kr} \cos(kr + \delta_2) + \right. \\ \left. + \frac{3}{(kr)^2} \sin(kr + \delta_2) \right\}, \quad (7.18')$$

где  $g_0$  и  $g_2$  — радиальные функции, входящие в разложение плоской волны в ряд по функциям Лежандра

$$e^{ikr} = \sum_0^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) \frac{g_l(kr)}{kr}. \quad (7.19)$$

Функция  $g_l$  связана следующим образом с функцией Бесселя  $J_{l+1/2}(z)$ :

$$g_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} J_{l+1/2}(kr). \quad (7.19')$$

Для определения фаз  $\delta_0$  и  $\delta_2$  мы должны «сшить» волновые функции вне и внутри области действия ядерных сил, т. е. в точке  $r=r_0$ . Напомним, что,

\*) В рассмотренном выше случае перехода из синглетного в триплетное состояние ортогональность автоматически обеспечивается благодаря тому, что функции  $\chi_0^m$  и  $\chi_1^m$  относятся к разным значениям спина и поэтому ортогональны.

согласно (1.4'),

$$\delta_0 = \frac{\pi}{2} + \text{arctg} \frac{a_1}{k} - kr_0.$$

Константа, входящая в (7.18'), определяется из условия ортогональности (7.17).

Перейдём к определению матричного элемента магнитного момента. Заметим предварительно, что в триплетном состоянии оператор  $S = \frac{1}{2}(\sigma_n + \sigma_p)$  может быть заменён его проекцией в направлении  $J$ , т. е. \*)

$$S \rightarrow J \frac{SJ}{J^2} = \frac{J}{2} \frac{S^2 + J^2 - L^2}{J^2} = \frac{J}{4} (4 - L^2) \quad (7.20)$$

(мы воспользовались тем, что  $J^2 = 2$ ,  $S^2 = 2$ ).

Далее в, триплетном состоянии все диагональные матричные элементы оператора  $\sigma_n - \sigma_p$  обращаются в нуль, поэтому вопрос сводится к определению матричного элемента оператора

$$M_z = J_z \left[ \mu_n + \mu_p - \frac{1}{4} \left( \mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) L^2 \right] \quad (7.21)$$

(ось  $z$  предполагаем направленной вдоль  $[J_e]$ ).

Вычислим матричный элемент  $(M_z)_{if}$ . Воспользуемся формулами (7.10) и (7.16), определяющими  $\psi_i$  и  $\psi_f$ , получим:

$$(M_z)_{if} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (\mu_n + \mu_p) \times \\ \times \left( \left[ \frac{u_1}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w_1}{r} \right] \chi_{11}^m, J_z \left[ \frac{u}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w}{r} \right] \chi_{11}^{m'} \right) - \\ - \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left( \mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) \times \\ \times \left( \left[ \frac{u_1}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w_1}{r} \right] \chi_{11}^m, J_z L^2 \left[ \frac{u}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w}{r} \right] \chi_{11}^{m'} \right). \quad (7.22)$$

Так как в триплетном состоянии

$$S_{12}^2 = 8 - 2S_{12}$$

и среднее значение  $S_{12}$ , т. е. интеграл по углам от  $S_{12}$ ,

\*) См. примечание на стр. 31.

равно нулю\*), то  $(M_z)_{if}$  приобретает вид

$$(M_z)_{if} = \sqrt{4\pi} (\nu_n + \nu_p) (\chi_1^m, J_z \chi_1^{m'}) \int_0^\infty (u u_1 + w w_1) dr - \\ - \frac{1}{4\sqrt{4\pi}} (\nu_n + \nu_p - \frac{1}{2}) \times \\ \times \left( \left[ \frac{u_1}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w_1}{r} \right] \chi_1^m, J_z L^2 \left[ \frac{u}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w}{r} \right] \chi_1^{m'} \right).$$

Первый интеграл, согласно (7.17), равен нулю.

Замечая ещё, что

$$L^2 \left( \frac{u}{r} + 2^{-3/2} S_{12} \frac{w}{r} \right) \chi_1^m = 6 \cdot 2^{-3/2} S_{12} \frac{w}{r} \chi_1^m,$$

перепишем  $(M_z)_{if}$  в виде

$$(M_z)_{if} = -\frac{3}{2} \sqrt{4\pi} \left( \nu_n + \nu_p - \frac{1}{2} \right) (\chi_1^m, J_z \chi_1^{m'}) \int_0^\infty w w_1 dr.$$

Квадрат модуля этого выражения следует просуммировать по трём конечным состояниям и усреднить по начальным состояниям.

Используя равенство

$$\frac{1}{3} \sum_m \sum_{m'} |(\chi_1^m, J_z \chi_1^{m'})|^2 = \frac{1}{3} \sum_m (\chi_1^m, J^2 \chi_1^m) = \frac{2}{3},$$

получим следующее выражение для усреднённого по начальным состояниям и просуммированного по конечным состояниям квадрата модуля  $(M_z)_{if}$ :

$$|(M_z)_{if}|^2 = 6\pi \left( \nu_n + \nu_p - \frac{1}{2} \right)^2 \left( \int_0^\infty w w_1 dr \right)^2. \quad (7.23)$$

Подставив это выражение в формулу (7.7), мы найдём вероятность магнитного дипольного излучения, связанного с переходом из триплетного состояния в основное состояние дейтрона.

\*) Согласно (2.6')  $S_{12} = 6(Sn)^2 - 2S^2$ . Так как среднее значение  $(Sn)^2$  равно  $\frac{1}{3}S^2$ , то среднее значение  $S_{12}$  равно нулю.

Проинтегрировав (7.7) по направлениям излучённого  $\gamma$ -кванта и просуммировав результат по двум направлениям поляризации  $\gamma$ -кванта, найдём полную вероятность захвата нейтрона.

В том случае, когда энергия нейтрона значительно меньше энергии связи дейтрона, полная вероятность магнитного дипольного излучения, связанного с переходом между триплетными состояниями, равна

$$\sigma_m^{(1 \rightarrow 1)} = 6\pi \frac{e^2}{\hbar c} \left( \nu_n + \nu_p - \frac{1}{2} \right)^2 \left( \frac{\epsilon}{Mc^2} \right)^2 \frac{\epsilon}{\hbar} \left( \int_0^\infty w w_1 dr \right)^2. \quad (7.24)$$

Для получения сечения захвата нужно разделить это выражение на поток, равный в триплетном состоянии  $\frac{4}{3} (2E_0 / M)^{1/2}$ . Мы получим, таким образом, следующее выражение для сечения захвата [7]:

$$\sigma_m^{(1 \rightarrow 1)} = \frac{9\pi e^2}{2 \hbar c} \left( \nu_n + \nu_p - \frac{1}{2} \right)^2 \times \\ \times \sqrt{\frac{\epsilon}{2E_0}} \left( \frac{\epsilon}{Mc^2} \right)^2 \alpha_1 \left( \int_0^\infty w w_1 dr \right)^2. \quad (7.25)$$

Определим ещё вероятность захвата нейтрона из триплетного состояния, сопровождающегося излучением электрического квадрупольного  $\gamma$ -кванта. Вероятность захвата определяется следующей формулой:

$$\frac{e^2 \omega^5}{\hbar c^4} \left| \left( \psi_f, \frac{1}{4} \mathbf{er} \cdot \mathbf{kr} \psi_i \right) \right|^2 \frac{d\omega}{8\pi}, \quad (7.26)$$

где  $\psi_i$  и  $\psi_f$  определяются соответственно формулами (7.16) и (7.10). (Множитель  $1/4$  в матричном элементе происходит из-за того, что только протон имеет заряд; радиус-вектор протона равен  $\frac{1}{2} \mathbf{r}$ .)

Проделав выкладки, аналогичные приведённым выше, получим следующее выражение для сечения захвата

нейтрона из триплетного состояния, сопровождающегося излучением квадрупольного  $\gamma$ -кванта [7]:

$$\sigma_q^{(1 \rightarrow 1)} = \frac{\pi}{400} \frac{e^2}{\hbar c} \sqrt{\frac{\epsilon}{2E_0}} \left( \frac{\epsilon}{Mc^2} \right)^2 \alpha_1^5 \times \\ \times \left| \int_0^\infty r^2 (uw_1 + wu_1 - 2^{-1/2} ww_1) dr \right|^2. \quad (7.27)$$

Сравнение выражений для  $\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}$  и  $\sigma_m^{(1 \rightarrow 1)}$  показывает, что

$$\frac{\sigma_m^{(1 \rightarrow 1)}}{\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}} \approx \left( \frac{\int_0^\infty ww_1 dr}{\int_0^\infty uu_0 dr} \right)^2 \ll 1.$$

Сечение захвата  $\sigma_q^{(1 \rightarrow 1)}$  также значительно меньше  $\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}$ .

Таким образом основную роль играют переходы из синглетного состояния в основное состояние дейтрона, сопровождающиеся магнитным дипольным излучением.

Оценим теперь величину  $\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}$ . Не учитывая присутствия в основном состоянии дейтрона  $D$ -волны, мы будем считать, что волновая функция основного состояния дейтрона определяется формулой

$$u = \sqrt{2\alpha_1} N e^{-\alpha_1 r}, \quad (7.28)$$

где  $N$  — некоторый численный множитель, который равнялся бы единице для бесконечно малого радиуса действия ядерных сил (в этом случае функция (7.28) удовлетворяет условию нормировки  $\int_0^\infty u^2 dr = 1$ ).

В действительности, волновая функция определяется выражением (7.28) только вне области действия ядерных сил; мы будем, однако, для оценки величины сечения захвата предполагать, что выражение (7.28) справедливо повсюду.

Так как в интеграле, определяющем матричный элемент, область пространства  $r < r_0$ , в которой действуют ядерные силы, не играет исключительной роли, то можно ожидать, что наш расчёт даст правильный порядок величины  $\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}$ .

Множитель  $N$ , входящий в выражение (7.28), для волновой функции дейтрона вне области действия ядерных сил, равен  $1 + \frac{\alpha_1 r_0}{2}$  для прямоугольной ямы радиуса  $r_0$ , если  $\alpha_1 r_0 \ll 1$ . Его можно оценить более точно, не делая специальных предположений о форме потенциальной ямы, из анализа данных по рассеянию нейтронов протонами; при этом оказывается, что  $N \approx \sqrt{\frac{3}{2}}^{[116]}$ .

Так как мы можем определить лишь порядок величины сечения захвата, то в дальнейшем в этом параграфе будем считать, что  $N \approx 1$ . В качестве волновой функции исходного состояния мы возьмём функцию

$$u_0 = C \frac{\sin(kr + \delta_0)}{k}. \quad (7.29)$$

В действительности, выражение (7.29) справедливо только вне области действия ядерных сил. Для оценки величины сечения захвата нейтронов мы будем по соображениям, высказанным выше, предполагать, что выражение (7.29) справедливо повсюду.

Полагая

$$C = \sqrt{\frac{M}{k}} \frac{1}{2\pi\hbar},$$

мы пронормируем  $u_0/r$  на энергию. Нужная нам нормировка (плотность частиц равна единице) получится, если положить

$$C = 1.$$

(В этом легко убедиться, если вспомнить, что функция, нормированная на энергию,  $\psi_E$ , связана с функцией, нормированной на единичный объём  $\psi_{\Omega=1}$ , соотношением

$$\psi_E = \sqrt{\frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3 dE}} \psi_{\Omega=1}.$$

В данном случае  $E = \hbar^2 k^2 / M$ ).

Подставив выражения (7.28), (7.29) в интеграл, входящий в (7.15), получим:

$$\int_0^{\infty} uu_0 dr = \frac{\sqrt{2x_1}}{k} \int_0^{\infty} \sin(kr + \delta_0) e^{-\alpha_1 r} dr = \\ = \frac{\sqrt{2x_1} k \cos \delta_0 + \alpha_1 \sin \delta_0}{k^2 + x_1^2} = \sqrt{2\alpha_1} \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{(\alpha_1^2 + k^2) \sqrt{\alpha_0^2 + k^2}} \quad (7.30)$$

(напомним, что  $\operatorname{ctg} \delta_0 = -\frac{\alpha_0}{k}$ ).

Согласно (7.15') сечение захвата  $\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}$  равно:

$$\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)} = \pi \frac{e^2}{\hbar c} (\mu_p - \mu_n)^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2E_0}} \left( \frac{\varepsilon}{Mc^2} \right)^2 \frac{2x_1^2 (x_1 - \alpha_0)^2}{(x_1^2 + k^2)^2 (\alpha_0^2 + k^2)} \quad (7.31)$$

( $E_0$  — энергия нейтрона в лабораторной системе отсчёта).

Формула (7.31) показывает, что сечение захвата существенно зависит от знака величины  $\alpha_0$ . Поэтому экспериментальными данными по захвату медленных нейтронов протонами можно воспользоваться наряду с данными по рассеянию медленных нейтронов в орто- и параводороде для определения знака величины  $\alpha_0$ .

Вводя энергию связи  $\varepsilon = (\alpha_1 \hbar)^2 / M$  и учитывая, что  $\alpha_0 < 0$ , перепишем формулу (7.31) в области энергий  $E_0 \ll \varepsilon$  в следующем виде [37], [39] \*):

$$\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)} = \pi \frac{e^2}{Mc^2} \frac{\hbar}{Mc} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{E_0}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} (\mu_p - \mu_n)^2 \frac{(V\bar{\varepsilon} - V\bar{\varepsilon}')^2}{Mc^2} \quad (7.32)$$

где  $\varepsilon' = (\alpha_0 \hbar)^2 / M$ . (Эта величина составляет около 100 keV.) Для тепловых нейтронов с энергией  $\approx 0,025$  eV мы получим, согласно (7.32),

$$\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)} \approx 0,312 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2.$$

\*) Учитывая конечность  $E_0$ , следует в (7.32) заменить

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \text{ на } \frac{\varepsilon + \frac{1}{2} E_0}{\varepsilon' + \frac{1}{2} E_0}$$

Если учесть наличие  $D$ -волны, то формула (7.15) даст меньшее значение, так как в этом случае

$\int_0^{\infty} u^2 dr < 1$ , а именно  $\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)} \approx 0,302 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$  [7]. Сечения  $\sigma_m^{(1 \rightarrow 1)}$  и  $\sigma_q^{(1 \rightarrow 1)}$  очень незначительно увеличивают последнюю величину, так что основную роль при захвате нейтронов протонами играют, как уже указывалось выше, переходы из синглетного состояния. Небольшая «примесь»  $D$ -волны в основном состоянии дейтрона приводит лишь к некоторому уменьшению сечения  $\sigma_m^{(0 \rightarrow 1)}$  по сравнению с тем случаем, если бы основным состоянием дейтрона было состояние  ${}^3S_1$ .

**§ 8. Фоторасщепление дейтрона.** При облучении дейтрона  $\gamma$ -квантами, энергия которых превосходит энергию связи дейтрона, может произойти распад дейтрона. Это явление фоторасщепления дейтрона аналогично фотоэффекту в атомах.

Следует различать четыре типа переходов из основного состояния дейтрона в состояния непрерывного спектра: электрический дипольный, магнитный дипольный и электрический квадрупольный переходы в триплетное состояние, а также магнитный дипольный переход в синглетное состояние системы нейтрон + протон. Основную роль, как мы увидим далее, играет электрическое дипольное поглощение  $\gamma$ -квантов.

Мы определим вероятность фоторасщепления дейтрона. Выведем предварительно общие формулы для вероятностей электрического дипольного, магнитного дипольного и электрического квадрупольного поглощения  $\gamma$ -квантов.

Заметим, что вероятность поглощения  $\gamma$ -кванта связана простым соотношением с вероятностью испускания  $\gamma$ -кванта. Рассмотрим вероятность испускания  $\gamma$ -кванта, которым сопровождается захват частицы (нейтрона). Эта вероятность может быть представлена в виде

$$w_c = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{12}|^2 \rho_\gamma,$$

где  $M_{12}$  — матричный элемент перехода и  $\rho_\gamma$  — отнесённое

к единичному интервалу энергии число состояний образующейся в результате реакции частицы, т. е.  $\gamma$ -кванта. Известно, что

$$\rho_{\gamma} = \frac{(\hbar\omega)^2 d\omega_f}{(2\pi\hbar c)^3},$$

где  $\omega$  — частота  $\gamma$ -кванта,  $d\omega_f$  — элемент телесного угла, в котором происходит излучение.

Для получения сечения захвата  $d\sigma_c$  нужно разделить  $\omega_c$  на скорость захватываемых частиц  $v$ , поэтому

$$d\sigma_c = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{12}|^2 \frac{(\hbar\omega)^2 d\omega_f}{v(2\pi\hbar c)^3}. \quad (8.1)$$

Рассмотрим теперь вероятность поглощения  $\gamma$ -кванта, приводящего к вылету частицы; в рассматриваемом ниже случае речь идёт о расщеплении дейтрона. Эта вероятность может быть представлена в виде

$$\omega_p = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{21}|^2 \rho_n,$$

где  $M_{21}$  — матричный элемент перехода, а  $\rho_n$  — отнесённое к единичному интервалу энергии число состояний вылетевшей частицы (нейтрона). В интересующем нас случае расщепления дейтрона  $\rho_n$  равно:

$$\rho_n = \frac{p^2 dp d\omega_p}{(2\pi\hbar)^3 dE} = \frac{Mp d\omega_p}{2(2\pi\hbar)^3 c},$$

где  $d\omega_p$  — элемент телесного угла, в котором вылетает частица (нейтрон); энергия конечного состояния  $E$  связана с импульсом  $p$  соотношением  $E = \frac{p^2}{M}$  ( $M$  — масса нейтрона).

Сечение фоторасщепления  $d\sigma_p$  равно частному от деления  $\omega_p$  на скорость света:

$$d\sigma_p = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{21}|^2 \frac{Mp d\omega_p}{2(2\pi\hbar)^3 c}. \quad (8.2)$$

Так как в рассматриваемых процессах захвата и фоторасщепления начальное и конечное состояния одни и те же, то

$$|M_{12}|^2 = |M_{21}|^2,$$

поэтому отношение сечений равняется:

$$\frac{d\sigma_p}{d\sigma_c} = \frac{Mpv c^2 d\omega_p}{2(\hbar\omega)^2 d\omega_f} = \frac{1}{2} \left(\frac{rc}{\hbar\omega}\right)^2 \frac{d\omega_p}{d\omega_f}. \quad (8.3)$$

Выше мы имели [см. (7.4)] следующую формулу для сечения испускания электрического дипольного  $\gamma$ -кванта при захвате частицы со скоростью  $v$ :

$$d\sigma_d = \frac{e^2 \omega^3}{2\pi\hbar c^3 v} \left| \left( \sum_n (e r_n) \right)_{if} \right|^2 d\omega_f. \quad (8.4)$$

Согласно (8.3), сечение поглощения электрического дипольного  $\gamma$ -кванта равняется:

$$d\sigma_p^{(d)} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{Mp \omega}{\hbar^2} \left| \left( \sum_n (e r_n) \right)_{if} \right|^2 \frac{d\omega_p}{4\pi}. \quad (8.4')$$

Пользуясь этой формулой, запишем сечение фоторасщепления дейтрона в виде

$$d\sigma_p^{(d)} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{Mp}{\hbar^2} \omega \frac{1}{3} \sum_{mm'} \left| \left( \psi_f, \frac{1}{2} e r \psi_i \right) \right|^2 \frac{d\omega_p}{4\pi}, \quad (8.5)$$

где  $e \frac{er}{2}$  — проекция дипольного момента дейтрона на направление поляризации  $\gamma$ -кванта;  $\psi_i$  и  $\psi_f$  — волновые функции начального и конечного состояний системы нейтрон + протон. (В формуле (8.5) производится суммирование по конечным состояниям и усреднение по начальным состояниям триплетных уровней, между которыми происходит переход.)

Чтобы получить формулу для сечения поглощения магнитного дипольного  $\gamma$ -кванта, при котором система переходит из триплетного в синглетное состояние (переходы:  ${}^3S_1 \rightarrow {}^1S_0$ ,  ${}^3D_1 \rightarrow {}^1D_2$ ), достаточно в формуле (8.5) заменить проекцию электрического дипольного момента в направлении поляризации  $\gamma$ -кванта на проекцию магнитного момента в направлении магнитного поля  $\gamma$ -кванта, т. е. заменить  $\frac{e}{2} \cdot er$  на  $\frac{e\hbar}{2Mc} [ke]M$  (обозначения смотри в § 7).

Таким образом мы получим следующую формулу для сечения поглощения магнитного дипольного  $\gamma$ -кванта:

$$d\sigma_p^{(m)} = \frac{1}{4} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{p\omega}{Mc^2} \frac{1}{3} \sum_{m'} |(\psi_f, [\mathcal{K}e] M \psi_i)|^2 \frac{d\omega_p}{4\pi} \quad (8.6)$$

(множитель  $1/4$  происходит из-за того, что конечное состояние является здесь синглетным).

Сечение для квадрупольного электрического поглощения может быть легко получено на основании формул (7.6), (8.3).

Определим вероятность фоторасщепления дейтрона, вызываемого поглощением электрического дипольного  $\gamma$ -кванта\*). Найдём матричный элемент

$$\left( \psi_f, \frac{1}{2} er \psi_i \right).$$

В качестве волновой функции исходного состояния мы возьмём функцию

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left( \frac{u}{r} + 2^{-3/2} S_{10} \frac{w}{r} \right) \chi_1^m, \quad (8.7)$$

представляющую собой волновую функцию основного состояния дейтрона.

Конечным состоянием системы нейтрон—протон является, очевидно, состояние  ${}^3P$ , так как при электрическом дипольном переходе мультиплетность не меняется, а квантовое число  $l$  изменяется на единицу.

Мы будем предполагать, что длина волны нейтрона и протона, образующихся в результате расщепления дейтрона, значительно больше радиуса действия ядерных сил.

Если выполнено это условие, то в  $P$ -состоянии между нейтроном и протоном практически силы не действуют. Поэтому волновая функция конечного состояния совпадает с волновой функцией свободного движения.

Мы могли бы в качестве волновой функции конечного состояния  $\psi_f$  взять плоскую волну  $e^{ikr} \chi_1^m$ , где  $k$  —

\*) При вычислении вероятностей фоторасщепления мы следуем работе [7].

волновой вектор нейтрона, величина которого определяется из закона сохранения энергии

$$\frac{\hbar^2 k^2}{M} = \hbar\omega - \epsilon \quad (8.8)$$

(функция  $e^{ikr}$  удовлетворяет нужному условию нормировки, а именно—единичной плотности частиц).

Легко видеть, что только одно слагаемое в разложении  $e^{ikr}$  в ряд по полиномам Лежандра [см. формулу (7.19)], отвечающее  $l=1$  ( $P$ -волна), даёт отличный от нуля результат при подстановке в интеграл

$$\left( \psi_f, \frac{1}{2} er \psi_i \right).$$

Поэтому в качестве волновой функции конечного состояния мы возьмём это слагаемое, описывающее  $P$ -состояние в случае свободного движения.

Итак,

$$\psi_f = 3i \frac{kr}{kr} \frac{g_1(kr)}{kr} \chi_1^{m'}, \quad (8.9)$$

где

$$g_1(kr) = \frac{\sin kr}{kr} - \cos kr$$

(вместо  $P_1(\cos \vartheta)$  мы написали здесь  $\frac{kr}{kr}$ ,  $\vartheta$  — угол между  $k$  и  $r$ ).

Подставим (8.9) и (8.7) в выражение для матричного элемента  $\left( \psi_f, \frac{1}{2} er \psi_i \right)$  и выполним сперва интегрирование по углам в пространстве  $r$ .

Замечая, что среднее значение (при интегрировании по углам) от  $(na)(nb)$ , где  $n = \frac{r}{r}$  и  $a, b$  — постоянные векторы, равно

$$\overline{(na)(nb)} = \frac{1}{3} ab,$$



а среднее значение  $(na)(nb)(nc)(nd)$ , где  $a, b, c, d$  — постоянные векторы, равно [40]:

$$\overline{(na)(nb)(nc)(nd)} = \frac{1}{15}(ab \cdot cd + ac \cdot bd + ad \cdot bc),$$

получим:

$$\begin{aligned} (\psi_f, \frac{1}{2} er \psi_i) &= -i \frac{\sqrt{\pi}}{k^2} (\chi_1^{m'} \left\{ ek \int_0^\infty rg_1 u dr + \right. \\ &+ \left. \frac{2\sqrt{2}}{5} \left( \frac{3}{4} kS \cdot eS + \frac{3}{4} eS \cdot kS - ek \right) \int_0^\infty rg_1 w dr \right\} \chi_1^m), \quad (8.10) \end{aligned}$$

где

$$S = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2).$$

Мы должны теперь вычислить  $\frac{1}{3} \sum_{mm'} |(\psi_f, \frac{1}{2} er \psi_i)|^2$ .

Легко видеть, что эта величина может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{mm'} |(\psi_f, \frac{1}{2} er \psi_i)|^2 &= \frac{1}{3} \frac{\pi}{k^2} \text{Spur} \left\{ (ek)^2 \left( \int_0^\infty rg_1 u dr \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{8}{25} \left( \frac{3}{4} kS \cdot eS + \frac{3}{4} eS \cdot kS - ek \right)^2 \left( \int_0^\infty rg_1 w dr \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\text{Spur } kS \cdot eS = 2ek,$$

$$\frac{1}{4} \text{Spur } (kS \cdot eS + eS \cdot kS)^2 = \frac{3}{2} (ek)^2 + \frac{1}{2} k^2,$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{mm'} |(\psi_f, \frac{1}{2} er \psi_i)|^2 &= \frac{\pi}{k^2} \left\{ \cos^2 \theta \left( \int_0^\infty rg_1 u dr \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{25} (3 + \cos^2 \theta) \left( \int_0^\infty rg_1 w dr \right)^2 \right\}, \quad (8.14) \end{aligned}$$

где  $\theta$  — угол между  $e$  и  $k$ .

Так как мы имеем дело с неполяризованными  $\gamma$ -лучами, то  $\cos^2 \theta$  следует усреднить по направлению вектора поляризации  $e$ , перпендикулярного к вектору  $x$ . В результате такого усреднения мы получим:

$$\overline{\cos^2 \theta} = \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta,$$

где  $\vartheta$  — угол между направлением распространения  $\gamma$ -луча и направлением вылета продуктов распада дейтрона.

Окончательное выражение для дифференциального сечения фоторасщепления дейтрона, вызванного поглощением электрического дипольного  $\gamma$ -кванта, имеет вид

$$\begin{aligned} d\sigma_p^{(d)} &= \frac{\pi}{2} \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \frac{M_\omega}{\hbar k} \left\{ \sin^2 \vartheta \left( \int_0^\infty rg_1 u dr \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{25} (6 + \sin^2 \vartheta) \left( \int_0^\infty rg_1 w dr \right)^2 \right\} \frac{d\sigma_p}{4\pi}. \quad (8.12) \end{aligned}$$

Заметим, что благодаря присутствию в основном состоянии дейтрона  $D$ -волны угловое распределение вылетающих частиц, наряду с членом, пропорциональным  $\sin^2 \vartheta$ , содержит сферически симметричный член.

Интегральное сечение фотозлектрического расщепления дейтрона равняется [7]:

$$\sigma_p^{(d)} = \frac{\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{M_\omega}{\hbar k} \left\{ \left( \int_0^\infty rg_1 u dr \right)^2 + \frac{2}{5} \left( \int_0^\infty rg_1 w dr \right)^2 \right\}. \quad (8.13)$$

Для оценки величины  $\sigma_p^{(d)}$  мы пренебрежём вторым слагаемым, содержащим  $\psi$ -функцию  $D$ -волны, и воспользуемся для  $u$  выражением (7.28), справедливым вне области действия ядерных сил

$$u = \sqrt{2\alpha_1} N e^{-\alpha_1 r}.$$

Так как в интегралы в формуле (8.13) входит множителем  $r$ , то область  $r < r_0$ , в которой действуют ядерные силы, не оказывает большого влияния на величину интеграла, который определяется в основном

областью вне действия ядерных сил. Поэтому, используя при вычислении  $\sigma_p^{(d)}$  формулу (7.28) для волновой функции дейтрона вне области действия ядерных сил, имеет смысл пользоваться точным значением множителя  $N$ . В отличие от этого вычисления при вычислении сечения захвата внутренняя область  $r < r_0$  играет заметную роль. Пользуясь формулой (7.28) для волновой функции, мы можем получить лишь оценку сечения захвата, поэтому мы считали в §7 множитель  $N$  равным единице.

Поставив в (8.13) выражение (7.28), мы получим следующий результат:

$$\sigma_p^{(d)} = \frac{8\pi}{3} N^2 \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar^2}{M} \frac{\sqrt{\epsilon} E^{3/2}}{(E + \epsilon)^3}, \quad N^2 \approx \frac{3}{2}. \quad (8.14)$$

Сечение при малых энергиях вылетающих частиц пропорционально  $E^{3/2}$ .

Вводя отношение энергии  $\gamma$ -кванта к энергии связи дейтрона  $\epsilon$

$$\gamma = \frac{\hbar\omega}{\epsilon} = \frac{E + \epsilon}{\epsilon},$$

перепишем (8.14) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_p^{(d)} &= 4\pi \cdot \frac{1}{137} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{(\gamma - 1)^{3/2}}{\gamma^3} \approx \\ &\approx 1,78 \cdot 10^{-26} (\gamma - 1)^{3/2} \gamma^{-3} \text{ см}^2. \end{aligned} \quad (8.14')$$

Сечение обращается в нуль при  $\gamma = 1$  и достигает максимума при  $\gamma = 2$ , т. е. в том случае, когда кинетическая энергия продуктов расщепления  $E$  равна энергии связи дейтрона. Этот максимум равен:

$$(\sigma_p^{(d)})_{\max} \approx 21,6 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2. \quad (8.14'')$$

Выражения (8.14), (8.14') определяют эффективное сечение фоторасщепления дейтрона, связанного с переходом в триплетное  $P$ -состояние непрерывного спектра.

Мы рассмотрим теперь фоторасщепление дейтрона, вызываемое магнитным дипольным поглощением  $\gamma$ -кван-

тов. При этом происходят переходы в синглетное состояние непрерывного спектра  ${}^3S_1 \rightarrow {}^1S_0$ ,  ${}^3D_1 \rightarrow {}^1D_2$ .

Волновая функция конечного состояния может быть представлена в виде

$$\psi_f = \left\{ e^{-i\delta_0} \frac{u_0(r)}{kr} - \frac{5}{2} \left[ 3 \left( \frac{kr}{kr} \right)^2 - 1 \right] \frac{g_2(kr)}{kr} \right\} \chi_0^0. \quad (8.15)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой возмущённую взаимодействием нейтрона и протона  ${}^1S_0$ -волну непрерывного спектра; выше мы видели, что на больших расстояниях  $u_0$  ведёт себя, как

$$u_0 \approx \sin(kr + \delta_0).$$

Второе слагаемое в (8.15) представляет собой  $D$ -волну в разложении  $e^{ikr}$  в ряд по полиномам Лежандра [см. (7.19)]; множитель  $e^{-i\delta_0}$  перед  $u_0/kr$  введён для того, чтобы функция  $\psi_f$  на бесконечности вела себя, как сумма первого слагаемого, отвечающего  $l=0$  ( $S$ -волна), в разложении плоской волны  $e^{ikr}$  и сходящейся шаровой волны [7].

Подставляя выражения (8.7) и (8.15) в формулу (8.6), получим следующее выражение для эффективного сечения расщепления дейтрона, вызываемого поглощением магнитного дипольного  $\gamma$ -кванта [7]:

$$\begin{aligned} d\sigma_p^{(m)} &= \frac{\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} (\mu_n - \mu_p)^2 \cdot \frac{\hbar\omega}{Mc^2 k} \left\{ \left( \int_0^\infty uu_0 dr \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos \delta_0}{\sqrt{2}} \left( \int_0^\infty uu_0 dr \right) \left( \int_0^\infty g_2 w dr \right) (3 \cos^2 \delta - 1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (5 - 3 \cos^2 \delta) \left( \int_0^\infty g_2 w dr \right)^2 \right\} \frac{d\omega_p}{4\pi} \end{aligned} \quad (8.16)$$

(в этом выражении уже произведено усреднение по направлениям поляризации  $\gamma$ -кванта).

Интегральное сечение имеет вид

$$\sigma_p^{(m)} = \frac{\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} (\nu_n - \nu_p)^2 \frac{\hbar \omega}{Mc^2} \frac{1}{k} \times \\ \times \left\{ \left( \int_0^\infty u_0 u dr \right)^2 + \left( \int_0^\infty g_s w dr \right)^2 \right\}. \quad (8.17)$$

Отметим, что при фотомангнитном расщеплении угловое распределение вылетающих продуктов расщепления является в основном сферически симметричным; небольшая асимметрия вызывается, как видно из формулы (8.16), присутствием в основном состоянии дейтрона  $D$ -волны.

Если пренебречь в формуле (8.17) вторым слагаемым, содержащим  $\psi$ -функцию  $D$ -волны, и воспользоваться для  $u$  и  $u_0$  соответственно выражениями (7.28), (7.29), то мы получим следующий результат [41]:

$$\sigma_p^{(m)} = \frac{2\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar^2}{M^2 c^2} (\nu_n - \nu_p)^2 \frac{\sqrt{E} \sqrt{\varepsilon} (\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon'})^2}{(E + \varepsilon)(E + \varepsilon')}. \quad (8.18)$$

Отметим, что при малых энергиях  $\sigma_p^{(m)}$  пропорционально  $\sqrt{E}$ , в то время как  $\sigma_p^{(d)} \approx E^{3/2}$ ; таким образом при малых  $E$  магнитное дипольное поглощение является более существенным, чем электрическое дипольное. Оба типа расщепления играют одинаковую роль при энергии  $E_0 \approx 3.10^5$  eV. Если энергия продуктов расщепления меньше  $E_0$ , то преобладает магнитное дипольное поглощение.

## ГЛАВА II

### СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТЯЖЁЛЫХ ЯДЕР

**§ 9. Составное ядро.** В предыдущей главе мы рассмотрели свойства дейтрона—простейшей ядерной системы, состоящей из двух частиц. Мы видели, что для описания многих процессов, происходящих в системе нейтрон—протон в области малых энергий, не требуется детальная теория ядерных сил.

Оказывается, что возможно описать ряд свойств ядерных реакций, происходящих с тяжёлыми ядрами при сравнительно небольших энергиях, также без детальной теории ядерных сил. Это связано с возможностью применения при изучении свойств тяжёлых ядер, содержащих большое число сильно взаимодействующих частиц, методов статистической физики\*).

Для того чтобы выяснить особенности протекания ядерных реакций, сравним между собой атомные и ядерные столкновения.

В том хорошо изученном случае, когда энергия взаимодействия падающей частицы (скажем электрона) с отдельными электронами атома мала по сравнению с энергией самой частицы, передача энергии от частицы атомному электрону представляет собой довольно редкое явление. Наиболее вероятным будет прохождение частиц через атом без потери энергии или, иначе говоря, упругое рассеяние частиц.

\*) Рассматриваемым ниже вопросам посвящены работы Н. Бора [42], [43], Л. Ландау [48], Я. Френкеля [41], а также ряд работ других авторов [44], [45], [49]. Мы излагаем далее основные результаты этих работ.

С малой величиной взаимодействия связана малая величина ускорения падающей частицы. Отсюда видно, что время, в течение которого частица находится в области атома, по порядку величины равно частному от деления длины порядка размеров атома на скорость частицы.

Так как и ускорение и это время невелики, то процессы излучения при атомных столкновениях в общем мало вероятны.

Иные соотношения имеют место при ядерных столкновениях, происходящих с участием частиц, энергия которых значительно меньше энергии связи атомных ядер.

Наиболее существенным является то обстоятельство, что взаимодействие между сталкивающейся частицей и ядром очень велико. Энергия этого взаимодействия того же порядка величины, что и энергия взаимодействия между отдельными частицами, образующими ядро.

Благодаря наличию в атоме тяжёлого ядра мы можем считать, что при атомных столкновениях падающая частица движется в некотором поле атома, т. е. рассматривать столкновение как задачу одного тела. В ядре все частицы равноправны, поэтому, в отличие от атомного столкновения, ядерное столкновение является существенно задачей многих тел.

Сильное взаимодействие между сталкивающейся частицей и ядром приводит к тому, что очень скоро после соприкосновения с ядром падающая частица теряет значительную часть своей энергии, которая передаётся другим частицам, составляющим исходное ядро.

Это распределение энергии, сосредоточенной вначале на падающей частице, между всеми имеющимися частицами таково, что ни одна из них, вообще говоря, не будет обладать достаточной энергией, чтобы сразу покинуть образовавшуюся систему—исходное ядро плюс падающая частица. Только по прошествии длительного времени, когда благодаря флуктуации какая-либо частица приобретёт достаточную энергию, чтобы преодолеть силы притяжения, действующие на неё со стороны остальных частиц, она сможет покинуть ядро.

Мы приходим, следовательно, к весьма важному выводу: сталкивающуюся частицу и ядро можно рас-

сматривать как единую квантовомеханическую систему, которая существует, не распадаясь, в течение длительного времени, если измерять последнее в характерной ядерной шкале. Это значит, что время жизни системы значительно больше того времени, в течение которого сталкивающаяся с ядром частица может пройти расстояние порядка размеров ядра, не задерживаясь в последнем. Если считать скорость частицы порядка  $4 \cdot 10^9$  см/сек и размеры ядра порядка  $12 \cdot 10^{-13}$  см, то «характерное ядерное время»  $\tau$  будет порядка  $3 \cdot 10^{-22}$  сек.

В течение времени существования рассматриваемой системы свойства её не отличаются от свойств обычных ядер, находящихся в сильно возбуждённых состояниях. Поэтому принято называть систему ядро + падающая частица составным ядром (компаунд-ядром).

Следует подчеркнуть, что составное ядро находится в состоянии с положительной энергией; иными словами, энергия этой системы превосходит энергию, необходимую для отрыва от составного ядра, по крайней мере, некоторых из частиц, входящих в его состав.

Выше мы говорили, что только по прошествии длительного времени энергия возбуждения составного ядра может случайно сосредоточиться на какой-либо частице, которая сможет поэтому покинуть составное ядро. При этом совсем не обязательно, чтобы вылетевшая из составного ядра частица была того же сорта, что и первоначальная частица, приведшая к образованию этого ядра. Напротив, вообще говоря, мало вероятно, чтобы природа обеих частиц была одинаковой, так как имеется много возможностей распада составного ядра. Ещё менее вероятно, чтобы при одинаковой природе налетающей и вылетающей частиц внутреннее состояние ядра не менялось; более вероятно, что оставшееся после вылета частицы ядро будет находиться в возбуждённом состоянии.

Если вылетающая частица того же сорта, что и падающая, и внутренние состояния начального ядра и ядра, остающегося после распада составного ядра, совпадают, то мы имеем дело с упругим рассеянием частиц. Можно сказать, что упругое рассеяние представляет собой сравнительно редкое событие при ядерных столкновениях, так

как распад составного ядра может происходить, вообще говоря, различными способами, при которых вылетающая частица отличается по своей природе от падающей частицы, а остающееся ядро находится в возбуждённом состоянии. Следует, однако, отметить, что могут представиться случаи, когда упругое рассеяние будет наиболее вероятным (см. § 19).

Если падающая и вылетающая частицы одной природы, но исходное и образующееся ядра обладают различной энергией, то говорят о неупругом рассеянии частиц. Если частицы отличаются по своей природе, то говорят о ядерном превращении. При ядерных столкновениях оба типа процессов играют существенную роль.

Заметим, что при ядерных столкновениях процессы излучения иногда играют существенную роль. Это связано с тем, что для вылета  $\gamma$ -кванта требуется меньшая концентрация энергии, чем для вылета других частиц;  $\gamma$ -квант может унести с собой меньше энергии, чем вылетающая из ядра частица. Поэтому при малых энергиях возбуждения время жизни составного ядра определяется, главным образом, взаимодействием ядерных частиц с излучением, хотя это взаимодействие и невелико (в силу малости постоянной тонкой структуры  $e^2/\hbar c$  и малости отношения  $v/c$ , где  $v$  — скорость ядерных частиц, а  $c$  — скорость света) [42], [43]. Отсюда следует, что время жизни составного ядра с небольшой энергией возбуждения (которая лишь несколько превышает энергию связи нейтрона в ядре) очень велико по сравнению с характерным ядерным временем.

Усилению роли процессов излучения при ядерных столкновениях по сравнению с атомными столкновениями содействует также и то обстоятельство, что время, которое проводит налетающая частица в ядре, относительно велико, в силу чего происходит «запутывание» частицы в ядре.

Итак, ядерные столкновения характеризуются сравнительно малым упругим рассеянием; существенную роль играют процессы ядерных превращений и неупругого рассеяния, а также процессы излучения.

Изложенные выше особенности ядерных столкновений были впервые разъяснены Н. Бором [42], [43], который показал, что в ядерном столкновении следует различать две стадии: образование квазистационарного, долго живущего составного ядра и распад последнего. Иными словами, ядерное столкновение происходит согласно схеме: начальное ядро + падающая частица  $\rightarrow$  составное ядро  $\rightarrow$  остающееся ядро + вылетающая частица.

Поскольку связь между частицами в составном ядре чрезвычайно сильна, вторая стадия (распад составного ядра) должна рассматриваться как отдельное событие, не зависящее от первой стадии — образования составного ядра, т. е. «запутывания» падающей частицы в ядерном веществе. Конечный результат ядерного столкновения определяется соревнованием между различными возможными процессами распада составного ядра, совместимыми с общими законами сохранения.

Для того чтобы понятие составного ядра как квазистационарной системы имело смысл, необходимо, очевидно, предполагать достаточно большим общее число частиц, между которыми распределяется энергия, вначале связанная с падающей частицей.

Что касается энергии падающей частицы, то она не должна быть слишком большой, так как в области больших энергий ядро становится «прозрачным» для частицы. Понятием составного ядра можно пользоваться, если длина свободного пробега падающей частицы в ядерном веществе мала по сравнению с размерами ядра. Для лёгких ядер это соответствует энергиям падающей частицы, меньшим, примерно, 30—40 MeV [117], для тяжёлых ядер — энергиям, меньшим  $\sim 200$  MeV.

Ниже мы будем рассматривать случай достаточно малых энергий падающей частицы, когда законно пользоваться понятием составного ядра.

Подобно обычным стабильным ядрам, составное ядро характеризуется спектром своих энергетических уровней. Так как составное ядро представляет собой только квазистационарную, а не стабильную систему, то эти уровни обладают некоторой шириной. Ширина уровня связана

со временем жизни системы, находящейся на этом уровне. Согласно принципу неопределённости, ширина уровня  $\gamma$  по порядку величины равна частному от деления квантовой постоянной  $\hbar$  на время жизни  $\tau$ :

$$\gamma \approx \frac{\hbar}{\tau}. \quad (9.1)$$

Вероятность  $w$  перехода системы в единицу времени из состояния, соответствующего рассматриваемому уровню, в любое другое возможное состояние равна:

$$w = \frac{1}{\tau}. \quad (9.2)$$

Если распад составного ядра, находящегося в некотором состоянии, может происходить различными путями, то  $w$  можно представить в виде

$$w = \sum_i w_i, \quad (9.3)$$

где  $w_i$  — вероятность распада  $i$ -го типа. Соответственно этому можно говорить о частичной ширине  $\gamma_i$  рассматриваемого уровня, отвечающей распаду  $i$ -го типа, понимая под  $\gamma_i$  вероятность  $w_i$ , умноженную на  $\hbar$ . Очевидно, полная ширина уровня равна сумме его частичных ширин:

$$\gamma = \sum_i \gamma_i. \quad (9.4)$$

Можно, например, говорить о нейтронной ширине  $\gamma_n$ , радиационной ширине  $\gamma_r$ , ширинах  $\gamma_\alpha$ ,  $\gamma_p$  по отношению к вылету  $\alpha$ -частицы и протона и т. д., понимая под этими величинами вероятности вылета из составного ядра нейтрона,  $\gamma$ -кванта,  $\alpha$ -частицы, протона и т. д., измеренные в энергетической шкале.

Так как время жизни составного ядра велико, если измерять его в характерных ядерных единицах, то ширины уровней составного ядра оказываются малыми по сравнению с ядерными энергиями связи. Отсюда, однако, не следует, что ширины уровней обязательно малы по сравнению с расстояниями между соседними уровнями. Принципиально возможны два случая: когда ширины уровней малы по сравнению с расстояниями

между соседними уровнями и когда ширины того же порядка, что и расстояния между уровнями или даже больше их.

Первый случай осуществляется в области энергий возбуждения составных ядер, которые возникают при облучении ядра медленными частицами (например, медленными нейтронами). Второй случай имеет место для уровней составных ядер, возникающих при бомбардировке ядер быстрыми частицами. В этом случае, как мы увидим далее, обычно расстояние между соседними уровнями меньше их ширин.

Только в первом случае можно говорить об отдельных дискретных уровнях; во втором случае мы имеем дело со существом с непрерывным спектром. Очень важной особенностью первого случая является резко выраженная зависимость вероятности или эффективного сечения образования составного ядра от энергии падающей частицы. Эта зависимость имеет резонансный характер: при некоторых значениях энергии падающей частицы вероятность образования составного ядра, а следовательно, и сечение для какого-либо процесса ядерного расщепления становятся особенно большими. Резонансные явления такого вида действительно наблюдаются, например, при взаимодействии медленных нейтронов с ядрами.

Во втором случае (перекрывающиеся уровни) не существует резко выраженной зависимости сечения расщепления от энергии. Величина сечения в этом случае обусловлена действием большого количества уровней. Наблюдаемое сечение представляет собой результат усреднения сечения, связанного с каждым уровнем, по большому числу уровней.

Заметим, что изучение этого случая упрощается благодаря тому, что при больших возбуждениях, особенно тяжёлых ядер, когда практически мы имеем дело с непрерывным энергетическим спектром, можно пользоваться статистическими методами. К рассмотрению этого случая мы теперь и перейдём.

**§ 10. Статистические свойства тяжёлых ядер.** В предыдущем параграфе было показано, что существенной чертой ядерных столкновений является образование

квазистационарного составного ядра. Рассмотрим теперь, каковы особенности распределения энергии возбуждения между частицами, образующими составное ядро. Мы говорили уже, что ядерные частицы очень сильно взаимодействуют друг с другом. По этой причине весьма мало вероятно, чтобы энергия возбуждения была сосредоточена на одной частице. Тесная связь между частицами не позволяет рассматривать движение одной частицы как движение, происходящее в некотором консервативном поле, создаваемом другими частицами. Состояния ядра нельзя классифицировать по числу возбуждённых частиц.

Если бы возбуждение ядра сводилось к возбуждению одной частицы, то система ядерных уровней была бы подобна системе атомных уровней, которая характеризуется небольшим числом далеко отстоящих друг от друга уровней.

В ядре имеет место квантованное коллективное движение всех частиц. Если число частиц, входящих в состав ядра, достаточно велико, то энергия возбуждения ядра может быть распределена между частицами весьма большим числом способов. Соответственно большому числу способов распределения энергии между частицами мы имеем большое число энергетических уровней ядра, расстояния между которыми тем меньше, чем больше энергия возбуждения ядра.

Для достаточно тяжёлых ядер, находящихся в сильно возбуждённых состояниях, распределение ядерных энергетических уровней становится практически непрерывным. Следует, однако, подчеркнуть, что даже в этом случае время жизни составного ядра в сотни тысяч раз превосходит характерное ядерное время, равное по порядку величины  $10^{-22}$  сек. Мы будем считать, что энергия возбуждения ядра значительно меньше энергии, необходимой для разделения всех его частиц \*). Это обстоятельство даёт возможность проводить аналогию между ядром

и обычными макроскопическими телами — жидкими и твёрдыми.

Тепловое движение в макроскопических телах имеет много общего с движением частиц в возбуждённом ядре. При этом следует, очевидно, сравнивать внутреннее состояние ядра с состоянием материи при очень низких температурах, так как энергия возбуждения ядра в рассматриваемых условиях значительно меньше его энергии связи. Заметим, что хотя обычные тела при очень низких температурах находятся в кристаллическом состоянии, ядерному веществу нельзя приписывать кристаллическую, т. е. некоторую упорядоченную структуру<sup>[43]</sup>.

В самом деле, рассмотрим отклонения атомов от их положений равновесия, вызванные так называемыми нулевыми колебаниями. Амплитуда этих колебаний равна по порядку величины

$$\left( \frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{1/2},$$

где  $m$  — масса атома,  $\omega$  — частота колебаний. В твёрдых телах величина этого отклонения значительно меньше расстояния между соседними атомами. Для ядер можно пользоваться той же формулой, понимая под  $m$  массу ядерной частицы. Хотя в этом случае величина частоты значительно больше, чем частота колебаний атома в кристалле, однако плотность ядерного вещества столь велика, что расстояния между ядерными частицами будут того же порядка величины, что и амплитуда нулевых колебаний. По этой причине ядерное вещество не становится кристаллическим.

Мы можем сравнивать внутреннее состояние ядра скорее с жидким, чем с твёрдым состоянием. Имея в виду эту аналогию, рассмотрим, главным образом с иллюстративной целью, объёмные и поверхностные колебания макроскопических тел, которые происходят под действием упругих сил и сил поверхностного натяжения.

Частоты наименьших объёмных и поверхностных колебаний равны по порядку величины соответственно:

$$\omega_v \sim \varepsilon^{1/2} \rho^{-1/2} V^{-1/3}, \quad \omega_q \sim \alpha^{1/2} \rho^{-1/2} V^{-1/2},$$

\*) Это условие не выполняется в случае лёгких ядер, облучаемых частицами, получаемыми на самых мощных ускорителях (с энергиями  $> 10^8$  eV).

где  $\rho$  — плотность вещества,  $V$  — объём тела,  $\epsilon$  — коэффициент «упругости» и  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения\*).

Применяя эти формулы к ядру, мы положим:

$$\rho = m\delta^{-3}, \quad V = N\delta^3, \quad \epsilon = C_e K\delta^{-3}, \quad \alpha = C_a K\delta^{-2},$$

где  $m$  — масса ядерной частицы,  $\delta^3$  — объём, приходящийся на одну частицу,  $N$  — общее число частиц в ядре,  $K$  — средняя кинетическая энергия частицы в ядре, равная по порядку величины

$$K \sim \frac{\hbar^2}{2m\delta^2} \approx 10-15 \text{ MeV},$$

и  $C_a$  и  $C_e$  — безразмерные множители. Можно думать, что они приблизительно постоянны для всех ядер, кроме самых лёгких [43]. Поэтому мы в дальнейшем не будем их выписывать. Умножив  $\omega_e$  и  $\omega_a$  на  $\hbar$ , мы получим разности энергии между последовательными состояниями ядра. Эти разности для объёмных и поверхностных колебаний равны соответственно:

$$\Delta_e E \sim KN^{-1/3}, \quad \Delta_a E \sim KN^{-1/2}. \quad (4.1)$$

\*) Частота объёмных колебаний может быть представлена в виде

$$\omega_e = sk,$$

где  $k$  — волновой вектор и  $s$  — скорость распространения колебаний, равная по порядку величины  $\sqrt{\frac{\epsilon}{\rho}}$ . Подставляя сюда вместо  $k$  по порядку величины  $V^{-1/3}$  ( $V$  — объём тела), мы и получим первую из приведённых в тексте формул.

Для получения второй формулы следует иметь в виду, что частоты поверхностных колебаний пропорциональны  $k^{3/2}$  [46]:

$$\omega_a = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} k^{3/2}.$$

Подставляя сюда вместо  $k$  по порядку величины  $V^{-1/3}$ , мы получим:

$$\omega_a \approx \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} V^{-1/2}.$$

Мы видим, что с ростом  $N$  разности энергий убывают, как это и утверждалось выше. Достаточно тяжёлое ядро можно рассматривать как систему с большим числом степеней свободы, могущих возбуждаться множеством различных способов. В этих условиях целесообразно пользоваться при изучении свойств ядер методом статистической физики, что было сделано впервые Л. Ландау и Я. Френкелем. К рассмотрению этого метода мы теперь и перейдём\*).

Введём в рассмотрение температуру ядра  $T$  (мы будем её измерять в энергетических единицах), а также другие термодинамические функции: энтропию ядра  $S$ , энергию возбуждения  $U$  и свободную энергию  $F$ .

Энергетический спектр ядра будем считать непрерывным. Обозначим через  $\rho(U) dU$  число уровней ядра с энергией возбуждения между  $U$  и  $U + dU$ , причём каждый уровень считается столько раз, какова кратность его вырождения.

Свободная энергия  $F$  определяется, как известно, из следующего соотношения:

$$e^{-\frac{F}{T}} = \sum_k e^{-\frac{E_k}{T}}, \quad (4.2)$$

где суммирование производится по всем уровням ядра. Переходя к непрерывному спектру, будем иметь:

$$e^{-\frac{F}{T}} = \int \rho(E) e^{-\frac{E}{T}} dE. \quad (4.2')$$

Свяжем температуру ядра  $T$  с энергией его возбуждения  $U$ . Последняя определяется формулой

$$U = \frac{\sum_k E_k e^{-\frac{E_k}{T}}}{\sum_k e^{-\frac{E_k}{T}}} = \frac{\int E\rho(E) e^{-\frac{E}{T}} dE}{\int \rho(E) e^{-\frac{E}{T}} dE}. \quad (4.3)$$

\*) Ниже мы следуем изложению Бете [44], § 53.



Это соотношение даёт возможность найти  $U$  как функцию  $T$ , если энергетический спектр ядра известен.

Сравнивая (10.2') и (10.3), получим хорошо известное из статистики соотношение

$$U = \frac{d \frac{F}{T}}{d \frac{1}{T}} = F - T \frac{dF}{dT} = F + TS,$$

где  $S$  — энтропия ядра;  $S = -\frac{dF}{dT}$ .

В интегралах (10.2'), (10.3) главную роль играют значения энергии  $E_k$ , близкие к  $U$ . Мы положим поэтому:

$$e^{-\frac{F}{T}} = \rho(U) e^{-\frac{U}{T}} \lambda(U), \quad (10.4)$$

где  $\lambda(U)$  — некоторая функция  $U$ , которую можно считать медленно меняющейся по сравнению с функциями  $e^{-F/T}$ ,  $\rho(U)$ ,  $e^{-U/T}$ . Из (10.4) следует, что

$$\rho(U) = e^{\frac{U-F}{T}} \frac{1}{\lambda(U)} = e^S \frac{1}{\lambda(U)}. \quad (10.5)$$

Найдём  $\lambda(U)$ . Подставим для этого в (10.2') вместо  $\rho(E)$  выражение (10.5). Мы получим при этом:

$$e^{-\frac{F}{T}} = \int e^{S(E) - \frac{E}{T}} \frac{dE}{\lambda(E)}, \quad (10.6)$$

где  $S(E)$  — энтропия, отвечающая энергии  $E$ . В интеграле (10.6) главную роль играют значения  $E$ , близкие к  $U$ ; так как  $\lambda(E)$  представляет собой медленно изменяющуюся функцию, то мы вынесем значение  $\lambda$  в точке  $E=U$  за знак интеграла.

В результате получим:

$$\lambda(U) = \int e^{\frac{F}{T} + S(E) - \frac{E}{T}} dE = \int e^{S(E) - S(U) + \frac{U-E}{T}} dE.$$

Преобразуем показатель в подынтегральной функции:

$$S(E) - S(U) + \frac{U-E}{T} = \frac{dS}{dU} (E-U) + \frac{1}{2} \frac{d^2S}{dU^2} (E-U)^2 + \frac{U-E}{T}.$$

Замечая, что

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T},$$

получим:

$$\lambda(U) = \int e^{\frac{1}{2} \frac{d^2S}{dU^2} (E-U)^2} dE.$$

Величина  $\frac{d^2S}{dU^2}$  отрицательна, так как  $U$  — монотонно возрастающая функция  $T$ . Расширив пределы интегрирования от  $-\infty$  до  $+\infty$ , найдём:

$$\lambda(U) = \sqrt{2\pi} \left| \frac{d^2S}{dU^2} \right|^{-1/2} = \sqrt{2\pi} T \left( \frac{dT}{dU} \right)^{1/2}, \quad (10.7)$$

и следовательно,

$$\rho(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{T} \left( \frac{dT}{dU} \right)^{1/2} e^S(U). \quad (10.8)$$

Считая для простоты уровни невырожденными, найдём отсюда среднее расстояние между уровнями ядра с энергией возбуждения  $U$ . Обозначая его через  $D(U)$ , получим:

$$D(U) = T \sqrt{2\pi \frac{dT}{dU}} e^{-S(U)}. \quad (10.8')$$

Для того чтобы оценить величину  $D(U)$ , необходимо сделать какие-либо упрощающие предположения, дающие возможность установить связь между энтропией и энергией возбуждения ядра или, что по сути то же самое, между энергией  $U$  и температурой  $T$ .

Будем считать энергию и температуру ядра, находящегося в основном состоянии, равными нулю. Так как энергия возбуждения ядра мала по сравнению с его общей энергией связи, то мы имеем дело, как уже упоминалось выше, с низкими ядерными температурами.

Энергия возбуждения обычных макроскопических тел при низких температурах выражается формулой вида

$$U = BT^n, \quad (10.9)$$

где  $B$  и  $n$  — константы.

Так для твёрдых тел показатель  $n=4$ , для вырожденного фермиевского газа (например, электронного «газа» в металле)  $n=2$ . Для жидкой капли, совершающей поверхностные колебания,  $n=7/3$  [44].

Можно предполагать, что формулой такого же вида определяется в случае низких ядерных температур и энергии возбуждения ядра. Следует, однако, иметь в виду, что ни один из указанных выше примеров не может быть целиком использован в качестве макроскопической модели сильно возбуждённого ядра, так как в этих примерах полностью не воспроизводятся условия, которые в действительности осуществляются в ядре.

В самом деле, если исходить из газовой модели ядра, то при этом не учитывается взаимодействие между частицами. Модель жидкой капли учитывает в некотором смысле взаимодействие между ядерными частицами. Однако нет оснований считать, что свойства ядерного вещества при низких температурах, когда существенны квантовые эффекты, могут удовлетворительно описываться моделью жидкой капли.

Можно также заметить, что проводимая в этой модели аналогия между ядром и вязкой жидкостью не может считаться правильной ввиду тесной связи между отдельными частицами. Что касается модели твёрдого тела — кристалла, то, как уже было отмечено ранее, ею также пользоваться нельзя.

Вопрос о характере возбуждения ядра связан с большими трудностями, которые происходят как от нашего незнания специфических ядерных сил, так и от сложности решения соответствующей квантовомеханической задачи, если бы даже силы были нам известны.

Формула для энергии типа (10.9) в применении к ядру разъясняет тем не менее основные особенности совокупности ядерных уровней при высоких возбуждениях ядра, в частности, показывает, как возрастает плотность ядерных уровней с увеличением энергии возбуждения. Конечно, при этом не может быть и речи о точном определении  $D(U)$ , так как формула (10.8') очень чувствительна к значению энтропии  $S(U)$ , зависящей от параметров  $B$  и  $n$ . Поскольку определить точно эти константы невозможно,

мы можем лишь грубо оценить величины  $T$ ,  $D$ ,  $\rho$  в зависимости от энергии возбуждения ядра.

Заметим, что для очень тяжёлых ядер, пренебрегая поверхностными эффектами, можно считать константу  $B$ , так же как и в случае макроскопических тел, пропорциональной массе, т. е. числу частиц, входящих в состав ядра. Это предположение даёт возможность определить зависимость плотности уровней от атомного веса.

Для реальных ядер сделанное предположение является очень грубым, так как по диаметру наиболее тяжёлых ядер укладывается приблизительно всего 7 частиц и, следовательно, поверхностные эффекты даже для самых тяжёлых ядер всё ещё играют существенную роль.

Считая  $U = BT^n$ , мы получим для энтропии выражение

$$S = B \frac{n}{n-1} T^{n-1} = \frac{n}{n-1} (BU^{n-1})^{\frac{1}{n}}.$$

Подставляя это выражение в формулу (10.8'), найдём:

$$D(U) = (2\pi n)^{1/2} \left(\frac{U^{n+1}}{B}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{n}{n-1} B^{\frac{1}{n}} U^{\frac{n-1}{n}}\right). \quad (10.8'')$$

Заметим, что согласно теореме Нернста, при  $T=0$  энтропия должна обращаться в нуль и, следовательно, должно выполняться условие  $n > 1$ .

Приведём в заключение этого параграфа в качестве иллюстрации значения  $T$  и  $D$  в зависимости от  $U$  для различных ядер, вычисленные для модели жидкой капли, в которой учитываются поверхностные и объёмные колебания [44] (см. таблицу на стр. 106).

Приведённые данные показывают, что с увеличением энергии возбуждения и увеличением числа частиц уменьшается расстояние между уровнями.

Для тяжёлых ядер ( $A > 100$ ) при энергии возбуждения  $U \sim 10$  MeV температура ядра составляет около 1 MeV. Сравнивая эту температуру с кинетической энергией ядерной частицы  $K = \hbar^2/2m\delta^2 \approx 10$  MeV, мы видим, что

Атомный вес $A =$	20	50	100	200
Температура в MeV для				
$U = 5$ MeV	1,43	1,11	0,92	0,75
$U = 10$ MeV	1,82	1,41	1,17	0,97
$U = 20$ MeV	2,31	1,81	1,49	1,24
Расстояние между уровнями в eV для				
$U = 5$ MeV	36 000	5 900	1 100	450
$U = 10$ MeV	2 700	180	16	0,9
$U = 20$ MeV	33	0,55	0,015	$1,5 \cdot 10^{-4}$

$T \sim \frac{1}{10}$  K. Таким образом ядро действительно можно считать «холодным», что и предполагалось выше.

§ 11. Связь между шириной уровня и сечением образования составного ядра. В предыдущих параграфах мы говорили, что если энергия возбуждения составного ядра сосредоточивается на какой-либо частице, то последняя покидает составное ядро. Возможны следующие виды превращения составного ядра: эмиссия нейтрона или заряженной частицы (протон,  $\alpha$ -частица), испускание  $\gamma$ -кванта и, наконец, деление ядра.

Заметим, что переход из возбуждённого в основное состояние может происходить также в результате  $\beta$ -распада составного ядра. Это явление мы можем, однако, не учитывать, так как время жизни ядра по отношению к  $\beta$ -распаду в большинстве случаев значительно больше времени жизни по отношению к другим видам превращений.

Из перечисленных выше процессов деление происходит только с самыми тяжёлыми ядрами. Что касается эмиссии частиц, то вероятность вылета заряженной частицы из-за барьерных эффектов, вообще говоря, меньше, чем нейтральной. Этот вывод не относится к лёгким ядрам и несправедлив для очень больших возбуждений ядра, когда барьерный фактор не играет роли (см. ниже). Поэтому наиболее важными, конкурирующими друг с другом про-

цессами, определяющими время жизни составного ядра, являются вылет нейтрона и испускание  $\gamma$ -кванта.

Мы знаем, что каждая возможность распада связана с некоторым уширением уровня системы. Поэтому каждому процессу распада можно привести в соответствие так называемую частичную ширину уровня, которая определяется, как вероятность рассматриваемого процесса в единицу времени, умноженная на  $\hbar$ .

Сделаем несколько предварительных замечаний о частичных ширинах по отношению к вылету нейтрона и эмиссии  $\gamma$ -кванта, которые обычно называют нейтронной и радиационной шириной. Нейтронная ширина  $\gamma_n$  существенно зависит от энергии возбуждения составного ядра. Если последняя меньше энергии связи нейтрона в ядре, то  $\gamma_n$  равна нулю. Ниже мы увидим, что если энергия возбуждения близка к энергии связи нейтрона и несколько больше её, так что кинетическая энергия вылетающего из ядра нейтрона невелика, то  $\gamma_n$  пропорциональна скорости вылетающего нейтрона.

С увеличением энергии возбуждения нейтронная ширина сильно возрастает. Этому содействует прежде всего увеличение скорости нейтрона, но более существенным является то обстоятельство, что при больших энергиях возбуждения составного ядра ядро, остающееся после вылета нейтрона, может само по себе находиться в возбуждённом состоянии. Поэтому число возможностей, связанных с вылетом нейтрона, значительно возрастает, что и приводит к сильному увеличению  $\gamma_n$ .

Радиационная ширина  $\gamma_r$ , вообще говоря, отлична от нуля при всех сколь угодно малых возбуждениях ядра. Для энергий возбуждения, не превосходящих энергию связи нейтрона в ядре, радиационная ширина совпадает с полной шириной уровня, так как нейтронная ширина при этом обращается в нуль. При достаточно больших энергиях возбуждения радиационная ширина значительно меньше нейтронной.

Далее мы оценим  $\gamma_r$ , здесь же заметим, что практически во всех случаях, когда приходится иметь дело с ядрами среднего атомного веса ( $A \sim 100$ ),  $\gamma_r$  не превосходит 0,1 eV и скорее меньше этой величины<sup>[50]</sup>. Нейтрон-

ная ширина для таких ядер уже при энергии вылетающих нейтронов порядка 100 keV значительно превосходит радиационную ширину.

Перейдём к выяснению того, каким образом можно связать частичные ширины с другими величинами, характеризующими состояние ядра. Мы воспользуемся для этой цели так называемым принципом детального равновесия, устанавливающим связь между вероятностями прямого и обратного переходов. В данном случае речь идёт об установлении связи между шириной уровня и сечением образования составного ядра [48], [49], [44].

Представим себе большой сосуд объёма  $\Omega$ , содержащий ядра самых различных сортов. Между ядрами могут происходить ядерные реакции. Мы рассмотрим состояние статистического равновесия, при котором число расщеплений в единицу времени ядер сорта  $C$ , происходящих, согласно схеме  $C \rightarrow A + a$  ( $A$ ,  $a$  — продукты реакции), равно числу рекомбинаций в единицу времени типа  $A + a \rightarrow C$ .

Обозначим вероятности процессов расщепления и рекомбинации, отнесённые к единице времени, соответственно через  $\omega_{Aa}^C$  и  $\omega_C^{Aa}$ . Условие равенства между числом расщеплений типа  $C \rightarrow A + a$  и числом рекомбинаций типа  $A + a \rightarrow C$  можно записать в виде

$$g_C \omega_{Aa}^C = g_A g_a \omega_C^{Aa}, \quad (11.1)$$

где  $g_A$  — статистический вес состояния, в котором находится ядро  $A$  и т. д.

Обозначим через  $E_A, E_C, \dots$  значения внутренней энергии ядер  $A, C, \dots$ , понимая под внутренней энергией разность между полной энергией покоящегося ядра и энергией покоя составляющих его частиц. Пусть далее  $p_A, p_C, \dots$  обозначают количества движения ядер  $A, C, \dots$ . Мы предположим, что количество движения ядра  $A$  находится в интервале между  $p_A$  и  $p_A + dp_A$ .

Если  $E_A$  относится к дискретному спектру, то под статистическим весом  $g_A$  мы должны понимать произведение  $2i_A + 1$ , ( $i_A$  — момент количества движения ядра  $A$  в состоянии с энергией  $E_A$ ) на  $\frac{\Omega dp_A}{(2\pi\hbar)^3}$ .

Если  $E_A$  относится к непрерывному спектру и внутренняя энергия ядра  $A$  лежит в интервале  $(E_A, E_A + dE_A)$ , то статистический вес  $g_A$  равен

$$g_A = \rho(E_A) dE_A \frac{\Omega dp_A}{(2\pi\hbar)^3},$$

где  $\rho(E_A) dE_A$  — число уровней ядра  $A$  в интервале энергии  $(E_A, E_A + dE_A)$ , причём каждый уровень считается столько раз, какова кратность его вырождения.

В этом параграфе мы понимаем под  $C$  составное ядро, энергия которого лежит в непрерывном спектре, состояние же ядра  $A$  считаем дискретным. Под  $a$  мы понимаем частицу, покидающую ядро  $C$ . Итак,

$$g_C = \rho(E_C) dE_C \frac{\Omega dp_C}{(2\pi\hbar)^3};$$

$$g_A = (2i + 1) \frac{\Omega dp_A}{(2\pi\hbar)^3}; \quad g_a = (2s + 1) \frac{\Omega dp_a}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (11.2)$$

где  $s$  — спин частицы  $a$ ,  $i$  — момент количества движения ядра  $A$ . В том случае, когда вылетающей частицей является  $\gamma$ -квант,  $s = 1$  или  $2$ , в зависимости от того, является ли  $\gamma$ -квант дипольным или квадрупольным.

Подставляя (11.2) в (11.1), получим:

$$\omega_{Aa}^C \rho(E_C) dE_C dp_C = \\ = (2i + 1) (2s + 1) \omega_C^{Aa} dp_A dp_a \frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (11.3)$$

Введём в рассмотрение вектор импульса относительного движения частиц  $A$  и  $a$ , который обозначим через  $p$

$$p = \frac{M_a M_A}{M_a + M_A} (v_a - v_A) = \frac{M_A p_a - M_a p_A}{M_a + M_A}$$

(здесь  $M_A, M_a$  — массы частиц  $A$  и  $a$ ;  $v_A$  и  $v_a$  — их скорости).

Легко убедиться в том, что имеет место равенство

$$dp_A dp_a = dp_C dp.$$

(Это равенство означает, что якобиан перехода от переменных  $p_A, p_a$  к переменным  $p_C = p_A + p_a$  и

$p = M_A p_a - M_a p_A / M_A + M_a$  равен единице.) Воспользовавшись этим равенством, перепишем (11.3) в виде

$$\omega_{Aa}^C dE_C = (2i+1)(2s+1) \frac{1}{\rho(E_C)} \omega_C^{Aa} dp \frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \cdot (11.4)$$

Воспользуемся теперь законом сохранения энергии, в силу которого

$$E_C = E_A + E_a + E,$$

где  $E_a$  — энергия связи частицы  $a$ ,  $E$  — энергия относительного движения частиц  $A$  и  $a$ :

$$E = \frac{p^2}{2M}, \quad M = \frac{M_a M_A}{M_a + M_A}.$$

Из написанного равенства следует, что  $dE_C = dE$ . Заменив  $dp$  на  $4\pi p^2 dp = 4\pi p^2 \frac{dp}{dE} dE_C$ , мы получим из (11.4) соотношение

$$\begin{aligned} \omega_{Aa}^C &= \omega_C^{Aa} \frac{(2i+1)(2s+1)}{\rho(E_C)} \frac{4\pi M p \Omega}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= \omega_C^{Aa} \frac{(2i+1)(2s+1)}{(2J+1)} D_J \frac{4\pi M p \Omega}{(2\pi\hbar)^3}, \end{aligned} \quad (11.5)$$

где  $J$  — момент количества движения составного ядра, а  $D_J$  — среднее расстояние между вырожденными уровнями составного ядра, момент количества движения которых равен  $J$ . (Мы считаем при этом, что кратность вырождения уровня составного ядра с энергией возбуждения  $E_C$  равна  $2J+1$ .)

Умножив  $\omega_{Aa}^C$  на  $\hbar$ , мы найдём частичную ширину по отношению к распаду типа  $C \rightarrow A + a$ , усреднённую по всем уровням составного ядра, энергия которых лежит вблизи  $E_C = E_A + E_a + E$ . Обозначим эту усреднённую ширину через  $\Gamma_{Aa}^C$ . Введём ещё сечение образования составного ядра в результате столкновения частиц  $A$  и  $a$ , равное

$$\sigma_C^{Aa} = \frac{\omega_C^{Aa}}{v/\Omega},$$

где  $v$  — скорость относительного движения частиц  $A$  и  $a$ . Формулу (11.5) мы перепишем окончательно в виде

$$\Gamma_{Aa}^C = \frac{(2i+1)(2s+1)}{2J+1} D_J \frac{\sigma_C^{Aa}}{2\pi^2 \lambda^2}, \quad (11.6)$$

где  $\lambda$  — разделённая на  $2\pi$  длина волны частицы  $a$ .

Таким образом, пользуясь статистическими соображениями, можно связать частичную ширину уровня с вероятностью обратного процесса, т. е. с сечением образования составного ядра. При этом следует ещё раз подчеркнуть, что речь идёт о ширине, усреднённой по большому числу уровней, лежащих вблизи энергии возбуждения  $E_C$ .

Умножив  $\sigma_C^{Aa}$  на  $\Gamma_{Bb}^C/\Gamma^C$ , где  $\Gamma^C$  — полная ширина уровня составного ядра, а  $\Gamma_{Bb}^C$  — частичная ширина по отношению к распаду  $C$  на ядро  $B$  и частицу  $b$ , и просуммировав полученное выражение по всем значениям момента составного ядра  $J$ , совместимым с законом сохранения момента, найдём усреднённое эффективное сечение для процесса:  $A + a \rightarrow B + b$

$$\overline{\sigma_{Bb}^{Aa}} = \frac{2\pi^2 \lambda^2}{(2i+1)(2s+1)} \sum_J (2J+1) \cdot \frac{\Gamma_{Aa}^C \Gamma_{Bb}^C}{\Gamma^C D_J}. \quad (11.7)$$

(При этом предполагается, что энергия падающей частицы задана.) Заметим, что при заданной энергии падающей частицы сечение образования составного ядра в случае столкновения исходного ядра с нейтроном будет, вообще говоря, больше, чем в случае столкновения с положительно заряженной частицей, если энергия последней меньше высоты потенциального барьера. Поэтому обычно нейтронная ширина больше частичной ширины по отношению к вылету заряженной частицы.

**§ 12. Эффективные сечения для упругих и неупругих столкновений.** Перейдём к определению сечения образования составного ядра  $\sigma_C^{Aa}$  [50].

Напомним предварительно, что параметр столкновения частиц  $A$  и  $a$ , т. е. расстояние между первоначаль-

ным направлением движения частицы  $a$  и центром ядра  $A$ , равен по порядку величины  $r_l = l\lambda$ , где  $\lambda$  — делённая на  $2\pi$  длина волны частицы  $a$  вдали от ядра, а  $l\hbar$  — момент частицы  $a$  относительно  $A$ .

Отсюда следует, что если  $a$  — медленная частица, длина волны которой  $\lambda \gg R$  ( $R$  — радиус ядра), то составное ядро сможет образоваться только в том случае, когда  $l=0$ , так как если момент частицы  $l \neq 0$ , то она проходит на расстоянии от ядра, превышающем  $R$ .

Мы рассмотрим сначала случай быстрых падающих частиц, когда  $\lambda \ll R$ .

Обозначим через  $\sigma_l$  общее эффективное сечение образования составного ядра в результате столкновения ядра  $A$  с частицей  $a$ , обладающей моментом  $l$ , независимо от того, какое значение будет иметь при этом момент количества движения составного ядра.

Если  $\alpha_{IJ}$  вероятность того, что образующееся составное ядро будет иметь момент  $J$ , то

$$\sigma_C^{Aa} \equiv \sigma_J^{A1} = \alpha_{IJ} \sigma_l. \quad (12.1)$$

Для определения  $\sigma_l$  найдём число частиц  $a$  с моментом  $l$ , падающих в единицу времени на ядро  $A$ . Так как предполагается, что  $\lambda \ll R$ , то мы можем пользоваться квазиклассическим рассмотрением.

Вдали от ядра частицы с моментом  $l$  пронизывают, очевидно, площадь кольца, расположенного перпендикулярно к направлению движения частиц, причём внутренний и внешний радиус кольца равны соответственно  $r_l = l\lambda$  и  $r_{l+1} = (l+1)\lambda$ .

Пусть поток частиц, т. е. число их, падающее в единицу времени на единицу площади, равняется единице. Так как площадь кольца равна  $(2l+1)\pi\lambda^2$ , то искомое число частиц, падающих на  $A$  в единицу времени и обладающих моментом  $l$ , равняется  $(2l+1)\pi\lambda^2$ . Это, очевидно, максимально возможное значение  $\sigma_l$ , отвечающее тому случаю, когда все падающие частицы поглощаются ядром. В действительности, поглощается лишь некоторая их часть, которую мы обозначим через  $\zeta_l$ .

Итак, сечение образования составного ядра можно представить в виде

$$\sigma_l = (2l+1)\pi\lambda^2\zeta_l, \quad 0 \leq \zeta_l \leq 1. \quad (12.2)$$

Величина  $\zeta_l$  называется вероятностью прилипания частицы к ядру или иначе вероятностью образования составного ядра [50].

Вероятность прилипания  $\zeta_l$  зависит от энергии падающей частицы. Мы увидим далее, что в случае быстрых нейтронов, длина волны которых  $\lambda \ll R$ ,  $\zeta_l = 1$ , если  $l \leq \frac{R}{\lambda}$ , и  $\zeta_l = 0$ , если  $l > \frac{R}{\lambda}$ . Это значит, что нейтрон поглощается ядром с вероятностью, равной единице, если только параметр столкновения  $r_l \leq R$ .

Для медленных нейтронов (см. § 13) вероятность прилипания  $\zeta_l$  пропорциональна скорости нейтронов.

Определим теперь  $\alpha_{IJ}$ , т. е. вероятность того, что в результате слияния ядра  $A$  и частицы  $a$  возникнет составное ядро с моментом  $J$ .

Будем предполагать, что вероятность прилипания  $\zeta_l$  не зависит от  $J$ . Иными словами, мы считаем, что вероятность появления какого-либо значения  $J$  определяется только статистическим весом  $J$ , т. е. числом различных возможных ориентаций вектора момента, имеющего значение  $J$ . Число этих ориентаций равно  $2J+1$ .

Поэтому мы полагаем:

$$\alpha_{IJ} = g_{iis,J} \frac{2J+1}{(2s+1)(2l+1)(2i+1)}, \quad (12.3)$$

где  $g_{iis,J}$  представляет собой число способов, которыми можно получить данное значение  $J$ , складывая векторно  $l, i, s$ .

Если хотя бы одно из чисел  $l, i, s$  равняется нулю, то  $g = 1$ . Если  $s = 1/2$ , то для максимального и минимального значений  $J$ , равных соответственно  $l+i+\frac{1}{2}$  и  $|l-i|-\frac{1}{2}$ ,  $g = 1$ ; для всех промежуточных значений  $J$   $g = 2$ , так как такие значения  $J$  можно

получать двумя способами (если  $i = l$ , то значение  $J = |l - 1| - \frac{1}{2}$  не реализуется).

Легко убедиться в том, что определённая указанным образом величина  $\alpha_{i,J}$  представляет собой нормированную вероятность, т. е.  $\sum_j \alpha_{i,J} = 1$ , причём суммирование распространяется на все возможные (совместимые с законом сохранения момента) значения  $J$ .

Пользуясь формулами (12.2), (12.3), представим сечение образования составного ядра  $\sigma_J^{A1}$  в виде

$$\sigma_J^{A1} = \pi \lambda^2 g_{iis,J} \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \zeta_l. \quad (12.4)$$

Подставляя это выражение в формулу (11.6), найдём усреднённую ширину  $\Gamma_{A1}^J (\equiv \Gamma_{Aa}^C)$ :

$$\Gamma_{A1}^J = g_{iis,J} D_J \frac{\zeta_l}{2\pi}. \quad (12.5)$$

Эта формула связывает вероятность (т. е. частичную ширину) распада составного ядра  $C$ , в результате которого появляется частица  $a$  с моментом  $l$  и ядро  $A$ , с вероятностью прилипания  $\zeta_l$  частицы  $a$  к ядру  $A$  и средним расстоянием между уровнями составного ядра  $D_J$  (речь идёт, очевидно, об уровнях  $C$  с энергией возбуждения, близкой к  $E_C = E_A + E_a + E$ ). Величина  $\zeta_l$  определяется энергией падающей частицы  $E$  и её моментом  $l$ .

Из (12.5) вытекает важный вывод: если вероятность прилипания  $\zeta_l$  по порядку величины равняется единице, то частичная ширина  $\Gamma_{A1}^J$  имеет порядок величины расстояния между уровнями составного ядра  $D_J$ . Иными словами, уровни составного ядра в этом случае перекрываются.

Вряд ли нужно ещё раз подчёркивать, что формула (12.5) определяет только усреднённую по большому числу близко расположенных уровней частичную ширину для какого-либо вида расщепления составного ядра. Индивиду-

дуальные ширины отдельных уровней могут, конечно, при этом сильно отличаться друг от друга.

Просуммировав  $\sigma_l$  по  $l$ , мы найдём полное сечение образования составного ядра  $\sigma_u$ , которое одновременно представляет собой суммарное сечение для всех процессов, связанных с последующим распадом составного ядра

$$\sigma_u = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \zeta_l. \quad (12.6)$$

Умножив  $\sigma_u$  на относительную вероятность какого-либо процесса  $\alpha$ , равную  $\Gamma_\alpha/\Gamma$  ( $\Gamma_\alpha$  — частичная ширина, отвечающая процессу  $\alpha$ ,  $\Gamma$  — полная ширина уровня), получим сечение  $\sigma_\alpha$  для этого процесса:

$$\sigma_\alpha = \frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma} \sigma_u. \quad (12.6')$$

Пусть составное ядро образуется в результате слияния ядра  $A$  с быстрым нейтроном, длина волны которого  $\lambda \ll R$ . В этом случае, как мы указывали выше,

$$\zeta_l = \begin{cases} 1, & \text{если } l \leq \frac{R}{\lambda}, \\ 0, & \text{если } l > \frac{R}{\lambda}. \end{cases}$$

Найдём, чему равняется при этом полное сечение образования составного ядра  $\sigma_u$ . Согласно (12.6), имеем:

$$\sigma_u = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\left[\frac{R}{\lambda}\right]} (2l+1). \quad (12.7)$$

Так как  $R/\lambda \gg 1$ , то без особой ошибки можно заменить в (12.7) суммирование интегрированием. Мы получим при этом

$$\sigma_u \approx \pi R^2. \quad (12.7')$$

Таким образом общее сечение для всех процессов, связанных с распадом составного ядра, которое образо-

валось в результате слияния исходного ядра с быстрым нейтроном, равняется  $\pi R^2$ .

Заметим, что такое же значение имеет сечение поглощения частиц поглощающей сферой радиуса  $R$ , вычисленное согласно законам классической механики. Это совпадение является результатом квазиклассического рассмотрения, справедливого при  $\lambda \ll R$ .

Не следует думать, что  $\sigma_u$  представляет собой общее сечение для всех процессов, могущих иметь место при столкновении частицы  $a$  с ядром  $A$ .

В самом деле, в  $\sigma_u$  входит только часть упругого рассеяния частиц  $a$ , а именно упругое рассеяние, связанное с образованием составного ядра и последующим вылетом из него частицы того же сорта  $a$  без изменения энергии частицы. Но возможно также упругое рассеяние частиц, не связанное с образованием составного ядра.

Определим эффективное сечение этого рассеяния. Рассмотрим предварительно общую задачу о рассеянии частиц некоторым силовым центром.

Пользуясь разложением плоской волны  $e^{ikz}$  в ряд по полиномам Лежандра  $P_l(\cos \vartheta)$

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \vartheta) f_l(kr),$$

где

$$f_l(kr) = \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{1/2} J_{l+\frac{1}{2}}(kr)$$

( $J_{l+\frac{1}{2}}$  — функция Бесселя,  $z = r \cos \vartheta$ ) и замечая, что при больших  $r$  справедлива асимптотическая формула

$$f_l(kr) \sim (kr)^{-1} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right),$$

легко видеть, что волновая функция свободной частицы при больших  $r$  асимптотически ведёт себя, как

$$\frac{i}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) [e^{-ikr} - (-1)^l e^{ikr}] P_l(\cos \vartheta). \quad (12.8')$$

Из этой формулы следует, что функция

$$\frac{i}{2kr} (-1)^l (2l+1) [e^{-ikr} - (-1)^l e^{ikr}]$$

представляет собой асимптотическое выражение для радиальной волновой функции свободной частицы, орбитальный момент которой относительно некоторой точки  $O$  равен  $l\hbar$  ( $r$  — расстояние от этой точки). Здесь первое слагаемое представляет собой падающую, а второе — рассеянную волну с моментом  $l$ .

Асимптотическое выражение радиальной функции в случае рассеяния несвободной частицы с моментом  $l$  имеет вид

$$\frac{i}{2kr} (-1)^l (2l+1) [e^{-ikr} - (-1)^l \beta_l e^{ikr}],$$

где  $\beta_l$  — постоянная, отличная от единицы.

Поэтому общее асимптотическое выражение волновой функции в случае рассеяния определяется формулой

$$\psi \sim \frac{i}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) [e^{-ikr} - (-1)^l \beta_l e^{ikr}] P_l(\cos \vartheta). \quad (12.8)$$

Если на силовой центр падает плоская волна  $e^{ikz}$ , то рассеянная волна вдали от центра имеет вид

$$\frac{1}{r} e^{ikr} f(\vartheta),$$

где  $\vartheta$  — угол рассеяния. Мы будем в дальнейшем называть  $f(\vartheta)$  амплитудой рассеянной волны.

Согласно (12.8) и (12.8') амплитуда рассеянной волны имеет следующий вид:

$$f(\vartheta) = -\frac{i\hbar}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (\beta_l - 1) P_l(\cos \vartheta). \quad (12.8'')$$

Зная  $f(\vartheta)$ , можно найти дифференциальное сечение упругого рассеяния в интервале углов  $\vartheta, \vartheta + d\vartheta$  по формуле

$$d\sigma_s = 2\pi |f(\vartheta)|^2 \sin \vartheta d\vartheta$$



и полное сечение

$$\sigma_s = 2\pi \int_0^\pi |f(\vartheta)|^2 \sin \vartheta d\vartheta = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |\beta_l - 1|^2. \quad (12.9)$$

В тех случаях, когда рассеяние не сопровождается поглощением частиц, интенсивность расходящейся волны равна интенсивности падающей волны и, следовательно, абсолютное значение  $\beta_l$  равно единице. Полагая  $\beta_l = e^{2i\eta_l}$ , где  $\eta_l$  — вещественная величина, определяющая изменение фазы  $l$ -волны при рассеянии, получим из (12.9) следующую формулу для  $\sigma_s$ :

$$\sigma_s = 4\pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \eta_l. \quad (12.9')$$

Рассмотрим теперь тот случай, когда возможно поглощение частиц силовым центром. При этом формулы (12.9) и (12.9') остаются в силе, следует лишь считать в них  $|\beta_l| < 1$ , так как  $|\beta_l|^2$  представляет собой отношение интенсивностей расходящейся и падающей  $l$ -волн.

Это значит, что при наличии поглощения частиц фазу рассеяния  $\eta_l$  следует считать не вещественной, а комплексной величиной<sup>[51]</sup>:

$$\eta_l = \eta_l^{(r)} + i\eta_l^{(i)}, \quad (12.10)$$

где  $\eta_l^{(r)}$  и  $\eta_l^{(i)}$  — вещественные величины, причём  $\eta_l^{(i)} > 0$ .

Замечая, что

$$|\beta_l - 1|^2 = 2e^{-2\eta_l^{(i)}} (\operatorname{ch} 2\eta_l^{(i)} - \cos 2\eta_l^{(r)}),$$

представим сечение упругого рассеяния при наличии поглощения в виде

$$\sigma_s = 2\pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{-2\eta_l^{(i)}} (\operatorname{ch} 2\eta_l^{(i)} - \cos 2\eta_l^{(r)}). \quad (12.11)$$

Если  $\eta_l^{(i)} = 0$ , то эта формула переходит в (12.9'). Формулой (12.11) мы можем пользоваться при определении

сечения упругого рассеяния частиц ядрами, не связанного с образованием составного ядра.

Покажем, что мнимая часть фазы  $\eta_l$  может быть просто выражена через введённый ранее коэффициент прилипания. Последний мы определили в случае поглощения быстрых частиц ( $\lambda \ll R$ ) формулами (12.2) и (12.6).

Легко видеть, что сечение поглощения частиц ядром всегда выражается этими формулами (т. е. при любом соотношении между  $\lambda$  и  $R$ ), причём коэффициент прилипания  $\zeta_l$  связан с введённой выше величиной  $\beta_l$  (отношением амплитуд расходящейся и сходящейся волн) формулой

$$\zeta_l = 1 - |\beta_l|^2 = 1 - e^{-4\eta_l^{(i)}}. \quad (12.12)$$

В случае быстрых частиц эта формула очевидна, так как она вытекает из определения  $\zeta_l$ , согласно (12.2). Мы должны, следовательно, убедиться в справедливости соотношений (12.2) и (12.6), в которых  $\zeta_l$  определяется согласно (12.12), не пользуясь квазиклассическим рассмотрением, как это делалось при выводе (12.2). Для этого определим поток частиц через поверхность сферы большого радиуса, окружающей силовым центром. Этот поток, взятый в направлении внутренней нормали к сфере, определяет, очевидно, число частиц, поглощаемых в единицу времени силовым центром.

Поток определяется известной формулой

$$S = \frac{i\hbar}{2m} r^2 \int \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial r} \right) d\omega,$$

где  $r$  — радиус сферы,  $d\omega$  — элемент телесного угла. В качестве  $\psi$  мы должны, очевидно, воспользоваться выражением (12.8).

Замечая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= -\frac{\psi}{r} + \\ &+ \frac{1}{2r} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-1)^l [e^{-ikr} + (-1)^l \beta_l e^{ikr}] P_l(\cos \vartheta), \end{aligned}$$

и пользуясь условием нормировки шаровых функций

$$\int P_l^2(\cos \vartheta) d\vartheta = \frac{4\pi}{2l+1},$$

получим следующий результат:

$$S = \frac{\pi \hbar}{mk} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\beta_l|^2).$$

Чтобы определить эффективный поперечник поглощения частиц  $\sigma_u$ , нужно разделить  $S$  на поток падающих частиц, равный  $\frac{\hbar k}{m}$ .

Итак,

$$\sigma_u = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |\beta_l|^2).$$

Это и есть формула (12.6), которую мы хотели вывести.

Полученная формула определяет сечение для всех неупругих процессов, связанных с образованием и последующим распадом составного ядра.

На основании (12.12) её можно записать также в виде

$$\sigma_u = 2\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{-2\eta_l^{(i)}} \operatorname{sh} 2\eta_l^{(r)}. \quad (12.13)$$

Полное сечение для всех процессов, могущих иметь место при столкновении частицы с ядром, равно сумме сечения упругого рассеяния, не связанного с образованием составного ядра, и сечения всех неупругих процессов, связанных с образованием составного ядра. Обозначая полное сечение через  $\sigma_t$ , получим на основании (12.11) и (12.13):

$$\begin{aligned} \sigma_t = \sigma_u + \sigma_s &= 2\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - \operatorname{Re} \beta_l) = \\ &= 2\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - e^{-2\eta_l^{(i)}} \cos 2\eta_l^{(r)}). \quad (12.14) \end{aligned}$$

В случае рассеяния медленных частиц (например тепловых нейтронов) ядрами, сечения  $\sigma_s$  и  $\sigma_u$  малы по сравнению с  $\pi\lambda^2$ . В этих условиях модуль фазы  $\eta_l$  мал по сравнению с единицей, и формулы (12.11), (12.13), (12.14) приобретают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= 4\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \{(\eta_l^{(i)})^2 + (\eta_l^{(r)})^2\}, \\ \sigma_u &= 4\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \eta_l^{(i)} (1 - 2\eta_l^{(i)}), \\ \sigma_t &= 4\pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \{(\eta_l^{(r)})^2 - (\eta_l^{(i)})^2 + \eta_l^{(i)}\}. \end{aligned} \right\} \quad (12.15)$$

Для достаточно медленных частиц здесь играет роль только первый член, соответствующий  $l=0$ . При этом если  $\eta_0^{(i)} \ll \eta_0^{(r)}$ , то

$$\frac{\eta_0^{(i)}}{\eta_0^{(r)}} = \frac{k\sigma_u}{\sqrt{4\pi\sigma_s}}. \quad (12.16)$$

В случае быстрых нейтронов, длина волны которых значительно меньше радиуса ядра  $\lambda \ll R$ , вероятность прилипания соответственно равна

$$\zeta_l = 1, \quad \text{если } l \leq \frac{R}{\lambda},$$

$$\zeta_l = 0, \quad \text{если } l > \frac{R}{\lambda}.$$

Соответственно этому

$$\beta_l = 0, \quad \text{если } l \leq \frac{R}{\lambda},$$

$$\beta_l = 1, \quad \text{если } l > \frac{R}{\lambda}.$$

(Ясно, что при  $l > R/\lambda$  значение  $\beta_l$  должно равняться единице, так как в этом случае отсутствует рассеяние нейтральных частиц, какими являются нейтроны.)

Легко видеть, что в этом случае  $\sigma_s$ , как и  $\sigma_u$ , равняется  $\pi R^2$ . Поэтому полное сечение равно  $2\pi R^2$ :

$$\sigma_u = \pi R^2, \quad \sigma_s = \pi R^2, \quad \sigma_t = 2\pi R^2, \quad \lambda \ll R \quad (12.17)$$

Заметим, что рассматриваемое упругое рассеяние быстрых нейтронов можно трактовать как диффракцию нейтронной волны от края ядра<sup>[52]</sup>. Действительно, пользуясь известным равенством<sup>[53]</sup>

$$(2l+1)P_l(t) = P'_{l+1}(t) - P'_{l-1}(t),$$

можно представить амплитуду рассеяния быстрых нейтронов в виде

$$f_n(\vartheta) = \frac{[R/\lambda]}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \vartheta) = \\ = \frac{i\lambda}{2} [P'_{l_0+1}(\cos \vartheta) + P'_{l_0-1}(\cos \vartheta)],$$

где

$$l_0 = \frac{R}{\lambda} \gg 1.$$

(Мы пренебрегли в сумме слагаемым  $P'_1(z) = 1$ , так как в области углов, в которой амплитуда  $f_n(\vartheta)$  заметно отлична от нуля, сумма значительно больше единицы.)

Для больших углов рассеяния  $f_n(\vartheta) \approx 0$ . В случае малых углов  $\vartheta \ll 1$ , пользуясь асимптотическими формулами для полинома Лежандра<sup>[53]</sup>, получим:

$$f_n(\vartheta) = i \frac{R}{\vartheta} J_1\left(\frac{R\vartheta}{\lambda}\right), \quad \vartheta \ll 1, \quad (12.18)$$

где  $J_1(x)$  — функция Бесселя первого порядка.

Как известно из оптики, такой же формулой определяется амплитуда световой волны, претерпевшей диффракцию от абсолютно чёрного шара радиуса  $R$ <sup>[54]</sup>. (В рассматриваемом случае ядро поглощает все падающие на него нейтроны, т. е. ведёт себя как чёрное тело.)

Таким образом упругое рассеяние быстрых нейтронов характеризуется резкой направленностью вперёд.

Это рассеяние, которое может быть названо диффракционным, наблюдается экспериментально<sup>[55]</sup>.

Диффракционные явления должны иметь место также при рассеянии очень быстрых заряженных частиц, длина волны которых у поверхности ядра значительно меньше радиуса ядра<sup>[56]</sup>.

Роль величины  $l_0 = \frac{R}{\lambda}$  в случае заряженных частиц играет величина

$$l_z = \frac{R}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{Zze^2}{RE}},$$

где  $\lambda$  — длина волны падающей частицы вдали от ядра,  $E$  — её энергия,  $Ze$  и  $ze$  — заряды ядра и частицы.

Мы предполагаем, что  $l_z \gg 1$  и считаем, что вероятность прилипания  $\zeta_l = 1$ , если  $l \leq l_z$ . При  $l > l_z$ , в отличие от случая нейтронов,  $\beta_l$  не равняется единице, так как кулоновское рассеяние имеет место при всех  $l$ . Соответственно этому при  $l > l_z$  нужно положить:

$$\beta_l = e^{2i\eta_l}, \quad \eta_l = \arg \Gamma(l+1+i\alpha), \quad \alpha = \frac{Zze^2}{\hbar v}.$$

Пользуясь этими значениями  $\beta_l$  и  $\zeta_l$ , можно определить, согласно (12.8"), амплитуду рассеяния, которую мы обозначим теперь через  $f_z(\vartheta)$ .

В случае  $\alpha < 1$  мы получим следующие результаты<sup>[56]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} f_z(\vartheta) &= \frac{iR}{\vartheta} \sqrt{1 - \frac{Zze^2}{RE}} l_z^{2i\alpha} J_1(l_z \vartheta), \\ &\frac{1}{l_z} \ll \vartheta \ll 1, \\ f_z(\vartheta) &= \frac{i\lambda}{2} l_z^{2i\alpha+2} - \frac{2\lambda}{\vartheta^2} e^{-2i\alpha \ln \frac{\vartheta}{2} + 2i\eta_0}, \\ &\vartheta \ll \frac{1}{l_z}. \end{aligned} \right\} \quad (12.19)$$

Формулы (12.19) показывают, что в области углов  $\frac{1}{l_z} \ll \vartheta \ll 1$  имеет место диффракционное рассеяние заря-

женных частиц, которое только фазой отличается от соответствующего рассеяния быстрых нейтронов. При  $\alpha = 0$  (12.19) переходит в (12.18).

В области углов  $\vartheta \ll \frac{1}{l_z}$  справедлива вторая формула (12.19), в которой первое слагаемое не зависит от угла рассеяния, а второе слагаемое представляет собой амплитуду рассеяния в кулоновском поле ядра.

Итак, рассеяние очень быстрых заряженных частиц не всегда описывается формулой Резерфорда. Последняя оказывается справедливой только при очень малых углах рассеяния; именно, углы должны быть меньше  $\sqrt{\alpha}/l_z$ , если  $\alpha < 1$ , и меньше  $\alpha/l_z$ , если  $\alpha > 1$ . Если  $\alpha > 1$ , то в области углов  $\vartheta > (\alpha/l_z)$  снова имеет место первая формула (12.19).

Таким образом в области углов  $1 \gg \vartheta > 1/l_z$  при  $\alpha < 1$  и в области углов  $1 \gg \vartheta > (\alpha/l_z)$  при  $\alpha > 1$  обычное кулоновское рассеяние заменяется диффракционным рассеянием того же типа, что и рассеяние быстрых нейтронов.

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний о рассеянии медленных частиц.

При рассмотрении столкновений ядер с медленными частицами ( $\lambda \gg R$ ) мы можем пользоваться общими формулами (12.15). Определение вероятности прилипания для этого случая даётся в следующем параграфе. Здесь мы отметим лишь, что при  $\lambda \gg R$  все  $\beta_i$ , за исключением  $\beta_0$ , равны единице. Поэтому в сумму (12.8"), так же как и в (12.15), входит только одно слагаемое с  $l = 0$ .

Отсюда следует, что рассеяние медленных частиц в системе координат, где покоится центр инерции ядра и сталкивающейся с ним частицы, является сферически симметричным. Сечение упругого рассеяния в отсутствие поглощения равно, согласно (12.9'),

$$\sigma_s = 4\pi\lambda^2 \sin^2 \eta_0. \quad (12.20)$$

(Учёт поглощения производится в следующем параграфе.)

Дифференциальное сечение упругого рассеяния в этом случае в системе координат, где покоится центр

инерции, имеет вид

$$d\sigma_s = \frac{\sigma_s}{2} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (12.20')$$

Заметим, что в системе координат, где до столкновения ядро покоилось, энергия частицы, равная до столкновения  $E$ , становится в результате столкновения равной

$$E' = E \frac{M^2 + m^2 + 2mM \cos \vartheta}{(M+m)^2},$$

где  $m$  и  $M$  — массы частицы и ядра.

Из этой формулы следует, что

$$\sin \vartheta d\vartheta = \frac{(M+m)^2 dE'}{2mM E},$$

поэтому формула (12.20') принимает вид

$$\left. \begin{aligned} d\sigma &= \sigma_s \frac{(M+m)^2 dE'}{4mM E}, \\ E &\geq E' \geq \left( \frac{M-m}{M+m} \right)^2 E. \end{aligned} \right\} \quad (12.21)$$

Отсюда легко заключить, что в рассматриваемом случае медленных частиц пронормированная вероятность того, что в результате столкновения с ядром энергия частицы будет находиться в интервале  $E'$  и  $E' + dE'$ , равна:

$$\omega(E') dE' = \frac{dE'}{(1-\epsilon)E}, \quad \epsilon = \left( \frac{M-m}{M+m} \right)^2. \quad (12.22)$$

Мы видим, что в результате столкновения все значения энергии в интервале  $(E, \epsilon E)$  равновероятны.

**§ 13. Вероятность прилипания.** Перейдём к определению зависимости вероятности прилипания  $\zeta_l$  от энергии частицы\*). Заметим предварительно, что мы рассматриваем здесь случай близко расположенных или даже перекрывающихся уровней и не учитываем особенностей отдельных индивидуальных уровней. Таким образом наше рассмотрение будет по существу статистическим.

\*) Мы следуем ниже работе [50].

Мы будем исходить из того, что свободная частица, попавшая в ядро, поглощается последним и теряет свою индивидуальность. Поэтому, рассматривая образование составного ядра с феноменологической точки зрения, мы должны характеризовать ядерное вещество большим поглощением ядерных частиц.

Для получения качественной картины сделаем простейшее предположение, считая, что число частиц, поглощаемых в единицу времени в некоторой точке ядра, пропорционально плотности частиц в той же точке.

Уравнение непрерывности с учётом поглощения можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{2}{\hbar} \sigma \cdot \rho, \quad (13.1)$$

где  $\mathbf{j}$  и  $\rho$  — соответственно плотность тока и плотность частиц, а  $\sigma$  — некоторая величина, характеризующая поглощение, которую будем называть абсорбционным потенциалом.

Эта величина зависит от координат, а также от энергии и других величин, характеризующих частицу (спин, направление движения и др.). Для качественной ориентации мы будем считать, что зависимость от спина и направления движения не существенна. Что же касается зависимости от энергии частицы, то она может стать заметной только в очень большом интервале изменения энергии, по порядку величины равном энергии связи частиц в ядре ( $\sim 10$  MeV). Рассматривая небольшой интервал изменения энергии, можно считать  $\sigma$  не зависящим от энергии частицы.

Итак, мы предполагаем, что  $\sigma$  зависит только от координат частицы.

Легко видеть, что наличие абсорбционного потенциала в (13.1) можно учесть, если записать уравнение Шредингера для падающей частицы в виде

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V + i\sigma) \psi = 0, \quad (13.2)$$

где  $E$  — кинетическая энергия частицы вдали от ядра, а  $V$  — её потенциальная энергия.

Чтобы доказать эквивалентность уравнений (13.1) и (13.2), умножим (13.2) на  $\psi^*$  [ $\psi^*$  — величина комплексно сопряжённая  $\psi$ ] и вычтем из полученного произведения комплексно сопряжённое ему выражение. Пользуясь определениями  $\rho$  и  $\mathbf{j}$ :

$$\rho = \psi^* \psi; \quad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \psi^*),$$

мы и получим (13.1). Таким образом абсорбционный потенциал появляется, как мнимая часть эффективной комплексной потенциальной энергии частицы  $V - i\sigma$ .

Внутри ядра  $\sigma$  по порядку величины равняется энергии ядерного взаимодействия, что составляет около 30 MeV.

Заметим, что ни  $\sigma$ , ни  $V$  не испытывают резкого скачка на границе ядра, поскольку ядерные силы, которыми в сущности и определяются  $V$  и  $\sigma$ , обладают конечным радиусом действия. Следует также иметь в виду, что граница ядра не может считаться резкой, благодаря наличию нулевых колебаний ядерных частиц и конечности радиуса действия ядерных сил. Вне узкого пограничного слоя, который мы назовём областью диффузности ядерной границы, потенциал  $V - i\sigma$  можно не учитывать.

Следует подчеркнуть, что феноменологическое рассмотрение, которым мы пользуемся, вводя  $\sigma$ , не может, конечно, дать исчерпывающего описания всех сторон ядерных столкновений (хотя бы потому, что при этом мы исходим из рассмотрения задачи одного тела). К этому следует добавить, что интересующая нас величина коэффициента прилипания  $\zeta_l$  существенно зависит от хода изменения  $\sigma$  у поверхности ядра, о котором можно лишь делать те или иные предположения. Поэтому излагаемая теория является полукачественной; тем не менее, как мы увидим далее, основные особенности поведения  $\zeta_l$  при больших и малых энергиях она передаёт правильно.

Запишем потенциальную энергию частицы в виде  $V = V_n + V_l$ , где  $V_n$  связано с ядерными, а  $V_l$  — с кулоновскими и центробежными силами. Будем считать, что

$V_n$ ,  $\sigma$ ,  $V_l$  зависят только от  $r$  — расстояния до центра ядра. Волновая функция  $\Phi$  зависит в этом случае также только от  $r$ . Введём радиальную функцию  $u = r\Phi$ ; уравнение Шредингера для неё имеет вид

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \Phi(r)u, \quad (13.3)$$

где

$$\Phi(r) = \frac{2m}{\hbar^2} [-W(r) + V_n(r) - i\sigma(r)]$$

и

$$W(r) = E - V_l(r).$$

Вне ядра, но вблизи от его поверхности, где  $V_n$  и  $\sigma$  играют ещё существенную роль, будем считать  $W(r)$  постоянной, равной

$$W = E - V_l(R),$$

где  $R$  — радиус ядра.

Рассмотрим сначала случай больших энергий падающей частицы, когда длина волны частицы значительно меньше радиуса ядра. В этом случае можно пользоваться методом квазиклассического приближения [57]. Условие применимости этого метода состоит в том, что модуль изменения  $\Phi$  на протяжении длины волны, равной  $|\Phi^{-1/2}|$ , должен быть малым по сравнению с абсолютным значением самой функции  $\Phi$ .

Поскольку величина  $W$  предполагается большой, а  $V_n$  и  $\sigma$  не испытывают резкого изменения на границе ядра, можно считать, что условия применимости метода квазиклассического приближения выполнены.

Пользуясь этим методом, представим решение уравнения (13.3) в виде

$$u = \text{const.} \cdot \Phi^{-1/4} \exp\left(\int_0^r \Phi^{1/2} dr\right), \quad (13.4)$$

Мы должны при этом взять  $\sqrt{\Phi}$  с таким знаком, чтобы  $u$  убывало по направлению к центру ядра. Такой выбор знака соответствует нашему основному предположению

о поглощении частиц ядром. Итак, вещественная часть  $\Phi^{1/2}$  должна быть положительной. При  $r < R$  величина  $\Phi$  находится в третьей четверти плоскости комплексного переменного (вещественная и мнимая части  $\Phi$  отрицательны). Поэтому  $\Phi^{1/2}$  должна лежать в четвертой четверти комплексной плоскости.

Представим себе теперь, что  $r$  увеличивается; при этом  $\sigma$  и  $V_n$  уменьшаются и, наконец, вне ядра становятся равными нулю. Поскольку  $\Phi^{1/2}$  всё время должно оставаться в четвертой четверти, мнимая часть  $\Phi^{1/2}$  должна быть отрицательной также и вне ядра. Поэтому решение (13.4) вне ядра имеет вид

$$u = \text{const.} \cdot \Phi^{-1/4} \exp\left\{-i \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int [E - V_l(r)]^{1/2} dr\right\}, \quad (13.4')$$

т. е. представляет собой чисто падающую волну. Так как мы не получили отражённой волны, то это значит, что вероятность прилипания  $\zeta_l$  равна единице.

Итак, для быстрых частиц, попадающих в сферу действия ядра,

$$\zeta_l = 1.$$

Полученное соотношение имеет простой физический смысл. Поскольку мы рассматриваем случай быстрых частиц, т. е. малых длин волн, справедлива классическая механика. Но в таком случае совершенно ясно, что если частица попадает в сферу действия ядра, т. е. параметр столкновения для неё меньше радиуса ядра, то частица поглощается ядром, иначе говоря,  $\zeta_l = 1$ . Отклонения от соотношения  $\zeta = 1$  связаны с неточностью квазиклассического приближения, которым мы пользовались.

Перейдём теперь к рассмотрению случая малых энергий падающей частицы, когда её длина волны велика по сравнению с радиусом ядра.

Предположим, что падающей частицей является медленный нейтрон, орбитальный момент которого равен нулю. В этом случае  $V_l = 0$ .

Вне ядра уравнение (13.3) имеет вид

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} Eu = 0,$$

откуда

$$u = \text{const.} \cdot \sin(kr + \delta) = \text{const.} \cdot \{e^{ikr+i\delta} - e^{-kr-i\delta}\}, \quad (13.5')$$

где  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$  и  $\delta$  — комплексная фаза рассеяния.

Последнюю можно связать со значением логарифмической производной  $u$  на поверхности ядра, т. е. при  $r = R$

$$\left(\frac{1}{u} \frac{du}{dr}\right)_{r=R} = \chi. \quad (13.5'')$$

Так как мы предполагаем, что длина волны падающей частицы значительно больше размеров ядра, то значение этой производной вне ядра не испытывает существенного изменения на расстояниях порядка  $R$ . Поэтому введение величины  $\chi$  имеет смысл, несмотря на диффузность ядерной границы.

Величину  $\chi$  следует считать комплексной, так как, благодаря возможности поглощения частиц, комплексной является эффективная потенциальная энергия. Мы запишем  $\chi$  в виде

$$\chi = \frac{1}{b} e^{-i\frac{\varphi}{2}}, \quad \varphi > 0,$$

где  $b$  по порядку величины определяет ширину области диффузности ядерной границы,  $\varphi$  — вещественная фаза, зависящая от комплексного потенциала  $V - i\sigma$ . [То обстоятельство, что  $\varphi > 0$ , следует из выражения для коэффициента прилипания  $\zeta_0$ , см. ниже, формула (13.6').] В первом приближении можно считать, что  $b$  и  $\varphi$  не зависят от энергии.

Так как  $kR$  и абсолютное значение  $\delta$  малы по сравнению с единицей (последнее условие означает, что величина сечения рассеяния мала по сравнению с  $\pi\lambda^2$ ), то (13.5') мы представим в виде

$$u \approx \text{const.} \cdot (kr + \delta).$$

Граничное условие (13.5'') приводит к результату

$$\delta = -kR + kbe^{\frac{i\varphi}{2}}.$$

Если  $\sigma = 0$ , то величина  $\delta$  будет вещественной. В этом случае мы имеем чисто упругое рассеяние нейтронов. Сечение рассеяния  $\sigma_s$  связано с вещественной фазой  $\delta$  соотношением

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta.$$

Считая  $b$  малым по сравнению с  $R$ , мы получим  $\delta \approx -kR$ , и поэтому

$$\sigma_s = 4\pi R^2.$$

Это сечение рассеяния медленных частиц от непроницаемого шара радиуса  $R$  в четыре раза превышает соответствующее сечение, даваемое классической механикой.

Из формулы (13.5') следует, что отношение амплитуд расходящейся и падающей волн равно  $\beta_0 = e^{2i\delta}$ . В случае комплексной фазы  $\delta$  величина  $|\beta_0|$  меньше единицы. Вероятность прилипания частиц с моментом  $l = 0$  равна, согласно (12.12):

$$\zeta_0 = 1 - |\beta_0|^2 = 1 - |e^{2i\delta}|^2 \approx 4kb \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (13.6')$$

причём мы пренебрегли здесь членами порядка  $\delta^2$ .

Выше мы говорили, что  $b$  и  $\varphi$  в области малых энергий можно считать не зависящими от энергии нейтрона. Формула (13.6') показывает в таком случае, что для медленных нейтронов, длина волны которых велика по сравнению с  $R$ , вероятность прилипания пропорциональна  $k$ , т. е.  $\sqrt{E}$ .

Мы перепишем (13.6') в виде

$$\zeta_0 = kb', \quad (13.6'')$$

где  $b'$  по порядку величины определяет ширину области диффузности ядерной границы.

Согласно (12.6) мы можем теперь определить сечение захвата медленных нейтронов

$$\sigma_c = \pi \lambda^2 \zeta_0 = \frac{\pi b'}{k} = \frac{\text{const.}}{v} \quad (13.7)$$

( $v$  — скорость нейтронов).

Эта формула выражает хорошо известный закон поглощения медленных нейтронов (закон  $1/v$ ).

Мы определили зависимость вероятности прилипания от энергии падающей частицы в двух предельных случаях больших и малых энергий, когда длина волны частицы мала или велика по сравнению с радиусом ядра.

Для получения общей формулы для  $\zeta_l$ , пригодной при всех энергиях, необходима детальная теория ядерных сил.

Введём в рассмотрение критическую длину волны

$\lambda_c = \frac{1}{k_c} = b'$  и соответствующую ей энергию  $E_c$ . При  $k = k_c$  коэффициент прилипания  $\zeta \approx 1$ . Согласно<sup>[50]</sup>,  $b' \approx 6 \cdot 10^{-13}$  см и  $E_c \approx 1$  MeV.

Если кинетическая энергия частицы у поверхности ядра превосходит  $E_c$ , то вероятность прилипания для неё близка к единице.

В случае быстрых нейтронов для выполнения этого соотношения необходимо, чтобы момент  $l$  был меньше чем  $\frac{R}{\lambda}$ ; для быстрых заряженных частиц  $l$  должно быть

меньше, чем  $\frac{R}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{Zze^2}{RE}}$  (здесь  $\lambda$  означает длину волны частицы вдали от ядра).

Для медленных нейтронов, энергия которых меньше  $E_c \approx 1$  MeV и  $l = 0$ , вероятность прилипания имеет вид

$$\zeta_0 \approx \left(\frac{E}{E_c}\right)^{1/2}.$$

Воспользуемся этой формулой, чтобы получить выражение для средней нейтронной ширины  $\Gamma_n$ .

Вылетающие из ядра нейтроны предполагаются медленными, поэтому для них  $l = 0$ . В этом случае  $g_{l,s,j} = 1$ ,

и формула (12.5) для  $\Gamma_n$  приобретает вид

$$\Gamma_n = \frac{D}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{E_c}}, \quad (13.7')$$

где  $E$  — энергия вылетающих из ядра нейтронов.

Полагая  $E_c \approx 0,7$  MeV<sup>[50]</sup>, мы получим отсюда

$$\Gamma_n = 1,9 \cdot 10^{-4} DE^{1/2}, \quad (13.7'')$$

причём здесь  $E$  и  $D$  (среднее расстояние между уровнями составного ядра) выражены в eV.

Считая для ядер среднего атомного веса ( $A \sim 100$ )  $D \approx 10$  eV, получим из (13.7''):

$$\Gamma_n E^{-1/2} \approx 2 \cdot 10^{-3} (\text{вольт})^{1/2}. \quad (13.7''')$$

**§ 14. Распределение частиц, вылетающих при распаде составного ядра, по энергиям.** Применим статистические соображения § 11 к нахождению функции распределения частиц, вылетающих при распаде составного ядра по энергиям\*).

Пусть  $E_C$  и  $E_A$  — энергии возбуждения составного ядра  $C$  и ядра  $A$ , остающегося после вылета из  $C$  частицы  $a$ .

Кинетическая энергия вылетающей частицы  $a$  равна

$$E = E_C - E_A - E_a,$$

где  $E_a$  — энергия покоя частицы  $a$ .

Будем считать, что  $E_A$  относится к непрерывному спектру ядра  $A$ , и поставим вопрос, какова вероятность того, что вылетевшая из ядра частица имеет энергию, заключённую в пределах от  $E$  до  $E + dE$ . Обозначим эту вероятность, отнесённую к единице времени, через  $w(E) dE$ .

Воспользуемся общей формулой (11.1) и положим в ней

$$g_C = \rho_C(E_C) dE_C \frac{\Omega d p_C}{(2\pi \hbar)^3};$$

$$g_A = \rho_A(E_A) dE_A \frac{\Omega d p_A}{(2\pi \hbar)^3};$$

$$g_a = (2s + 1) \frac{\Omega d p_a}{(2\pi \hbar)^3},$$

\* ) Ниже излагаются результаты работ Ландау [48] и Вайскопфа [49] по этому вопросу.



где  $\rho_A(E_A) dE_A$  — число уровней ядра  $A$  в интервале энергии  $dE_A$ , причём каждый уровень считается столько раз, какова кратность его вырождения. Вместо  $w_{Aa}^C$  мы должны теперь писать  $w(E) dE$ .

Таким образом мы получим:

$$w(E) dE \rho_C(E_C) dE_C dp_C = \\ = w_C^{Aa} \rho_A(E_A) dE_A \frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^3} dp_A (2s+1) dp_a. \quad (14.1)$$

Перейдём от переменных  $p_A$  и  $p_a$  к переменным  $p_C$  и  $p$ , где  $p$  — импульс относительного движения частиц  $A$  и  $a$ , а также от переменных  $E_A$ ,  $p$  к переменным  $E_C$ ,  $E$ . Мы получим

$$w(E) dE = (2s+1) \frac{\rho_A(E_A)}{\rho_C(E_C)} \frac{ME}{\pi^2 \hbar^3} \sigma_C^{Aa} dE, \quad (14.2)$$

где  $\sigma_C^{Aa}$  — сечение образования составного ядра  $C$ , возникающего в результате столкновения частицы  $a$  с энергией  $E$  и ядра  $A$ , энергия возбуждения которого равна  $E_A$ .

Вспомним теперь связь между плотностью состояний  $\rho$  и энтропией ядра  $S$ , о которой говорилось в § 10. Считая в формуле (10.5) медленно меняющуюся функцию энергии  $\lambda(u)$  постоянной, получим приближённо:

$$\frac{\rho_A(E_A)}{\rho_C(E_C)} \approx e^{S_A(E_A) - S_C(E_C)}$$

(индекс при  $S$  указывает на принадлежность к тому или иному ядру).

Пользуясь этим соотношением, перепишем (14.2) в виде

$$w(E) dE = \frac{2s+1}{\pi^2 \hbar^3} M \sigma_C^{Aa} e^{S_A(E_C - E_a - E) - S_C(E_C)} E dE. \quad (14.3)$$

Рассмотрим тот случай, когда кинетическая энергия вылетающей частицы значительно меньше  $E_C - E_a$ . Полагая в этом случае  $S_A(E_C - E_a - E) \approx S_A(E_C - E_a) - ES'_A(E_C - E_a)$  и вспоминая, что

$$S'_A(W) = \frac{1}{T_A(W)},$$

где  $T_A(W)$  — температура ядра  $A$ , энергия возбуждения которого равна  $W$ , получим:

$$w(E) dE = \frac{2s+1}{\pi^2 \hbar^3} M \sigma_C^{Aa} e^{S_A(E_C - E_a) - S_C(E_C)} e^{-\frac{E}{T_A(E_C - E_a)}} E dE. \quad (14.4)$$

Напомним, что  $\sigma_C^{Aa}$  зависит от  $E$  и  $E_A$ . Если частицей  $a$  является нейтрон, то в области больших энергий  $E$  сечение  $\sigma \approx \pi R^2$ . В этих условиях мы получаем распределение максвелловского типа, причём модулем этого распределения служит температура ядра  $A$  остающегося после вылета частицы, а не исходного ядра  $C$ . Различие между этими температурами, вообще говоря, довольно значительно, так как в результате вылета частицы происходит сильное «охлаждение» ядра.

Из формулы (14.4) следует, что средняя энергия вылетающих частиц при заданном  $E_C$  по порядку величины равна  $T_A(E_C - E_a)$ . В том случае, когда сечение образования составного ядра не зависит от энергии, средняя энергия вылетающих частиц равна  $2T_A(E_C - E_a)$ .

Отсюда можно сделать следующий вывод. Если составное ядро  $C$  создаётся в результате столкновения быстрого нейтрона с энергией  $E$  и ядра  $A$ , находящегося в основном состоянии, то получающиеся при распаде  $C$  нейтроны обладают в среднем энергией  $\sim 2T_A(E_C - E_a) = 2T_A(E_A + E)$ , которая, вообще говоря, значительно меньше  $E$ .

§ 15. Радиационные свойства ядра. Известно, что если длина волны излучения  $\lambda$  значительно превосходит размеры излучающей системы  $a$ , то интенсивность излучения может быть представлена в виде ряда по степеням  $\xi = \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \ll 1$ .

Первый член этого разложения представляет собой дипольное излучение, второй член, содержащий дополнительный множитель  $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$ , — квадрупольное излучение и т. д.

Излучение возбужденного атома удовлетворяет условию  $\lambda \gg a$ , поэтому обычно, когда нет специальных условий, запрещающих дипольные переходы, главную роль в излучении атома играет дипольное излучение.

Несколько иные соотношения имеют место при излучении возбужденного ядра. Если энергия возбуждения ядра невелика, то условие  $\lambda \gg R$  выполняется и здесь; однако изучение внутренней конверсии  $\gamma$ -лучей показывает, что в излучении ядра сравнительно велика роль квадрупольного излучения, интенсивность которого часто превосходит интенсивность дипольного излучения.

Чтобы объяснить особенности ядерного излучения, необходимо учитывать, согласно Бору, сильное взаимодействие между ядерными частицами.

Если возбуждение ядра не настолько велико, чтобы существенно повлиять на относительное положение соседних частиц, то можно предполагать, что излучательные свойства ядра будут подобны излучательным свойствам заряженного однородного макроскопического тела [43].

Легко видеть, что деформации такого тела, а также его вращения не сопровождаются дипольным излучением. В самом деле, дипольный момент тела  $d$  равен:

$$d = \sum er = \int \rho_e r dV = \frac{\rho_e}{\rho} RM,$$

где  $\rho_e$  — плотность электричества,  $\rho$  — плотность вещества, одинаковые вдоль тела,  $R$  — радиус-вектор, определяющий положение центра инерции тела, и  $M$  — его масса.

В случае свободного движения тела  $\ddot{R} = 0$ . Поэтому  $\ddot{a} = 0$  и, следовательно, равняется нулю интенсивность дипольного излучения, пропорциональная  $|\ddot{a}|^2$ .

Таким образом деформациям формы и вращениям рассматриваемого тела отвечают колебания не дипольного момента, а моментов более высокого порядка, в первую очередь квадрупольного момента.

Эти простые соображения показывают, что в излучении ядра должно быть сравнительно сильно выражено квадрупольное излучение.

Можно сказать, что колебания дипольного момента связаны с перемещением центра зарядов относительно центра инерции ядра. При малых возбуждениях ядра, ( $\sim 1$  MeV) благодаря приблизительному совпадению центра зарядов с центром инерции, дипольные колебания отсутствуют или, по крайней мере, сильно приглушены по сравнению с колебаниями квадрупольными, которые требуют для своего возбуждения гораздо меньшей энергии, чем дипольные колебания. Последние возникают с заметной интенсивностью только при сравнительно больших возбуждениях ядра ( $\sim 10$  MeV).

В силу этих обстоятельств интенсивность дипольных линий при малых возбуждениях ядра, несмотря на то, что  $\lambda \gg R$ , оказывается меньшей или того же порядка величины, что и интенсивность квадрупольных линий [43], [58].

При больших возбуждениях ядра главную роль в излучении ядра играет дипольное излучение.

Оценим вероятность квадрупольного излучения ядра. Интенсивность квадрупольного излучения равна

$$J = \omega^6 \frac{q^2}{5c^5},$$

где  $q^2$  — квадрат тензора квадрупольного момента.

По порядку величины  $q^2$  равно:

$$q^2 \approx (e^2 Z^2) \xi^2 R^2,$$

где  $eZ$  — заряд ядра,  $R$  — его радиус и  $\xi$  — амплитуда колебаний ядерного вещества.

Вероятность излучения в единицу времени равна  $J/\hbar\omega$ , а соответствующая ширина линии  $\Gamma_\gamma$  равна:

$$\Gamma_\gamma = \frac{J}{\omega} \sim \omega^5 \frac{e^2 Z^2 \xi^2 R^2}{5c^5}, \quad (15.1')$$

Для оценки  $\xi$  мы можем положить:

$$\hbar\omega \sim M\omega^2 \xi^2,$$

где  $M$  — масса ядра. Согласно (15.1') получим [43]:

$$\Gamma_{\gamma} \approx \frac{e^2 Z^2 \hbar \omega^4 R^2}{5c^5 M}. \quad (15.1)$$

Пользуясь этой формулой, можно показать, что при энергиях возбуждения  $\sim 1 \text{ MeV}$  радиационная ширина  $\Gamma_{\gamma}$  для ядер среднего атомного веса по порядку величины равняется  $0,1 \text{ eV} - 0,2 \text{ eV}$  [43], [59], [50].

Интенсивность октупольного излучения, а также полюсов более высокого порядка, как правило, гораздо меньше, чем интенсивность квадрупольного излучения, если только  $\lambda \gg R$ .

Радиационная ширина  $\Gamma_{\gamma}^l$ , отвечающая излучению  $l$ -польного  $\gamma$ -кванта, по порядку величины равна [59]:

$$\Gamma_{\gamma}^l \sim (Ze)^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^{2l+1} \frac{\alpha^2 R^{2l}}{l!^2}, \quad (15.2)$$

где  $\alpha$  — безразмерная величина порядка единицы. При  $l=2$  эта формула переходит в (15.1), если считать в последней  $\xi = \alpha R$ .

Заметим, что  $l$  представляет собой момент количества движения, уносимого  $\gamma$ -квантом. Поэтому, если  $J$  и  $J'$  — моменты ядра до и после излучения, то

$$J = J' + l.$$

В частности, если ядро переходит в состояние с  $J'=0$ , то момент исходного состояния  $J$  должен равняться  $l$ .

Время жизни возбуждённого состояния по отношению к излучению  $l$ -польного  $\gamma$ -кванта равняется

$\tau_l = \frac{\hbar}{\Gamma_{\gamma}^l}$ . Полагая [59]  $R \sim 10^{-12} \text{ см}$ ,  $\alpha \sim 1$ , получим по порядку величины

$$\tau_l \approx 5 \cdot 10^{-21} (ll)^2 \left(\frac{20}{\hbar\omega}\right)^{2l+1} \text{ сек.}, \quad (15.3)$$

где  $\hbar\omega$  выражается в MeV.

Эта формула приводит к следующим значениям  $\tau_l$  [59]. Если  $l=3$ , то при энергии возбуждения  $\hbar\omega = 10 \text{ keV}$ ,  $\tau \sim 7$  часов; при  $\hbar\omega = 50 \text{ keV}$ ,  $\tau \sim 0,3 \text{ сек.}$ ; при  $\hbar\omega \sim 200 \text{ keV}$ ,  $\tau \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}$

Если  $l=5$ , то при  $\hbar\omega = 10 \text{ keV}$   $\tau \sim 5 \cdot 10^{12}$  лет; при  $\hbar\omega = 200 \text{ keV}$   $\tau \sim 10$  дней.

Как видно из приведённых данных, время жизни возбуждённого ядра по отношению к излучению  $\gamma$ -кванта небольшой энергии и высокой полярности чрезвычайно велико.

Это обстоятельство может быть использовано для объяснения явления ядерной изомерии.

Ядерные изомеры представляют собой модификации одного и того же изотопа, отличающиеся некоторым различием своих свойств. Обычно явление ядерной изомерии устанавливается по различию радиоактивных свойств изомерных ядер. В этом случае число радиоактивных периодов у какого-либо элемента превышает число радиоактивных изотопов [60], [61].

Для объяснения изомерии мы должны предположить, что у ряда изотопов существуют возбуждённые состояния, являющиеся метастабильными, т. е. отличающиеся достаточно большим временем жизни (которое во всяком случае должно превосходить период распада изомеров).

Можно предположить [62], что такие метастабильные состояния представляют собой слабо возбуждённые состояния, отличающиеся сравнительно большим значением момента количества движения по сравнению с основным состоянием.

Согласно сказанному выше, время жизни таких состояний по отношению к  $\gamma$ -излучению может быть очень большим (при достаточно малых  $\hbar\omega$  и достаточно больших разностях моментов исходного и конечного состояний ядра).

Следует, однако, иметь в виду, что время жизни метастабильного состояния нельзя определять по формуле (15.3), так как эта формула учитывает только  $\gamma$ -переход, в действительности же возможны безрадиационные переходы, сопровождающиеся испусканием электрона из внешней оболочки атома (внутренняя конверсия  $\gamma$ -лучей). Благодаря этому для определения времени жизни рассматриваемых метастабильных состояний необходимо время, вычисленное согласно (15.3),

уменьшить в отношении  $1 + \frac{N_e}{N_\gamma}$ , где  $N_e$  — число конверсионных электронов, а  $N_\gamma$  — число  $\gamma$ -квантов, испускаемых в единицу времени [63]. Так, например, если энергия возбуждения равняется 25 keV и  $l = 5$ , то время жизни, вычисленное по (15.3) и равное  $\sim 2 \cdot 10^8$  лет, уменьшается до  $\sim 10^4$  лет.

Заметим, что метастабильное состояние, в котором находится изомер, не обязательно должно отличаться от основного состояния значением углового момента. Вполне вероятно, что некоторые случаи ядерной изомерии можно объяснить, если предположить, что основное и метастабильное состояния отличаются различной чётностью, угловые же моменты обоих состояний равны нулю [64]. Если эти условия выполнены, то переход из метастабильного в основное состояние с излучением дипольного и квадрупольного  $\gamma$ -квантов становится невозможным. Кроме того, в первом приближении невозможны вылет атомного электрона и образование пар. Переходы из метастабильного в основное состояние могут происходить только благодаря процессам второго приближения (эмиссия двух  $\gamma$ -квантов, вылет двух атомных электронов и т. д.). Вероятность этих процессов в случае малой разности энергий метастабильного и основного состояний крайне мала, благодаря чему время жизни метастабильного состояния оказывается достаточно большим.

### Г Л А В А III

## РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

**§ 16. Дисперсионная формула.** В предыдущих параграфах было показано, что при достаточно больших энергиях возбуждения составного ядра, образующегося в результате слияния исходного ядра с быстрой частицей, расстояния между соседними уровнями составного ядра и их ширины имеют один и тот же порядок величины, так что по существу в этом случае мы имеем дело с непрерывным энергетическим спектром.

Если энергия возбуждения составного ядра невелика, что имеет место, когда это ядро образуется в результате реакции с медленной частицей, то ширины уровней меньше расстояний между ними.

В этих случаях особенно резко проявляется роль отдельных уровней составного ядра. Вероятность образования составного ядра и выход ядерных реакций в этом случае чрезвычайно сильно зависят от энергии падающей частицы, причём эта зависимость носит резонансный, а не монотонный характер. Можно указать, что сечение поглощения нейтронов, обладающих определёнными значениями энергии (эти значения энергии называются резонансными), может в несколько тысяч раз превосходить простое поперечное сечение ядра, равное  $\pi R^2$ .

Мы перейдём теперь к рассмотрению резонансных явлений, наблюдающихся при ядерных реакциях. Заметим предварительно, что существует определённая аналогия между процессами, происходящими при ядерных реакциях, и рассеянием света атомными системами [65]. Действительно, как мы видели выше, столкновение ядра  $A$  с частицей  $a$  приводит сначала к поглощению послед-

ней, т. е. к образованию составного ядра  $C$ , которое испускает затем частицу  $b$ . Формально эта схема аналогична следующему описанию процесса рассеяния света атомом: световой квант, частота и волновой вектор которого равны  $\omega$  и  $k$ , поглощается атомом, который затем испускает квант с частотой  $\omega'$  и волновым вектором  $k'$ .

При рассмотрении рассеяния света атомом пользуются теорией возмущений. Что касается процессов ядерной динамики, то, строго говоря, теория возмущений к описанию этих процессов неприменима, так как в отличие от задачи о рассеянии света, где взаимодействие между атомом и светом мало (ввиду малости постоянной тонкой структуры  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ ), взаимодействие

между ядром и падающей на него частицей очень велико при малой энергии относительного движения, т. е. именно в тех случаях, когда наблюдаются резонансные явления.

Тем не менее представляет интерес выяснить, к каким результатам приводит теория возмущений, если её применить к описанию ядерной реакции  $A+a \rightarrow C \rightarrow B+b$ . Мы покажем далее, что результаты, к которым приводит теория возмущений, не зависят от делаемого в теории возмущений предположения о малости энергии взаимодействия и являются поэтому правильными.

Итак, мы будем пока пользоваться теорией возмущений [65], [66].

Нас интересует вероятность процесса  $A+a \rightarrow C \rightarrow B+b$ . Рассматриваемый процесс относится к эффектам второго приближения теории возмущений. Пренебрегая высшими приближениями, мы получим во втором приближении теории возмущений следующую формулу для эффективного сечения процесса  $A+a \rightarrow C \rightarrow B+b$ :

$$\sigma_{Bb}^{Aa} = 4\pi^2 \lambda^2 \left| \sum_r \frac{H_r^{Aa} H_r^{Bb}}{E^A + E^a - E_r^C + \frac{i}{2} \gamma_r} \right|^2, \quad (16.1)$$

где суммирование производится по всем «промежуточным» состояниям, т. е. по всем уровням составного ядра  $E_r^C$ ;  $E^A$  и  $E^a$  обозначают энергии исходного ядра  $A$  и частицы  $a$ ;  $H_r^{Aa}$  — матричный элемент, отвечающий пе-

реходу из начального состояния, в котором имеется частица  $a$  и исходное ядро  $A$ , в состояние  $r$  составного ядра  $C$ ;  $H_r^{Bb}$  — матричный элемент перехода из состояния  $r$  в конечное состояние (частица  $b$  и ядро  $B$ )<sup>\*</sup>. Индексы  $A$  и  $B$  служат здесь как для обозначения ядер, так и для обозначения состояний, в которых эти ядра находятся.

Наконец,  $\gamma_r$  представляет собой полную ширину уровня  $r$ , которая, с точностью до множителя  $\hbar$ , совпадает с отнесённой к единице времени вероятностью распада ядра  $C$ , находящегося в состоянии  $r$ :

$$\gamma_r = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{B'b'} |H_{B'b'}^r|^2, \quad (16.2)$$

где суммирование производится по всем видам частиц  $b'$ , могущих вылететь из ядра  $C$ , и по всем состояниям ядра  $B'$ , остающегося после вылета  $b'$ .

Частичная ширина уровня  $r$ , отвечающая вылету частицы  $b$ , равняется:

$$\gamma_b^r = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_B |H_{Bb}^r|^2 \quad (16.2')$$

(суммирование производится по всем состояниям остающегося ядра  $B$ ).

Эта формула не учитывает вырождения ядерных уровней. Если учесть вырождение, связанное с существованием углового момента, то мы получим формулу<sup>[66]</sup>:

$$\sigma_{Bb}^{Aa} = \frac{\pi \lambda^2}{(2s+1)(2l+1)} \sum_{l'l''j'j} (2J+1) \times \\ \times \left| \sum_r \frac{u_r^{Aa} u_r^{Bb}}{E^A + E^a - E_r^C + \frac{i}{2} \gamma_r} \right|^2. \quad (16.3)$$

<sup>\*</sup> Входящая в матричные элементы волновая функция частицы  $a$  предполагается нормированной на энергию. Плоская волна, нормированная на энергию, имеет вид

$$\psi_E = \left( \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3 dE} \right)^{1/2} e^{ikr},$$

где  $k$  — волновой вектор частицы.

Здесь  $i, J, i'$  — моменты количества движения ядер  $A, C$  и  $B$ ;  $s$  и  $s'$  — значения спина частиц  $a$  и  $b$ ,  $l$  и  $l'$  — орбитальные и  $j$  и  $j'$  — полные моменты этих частиц. Величины  $u$  представляют собой матричные элементы, пропорциональные  $H$  и нормированные таким образом, что соответствующие частичные ширины равны

$$\gamma_{Aa|j}^{rJ} \equiv \gamma_{Aa}^r = |u_{Aa}^r|^2$$

(в числе индексов, определяющих  $\gamma$ , отмечены моменты ядра  $C$  и частицы  $a$ ). В формуле (16.3) в сумме, модуль которой возводится в квадрат, суммирование производится по всей совокупности квантовых чисел  $r$ , характеризующих составное ядро, за вычетом углового момента  $C$ . Суммирование по  $l|j|j'|J$  производится по всем возможным значениям моментов (угловых и полных) падающей и вылетающей частиц, а также по моменту количества движения промежуточного ядра  $C$ .

Формула (16.3) показывает, что состояния составного ядра, характеризующиеся различными значениями момента количества движения  $J$ , не интерферируют друг с другом. Формула (16.3) известна под названием дисперсионной.

Как явствует из этой формулы, сечение для процесса  $A + a \rightarrow B + b$  достигает максимума, если энергия падающей частицы  $E^a$  становится равной одному из значений  $E_r = E_r^C - E^A$ . Эти значения энергии называются резонансными.

Если энергия падающей частицы близка к одной из резонансных энергий  $E_r$ , то в (16.3) главную роль играет только один член. При этом формула (16.3) приобретает вид

$$\sigma_{Bb}^{Aa} = \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{(2l+1)(2s+1)} \frac{\gamma_{Aa}^{rJ} \gamma_{Bb}^{rJ}}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4} \gamma_{rJ}^2}. \quad (16.4)$$

Эта формула называется формулой Брейта-Вигнера<sup>[65]</sup>. Входящая сюда величина  $\gamma_{Aa}^{rJ}$  представляет собой частичную ширину уровня  $rJ$  составного ядра по отношению к вылету частицы  $a$  (состояние остающегося

ядра обозначено символом  $A$ ). Аналогичный смысл имеет величина  $\gamma_{Bb}^{rJ}$ ; наконец,  $\gamma^{rJ}$  представляет собой полную ширину уровня  $rJ$ , равную

$$\gamma^{rJ} = \sum_{bB} \gamma_{Bb}^{rJ}$$

(суммирование производится по всем видам вылетающей частицы  $b$  и по всем состояниям остающегося ядра  $B$ ).

Частичные ширины, а также полная ширина уровня  $rJ$  зависят от энергии падающей частицы  $E$ . Выясним, какова эта зависимость. Заметим предварительно, что волновая функция падающей частицы с моментом  $l$ , нормированная на энергию, имеет вид<sup>[11]</sup>

$$\psi_a = \left( \frac{2}{\pi} \frac{dk}{dE} \right)^{1/2} \frac{\chi_l(kr)}{r} Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

где  $k$  — волновой вектор,  $Y_{lm}$  — шаровая функция, а  $\chi_l$  — решение уравнения

$$\frac{d^2 \chi_l(kr)}{dr^2} + \left( k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \chi_l = 0,$$

ведущее себя при больших  $r$  как  $\sin \left( kr - \frac{\pi}{2} l \right)$ ; при малых  $r$  ( $kr \ll 1$ ),  $\chi_l(kr) \sim (kr)^{l+1}$ .

Рассмотрим случай малых энергий падающей частицы, когда  $kR \ll 1$ . В этом случае в матричный элемент, определяющий величины  $\gamma$ , входят малые значения аргумента волновой функции падающей частицы. Ясно, что энергия падающей частицы может входить только через посредство  $\psi_a$ . Таким образом матричный элемент, определяющий  $\gamma_{Aa}^{rJ}$ , содержит в качестве множителя  $\left( \frac{dk}{dE} \right)^{1/2} k^{l+1}$ , т. е.  $k^{l+1/2}$ . Отсюда вытекает, что

$$\gamma_{Aa}^{rJ} \sim k^{2l+1} \sim \lambda^{-(2l+1)}.$$

Мы можем поэтому представить  $\gamma_{Aa}^{rJ}$  в виде

$$\gamma_{Aa}^{rJ} = \Gamma_{Aa}^{rJ} \left( \frac{\lambda_r^a}{\lambda} \right)^{2l+1} = \Gamma_{Aa}^{rJ} \left( \frac{E^a}{E_r} \right)^{l+\frac{1}{2}}, \quad (16.5)$$

где  $E_r^a$  и  $\lambda_r^a$  — резонансная энергия и соответствующая ей длина волны частицы  $a$ ,  $\Gamma_{AaI}^{rJ}$  — значение рассматриваемой частичной ширины при резонансе. (В числе индексов, определяющих ширины, отмечены моменты ядра  $C$  и частицы  $a$ .)

Заметим, что эта формула годится также и в том случае, если частицей  $a$  является  $\gamma$ -квант; для дипольного кванта следует в формуле (16.5) положить  $l=1$ , для квадрупольного кванта  $l=2$  и т. д.

Пользуясь (16.5), можно представить дисперсионную формулу (16.4), справедливую в том случае, когда существенную роль играет только один уровень, в следующем виде:

$$\sigma_{BbI}^{AaI} = \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{(2i+1)(2s+1)} \left(\frac{\lambda_r^a}{\lambda}\right)^{2l+1} \left(\frac{\lambda_r^b}{\lambda'}\right)^{2l'+1} \times \\ \times \frac{\Gamma_{AaI}^{rJ} \Gamma_{BbI'}^{rJ}}{(E-E_r^a)^2 + \frac{1}{4} \gamma_{rJ}^2}, \quad (16.6)$$

где  $\lambda'$  — длина волны вылетающей частицы  $b$ .

Заметим, что зависимость от энергии, даваемая формулой (16.5), справедлива, строго говоря, только для достаточно медленных частиц, так как мы предполагали при выводе этой формулы, что  $kR \ll 1$ .

Поскольку в этом случае волновая функция частицы с моментом  $l$  пропорциональна  $(kr)^{l+1}$ , наиболее важную роль играет волна с наименьшим  $l$ , т. е. с  $l=0$ . (В случае света нет волны с  $l=0$ , и наименьшее  $l$  равно 1<sup>[67]</sup>.) Пользуясь (16.5), отсюда можно заключить, что частичная ширина по отношению к вылету медленной частицы пропорциональна  $\sqrt{E}$ , где  $E$  — энергия частицы, покидающей составное ядро. Заметим, что этот результат мы имели уже раньше (см. (13.7)).

Для быстрых частиц ( $kR \gg 1$ ) формула (16.5) неприменима. Практически, однако, в этом случае часто знание точной зависимости  $\gamma_{AaI}^{rJ}$  от  $E$  не является необходимым ввиду энергетической монохроматичности падающих частиц.

Если энергия падающей частицы велика, то для резонанса существенно высоко расположенные уровни составного ядра, расстояние между которыми мало по сравнению с энергией частицы. Обычно интервал энергии, в котором находятся падающие частицы, также гораздо больше этого расстояния. Поэтому необходимо усреднить значение ширины по интервалу монохроматичности частиц. Усредненную ширину можно считать не зависящей от энергии частицы. Иными словами, мы можем заменить величину  $\gamma_{AaI}^{rJ}$  её значением при резонансе, т. е. считать, что  $\gamma_{AaI}^{rJ} \approx \Gamma_{AaI}^{rJ}$ .

Пользуясь этим выводом, представим ширину  $\gamma_{rJ}$  в виде

$$\gamma_{rJ} = \sum \Gamma_{Bb}^{rJ} + \sum \sqrt{\frac{E^b}{E_r^b}} \Gamma_{Bb}^{rJ}, \quad (16.7)$$

(быстрые частицы) (медленные частицы)

где  $E^b$  означает энергию вылетающей частицы  $b$ ; первая сумма распространяется на быстрые, а вторая — на медленные частицы, могущие покинуть составное ядро, находящееся в состоянии  $rJ$ . Энергия вылетающей частицы  $E^b$  зависит от энергии падающей частицы  $E$  и от энергии возбуждения  $E^B$  ядра  $B$ , остающегося после её вылета:

$$E^b = E^A + E - E^B.$$

Отметим несколько случаев применения формулы (16.6).

Если и падающая и вылетающая частицы являются быстрыми, то

$$\sigma_{Bb}^{Aa} = \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\Gamma_{Aa}^r \Gamma_{Bb}^r}{(E-E_r)^2 + \frac{1}{4} \gamma_r^2}. \quad (16.8)$$

Если падающая частица — медленная, а вылетающая — быстрая, то, положив в (16.5)  $l=0$ , получим:

$$\sigma_{Bb}^{Aa} = \pi \lambda \lambda_r^a \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\Gamma_{Aa}^r \Gamma_{Bb}^r}{(E-E_r)^2 + \frac{1}{4} \gamma_r^2}. \quad (16.9)$$

Заметим, что, помимо резонансного множителя, сюда входит ещё множитель  $\lambda \sim \frac{1}{v}$  ( $v$  — скорость падающей частицы).

Если и падающая и вылетающая частицы — медленные, то

$$\sigma_{Bb}^{Aa} = \pi \frac{\lambda}{\lambda'} \lambda_r^a \lambda_r^b \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\Gamma_{Aa}^r \Gamma_{Bb}^r}{(E-E_r)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_r^2}. \quad (16.10)$$

Заметим, что если в реакции участвуют медленные частицы, то действуют строгие правила отбора, касающиеся углового момента. Действительно, так как мы рассматриваем случай медленных частиц, то для них  $l=0$  и поэтому момент частицы совпадает с её спиновым моментом  $s$ .

Момент количества движения составного ядра  $J$  равен векторной сумме  $s$  и  $i$ , где  $i$  — момент количества движения исходного ядра. Величина  $J$  заключена, как известно, в пределах

$$|i-s| \leq J \leq i+s. \quad (16.11)$$

Отсюда следует, что если падающей частицей является медленный нейтрон или протон, то  $J = i \pm \frac{1}{2}$ .

Если падающей частицей является медленная  $\alpha$ -частица ( $s=0$ ), то  $J = i$ .

При поглощении дипольного  $\gamma$ -кванта  $J = i$ ,  $i = \pm 1$  (переход  $0 \rightarrow 0$  запрещён); при поглощении квадрупольного кванта  $J = i$ ,  $i \pm 1$ ,  $i \pm 2$  (при этом запрещены переходы  $0 \rightarrow 0$ ,  $0 \rightarrow 1$ ,  $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ ).

Остановимся ещё на правилах отбора, касающихся чётности волновой функции. Напомним, что волновая функция системы называется чётной, если она не меняет своего знака при изменении знака координат всех частиц, входящих в систему, и называется нечётной, если её знак при этом меняется. Мы называем характером чётности волновой функции число  $w$ , равное  $\pm 1$ , в зависимости от того, является ли волновая функция чётной или нечётной.

Характер чётности системы не меняется при её самопроизвольном распаде. Отсюда следует, что характер чётности составного ядра  $C$ , распадающегося на ядра  $B$  и  $Q$ , равняется

$$w_C = w_B w_Q w_{BQ},$$

где  $w_B$  и  $w_Q$  — характеры чётности ядер  $B$  и  $Q$ , а  $w_{BQ}$  — характер чётности волновой функции, описывающей относительное движение ядер  $B$  и  $Q$ . Если  $Q$  — элементарная частица, то  $w_Q = 1$ . Известно, что

$$w_{BQ} = (-1)^{l'},$$

где  $\hbar l'$  — момент количества движения частицы  $Q$  относительно  $B$ . Поэтому

$$w_C = w_B w_Q (-1)^{l'}. \quad (16.12)$$

Аналогично мы можем написать

$$w_C = (-1)^{l} w_A w_P, \quad (16.12')$$

где  $A$  и  $P$  обозначают частицы, в результате столкновения которых образовалось ядро  $C$ , и  $\hbar l$  — момент частицы  $P$  относительно  $A$ .

Из приведённых формул следует, что при поглощении медленной частицы чётность не меняется. При поглощении дипольного  $\gamma$ -кванта чётность меняется, а при поглощении квадрупольного кванта не меняется.

**§ 17. Теория резонансного рассеяния.** Покажем теперь, что дисперсионная формула может быть получена из очень общих предположений, не основывающихся на малости каких-либо членов в гамильтониане ядерной системы и не связанных поэтому с обычной теорией возмущений\*).

Рассмотрим сначала задачу о резонансном рассеянии частиц, отличающуюся особенной простотой математической трактовки. Предположим, что длина волны частицы значительно больше радиуса действия сил, так что главную роль играет орбитальный момент относи-

\* ) Выводу дисперсионной формулы, не основывающемуся на теории возмущений, посвящён целый ряд работ (см. [68], [69], [70], [71], [72]).



тельного движения частиц, равный нулю. В этих условиях рассеяние будет сферически симметричным.

Если расстояние  $r$  между частицами велико, то волновая функция частиц имеет следующий асимптотический вид:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{4\pi vr}} (e^{-ikr} - \beta_E e^{ikr}) \psi(i), \quad (17.1)$$

где  $k$  — волновой вектор, равный  $\sqrt{2ME}$  ( $M$  — приведённая масса частиц,  $E$  — кинетическая энергия относительного движения,  $v$  — относительная скорость частиц);  $\psi(i)$  — волновая функция, описывающая внутреннее состояние частиц.

Первое слагаемое в скобках представляет собой падающую, а второе — расходящуюся волну, причём обе они нормированы на единичный поток.

Величина  $\beta_E$ , зависящая от энергии, в рассматриваемом случае упругого рассеяния, равна по модулю единице, т. е.

$$\beta_E = e^{2i\delta}, \quad (17.1')$$

где  $\delta$  — вещественная величина, называемая «фазой на бесконечности». Сечение рассеяния  $\sigma(E)$  связано с  $\beta$  соотношением

$$\sigma(E) = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta = \frac{\pi}{k^2} |\beta_E - 1|^2. \quad (17.2)$$

Нас интересует ход зависимости сечения (17.2) от энергии. С этой целью важно выяснить вопрос об особых точках функции  $\sigma(E)$ . Из физических соображений ясно, что при положительных вещественных значениях  $E$  функции  $\sigma(E)$  и  $\beta(E)$  особых точек не имеют. Поэтому мы расширим область переменной  $E$  и будем рассматривать также комплексные значения энергии, которые в дальнейшем обозначаются через  $W$ . В комплексной области функция  $\sigma(W)$  имеет особые точки. Мы увидим, что существование особых точек, лежащих достаточно близко от вещественной оси, вызывает острые максимумы в ходе сечения с энергией (вдоль вещественной положительной полуоси).

Введение комплексных значений энергии является, как известно [113], очень полезным при изучении свойств распадающихся систем, так как мнимая часть энергии непосредственно связана со временем жизни системы. Итак, мы введём комплексные значения энергии  $W$  и, предполагая функцию  $\sigma(W)$  аналитической, исследуем поведение функции  $\sigma(W)$  в окрестности особой точки. Будем предполагать, что при конечных значениях  $W$  функция  $\sigma(W)$  имеет только простые полюсы.

В дальнейшем мы будем исходить из двух основных свойств функции  $\beta_E$ . Первое свойство состоит в том, что на положительной вещественной полуоси, т. е. при  $W = E$ , функция  $\beta_E$  по модулю равна единице. Это свойство означает, что отсутствует поглощение частиц, в силу чего интенсивность расходящейся волны должна быть равна интенсивности падающей волны.

Чтобы разъяснить второе свойство, заметим, что, если в выражении (17.1) заменить  $k$  на  $-k$ , то член  $e^{-ikr}$ , описывающий падающую волну, будет представлять расходящуюся волну, и наоборот. Так как мы рассматриваем чисто упругое рассеяние, то безразлично, что называть падающей и что расходящейся волной. Поэтому замена  $k \rightarrow -k$  не может привести к существенному изменению волновой функции (17.1). Ясно, что квадрат модуля (17.1), имеющий непосредственный физический смысл плотности вероятности, должен оставаться при такой замене неизменным.

Отсюда легко убедиться, что при замене  $k$  на  $-k$  величина  $\beta_E$  должна перейти в комплексно сопряжённую ей величину  $\beta_E^*$ . Это свойство функции  $\beta_E$  можно сформулировать ещё следующим образом. Представим себе, что мы совершаем обход в плоскости комплексного переменного  $W$  вокруг точки  $W = 0$ . Такой обход эквивалентен замене  $k$  на  $-k$ , так как в результате обхода величина  $\sqrt{E}$ , пропорциональная  $k$ , меняет свой знак. Поэтому можно сказать, что после обхода вокруг точки  $W = 0$  величина  $\beta_E$  переходит в комплексно сопряжённую ей величину  $\beta_E^*$ .

Введём в рассмотрение новую переменную  $z = \sqrt{W}$ ; мы можем тогда рассматривать  $\beta_W$  как однозначную функцию от  $z$ :

$$\beta_W = \beta(z),$$

которая равна по модулю единице на вещественной оси и которая принимает комплексно сопряжённые значения в точках  $z = \sqrt{E}$  и  $z = -\sqrt{E}$  ( $E > 0$ ):

$$\beta(-\sqrt{E}) = \beta(\sqrt{E})^* = \frac{1}{\beta(\sqrt{E})}.$$

В силу аналитичности  $\beta(z)$  отсюда следует, что

$$\beta(-z) = \frac{1}{\beta(z)}. \quad (17.3)$$

Пусть точка  $z = z_0$  есть полюс функции  $\beta(z)$ . Так как на вещественной оси  $|\beta(z)| = 1$ , то отсюда следует, что точка  $z = z_0^*$  будет нулём  $\beta(z)$  (\*). Поэтому  $\beta(z)$  можно представить в виде

$$\beta(z) = \frac{z - z_0^*}{z - z_0} \beta_1(z), \quad (17.4)$$

где  $\beta_1(z)$  в точке  $z = z_0$  регулярна и подобно  $\beta(z)$  равна по модулю единице на вещественной оси.

Используя (17.3), мы получим из (17.4):

$$\frac{1}{\beta(z)} = \frac{-z - z_0^*}{-z - z_0} \beta_1(-z),$$

т. е.

$$\beta(z) = \frac{z + z_0}{z + z_0^*} \beta_2(z), \quad (17.4')$$

где  $\beta_2(z)$  регулярна в точке  $z = -z_0^*$ .

\*) В этом легко убедиться следующим образом. Введём в рассмотрение функцию

$$\gamma(z) = i \frac{1 + \beta(z)}{1 - \beta(z)}.$$

Когда  $z$  принимает вещественные значения, то, как показывает непосредственная проверка, функция  $\gamma(z)$  также принимает веще-

Таким образом точка  $z = -z_0^*$  является полюсом  $\beta(z)$ , а точка  $z = -z_0$  — нулём  $\beta(z)$ .

Из (17.4) и (17.4') следует, что если полюс  $z_0$  не чисто мнимый, то

$$\beta_E = \beta(\sqrt{E}) = \frac{\sqrt{E} - z_0^*}{\sqrt{E} - z_0} \frac{\sqrt{E} + z_0}{\sqrt{E} + z_0^*} \chi(\sqrt{E}), \quad (17.5)$$

где  $\chi(z)$  регулярна в точках  $z_0$  и  $-z_0^*$ , равна по модулю единице на вещественной оси и так же как и  $\beta(z)$  удовлетворяет условию (17.3).

Если точка  $z_0$  лежит на мнимой оси, то вместо (17.5) мы получаем более простое представление  $\beta_E$ :

$$\beta_E = \frac{\sqrt{E} + ix}{\sqrt{E} - ix} \chi(\sqrt{E}). \quad (17.6)$$

Рассмотрим функцию  $\frac{\ln \chi(z)}{z}$ . В окрестности точки  $W = 0$  плоскости  $W$  эта функция однозначна, так как при обходе вокруг нуля и числитель и знаменатель меняют свой знак. Отсюда следует, что

$$\chi(z) = \pm e^{iz\varphi(W)}, \quad (17.6')$$

где  $\varphi(W)$  — аналитическая функция от  $W$ , регулярная в точке  $W = 0$ , а также в точках  $W = z_0^2$ ,  $z_0^{*2}$  и принимающая вещественные значения на положительной половине вещественной оси  $W$ .

Отсюда следует, что для вещественных значений. Поэтому, согласно принципу зеркального отображения, имеет место соотношение

$$\gamma(z^*) = \gamma(z)^*.$$

Перепишем это соотношение в виде

$$i \frac{1 + \beta(z^*)}{1 - \beta(z^*)} = -i \frac{1 + \beta(z)^*}{1 - \beta(z)^*},$$

мы получим:

$$\beta(z^*) \beta(z)^* = 1.$$

Последнее соотношение показывает, что если точка  $z = z_0$  является нулём функции  $\beta(z)$ , то точка  $z = z_0^*$  является её полюсом.

Таким образом, если точка  $z_0$  не лежит на мнимой оси, то мы получаем следующее представление для  $\beta_E$ :

$$\beta_E = \pm e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} \frac{E - E_0 + i\sqrt{E}b}{E - E_0 - i\sqrt{E}b}, \quad (17.7')$$

где

$$E_0 = z_0 z_0^*, \quad b = \frac{1}{2} \operatorname{Im} z_0.$$

В том случае, если точка  $z_0$  лежит на мнимой оси, представление  $\beta_E$  имеет вид

$$\beta_E = \pm e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} \frac{\sqrt{E} + iz}{\sqrt{E} - iz}. \quad (17.8')$$

Выбор знака в формулах (17.7'), (17.8') может быть произведён, исходя из условия конечности сечения рассеяния при  $E \rightarrow 0$ . Так как  $\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} |\beta_E - 1|^2$ , то отсюда следует, что

$$\lim_{E \rightarrow 0} \beta_E = 1.$$

Поэтому в формуле (17.7') следует взять верхний, а в формуле (17.8') нижний знак:

$$\beta_E = e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} \frac{E - E_0 + i\sqrt{E}b}{E - E_0 - i\sqrt{E}b}, \quad (17.7)$$

$$\beta_E = e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} \frac{iz + \sqrt{E}}{iz - \sqrt{E}}. \quad (17.8)$$

Определим теперь сечение упругого рассеяния. Подставляя (17.7) в (17.2), получим:

$$\begin{aligned} \sigma(E) &= \frac{\pi}{k^2} \left| e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} \frac{E - E_0 + i\sqrt{E}b}{E - E_0 - i\sqrt{E}b} - 1 \right|^2 = \\ &= \frac{\pi}{k^2} \left| e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} - 1 \right|^2 + \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma^2}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} + \\ &+ 2 \frac{\pi}{k^2} \operatorname{Re} \frac{i\gamma [1 - e^{-i\sqrt{E}\varphi(E)}]}{E - E_0 - i\frac{\gamma}{2}}, \quad (17.9) \end{aligned}$$

где

$$\gamma = 2b\sqrt{E}. \quad (17.9')$$

Это выражение полезно при исследовании поведения сечения вблизи точки  $E = E_0$ , так как при этом  $\varphi(E)$  не имеет особенностей.

Если  $\varphi(E) = 0$ , то (17.9) переходит в известную уже нам резонансную формулу

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma^2}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (17.10)$$

определяющую сечение резонансного рассеяния вблизи уровня  $E_0$ . Ширина уровня, согласно (17.9'), пропорциональна  $\sqrt{E}$ .

Этот результат нам уже известен (см. предыдущий параграф) и находится в соответствии с тем, что мы рассматриваем случай малых энергий, когда длина волны частицы велика по сравнению с радиусом действия сил, т. е. размерами ядра.

В общем случае, когда  $\varphi(E) \neq 0$ , сечение рассеяния (17.9) состоит из трёх слагаемых.

Первое слагаемое, не содержащее резонансного знаменателя, представляет собой так называемое потенциальное рассеяние, аналогичное рассеянию, происходящему в потенциальном поле.

Второе слагаемое описывает резонансное рассеяние и третьё — интерференцию обоих видов рассеяния.

Если энергия стремится к нулю, то потенциальное рассеяние стремится к пределу:

$$\sigma_{\text{pot}} = \frac{\pi \hbar^2}{M} |\varphi(0)|^2 \quad (17.11)$$

(мы считаем, что  $E = \frac{k^2 \hbar^2}{M}$ ).

Экспериментально определяемое сечение рассеяния  $\sigma_s$  для медленных нейтронов имеет порядок величины  $\pi R^2$ , где  $R$  — радиус ядра ( $R = r_0 A^{1/3}$ ,  $r_0 = 1,5 \cdot 10^{-13}$  см).

Резонансное рассеяние (17.10) мало по сравнению с  $\pi R^2$ , исключая случай близкого резонанса, поэтому  $\sigma_s$  объяснено, главным образом, потенциальным рассеянием.

Заметим, однако, что  $\sigma_s$  изменяется немонотонно с ростом атомного номера. Это обстоятельство указы-

вает, повидимому, на то, что потенциальное рассеяние скорее соответствует рассеянию от потенциальной ямы, нежели рассеянию от барьера, так как в последнем случае рассеяние менялось бы монотонно с ростом атомного номера (оно равнялось бы  $4\pi R^2$ ).

Определим теперь сечение рассеяния в том случае, когда величина  $\beta_E$  выражается формулой (17.8).

Подставляя (17.8) в (17.2), получим:

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} |\beta_E - 1|^2 = \frac{\pi}{k^2} \left| e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} \frac{\sqrt{E+ix}}{\sqrt{E-ix}} + 1 \right|^2 \dots$$

Для достаточно малых энергий мы заменим  $e^{i\sqrt{E}\varphi(E)}$  на  $1 + i\sqrt{E}\varphi(0)$ . В результате простых выкладок получим:

$$\sigma(E) = \frac{4\pi E}{k^2} \frac{1 - \alpha\varphi(0)}{E + \alpha^2} = \frac{4\pi\hbar^2}{M} \frac{1 - \alpha\varphi(0)}{E + \alpha^2}. \quad (17.12)$$

Мы получили формулу, которая совпадает с формулой (1.7'), определяющей сечение рассеяния нейтронов протонами. При этом, если  $\varphi(0) = 0$ , то формула (17.12) соответствует тому случаю, когда радиус действия ядерных сил считается равным нулю. При  $\varphi(0) \neq 0$  формула учитывает конечность радиуса ядра [см. (1.7')].

То обстоятельство, что при  $\varphi(0) \neq 0$  учитывается конечность радиуса ядра, находится в соответствии с выражением (17.11), определяющим потенциальное рассеяние.

Итак, мы видим, что самые общие предположения о величине  $\beta_E$  приводят только к двум возможным выражениям для сечения рассеяния (17.9), (17.12).

Перейдём теперь, после рассмотрения резонансного рассеяния, к изучению общего случая распада составного ядра.

Будем попрежнему считать, что относительный момент количества движения частиц, образующих составное ядро, а также частиц, возникающих при его распаде, равняется нулю (это означает, что мы ограничиваемся рассмотрением достаточно медленных частиц). Для простоты мы не будем сначала учитывать спин ядер.

Начнём с определения общего сечения всех неупругих процессов  $\sigma_u$ .

Согласно формуле (12.6)  $\sigma_u$  связано с отношением амплитуд расходящейся и сходящейся волн  $\beta_E$  следующим соотношением:

$$\sigma_u = \frac{\pi}{k^2} (1 - |\beta_E|^2). \quad (17.13)$$

(Напомним, что если возможно поглощение частиц, то  $|\beta| < 1$ .)

Сечение упругого рассеяния равняется при этом:

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} |1 - \beta_E|^2. \quad (17.14)$$

Выясним, какой вид имеет теперь  $\beta_E$ .

В случае чисто упругого рассеяния  $\beta_E$  вблизи уровня  $E_0$  определяется формулой (17.7). Если возможно поглощение частиц, то формулу (17.7) следует заменить следующей:

$$\beta_E = e^{i\omega(E)} \frac{E - E_0 - i\left(\frac{\gamma}{2} - \gamma_e\right)}{E - E_0 - i\frac{\gamma}{2}}, \quad (17.15)$$

где  $\omega(E)$  — вещественная функция, не имеющая особенностей при  $E > 0$ .

Величина  $\gamma_e$  удовлетворяет условию

$$\gamma_e < \gamma,$$

которое необходимо для того, чтобы модуль  $\beta_E$  был меньше единицы. Если  $\gamma_e = \gamma$ , то формула (17.15) переходит в (17.7).

Подставляя выражение (17.15) в (17.13), мы получим следующую формулу для общего сечения неупругих столкновений:

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{\pi}{k^2} \left( 1 - \left| \frac{E - E_0 - i\left(\frac{\gamma}{2} - \gamma_e\right)}{E - E_0 - i\frac{\gamma}{2}} \right|^2 \right) = \\ &= \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_e(\gamma - \gamma_e)}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \end{aligned} \quad (17.16)$$

Сечение упругого столкновения, согласно (17.14), имеет вид

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} \left| e^{i\omega(E)} + 1 - e^{i\omega(E)} \frac{i\gamma_e}{E - E_0 - i\frac{\gamma}{2}} \right|^2. \quad (17.17)$$

Последняя формула отличается от формулы (17.9) только тем, что в числитель амплитуды резонансного рассеяния вместо полной ширины  $\gamma$  входит теперь величина  $\gamma_e$ . Если не учитывать потенциальное рассеяние, то формула (17.17) даёт:

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_e^2}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (17.17')$$

откуда следует, что  $\gamma_e$  представляет собой частичную ширину по отношению к упругому рассеянию.

Вводя обозначение

$$\gamma_u = \gamma - \gamma_e,$$

перепишем формулу (17.16) для  $\sigma_u$  в виде

$$\sigma_u = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_e \gamma_u}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (17.16')$$

Величина  $\gamma_u$  представляет собой суммарную ширину уровня для всех неупругих процессов.

Чтобы получить сечение  $\sigma_\alpha$  для какого-либо определённого процесса  $\alpha$ , необходимо лишь в формуле (17.16') заменить  $\gamma_u$  на соответствующую частичную ширину  $\gamma_\alpha$ . Мы получим, таким образом, общую дисперсионную формулу

$$\sigma_\alpha = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_e \gamma_\alpha}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (17.18)$$

В приведённых выше формулах мы считали спин ядра равным нулю. Покажем теперь, как учесть спин ядра.

Так как мы рассматриваем случай медленных частиц, то для них  $l = 0$ , и поэтому значения момента количества движения составного ядра  $J$  заключены в пределах

$$|i - s| \leq J \leq i + s,$$

где  $i$  — момент количества движения исходного ядра,  $s$  — спин падающей частицы.

Вероятность данного значения  $J$  равна:

$$\frac{2J + 1}{(2s + 1)(2i + 1)}, \quad (17.19)$$

так как общее число возможных ориентаций векторов  $i$  и  $s$  равно  $(2s + 1)(2i + 1)$ , а число ориентаций вектора  $J$  равно  $2J + 1$ .

Чтобы учесть спин ядра, нужно приведённые выше формулы для  $\sigma_s$  и  $\sigma_u$  умножить на фактор (17.19). Мы получим при этом формулу (16.4).

Дисперсионная формула (17.16') может быть получена ещё иным способом, который мы сейчас изложим [72].

Волновая функция падающей частицы, которая предполагается в дальнейшем медленной, вне ядра определяется формулой (17.1).

Определим радиус ядра  $R$  как наименьшее расстояние от центра ядра, на котором падающая частица уже не находится в сфере действия ядерных сил.

Величину  $\beta_E$ , входящую в (17.1'), можно выразить через логарифмическую производную волновой функции на поверхности ядра. Введём в рассмотрение функцию

$$f(E) = R \left( \frac{d}{dr} (r\psi) \right)_{r=R}, \quad (17.20)$$

тогда

$$\beta_E = -e^{-2ix} \frac{x - if}{x + if}, \quad (17.21)$$

где

$$x = kR.$$

Заметим, что хотя в действительности положение поверхности ядра не является резко очерченным, введение функции  $f(E)$  имеет полный смысл, так как мы предполагаем, что длина волны частицы значительно больше радиуса действия ядерных сил  $R$ . В силу этого условия значение логарифмической производной волновой функции вне ядра не испытывает большого изменения на расстояниях порядка области диффузности ядерной поверхности.

Функцию  $f(E)$  мы представим в виде

$$f(E) = f_0(E) - ih(E), \quad (17.21')$$

где  $f_0$  и  $h$  — вещественные функции. Так как  $|\beta_E| \leq 1$ , то  $h(E)$  должна удовлетворять условию

$$h \geq 0.$$

Используя выражение (17.21) для  $\beta_E$ , мы получим на основании (17.13), (17.14) следующие формулы для  $\sigma_u$  и  $\sigma_s$ :

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{\pi}{k^2} (1 - |\beta_E|^2) = \frac{\pi}{k^2} \left( 1 - \frac{(x-h)^2 + f_0^2}{(x+h)^2 + f_0^2} \right) = \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \frac{xh}{(x+h)^2 + f_0^2}, \end{aligned} \quad (17.22)$$

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\pi}{k^2} |1 - \beta_E|^2 = \frac{\pi}{k^2} \left| e^{2ix} + \frac{x-if}{x+if} \right|^2 = \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \left| \frac{x}{i(x+h) - f_0} + e^{ix} \sin x \right|^2. \end{aligned} \quad (17.23)$$

Резонанс наступает в том случае, когда  $f_0 = 0$ . Значения энергии  $E$ , для которых  $f_0$  обращается в нуль, мы называем резонансными уровнями.

Для значений энергии, близких к резонансному уровню  $E_0$ , функцию  $f_0(E)$  можно представить в виде

$$f_0(E) = (E - E_0) f'_0(E_0).$$

Пользуясь этим разложением и вводя обозначения

$$\gamma_e = -\frac{2x}{f'_0(E)}, \quad \gamma_u = -\frac{2h}{f'_0(E_0)},$$

представим  $\sigma_u$  и  $\sigma_s$  в виде

$$\sigma_u = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_u \gamma_e}{(E - E_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (17.24)$$

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2} \left| \frac{\frac{1}{2} \gamma_e}{E - E_0 + \frac{1}{2} \gamma_e} + e^{ix} \sin x \right|^2, \quad (17.25)$$

где

$$\gamma = \gamma_e + \gamma_u.$$

Мы получили знакомые уже нам формулы.

Для того чтобы можно было интерпретировать  $\gamma_e$  и  $\gamma_u$  как частичные ширины по отношению к упругому и неупругому рассеянию, нужно показать, что

$$f'_0(E_0) < 0, \quad (17.26)$$

так как только при выполнении этого условия величины  $\gamma_e$  и  $\gamma_u$  будут положительными. (Напомним, что  $h \geq 0$ .) Неравенство (17.26) вытекает из следующих соображений.

Величина  $f$ , входящая в граничное условие (17.20), является функцией энергии возбуждения ядра  $W = E + B$ , где  $B$  — энергия связи частицы в ядре.

Функция  $f(W)$  определяется логарифмической производной от волновой функции составного ядра.

Если исходить из уравнения Шредингера

$$H_0 \Psi_0 = W \Psi_0,$$

где  $H_0$  — гамильтониан составного ядра, то с помощью волновой функции  $\Psi_0$  мы не получим функции  $f(W)$ , так как мы не учитываем конечной величины времени

жизни составного ядра. С помощью функции  $\Psi_0$  мы найдём лишь  $f_0(W)$ . Чтобы учесть конечность времени жизни составный составного ядра, мы добавим к гамильтониану  $H_0$  мнимый член  $-i\gamma_u/2$ ,  $\gamma_u > 0$ . (Комплексное значение энергии  $W - i\gamma_u/2$  приводит к характерному затухающему множителю в волновой функции  $e^{-\gamma_u t/2\hbar}$ .)

Поэтому мы исходим из уравнения

$$\left(H_0 - \frac{1}{2}\gamma_u\right)\Psi = W\Psi$$

( $W$  в обоих уравнениях имеет одно и то же значение.)

Знание  $\Psi$  даёт нам возможность определить  $f(W)$ . Переписав последнее уравнение в виде

$$H_0\Psi = \left(W + \frac{i\gamma_u}{2}\right)\Psi,$$

мы видим, что  $\Psi$  получается из  $\Psi_0$ , если заменить в  $\Psi_0$  величину  $W$  на  $W + \frac{1}{2}\gamma_u$ . По этой причине  $f(W)$  совпадает с  $f_0(W + i\gamma_u/2)$ . Если  $\gamma_u/2 \ll W$ , то

$$f(W) \approx f_0(W) + \frac{i\gamma_u}{2} f_0'(W).$$

Сравнение с (17.21') показывает, что

$$h = -\frac{1}{2}\gamma_u f_0'(W).$$

Так как  $h > 0$ , то  $f_0'(W) < 0$ , что и утверждалось выше.

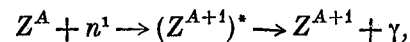
**§ 18. Захват медленных нейтронов свободными ядрами.** Возможны следующие процессы взаимодействия нейтронов с ядрами: упругое и неупругое рассеяние нейтронов, захват нейтронов с излучением  $\gamma$ -квантов (радиационный захват), захват нейтронов с испусканием заряженных частиц и, наконец, деление ядер под действием нейтронов.

Об упругом рассеянии мы говорили уже выше. Неупругое рассеяние возможно лишь в том случае,

когда энергии нейтрона достаточно для возбуждения ядра. В случае взаимодействия медленных \*) нейтронов с лёгкими ядрами этот процесс энергетически невозможен, так как расстояние между наиболее низкими уровнями лёгких ядер по порядку величины составляет около 1 MeV. Делению ядер под действием нейтронов посвящён § 21.

В этом параграфе мы рассмотрим захват медленных нейтронов, сопровождаемый испусканием быстрых частиц ( $\gamma$ -кванта или заряженной частицы). Изучение этого процесса имеет важное значение, так как даёт возможность экспериментально определять параметры, входящие в дисперсионную формулу.

Радиационный захват нейтронов, происходящий по схеме\*\*)



представляет собой очень распространённый тип реакции. Получающееся ядро  $Z^{A+1}$  может быть как стабильным, так и радиоактивным (искусственно радиоактивные ядра).

Эффективные сечения реакции такого типа в случае захвата медленных нейтронов могут достигать чрезвычайно больших значений, в тысячи раз превосходящих геометрические размеры захватывающих ядер. (Сечение захвата медленных нейтронов для  $^{40}\text{In}$  превышает  $20\,000 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ , для  $^{45}\text{Rh}$  составляет около  $6\,100 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$  и т. д. [74].)

Укажем примеры реакций, при которых захват медленных нейтронов сопровождается испусканием заряженных частиц —  $\alpha$ -частиц и протонов. (Испускание нейтронов при захвате медленных нейтронов не наблюдается, так как энергетически оно невозможно ввиду большой внутренней энергии дейтрона.)

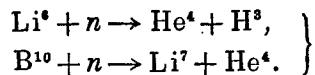
\*) Под медленными понимаются нейтроны в энергетическом интервале от нескольких тысяч вольт до тепловых энергий.

\*\*)  $Z^A$  обозначает ядро с зарядом  $Z$  и массовым числом  $A$ ;  $(Z^{A+1})^*$  обозначает составное ядро, находящееся в возбуждённом состоянии.

Захват нейтрона с испусканием  $\alpha$ -частицы происходит по схеме

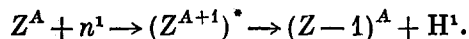


Можно указать следующие примеры таких реакций (происходящих с медленными нейтронами):

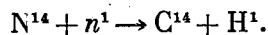


Для тепловых нейтронов эффективные сечения этих реакций очень велики: для первой  $900 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ , для второй —  $3000 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$  [73].

Захват нейтрона с испусканием протона происходит по схеме



Можно указать следующий пример такой реакции:



Заметим, что в случае захвата не очень быстрых нейтронов тяжёлыми ядрами испускание заряженных частиц становится крайне мало вероятным ввиду большой высоты потенциального барьера, который необходимо пройти частице; поэтому в этом случае происходит, главным образом, радиационный захват нейтронов.

Перейдём к рассмотрению эффективного сечения для захвата медленных нейтронов. Будем считать, что захват нейтрона обусловлен наличием одного резонансного уровня, энергию которого обозначим через  $E_r$ .

Общая дисперсионная формула даёт в этом случае следующее выражение для сечения захвата нейтрона, сопровождающегося испусканием частицы  $Q$ , которую мы считаем быстрой:

$$\sigma_Q^n(E) = \pi \frac{2J+1}{(2i+1)(2s+1)} \lambda \lambda_r \frac{\Gamma_n \Gamma_Q}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_r^2}. \quad (18.1)$$

Здесь  $\Gamma_n$  — частичная нейтронная ширина уровня при резонансе;  $\Gamma_Q$  — частичная ширина по отношению к вы-

лету быстрой частицы (в случае радиационного захвата вместо  $\Gamma_Q$  мы пишем  $\Gamma_\gamma$ );  $\gamma_r$  — полная ширина уровня  $r$ ;  $\lambda$  — длина волны падающего нейтрона;  $\lambda_r$  — значение  $\lambda$  при резонансе;  $J$  и  $i$  — угловые моменты составного и исходного ядер;  $s = \frac{1}{2}$  — спин нейтрона.

Полная ширина  $\gamma_r$  может быть представлена в виде

$$\gamma_r = \Gamma_n \left( \frac{E}{E_r} \right)^{1/2} + \sum_Q \Gamma_Q,$$

где первое слагаемое представляет собой нейтронную ширину по отношению к процессу реэмиссии медленного нейтрона, а второе слагаемое — сумму частичных ширин по отношению к вылету быстрых частиц  $Q$ . Ввиду фактора  $\sqrt{E}$  первое слагаемое мало по сравнению со вторым. Обычно возможно испускание только одного сорта частиц, поэтому сумма  $\sum \Gamma_Q$  содержит только одно слагаемое.

Итак, мы можем считать  $\gamma_r$  равным

$$\gamma_r \approx \Gamma_r \approx \Gamma_Q.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае захвата медленного нейтрона имеют место правила отбора

$$J = i \pm \frac{1}{2}, \quad \text{если } i \neq 0,$$

$$J = \frac{1}{2}, \quad \text{если } i = 0.$$

Поэтому выражение (18.1) можно представить в следующем виде:

$$\sigma_Q^n(E) = \frac{\pi}{2} \left( 1 \pm \frac{1}{2i+1} \right) \lambda \lambda_r \frac{\Gamma_n \Gamma_Q}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_r^2}. \quad (18.2)$$

Если измерять энергии и ширины в вольтах, то мы получим:

$$\sigma_Q^n(E) = \sigma_0 \sqrt{\frac{E}{E_r}} \frac{1}{1+x^2}, \quad x = \frac{E - E_r}{\Gamma/2}, \quad (18.2')$$



где  $\sigma_0$  — значение сечения при резонансе, равно

$$\sigma_0 = 1,3 \cdot 10^{-18} \left(1 \pm \frac{1}{2i+1}\right) \frac{1}{E_r} \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \text{ см}^2,$$

причём мы положили здесь  $\Gamma_Q \sim \Gamma_r \equiv \Gamma$ .

Заметим, что сечение упругого резонансного рассеяния нейтронов при наличии только одного уровня равняется:

$$\sigma_n^n(E) = \frac{\pi}{2} \left(1 \pm \frac{1}{2i+1}\right) \lambda_r^2 \frac{\Gamma_n^2}{(E-E_r)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_r^2}. \quad (18.3)$$

Отношение сечений рассеяния и захвата равно:

$$\frac{\sigma_n^n}{\sigma_n^Q} = \frac{\Gamma_n}{\Gamma_Q} \left(\frac{E}{E_r}\right)^{1/2}. \quad (18.3')$$

Для ядер, сильно поглощающих нейтроны (Cd, Ag, Rh и т. д.), это отношение очень мало. (В случае  ${}_{47}\text{Ag}$  сечение захвата составляет  $\sim 3560 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ , а сечение рассеяния  $\sim 9 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ , для  ${}_{46}\text{Cd}$  сечение захвата —  $4500 \div 3300 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ , сечение рассеяния  $\sim 3,7 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$  [74].)

Отсюда следует, что, как правило, для составных ядер среднего атомного веса, возникающих в результате захвата медленных нейтронов, нейтронная ширина значительно меньше радиационной ширины, что находится в согласии с формулами (13.7) и (15.1'). Радиационная ширина составляет для таких ядер около  $1 \text{ eV}$  (возможны вариации в 10 раз в ту и другую сторону). Нейтронная ширина при резонансной энергии  $\sim 1 \text{ eV}$  находится обычно в пределах  $10^{-4} - 10^{-2} \text{ eV}$ . Малая величина нейтронной ширины (этим обстоятельством мы уже пользовались выше, пренебрегая величиной  $\gamma_n$  в общем выражении для ширины  $\gamma$ ), допускает простую физическую интерпретацию.

Если составное ядро образуется в результате захвата медленного нейтрона, то имеется лишь одно конечное состояние, в котором может находиться ядро после испускания нейтрона, а именно — основное состояние исходного ядра. Если же происходит излучение  $\gamma$ -кванта,

то число конечных состояний может быть достаточно большим, так как энергетически возможно любое состояние конечного ядра с энергией возбуждения, не превышающей примерно  $8 \text{ MeV}$  (энергия связи нейтрона). Иными словами, после излучения  $\gamma$ -кванта ядро может ещё находиться в возбуждённом состоянии, переход из которого в основное состояние будет сопровождаться излучением новых  $\gamma$ -квантов. И, действительно, экспериментально было показано [76], что число  $\gamma$ -квантов, излучаемых ядрами кадмия в результате захвата нейтронов, в несколько раз превосходит число поглощённых нейтронов. Таким образом излучение  $\gamma$ -кванта связано с меньшей концентрацией энергии составного ядра на одной степени свободы, чем в случае испускания медленного нейтрона, которое в рассматриваемых условиях требует почти полного сосредоточения всей энергии возбуждения на одной ядерной частице.

Очевидно, что почти полная концентрация энергии на одной ядерной частице статистически очень мало вероятна. Это обстоятельство сильно уменьшает нейтронную ширину, которая при  $E < 10^4 \text{ eV}$  ( $A \sim 100$ ) становится меньше радиационной ширины, хотя взаимодействие ядерных частиц друг с другом велико по сравнению с их взаимодействием с электромагнитным полем. Если бы только что указанные статистические соображения не имели места, то корпускулярные ширины (нейтронная, протонная и др.) были бы гораздо больше радиационной ширины (такие соотношения имеют место в случае лёгких ядер; например, для Co и Mn в области энергий  $100 - 1000 \text{ eV}$  нейтронная ширина значительно больше радиационной ширины [118]).

Подчеркнём ещё раз, что нейтронная ширина мала по сравнению с радиационной шириной только в рассмотренном выше специальном случае, когда составное ядро образуется в результате захвата медленного нейтрона, причём ядро не является лёгким.

Если энергия падающего нейтрона возрастает, то нейтронная ширина образующегося составного ядра увеличивается, в то время как радиационная ширина почти не меняется. При энергиях нейтрона  $\sim 1 \text{ MeV}$  нейтронная

ширина уже значительно больше радиационной ширины (малая величина радиационной ширины связана с тем обстоятельством, что взаимодействие между излучением и материей вообще не велико).

Сечение радиационного захвата быстрых нейтронов ( $E > 1 \text{ MeV}$ ) можно оценить по формуле (см. § 12)

$$\sigma_r^n \approx \pi R^2 \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma}, \quad (18.4)$$

где  $R$ —радиус ядра, а  $\Gamma$ —полная ширина уровня. Поскольку в случае быстрых частиц  $\Gamma_\gamma \ll \Gamma$ , это сечение значительно меньше геометрического сечения ядра, которым определяется полное сечение для всех неупругих процессов. (Для тяжёлых ядер  $\sigma_r^n \approx 0,1 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ ). В области больших энергий главную роль играют процессы упругого и неупругого рассеяния нейтронов (реэмиссия нейтронов). Мы уже говорили раньше (§ 14), что средняя энергия нейтронов, покидающих составное ядро, будет при этом  $\sim 2T$  ( $T$ —температура ядра).

Возвратимся к рассмотрению радиационного захвата медленных нейтронов.

Зная из эксперимента сечение радиационного захвата  $\sigma_r^n(E)$  как функцию энергии нейтрона, мы можем найти, пользуясь формулой (18.2)  $\Gamma_n$ ,  $\Gamma_\gamma$  и  $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma$ . Отсюда можно определить  $\Gamma_n$  и  $\Gamma_\gamma$ .

Сечение захвата нейтронов содержит в качестве множителя  $\lambda$ . Поэтому для достаточно малых значений  $E$ , меньших энергии первого резонансного уровня, существует область энергии, где сечение захвата обратно пропорционально скорости нейтрона (закон  $1/v$ ).

Относительное изменение резонансного множителя  $\frac{1}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}$  меньше относительного изменения  $1/v$ , если

$$4E |E_r - E| \ll (E_r - E)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2.$$

Отсюда следует, что для выполнения закона  $1/v$  энер-

гия нейтрона должна быть меньше большей из величин  $E_r$  и  $\Gamma^*$ .

Учитывая особенности в расположении уровней тяжёлых и лёгких ядер, можно заключить, что в последнем случае интервал энергии, в котором действует закон  $1/v$ , будет гораздо больше, чем в случае тяжёлых ядер. Для последних известны уровни, близко примыкающие или даже лежащие в тепловой области ( $kT \sim 1/40 \text{ eV}$  при комнатной температуре). Например, для Gd обнаружено сильное резонансное поглощение нейтронов с энергией  $0,03 \text{ eV}$ ; для Cd найден резонансный уровень при  $0,082 \text{ eV}$ , для Eu—при  $0,465 \text{ eV}$ , для Ir—при  $0,635 \text{ eV}$ , для Rh—при  $1,28 \text{ eV}$ , для Sm—при  $0,096 \text{ eV}$ ; Dy обладает отрицательным уровнем<sup>[77]</sup>. Ясно, что в таких случаях закон  $1/v$  имеет малую область применимости. Можно думать, что в случае лёгких ядер (Li, B, N и т. д.) первый уровень находится на высоте, по порядку величины равной расстоянию между наиболее низкими уровнями, что составляет около  $10^5 \text{ eV}$ . При этом закон  $1/v$  может оказаться справедливым вплоть до энергий порядка нескольких десятков тысяч eV.

Заметим, что если сечение захвата нейтрона обратно пропорционально его скорости, то вероятность захвата, отнесённая к единице времени, не зависит от энергии нейтрона.

В формуле (18.2) мы предполагали захватывающее ядро свободным и неподвижным.

Это значит, что формула (18.2) относится, строго говоря, к поглощению нейтронов в газе, причём атомы газа предполагаются неподвижными.

Если поглощение нейтронов происходит в твёрдом теле, то ядра нельзя уже считать свободными. Учёту связи ядер в твёрдом теле посвящён § 25. В настоящем параграфе мы подробно рассмотрим вопрос о поглощении нейтронов в газе<sup>[66]</sup>.

Предположение о неподвижности ядер газа является законным, если составное ядро образуется в результате

\*) Если  $E_r$ —отрицательная величина, то  $E$  должно быть меньше  $|E_r|$ .

захвата быстрой частицы. В случае захвата медленного нейтрона скорость последнего может быть того же порядка величины, что и скорость захватывающего ядра. Поэтому пренебрегать ею в этом случае нельзя.

Мы должны, очевидно, учесть энергию отдачи ядра, т. е. энергию, которая передаётся ядру в результате упругого столкновения с нейтроном (по закону сталкивающихся шаров), и, кроме того, принять во внимание тот факт, что поглощающие ядра участвуют в тепловом движении.

Чтобы учесть эти явления, достаточно заметить, что в формулу (18.2), относящуюся к поглощению нейтронов свободными ядрами, входит, очевидно, энергия относительного движения нейтрона и поглощающего ядра. Если  $v$  — скорость нейтрона и  $u$  — тепловая скорость ядра, то под  $E$  в (18.2) следует понимать величину

$$E = \frac{m'}{2} (v - u)^2, \quad (18.5')$$

где  $m'$  — приведённая масса нейтрона, равная  $mM/m + M$  ( $m$  и  $M$  — массы нейтрона и ядра).

Пренебрегая квадратом скорости теплового движения, перепишем (18.5') в виде

$$E = \frac{m'v^2}{2} - m'vu. \quad (18.5)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой энергию относительного движения нейтрона и неподвижного ядра. Эта энергия, которую мы обозначим через  $E_0$ , множителем  $M/(M + m)$  отличается от абсолютной энергии нейтрона, равной  $mv^2/2$ .

В случае тяжёлых ядер ( $M \gg m$ ) энергию  $E_0$  можно представить в виде

$$E_0 = \frac{mv^2}{2} - R,$$

где

$$R = \frac{m}{M} \frac{mv^2}{2}$$

представляет собой энергию отдачи ядра.

Мы видим, таким образом, что если не учитывать теплового движения и понимать в формуле (18.2) под энергией нейтрона его абсолютную энергию, равную  $mv^2/2$ , то величину  $E_r$  следует заменить на  $E_{r\infty} + R$ , где  $E_{r\infty}$  — резонансная энергия, отвечающая бесконечно тяжёлому ядру.

Возвращаясь к формуле (18.5), перепишем её в виде

$$E = E_0 - \sqrt{2m'E_0}u_x,$$

где  $u_x$  — проекция  $u$  на направление скорости нейтрона  $v$ .

Предполагая, что распределение скоростей  $u$  подчиняется закону Максвелла, будем исходить из следующей формулы для вероятности того, что  $u_x$  лежит в интервале от  $u_x$  до  $u_x + du_x$ :

$$\omega(u_x) du_x = \left( \frac{M}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{Mu_x^2}{2kT}} du_x,$$

где  $T$  — температура,  $k$  — постоянная Больцмана. Пользуясь (18.5), можно выразить  $u_x$  через  $E$ ; мы получим, таким образом, распределение по энергиям относительного движения  $E$  при заданном  $E_0$ :

$$\omega(E) dE = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(E-E_0)^2}{\Delta^2}} \frac{dE}{\Delta}, \quad (18.6)$$

где

$$\Delta = 2 \sqrt{\frac{mE_0 kT}{M}} \quad (18.7)$$

( $\omega(E) dE$  — вероятность, нормированная на единицу).

Величина  $\Delta$  называется обычно доплеровской шириной, так как влияние движения ядра на захват нейтронов можно по аналогии с известными оптическими и акустическими явлениями назвать эффектом Доплера.

Заметим, что при  $\frac{m}{M} \ll 1$  доплеровская ширина может быть представлена в виде

$$\Delta \cong 2 \sqrt{R \cdot kT}, \quad (18.7')$$

где  $R$  — энергия отдачи ядра.

Имея выражение для вероятности различных значений относительной энергии, легко учесть влияние теплового движения ядер на захват нейтронов.

Мы должны, очевидно, усреднить сечение захвата (18.2) по всем возможным значениям относительной энергии  $E$ . Для этого следует умножить сечение (18.2) на  $w(E) dE$  и проинтегрировать по  $E$ .

Заметим, что множитель  $\lambda$ , т. е.  $1/v$ , стоящий перед резонансным членом, усреднять не нужно, так как этот множитель связан с определением понятия эффективного сечения и происходит от нормировки нейтронной волновой функции на единичный поток.

Усреднённое сечение захвата  $\sigma_0$  имеет следующий вид:

$$\sigma_0 = \sigma_0 \psi(\xi, x) = \int \sigma_0^*(E) w(E) dE, \quad (18.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= 2\pi \left( 1 \pm \frac{1}{2i+1} \right) \lambda_r^2 \frac{\Gamma_n}{\Gamma_r}, \\ \psi(\xi, x) &= \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4}\xi^2(x-y)^2} \frac{dy}{1+y^2}, \\ x &= \frac{2(E_0 - E_r)}{\Gamma_r}, \quad \xi = \frac{\Gamma_r}{\Delta}, \\ \Delta &= 2\sqrt{\frac{mE_r kT}{M}}. \end{aligned} \right\} \quad (18.9)$$

Мы предполагаем, что энергия нейтрона близка к резонансной, поэтому в выражении для доплеровской ширины энергия  $E_0$  заменена на  $E_r$ . На том же основании  $\lambda$  заменено на  $\lambda_r$  в выражении для  $\sigma_0$ .

Заметим, что функция  $\psi(\xi, x)$  может быть представлена ещё в следующем виде:

$$\psi(\xi, x) = \int_0^{\infty} \cos xy e^{-y - \frac{y^2}{\xi^2}} dy. \quad (18.10)$$

Действительно, применим к  $\psi(\xi, x)$  преобразование Фурье. Вводя обозначение

$$\begin{aligned} \psi_k(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi, x) e^{ikx} dx = \\ &= \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4}\xi^2(x-y)^2}}{1+y^2} e^{ikx} dx dy, \end{aligned}$$

получим:

$$\psi_k(\xi) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\xi^2 z^2} e^{ikz} dz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iky}}{1+y^2} dy.$$

Первый из этих интегралов равен  $e^{-\frac{k^2}{\xi^2}}$ , а второй  $\pi e^{-|k|}$ . Поэтому

$$\psi_k(\xi) = \pi e^{-\frac{k^2}{\xi^2} - |k|}.$$

Воспользовавшись формулой обращения, найдём  $\psi(\xi, x)$ :

$$\psi(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(\xi) e^{-ikx} dk = \int_0^{\infty} \cos kx e^{-k - \frac{k^2}{\xi^2}} dk,$$

что и требовалось доказать.

Перейдём к исследованию общей формулы (18.8) для сечения захвата нейтрона свободным ядром с учётом эффекта Доплера.

Условимся, рассматривая поглощение нейтронов, обусловленное уровнем  $E_r$ , говорить, по аналогии с оптикой, о линии поглощения  $E_r$ . Согласно этой терминологии, зависимость сечения захвата от энергии определяет форму контура линии поглощения. Формулы (18.2) и (18.8) определяют естественную форму линии поглощения и форму линии с учётом эффекта Доплера.

Легко показать, что площадь, ограниченная контуром линии поглощения при наличии эффекта Доплера,

будет такой же, как и для естественной формы линии. Действительно,

$$\int_0^{\infty} \sigma_0^*(E) dE = \pi \sigma_0 \frac{\Gamma}{2};$$

такой же результат мы получим, если будем исходить из формулы (18.8), так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi, x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \pi.$$

Рассмотрим несколько предельных случаев формулы (18.8).

Пусть сперва  $\xi \gg 1$ , т. е. пусть естественная ширина значительно превосходит доплеровскую ширину. В формуле (18.9), определяющей функцию  $\psi(\xi, x)$ , основную роль играют в этом случае значения  $y \sim x$ . Вынося  $\frac{1}{1+y^2}$  в точку  $y=x$  за знак интеграла, мы получим:

$$\begin{aligned} \psi(\xi, x) &= \frac{1}{1+x^2} \frac{\xi}{2\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\xi^2(x-y)^2} dy = \\ &= \frac{1}{1+x^2}, \quad \xi \gg 1. \end{aligned} \quad (18.11)$$

Иными словами, в случае  $\xi \gg 1$  линия поглощения, как и следовало ожидать, имеет естественную форму, так как эффект Доплера не может играть роли при  $\Gamma \gg \Delta$ .

Рассмотрим теперь предельный случай малых  $\xi$ ,  $\xi \ll 1$ . Пусть, кроме того, выполняется ещё условие  $\xi^2 x \ll 1$ .

Представив  $\psi(\xi, x)$  в виде

$$\psi(\xi, x) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}\xi^2 xy - \frac{1}{4}\xi^2 y^2}}{1+y^2} dy,$$

получим следующую приближённую формулу:

$$\psi(\xi, x) \approx e^{-\frac{1}{4}\xi^2 x^2} \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi e^{-\frac{1}{4}\xi^2 x^2}, \quad (18.12)$$

$$\xi \ll 1, \quad \xi^2 x \ll 1.$$

Формулой (18.12) определяется доплеровская форма линии поглощения. При резонансе, согласно (18.12),  $\psi$  равняется  $\psi(\xi, 0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi \ll 1$ , в то время как для естественной формы линии поглощения  $\psi$  при резонансе равняется 1.

Таким образом благодаря эффекту Доплера контур линии поглощения в центре линии понижается; так как площадь, ограниченная контуром линии, не меняется, то это значит, что линия расширяется.

При условии  $\xi \ll 1$  ( $\Gamma \ll \Delta$ ) ширина линии поглощения определяется, главным образом, доплеровской шириной.

Перейдём теперь к рассмотрению формы далёких крыльев контура линии поглощения, т. е. области энергии, где  $x$  велико, именно, пусть  $x \gg \xi^{-2}$  ( $\xi$  произвольно). Обозначая  $xu$  через  $z$ , перепишем (18.10) в виде

$$\psi(\xi, x) = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \cos z e^{-\frac{1}{x}\left(z + \frac{z^2}{x\xi^2}\right)} dz.$$

Если  $x\xi^2 \gg 1$ , то в показателе подинтегральной функции можно вычеркнуть  $\frac{z^2}{x\xi^2}$ , поэтому

$$\psi(\xi, x) \cong \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \cos z \cdot e^{-\frac{z}{x}} dz = \frac{1}{1+x^2}, \quad x\xi^2 \gg 1. \quad (18.13)$$

Итак, мы видим, что при  $x\xi^2 \gg 1$  линия поглощения имеет естественную форму.

Таким образом эффект Доплера оказывает влияние на форму линии поглощения только в том случае,

если  $\xi = \frac{\Gamma}{\Delta} \ll 1$  и  $x\xi^2 \ll 1$ . Последнее условие означает, что величина  $|E - E_r|$ , т. е. расстояние от центра линии, должно быть малым по сравнению с  $\frac{\Delta^2}{2\Gamma}$ . Далёкие крылья контура линии поглощения ( $x\xi^2 \gg 1$ ) не подвергаются действию эффекта Доплера ни при каких значениях  $\xi$ .

Заметим, что при  $x=0$ , т. е. при резонансе,

$$\psi(\xi, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \xi e^{\frac{1}{2}\xi^2} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\xi\right) \right] \quad (18.14)$$

где  $\Phi(z)$  — функция ошибок

$$\Phi(z) = 2\pi^{-1/2} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

**§ 19. Усреднённые эффективные сечения.** В этом параграфе мы рассмотрим зависимость эффективных сечений различных процессов взаимодействия нейтронов с ядрами от энергии нейтрона, считая, что последняя не превышает  $1-2$  MeV.

Если энергия нейтрона меньше  $1-2$  MeV, то наиболее важную роль играют процессы радиационного захвата, упругого и неупругого рассеяния нейтронов, а также деление ядер, вызываемое нейтронами.

Мы будем в дальнейшем интересоваться средними значениями эффективных сечений, понимая под последними сечения, усреднённые по интервалу энергий, содержащему большое число уровней составного ядра. Такие усреднённые сечения могут служить для описания ядерных процессов в тех случаях, когда нейтроны или другие частицы, взаимодействующие с ядрами, не имеют строго одинаковой энергии, причём интервал размытости энергии велик по сравнению с расстоянием между соседними уровнями составного ядра.

Усреднённые сечения в области больших энергий возбуждения мы уже ввели в § 11 при рассмотрении статистических свойств ядра. При этом ширины уровней

были того же порядка величин, что и расстояния между соседними уровнями.

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда ширины уровней значительно меньше расстояния между ними, так что статистические соображения § 11 уже не применимы.

Эффективное сечение определяется теперь общей дисперсионной формулой, которую и надлежит усреднить по большому числу уровней.

Среднее сечение  $\bar{\sigma}_\alpha(E)$  для какого-либо процесса  $\alpha$  связано с усредняемым сечением  $\sigma_\alpha(E)$  соотношением

$$\bar{\sigma}_\alpha(E) = \frac{1}{\Delta E} \int_{E-\frac{\Delta E}{2}}^{E+\frac{\Delta E}{2}} \sigma_\alpha(E) dE, \quad (19.1)$$

где  $E$  — энергия падающей частицы (в рассматриваемых ниже случаях — нейтрона),  $\Delta E$  — интервал энергии, по которому производится усреднение. Последний должен быть значительно больше среднего расстояния между соседними уровнями  $D$  и значительно меньше того интервала энергии, на протяжении которого заметно меняется само усреднённое сечение.

Мы знаем, что эффективное сечение для различных процессов (исключая потенциальное рассеяние) имеет резкие максимумы вблизи резонансных уровней. Поэтому в интеграле (19.1) главную роль играют области энергии, лежащие вблизи этих резонансных уровней.

Эффективное сечение для какого-либо процесса  $\alpha$  при значениях энергии  $E$ , близких к резонансной энергии  $E_r$ , имеет, как мы знаем, следующий вид:

$$\sigma_\alpha(E) = \pi\lambda^2 \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\gamma_\alpha^{(r)} \gamma_{r_0}^{(r)}}{(E - E_r)^2 + \frac{\gamma_r^2}{4}}, \quad (19.2)$$

где  $\gamma_\alpha^{(r)}$  — ширина, соответствующая процессу  $\alpha$ ,  $\gamma_{r_0}^{(r)}$  — нейтронная ширина, соответствующая упругому рассеянию нейтронов,  $\gamma_r$  — полная ширина уровня  $E_r$ ,  $\lambda$  — длина

волны нейтрона,  $J$  и  $i$  — моменты количества движения составного и исходного ядер,  $s$  — спин нейтрона.

Пользуясь формулой (19.2), можно представить усреднённое сечение  $\bar{\sigma}_\alpha(E)$  в виде

$$\bar{\sigma}_\alpha(E) = \sum_r \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \int \frac{\gamma_\alpha^{(r)} \gamma_{n0}^{(r)}}{(E-E_r)^2 + \frac{\gamma_r^2}{4}} \pi \lambda^2 \frac{dE}{\Delta E},$$

где суммирование производится по всем уровням, лежащим в интервале  $\Delta E$ .

Величины  $\gamma$  и  $\lambda$  являются медленно меняющимися функциями энергии. Мы можем поэтому вынести их значения при резонансе за знак интеграла.

Так как ширины  $\gamma$  предполагаются малыми, то пределы интегрирования можно расширить от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В результате мы получим:

$$\bar{\sigma}_\alpha(E) = \frac{N}{\Delta E} \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\Gamma_{n0} \Gamma_\alpha}{\Gamma} 2\pi^2 \lambda^2, \quad (19.3)$$

где  $N$  — общее число уровней в интервале  $\Delta E$ , а  $\Gamma_n, \Gamma_\alpha, \Gamma$  — значения величин  $\gamma_n, \gamma_\alpha, \gamma_r$  при резонансе (черта сверху означает, что берётся среднее значение величины).

Замечая, что  $N = \Delta E/D$ , перепишем (19.3) в виде

$$\bar{\sigma}_\alpha(E) = 2\pi^2 \lambda^2 \frac{2J+1}{(2i+1)(2s+1)} \frac{\Gamma_{n0} \Gamma_\alpha}{\Gamma D}. \quad (19.4)$$

Ради простоты мы не пишем над правой частью (19.4) черты, однако следует иметь в виду, что сюда входят средние значения величин  $\lambda, 2J+1, \Gamma_{n0}^{(r)}, \Gamma_\alpha^{(r)}, \Gamma^{(r)}$  и  $D$  по всем уровням, лежащим в интервале  $\Delta E$ . Эти средние значения следует считать функциями  $E$ .

Заметим, что формула (19.4) совпадает с формулой (11.7) для усреднённого сечения, полученной в § 11. Чтобы убедиться в этом, нужно лишь ввести в (11.7) среднее расстояние между уровнями  $D$  (эта величина отличается от входящей в (11.7) величины  $D_J$  — среднего расстояния между уровнями с определённым значением  $J$ ). Заменив в (11.7) сумму  $\sum_J (2J+1) \frac{1}{D_J}$  на  $\frac{2J+1}{D}$ , мы получим формулу (19.4).

Определим, пользуясь формулой (19.4), усреднённое сечение радиационного захвата.

Заменяя  $\Gamma_\alpha$  радиационной шириной  $\Gamma_\gamma$ , перепишем формулу (19.4) в виде

$$\bar{\sigma}_r(E) = \frac{2J+1}{2i+1} \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_{n0} \Gamma_\gamma}{\Gamma D} \quad (19.5)$$

( $s$  для нейтрона равно  $1/2$ ). Здесь  $\Gamma = \Gamma_\gamma + \Gamma_n$ ,  $\Gamma_n$  — полная нейтронная ширина (средняя), отвечающая процессам как упругого, так и неупругого рассеяния нейтронов.

Заметим, что  $\frac{\Gamma_{n0}}{D}$  представляет собой вероятность прилипания нейтрона.

Обозначим через  $E_0$  энергию, при которой радиационная ширина становится равной нейтронной ширине. Эта энергия по порядку величины равна  $E_0 \approx 10^4$  eV.

В интервале энергии  $0 < E < E_0$  полная нейтронная ширина  $\Gamma_n$  не отличается от нейтронной ширины, отвечающей упругому рассеянию  $\Gamma_{n0}$ . Средняя ширина уровня  $\Gamma$  практически совпадает с радиационной шириной. Поэтому в интервале  $0 < E < E_0$  формула (19.5) принимает вид

$$\bar{\sigma}_r = \frac{2J+1}{2i+1} \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_n}{D}. \quad (19.5')$$

Средняя нейтронная ширина при малых энергиях, согласно результатам § 13 (см. 13.7"), может быть представлена в виде

$$\Gamma_n = 1,9 \cdot 10^{-4} DE^{1/2} \text{ eV} \quad (E \text{ выражается в eV}).$$

Подставляя это значение  $\Gamma_n$  в (19.5'), получим:

$$\bar{\sigma}_r \approx \frac{3,8}{\sqrt{E}} 10^{-23} \text{ см}^2 \quad (19.6)$$

( $E$  — в eV; в этой формуле не вписан множитель, содержащий угловые моменты, так как (19.6) определяет  $\sigma_r$  только по порядку величины).

Формула (19.6) выражает известный уже нам закон  $1/v$ .

В интервале энергий  $E_1 > E > E_0$ , где  $E_1$  — энергия возбуждения первого резонансного уровня, равная по

порядку величины  $10^5 - 10^6$  eV, неупругое рассеяние нейтронов попрежнему отсутствует.

Нейтронная ширина (для упругого рассеяния) превосходит радиационную ширину и практически совпадает с полной шириной:

$$\Gamma_{n0} \approx \Gamma_n, \quad \Gamma_{n0} > \Gamma_\gamma, \quad \Gamma_{n0} \approx \Gamma.$$

Формула (19.5) даёт в этом интервале энергии

$$\sigma_r = \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_\gamma}{D} = \frac{\text{const.}}{v^2} \quad (19.7)$$

( $v$  — скорость нейтрона).

Так как и  $\Gamma_\gamma$  и  $D$  не зависят от энергии, то из формулы (19.7) следует, что в интервале энергии  $E_0 < E < E_1$  среднее сечение радиационного захвата падает с ростом энергии обратно пропорционально последней, т. е. быстрее, чем по закону  $1/v$ .

У тяжёлых элементов

$$\bar{\sigma}_r \approx 10^{-25} - 10^{-26} \text{ см}^2 \quad (E_1 \approx 10^5 \text{ eV}).$$

В области энергий  $E > E_1$  главную роль играют процессы неупругого рассеяния нейтронов.

При этом радиационная ширина и ширина, отвечающая упругому рассеянию нейтронов, становятся значительно меньше общей нейтронной ширины, которая практически совпадает с полной шириной уровня:

$$\Gamma_{n0} \ll \Gamma_n, \quad \Gamma_\gamma \ll \Gamma_n, \quad \Gamma \approx \Gamma_n.$$

Согласно формуле (19.5) мы получаем в этом случае:

$$\bar{\sigma}_r = \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_{n0}}{D} \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_n}. \quad (19.8)$$

С ростом энергии величина  $\Gamma_{n0}/D$ , представляющая собой коэффициент прилипания, стремится к единице, а  $\Gamma_\gamma/\Gamma_n$  стремится к нулю ввиду быстрого роста нейтронной ширины, отвечающей процессам неупругого рассеяния. Поэтому при  $E > E_1$  сечение  $\bar{\sigma}_r$  быстро убывает с ростом энергии, повидимому, быстрее, чем  $1/E$ .

Следует заметить, что при  $E > E_1$  необходимо учитывать значения орбитального момента нейтрона, отличные от нуля, так как при  $E \sim E_1$  длина волны нейтрона оказывается по порядку величины равной радиусу ядра.

Это обстоятельство не меняет, однако, вывода о быстром падении сечения радиационного захвата с ростом энергии, так как соотношения, имеющие место при  $l=0$ , сохраняются и при значениях  $l \neq 0$ .

Перейдём теперь к рассмотрению среднего эффективного сечения упругого рассеяния нейтронов. Мы должны при этом учитывать как резонансное, так и потенциальное рассеяние, амплитуды которых складываются. При усреднении по энергии интерференционный член, возникающий от наложения обеих амплитуд, исчезает, поэтому среднее сечение упругого рассеяния выражается в виде суммы сечений, соответствующих потенциальному и резонансному рассеянию.

Обозначая среднее сечение упругого рассеяния через  $\bar{\sigma}_s$ , будем иметь:

$$\bar{\sigma}_s = \bar{\sigma}_p + \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_{n0}^2}{\Gamma D}, \quad (19.9)$$

где  $\bar{\sigma}_p$  — среднее сечение потенциального рассеяния; второе слагаемое представляет собой усреднённое сечение резонансного рассеяния, которое получается согласно общей формуле (19.4), если положить в ней  $\Gamma_\alpha = \Gamma_{n0}$ .

В области энергий  $E < E_0$  полная ширина, как мы видели выше, практически совпадает с радиационной шириной; нейтронная ширина определяется согласно формуле (13.7"). Усреднённое сечение резонансного рассеяния в этих условиях не зависит от энергии. Сечение потенциального рассеяния также не зависит от энергии (см. § 17). Поэтому и общее сечение упругого рассеяния в интервале энергии  $E < E_0$  также не зависит от энергии нейтрона.

Сечение потенциального рассеяния  $\bar{\sigma}_p$  по порядку величины равно  $\pi R^2$  ( $R$  — радиус ядра) и составляет около  $2 - 3 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ . Сечение резонансного рассеяния



может составлять около  $10^{-23}$  см<sup>2</sup>, поэтому при  $E < E_0$  потенциальное и резонансное рассеяния играют примерно одинаковую роль.

Заметим, что могут быть ядра, у которых  $\bar{\sigma}_p$  в несколько раз меньше среднего сечения резонансного рассеяния.

В области энергии  $E_0 < E < E_1$  полная ширина совпадает с нейтронной, поэтому формула (19.9) принимает вид

$$\bar{\sigma}_s = \bar{\sigma}_p + \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_n}{D} = \bar{\sigma}_p + \frac{\text{const.}}{v}. \quad (19.10)$$

Не исключена возможность существования таких ядер, для которых первое слагаемое в (19.10) меньше второго. В этом случае в интервале энергии  $E_0 < E < E_1$  сечение упругого рассеяния будет обратно пропорционально скорости нейтрона (закон  $1/v$  для рассеяния).

В области энергии  $E > E_1$  быстрый рост нейтронной ширины, отвечающей неупругому рассеянию, приводит к падению сечения упругого резонансного рассеяния. Что касается потенциального рассеяния, то оно постепенно с ростом энергии переходит в рассматриваемое ранее диффракционное рассеяние (§ 12), аналогичное диффракции света от абсолютно чёрного шарика (с ростом энергии нейтрона постепенно «включаются» более высокие значения орбитального момента нейтрона  $l$  вплоть до значения  $l_{\text{max}} \sim R/\lambda$ ).

Неупругое резонансное рассеяние нейтронов начинает играть роль при энергии нейтронов, равной  $E = E_1$ , и быстро растёт с ростом энергии. При  $\lambda \ll R$  полное сечение для всех неупругих процессов, совпадающее с сечением образования составного ядра, становится равным  $\pi R^2$  (см. § 12). При этом сечение упругого рассеяния (потенциального) также равно  $\pi R^2$ , т. е. общее сечение равняется  $2\pi R^2$ .

Мы рассмотрели случай, когда ширины уровней меньше расстояний между ними. Если ширина уровней одного порядка или больше, чем расстояние между уровнями, то, как мы уже говорили выше, усреднённое сечение определяется формулой (11.7).

Сечение деления ядер нейтронами мы рассмотрим в § 22.

§ 20. Замечания о ядерных реакциях, происходящих с участием заряженных частиц. Рассматривая столкновение положительно заряженной частицы с ядром, необходимо учитывать потенциальный барьер, окружающий ядро. Последний образуется благодаря комбинированному действию специфических ядерных сил, действующих на малых расстояниях между частицами, и кулоновских сил отталкивания вне ядра.

Высота барьера  $B$  для частиц с зарядом  $Ze$  равна

$$B = \frac{Zze^2}{R},$$

где  $R$  — радиус ядра и  $Ze$  — его заряд. Считая, что  $R = r_0 A^{1/3}$ ,  $A$  — массовое число,  $r_0 = 1,5 \cdot 10^{-13}$ , получим для  $B$  выражение

$$B = 0,96 zZA^{-1/3} \text{ MeV}.$$

Заметим, что для прохождения барьера существенна лишь относительная кинетическая энергия, равная  $\frac{M_1}{M_1 + M_2} E$ , где  $E$  — абсолютная кинетическая энергия падающей частицы,  $M_1$  и  $M_2$  — массы частицы и ядра. Барьер не играет роли, если энергия частицы  $E > B_{\text{eff}}$ , где  $B_{\text{eff}}$  — эффективная высота барьера, равная

$$B_{\text{eff}} = \frac{M_1 + M_2}{M_1} B = 0,96 zZ(A + a) A^{-1/3} \text{ MeV} \quad (20.1)$$

( $a = \frac{M_1}{M_0}$ ,  $M_0$  — масса протона). В приводимой ниже таблице, даны значения  $B_{\text{eff}}$  в MeV для различных ядер (см. стр. 184).

Перейдём к определению так называемой прозрачности барьера.

Как известно [78], прозрачность барьера  $P$  для частицы с массой  $M$  и энергией  $E$  определяется формулой

$$P = e^{-2C}, \quad C = \frac{1}{\hbar} \int_R^{r_0} \sqrt{2M[V(r) - E]} dr, \quad (20.2)$$

Значения  $V_{\text{eff}}$  и  $g$  для различных ядер

Ядро	He	Be	Ne	Ca	Zn	Sn	Yb	U
$Z$	2	4	10	20	30	50	70	92
$A$	4	9	20	40	66	112	174	238
$B_{\text{eff}}$	$p$	1,5	2,1	3,7	5,7	7,2	10,0	14,2
	$d$	1,8	2,2	3,8	5,9	7,4	10,1	14,4
	$\alpha$	4,8	5,3	8,5	12,2	15,0	20,5	28,6
$g$	$p$	0,5	0,86	1,6	2,7	3,5	5,0	7,8
	$d$	0,7	1,2	2,2	3,7	5,0	7,1	11,0
	$\alpha$	1,1	2,1	4,3	7,2	10,0	14,0	21,9

где  $r_0$  — прицельное расстояние сталкивающихся частиц,  $R$  — внутренний радиус барьера, который считают равным радиусу ядра,  $V(r)$  — потенциальная энергия частицы с учётом центробежной энергии, равной  $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2}$  ( $\hbar l$  — момент частицы).

Прозрачность барьера при лобовых столкновениях ( $l=0$ ) равна [79]

$$P = e^{-2\sigma r \left(\frac{E}{B}\right)}, \quad (20.3)$$

где

$$g = \sqrt{2MzZe^2 \frac{R}{\hbar^2}} = \frac{R}{\lambda_b}, \quad \gamma(x) = x^{-1/2} \arccos x^{1/2} - (1-x)^{1/2}$$

( $\lambda_b$  — длина волны частицы, соответствующая энергии, равной  $B$ ). Значения  $g$  даны в приведённой выше таблице.

Прозрачность барьера для частицы, обладающей моментом  $l$ , равна:

$$P_l = e^{-2C_l},$$

$$C_l = \frac{g}{2} x^{-1/2} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1-2x}{(1+4xy)^{1/2}} \right) - (y+1-x)^{1/2} + y^{1/2} \ln \frac{1+2y^{1/2} [y^{1/2} + (y+1-x)^{1/2}]}{(1+4xy)^{1/2}}, \quad (20.4)$$

где  $x = E/B$  и  $y = l(l+1)/g^2$ .

Если  $y \ll 1$ , т. е.  $l \ll g$  и  $x < 1$ , то

$$P_l = P e^{-2gy\sqrt{1-x^2}}. \quad (20.5)$$

С увеличением  $l$  величина  $P_l$  уменьшается и становится равной  $\frac{1}{e} P$  при  $y = \frac{1}{2} g^{-1} (1-x)^{-1/2}$ , чему соответствует значение  $l$ , равное

$$l_c = \left( \frac{1}{2} g \right)^{1/2} (1-x)^{-1/4} - \frac{1}{2}.$$

Рассматривая дезинтеграцию ядра заряженной частицей, мы должны учитывать все значения её момента от  $l=0$  до  $l \sim l_c$ . Для нейтронов роль величины  $l_c$  играет  $l_0 = R/\lambda$  (см. § 12).

В случае медленных заряженных частиц ( $E \ll B$ )

$l_c \approx \sqrt{\frac{1}{2} g}$ . Эта величина отлична от нуля, в то время

как для медленных нейтронов  $l_0 = 0$ . Отсюда вытекает важное следствие. Если под влиянием медленного нейтрона ( $\lambda \gg R$ ) происходит дезинтеграция ядра, момент которого равен нулю, то угловое распределение продуктов дезинтеграции будет сферически симметричным.

Из сказанного выше о  $l_c$  следует, что угловое распределение продуктов дезинтеграции, вызываемой заряженной частицей, может не быть сферически симметричным даже в том случае, когда длина волны частицы значительно превосходит размеры ядра.

Если энергия заряженной частицы превосходит высоту барьера, то в общем имеют место такие же закономерности, что и для нейтрона той же энергии. В частности, полное эффективное сечение для всех неупругих процессов, вызываемых заряженной частицей с энергией  $E > B$  при условии, что длина частицы у поверхности ядра значительно меньше радиуса последнего, равняется  $\pi R^2$ . (Об упругом рассеянии быстрых заряженных частиц мы говорили в § 12.)

Резонансные явления с заряженными частицами наблюдаются только в лёгких ядрах, для которых велико расстояние между первыми уровнями ( $\sim 1$  MeV). В случае тяжёлых ядер это расстояние обычно гораздо меньше разброса по энергиям заряженных частиц.

Резонансные эффекты наблюдаются при радиационном захвате протонов, а также при реакциях с  $\alpha$ -частицами, сопровождающихся испусканием протона или нейтрона.

При реакциях с дейтронами резонансные явления не наблюдаются. Это объясняется большой энергией возбуждения составного ядра, получающегося в результате захвата дейтрона (ввиду малой энергии связи дейтрона энергия возбуждения составного ядра примерно в два раза превосходит энергию возбуждения, возникающую при захвате нейтрона или протона).

Вероятность вылета заряженной частицы определяется двумя факторами: во-первых, вероятностью концентрации энергии возбуждения составного ядра на данной частице и, во-вторых, вероятностью прохождения частицы через барьер.

Первая из этих вероятностей определяет частичную ширину в отсутствие барьера. Мы обозначим её для частицы  $a$  через  $G_{Aa}$ , где  $A$  обозначает состояние ядра, остающегося после вылета частицы  $a$ . Реальная ширина  $\Gamma_{Aa}$  равна:

$$\Gamma_{Aa} = G_{Aa} P_{Aa},$$

где  $P_{Aa}$  — прозрачность барьера.

Можно предполагать, что значения  $G$  для протона и нейтрона мало отличаются друг от друга.

Общая ширина по отношению к вылету частицы  $a$  равна:

$$\Gamma_a = \sum_A G_{Aa} P_{Aa}. \quad (20.6)$$

Ширина  $\Gamma_a$  зависит от числа возможных состояний ядра, остающегося после вылета частицы  $a$ . Это число состояний, в свою очередь, зависит от общей энергии, освобождаемой при реакции и равной  $E + Q_0$ , где  $E$  — энергия падающей частицы, а  $Q_0 = c^2 (M_i + M - M_f - M')$ , ( $M_i$  и  $M_f$  — массы начального и конечного ядер,  $M$  и  $M'$  — массы падающей и вылетающей частиц,  $c$  — скорость света).

Рассмотрим два случая, когда  $E + Q_0 > B_a$  и когда  $E + Q_0 < B_a$  ( $B_a$  — высота барьера для частицы  $a$ ).

В первом из этих случаев главную роль в сумме (20.6) играют те слагаемые, для которых коэффициент прозрачности  $P_{Aa}$  равен единице. Обозначая через  $N(U)$  число состояний конечного ядра с энергией возбуждения, меньшей или равной  $U$ , подставим сумму (20.6) в виде

$$\Gamma_a = N(E + Q_0 - B_a) \bar{G}_a, \quad (20.7)$$

где  $\bar{G}_a$  — некоторое среднее значение  $G_{Aa}$  (по состояниям конечного ядра).

Таким образом  $\Gamma_a$  пропорционально числу состояний конечного ядра с энергией  $U \leq E + Q_0 - B_a$ .

Мы имеем  $N$  групп вылетающих частиц, отличающихся своей энергией; наибольшее число частиц имеет энергию, заключённую между  $B_a$  и  $B_a + T$ , где  $T$  — температура ядра, соответствующая энергии возбуждения  $E + Q_0 - B_a$ .

Пусть теперь освобождаемая энергия  $Q_0 + E < B_a$ . В этом случае прозрачность барьера  $P$  отлична от единицы для всех значений энергии вылетающей частицы.

Наибольшее  $P_{Aa}$  отвечает основному состоянию остающегося ядра. Частичная ширина по порядку величины равна в этом случае:

$$\Gamma_a = G_{a0} P_{a0} \quad (20.8)$$

(индекс 0 означает основное состояние остающегося ядра).

Ясно, что частичная ширина в первом из рассмотренных выше случаев больше, чем во втором. Мы видим, что полная ширина  $\Gamma = \sum \Gamma_a$  определяется, главным образом, теми вылетающими частицами, для которых разность между освобождаемой энергией и высотой барьера  $E + Q_0 - B_a$ , а также вероятность концентрации энергии на частице  $G$  имеют наибольшие значения.

Этим условиям лучше всего удовлетворяет нейтрон, испускание которого является весьма вероятным процессом, независимо от вида падающей частицы.

Испускание  $\alpha$ -частицы представляет собой довольно распространённый тип реакции, несмотря на большую высоту барьера для  $\alpha$ -частиц. Это объясняется тем, что

большая высота барьера для  $\alpha$ -частицы компенсируется большим значением освобожденной энергии \*).

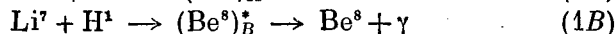
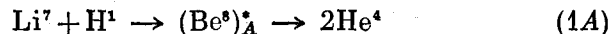
Эмиссия дейтрона крайне мало вероятна вследствие большой внутренней энергии дейтрона (обычно она просто невозможна по энергетическим соображениям).

Радиационная ширина, как правило, очень мала. Только в специальных случаях (например, при захвате медленных нейтронов) полная ширина практически совпадает с радиационной шириной.

Радиационный захват имеет место также в тех случаях, когда вылет частицы невозможен по энергетическим соображениям либо запрещен строгими правилами отбора.

Для разъяснения последних приведем следующий пример.

При столкновениях протонов с  $\text{Li}^7$  имеют место реакции



(звездочка над скобкой обозначает, что ядро находится в возбужденном состоянии, индексами  $A$  и  $B$  различаются состояния образующихся составных ядер).

Вторая из этих реакций является резонансной (резонансная энергия протонов  $\sim 440$  keV), в то время как выход  $\alpha$ -частиц в реакции (1A) монотонно растёт с увеличением энергии протонов (длина пробега  $\alpha$ -частиц  $\sim 8$  см).

Чтобы понять различный характер реакций (1A) и (1B), достаточно сделать предположение о различной чётности волновых функций, описывающих состояния составных ядер  $(\text{Be}^8)_A^*$  и  $(\text{Be}^8)_B^*$ .

Чётность  $\alpha$ -частицы  $\omega_\alpha = +1$ . Так как спин  $\alpha$ -частицы равен нулю, то волновая функция, описывающая относительное движение двух  $\alpha$ -частиц, может содержать

\*) Разность освобожденных энергий при вылете  $\alpha$ -частицы и протона равняется  $\Delta(H) + \Delta(A-1) - \Delta(\alpha) - \Delta(A-4)$ , где  $\Delta(A)$  — дефект массы ядра с атомным номером  $A$ . Эта величина [78], в случае тяжёлых ядер того же порядка величины, что и разность высот барьеров  $V_\alpha - V_H$ .

волны только с чётными  $l$ . Поэтому распад ядра  $(\text{Be}^8)^*$  на две  $\alpha$ -частицы будет возможен только в том случае, если характер чётности ядра равен  $\omega = +1$ . Мы допустим, что характер чётности ядра  $(\text{Be}^8)_A^*$  равен  $\omega = +1$ , а характер чётности ядра  $(\text{Be}^8)_B^*$  равен  $\omega = -1$ . На основании (16.12) отсюда можно заключить, что распад  $(\text{Be}^8)_B^*$  на две  $\alpha$ -частицы невозможен.

Таким образом в реакции типа (1B) вылет  $\alpha$ -частиц строго запрещён. Отсюда следует, что ширина уровня составного ядра  $(\text{Be}^8)_B^*$  гораздо меньше ширины уровня ядра  $(\text{Be}^8)_A^*$ . Поэтому резонанс наблюдается при реакции (1B) и не наблюдается при реакции (1A).

Заметим, что характер чётности ядра  $\text{Li}^7$   $\omega = 1$  [78]; поэтому для возможности протекания реакции (1A) необходимо, чтобы момент протона  $l$  был нечётным.

Рассмотрим ещё вопрос о характере излучения, испускаемого ядрами  $(\text{Be}^8)_B^*$ .

Основное состояние ядра Be мы предполагаем чётным моментом  $J=0$ . Легко показать, что  $\gamma$ -квант, испускаемый согласно реакции (1B), будет дипольным. Действительно, если предположить, что  $\gamma$ -квант — дипольный, то состояние ядра  $(\text{Be}^8)_B^*$  будет нечётным с моментом, равным  $J=1$ . Благодаря нечётности волновой функции, описывающей  $(\text{Be}^8)_B^*$ , обеспечивается невозможность распада  $(\text{Be}^8)_B^*$  на две  $\alpha$ -частицы, как это и должно быть.

Если бы мы предположили, что  $\gamma$ -квант является квадрупольным, то состояние  $(\text{Be}^8)_B^*$  получилось бы чётным с  $J=2$ ; ядро  $(\text{Be}^8)_B^*$  смогло бы распадаться на две  $\alpha$ -частицы, что по условию невозможно.

Укажем на существенную особенность ядерных реакций, в которых участвуют дейтроны. При столкновении ядра с дейтроном последний не обязательно должен целиком входить в ядро. Благодаря сравнительно малой энергии связи дейтрона может произойти «диссоциация» его ещё вне ядра; при этом нейтрон может быть захвачен ядром, а протон, отталкиваемый от ядра, появится как «вылетающая» частица [79–82].

Таким образом при столкновении ядер с дейтронами составное ядро может не образовываться.

Если энергия дейтрона превосходит высоту барьера, то этот эффект не играет роли. Он приобретает существенное значение при столкновении дейтронов с тяжёлыми ядрами и наиболее отчётливо проявляется в том случае, если энергия дейтрона меньше

$$E_0 = \frac{Ze^2}{R} - \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — энергия связи дейтрона,  $R$  — радиус ядра,  $Ze$  — его заряд.

Заметим, что при ядерных реакциях, которые происходят с участием заряженных частиц очень больших энергий ( $10^8$  eV или больше), распад составного ядра может осуществляться такими способами, которые невозможны в том случае, когда энергия бомбардирующих заряженных частиц мала. Возможен, например, вылет дейтронов. В этом параграфе мы считали энергию возбуждения составного ядра не больше  $10^7$  eV.

## ГЛАВА IV

### ДЕЛЕНИЕ ТЯЖЁЛЫХ ЯДЕР

**§ 21. Механизм деления.** Тяжёлые ядра при сравнительно малых энергиях возбуждения способны расщепляться на две или большее число примерно равных частей. Этот вид дезинтеграции называется делением ядер.

Продукты деления (осколки) находятся, как правило, в возбуждённом состоянии и во многих случаях являются  $\beta$ -активными \*).

Рассмотрение дефекта массы тяжёлых ядер показывает, что ядра, атомный вес которых превосходит  $\sim 110$ , должны быть неустойчивыми по отношению к делению.

В этом можно убедиться, если сравнить энергию покоящегося исходного ядра, массу которого мы обозначим через  $M_0$ , с энергией дочерних ядер, массы которых в невозбуждённом состоянии обозначим через  $M_1, M_2, \dots$ . Разность этих энергий равна:

$$\Delta E = (M_0 - \sum M_i) c^2. \quad (21.1)$$

Эта величина <sup>[86]</sup> оказывается положительной для всех исходных ядер, атомный номер которых превосходит 110, если рассматривается расщепление ядра на два дочерних ядра примерно равной массы. (Во мно-

\*) Явление деления ядер было открыто Ганом и Штрассманом <sup>[83]</sup>. Теории деления посвящён ряд работ Н. Бора <sup>[84]</sup>, <sup>[86]</sup>, Я. Френкеля <sup>[85]</sup> и др. В этом и следующем параграфах излагаются основные результаты работы <sup>[86]</sup>.

гих случаях  $\Delta E > 0$  при делении ядра на три и даже большее число частей.)

Таким образом тяжёлые ядра оказываются энергетически неустойчивыми.

Несмотря на свою энергетическую неустойчивость, они, однако, не расщепляются самопроизвольно с заметной вероятностью, так как этому препятствует наличие потенциального барьера в пространстве параметров,

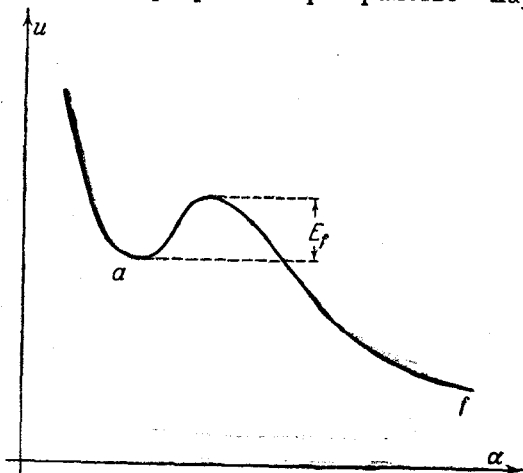


Рис. 5.

характеризующих деформацию ядра; этот барьер осколки должны пройти, прежде чем будет достигнуто их полное отделение.

Если сравнивать ядро с жидкой каплей, что мы будем далее делать, чтобы получить качественную картину процесса деления, то можно сказать, что делению ядра должна предшествовать некоторая его деформация, причём вначале увеличение деформации сопровождается увеличением энергии ядра. Иными словами, если мы будем графически изображать зависимость этой энергии от некоторого параметра  $\alpha$ , характеризующего деформацию, которая при своём возрастании приводит в конечном счёте к делению ядра, то мы получим кривую, схематически изображённую на рис. 5.

Здесь точка  $a$  изображает состояние исходного материнского ядра, а точка  $f$  соответствует тому состоянию, когда ядро разделилось на две части. Энергия начального состояния  $a$  превосходит энергию конечного состояния  $f$  на  $\Delta E$ —энергию, освобождающуюся при делении ядра. (Эта энергия переходит в кинетическую энергию осколков и в энергию  $\beta$ - и  $\gamma$ -излучения.)

Начальное состояние соответствует минимуму энергии, т. е. является устойчивым, но эта устойчивость имеет место только по отношению к деформациям, не превосходящим некоторого предела. Так как  $\Delta E > 0$ , то состоянию  $f$  соответствует более глубокий минимум, однако переходу из  $a$  в  $f$  препятствует, как видно из рисунка, потенциальный барьер (высота барьера на рисунке обозначена через  $E_f$ ).

Чтобы деление могло произойти, необходимо предварительно создать такую деформацию ядра, при которой потенциальная энергия деформации, т. е. энергия возбуждения ядра, была бы по крайней мере равна высоте этого барьера. Эта деформация называется критической, а отвечающая ей энергия—критической энергией деления.

Перейдём к определению высоты барьера, препятствующего делению ядра.

Мы будем, согласно Бору, проводить качественную аналогию между ядром и несжимаемой, равномерно заряженной жидкой каплей, обладающей некоторым поверхностным натяжением  $O$ . Энергии возбуждения ядра мы приведём в соответствие энергии деформации такой капли, совершающей колебания под действием сил поверхностного натяжения и сил электростатического отталкивания. Благодаря совокупному действию этих сил и создаётся потенциальный барьер, высоту которого мы попытаемся теперь определить.

Рассмотрим сначала малые деформации жидкой капли.

Деформированная поверхность капли, которую ради простоты будем считать телом вращения, определяется уравнением  $r(\theta) = R[1 + \alpha_0 + \alpha_2 P_2(\cos \theta) + \alpha_3 P_3(\cos \theta) + \dots]$ , где  $r(\theta)$ —радиус-вектор, проведённый из центра капли в точку её поверхности под углом  $\theta$  к оси вращения,  $R$ —начальный радиус ядра,  $P_n(\cos \theta)$ —полиномы Ле-

жандра,  $\alpha_i$  — малые параметры, характеризующие деформацию. В это выражение не входит член  $\alpha_1 P_1(\cos \theta)$ , содержащий первый полином Лежандра, так как этот член соответствует смещению шаровой капли как целого без изменения формы \*).

Потенциальная энергия капли, которая складывается из поверхностной и электростатической энергии, является функцией параметров  $\alpha_i$ . Эта функция в пространстве параметров  $\alpha_i$  изображается некоторой поверхностью. На энергетической поверхности состояния исходного ядра и разделившихся осколков изображаются точками, лежащими в потенциальных «долинах» (на рис. 5 — точки  $a$  и  $j$ ). Эти точки разделены потенциальным барьером. Точка перевала на «хребте», разделяющем обе потенциальные долины, определяет критическую деформацию ядра, за которой может последовать его деление.

Выясним прежде всего, каковы условия устойчивости капли по отношению к малым деформациям. Определим для этого потенциальную энергию капли с точностью до членов  $\alpha_i^2$ . Можно показать, что в этом приближении поверхностная и электростатическая энергия деформированной капли равняется [86]:

$$E_{S+E} = 4\pi (r_0 A^{1/3})^2 O \times \left[ 1 + \frac{2}{5} \alpha_2^2 + \frac{5}{7} \alpha_3^2 + \dots + \frac{(n-1)(n+2)}{2(2n+1)} \alpha_n^2 + \dots \right] + \frac{3}{5} \cdot \frac{(Ze)^2}{r_0 A^{1/3}} \left[ 1 - \frac{\alpha_2^2}{5} - \frac{10}{49} \alpha_3^2 - \dots - \frac{5(n-1)}{(2n+1)^2} \alpha_n^2 - \dots \right], \quad (21.2)$$

где  $O$  — коэффициент поверхностного натяжения капли и  $Ze$  — заряд ядра, радиус которого считается равным  $R = r_0 A^{1/3}$ .

\*) Для того чтобы убедиться в этом, напишем полярное уравнение сферы, предполагая, что начало координат смещено относительно центра сферы на малый вектор  $\mathbf{a}$ . В векторной форме уравнение имеет вид  $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{R}$  — вектор, проведённый из центра сферы в какую-либо её точку. Так как  $a \ll R$ , то  $r = \sqrt{(\mathbf{R} + \mathbf{a})^2} \approx \sqrt{R^2 + 2\mathbf{R}\mathbf{a}} \approx R(1 + \alpha \cos \theta) = R[1 + \alpha P_1(\cos \theta)]$ , что и требовалось доказать.

Как и следовало ожидать, деформация приводит к увеличению поверхностной и уменьшению электрической энергии капли. (Отклонение от шарообразности приводит к увеличению поверхности капли, т. е. к увеличению поверхностной энергии и к раздвижению зарядов, т. е. к уменьшению электрической энергии.)

Рассмотрим коэффициент, стоящий в (21.2) перед  $\alpha_2^2$ . Он имеет следующий вид:

$$4\pi r_0^2 O A^{2/3} \frac{2}{5} \left\{ 1 - \frac{Z^2}{A} \frac{e^2}{10 \frac{4\pi}{3} r_0^3 O} \right\}. \quad (21.3)$$

Ясно, что для устойчивости капли необходимо, чтобы выражение, стоящее в фигурных скобках, было положительным. Это значит, что  $Z^2/A$  должно быть меньше некоторого предельного значения, равного

$$\left( \frac{Z^2}{A} \right)_{\text{пред.}} = 10 \frac{4\pi}{3} \frac{O r_0^3}{e^2}. \quad (21.4)$$

При выполнении этого условия обеспечивается устойчивость также и по отношению к деформациям типа  $P_n(\cos \theta)$ , где  $n=3, 4, \dots$

При  $Z^2/A = (Z^2/A)_{\text{пред.}}$  капля является неустойчивой по отношению к бесконечно малым деформациям типа  $P_2(\cos \theta)$  (см. рис. 6, на котором изображена форма капли для простейших деформаций типа  $\delta r(\theta) = \alpha_n P_n(\cos \theta)$  при  $n=2, 3, 4$ ).

Энергия  $4\pi r_0^2 O$  имеет порядок величины ядерных энергий. Полагая, что  $4\pi r_0^2 O \approx 1,4 \cdot 10^7$  eV, найдём, что  $(Z^2/A)_{\text{пред.}}$  близко к значению  $Z^2/A$  для урана [86].

Таким образом тяжёлые ядра, как уран и торий, находятся вблизи предела устойчивости, что связано с почти полной компенсацией действия сил поверхностного натяжения и сил электростатического отталкивания.

Если  $Z^2/A < (Z^2/A)_{\text{пред.}}$ , то ядро будет устойчивым по отношению к малым деформациям, однако, как уже об этом говорилось выше, достаточно большая деформация приведёт ядро в состояние неустойчивого равно-

веса. Эта критическая деформация будет тем больше, чем меньше  $Z^2/A$ . На рис. 6 схематически изображена критическая форма капли в состоянии неустойчивого равновесия для трёх различных значений  $Z^2/A$ . Форма *c*) отвечает  $Z^2/A$ , близкому к  $(Z^2/A)_{\text{пред.}}$ . Для меньшего значения  $Z^2/A$  мы получим форму типа *b*) и, наконец, при  $Z=0$ —форму *a*). В последнем случае мы имеем,

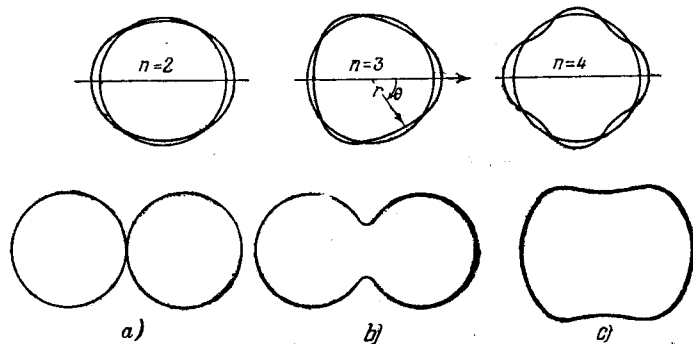


Рис. 6.

очевидно, две соприкасающиеся сферы, массы которых равны половине массы исходного ядра.

Чтобы определить критическую энергию деления, которую мы обозначим через  $E_f$ , нужно знать форму капли в состоянии неустойчивого равновесия. Равновесная форма капли должна находиться из условия [87]

$$kO + \varphi = \text{const.},$$

где  $k$ —кривизна поверхности капли,  $O$ —поверхностное натяжение и  $\varphi$ —потенциал электрических сил.

Точное решение задачи о нахождении равновесной формы капли наталкивается на большие математические трудности и не нужно для полукачественного рассмотрения. Мы поступим поэтому следующим образом.

Из соображений размерности видно, что критическую энергию деления  $E_f$  можно представить в виде произ-

ведения поверхностной энергии, равной  $4\pi r_0^2 A^{2/3} O$  на некоторую безразмерную функцию от отношения  $\frac{Z^2}{A} / \left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{пред.}}$ , т. е.

$$E_f = 4\pi r_0^2 A^{2/3} O f \left[ \frac{Z^2/A}{(Z^2/A)_{\text{пред.}}} \right]. \quad (21.5)$$

Найти общий вид функции  $f(x)$  не представляется возможным, однако можно найти  $f(x)$  в двух предельных случаях, когда  $x \ll 1$  и когда  $1-x \ll 1$ .

В первом из этих случаев роль электростатических сил очень мала. Мы можем поэтому считать, что в этом случае форма капли в состоянии неустойчивого равновесия мало отличается от той, которая изображена на рис. 6, *a*) (две соприкасающиеся сферы половинной массы).

Если бы заряд капли равнялся нулю, то энергия  $E_f$  была бы попросту равна работе, которую необходимо произвести против сил поверхностного натяжения при разделении капли на две равные части, т. е.

$$E_f = 2 \cdot 4\pi r_0^2 \left(\frac{A}{2}\right)^{2/3} O - 4\pi r_0^2 A^{2/3} O, \quad Ze \rightarrow 0. \quad (21.6)$$

При наличии заряда мы должны прибавить сюда разность электрических энергий конечной и начальной конфигураций, которая равна:

$$\frac{2 \cdot \frac{3}{5} \left(\frac{Ze}{2}\right)^2}{r_0 \left(\frac{A}{2}\right)^{1/3}} + \left(\frac{Ze}{2}\right)^2 \frac{1}{2r_0 \left(\frac{A}{2}\right)^{1/3}} - \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{r_0 A^{1/3}} \quad (21.6')$$

(первый член представляет собой электрическую энергию разделённых сфер радиуса  $r_0 \left(\frac{A}{2}\right)^{1/3}$ , второй член есть взаимная потенциальная энергия обеих сфер и третий член—электрическая энергия исходного ядра).

Из (21.4), (21.6) и (21.6') мы получим при выполнении условия  $\frac{Z^2}{A} \ll \left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{пред.}}$  следующий ре-



зультат:

$$f(x) = 0,260 - 0,215x, \quad x = \frac{\frac{Z^2}{A}}{\left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{пред.}}} \ll 1. \quad (21.7)$$

Определим теперь  $f(x)$  для значений  $x$ , близких к единице, когда ядро находится вблизи предела устойчивости. В этом случае состояние неустойчивого равновесия достигается при малых деформациях.

Выше мы определили уже полную энергию  $E_{S+E}$  в случае малых деформаций с точностью до членов  $\alpha_i^2$ . Для определения  $E_f$  этого приближения недостаточно, так как выражение (21.2), рассматриваемое как функция  $\alpha_i$ , не имеет максимума. Мы должны, очевидно, учесть ангармоничность колебаний капли, т. е. ввести в выражение для энергии более высокие степени параметров  $\alpha_i$ . Введём в рассмотрение члены, пропорциональные  $\alpha_2^3$  и  $\alpha_2^4$ , и, кроме того, член, пропорциональный  $\alpha_2^2\alpha_4$ , который учитывает связь между колебаниями типов  $n=2$  и  $n=4$ .

С учётом этих членов  $E_{S+E}$  имеет следующий вид [86]:

$$E_{S+E} = 4\pi r_0^2 O A^{2/3} \left[ \frac{2}{5} \alpha_2^2 + \frac{116}{105} \alpha_2^3 + \frac{101}{35} \alpha_2^4 + \frac{2}{35} \alpha_2^2 \alpha_4 + \alpha_4^2 \right] - \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{r_0 A^{1/3}} \left[ \frac{1}{5} \alpha_2^2 + \frac{64}{105} \alpha_2^3 + \frac{58}{35} \alpha_2^4 + \frac{8}{35} \alpha_2^2 \alpha_4 + \frac{5}{27} \alpha_4^2 \right].$$

Искомая энергия  $E_f$  определяется, очевидно, точкой перевала на поверхности, изображающей  $E_{S+E}$  как функцию  $\alpha_2, \alpha_3, \dots$  в пространстве этих параметров.

Для нахождения  $E_f$  следует сначала найти минимум  $E_{S+E}$  по отношению к переменной  $\alpha_4$  (при постоянном  $\alpha_2$ ) и затем максимум полученного выражения, являющегося функцией только  $\alpha_2$ . Можно показать, что  $E_f$  выражается следующей формулой [86]:

$$E_f = 4\pi r_0^2 A^{2/3} O \left\{ \frac{98}{135} (1-x)^3 + \dots \right\} \quad (21.8)$$

[невывисанные члены в фигурных скобках содержат более высокие степени  $(1-x)$ ].

Таким образом, если  $1-x \ll 1$ , то

$$f(x) \approx \frac{98}{135} (1-x)^3. \quad (21.9)$$

Интерполируя результаты (21.7) и (21.9), Бор и Уилер строят кривую, по которой можно приближённо

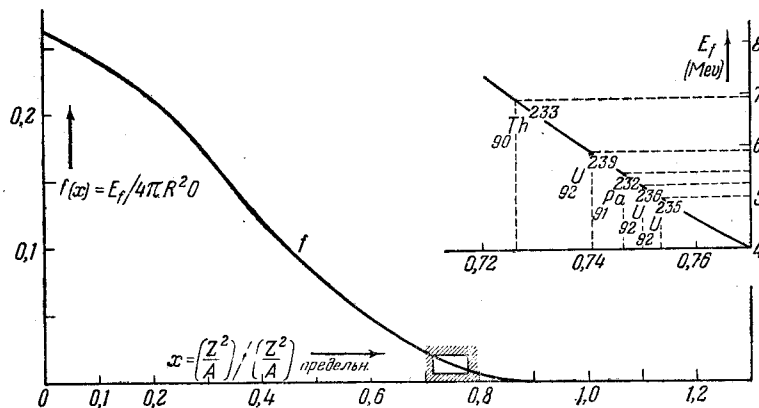


Рис. 7.

находить  $E_f$  для промежуточных значений  $x$ . Их результаты представлены на рис. 7.

Следует подчеркнуть, что такая интерполяция имеет только качественный характер, так как в действительности величина  $x$  для ядер урана и тория не очень близка к единице. (Последнее обстоятельство связано с тем, что критическая деформация, приводящая эти ядра к делению, не является малой.)

Величина энергии  $E_f$  для составного ядра  $U^{236}$ , получающегося в результате захвата нейтрона ядром  $U^{235}$ , равняется примерно  $5\frac{1}{4}$  MeV, в то время как для составного ядра  $U^{239}$   $E_f \approx 6$  MeV.

Согласно [86], энергия связи нейтрона  $E_n$  для различных ядер, способных делиться, имеет следующие

значения:

$$\begin{aligned} E_n(U^{236}) &\approx 6,4 \text{ MeV}; & E_n(U^{235}) &\approx 5,4 \text{ MeV}; \\ E_n(U^{239}) &\approx 5,2 \text{ MeV}; & E_n(\text{Th}^{233}) &\approx 5,2 \text{ MeV}; \\ E_n(\text{Pa}^{232}) &\approx 5,4 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Высота барьера  $E_f$  только для ядер  $U^{236}$ ,  $U^{235}$  меньше соответствующих значений  $E_n$ , поэтому ядра  $U^{234}$  и  $U^{235}$  способны делиться под действием тепловых нейтронов. Ядра  $U^{238}$  могут делиться только под действием быстрых нейтронов, энергия которых должна быть  $\geq 1 \text{ MeV}$ .

Заметим, что благодаря квантовомеханическому туннельному эффекту возможно также деление ядра, находящегося в основном (невозбужденном) состоянии. Вероятность такого спонтанного деления может быть оценена, если воспользоваться известной формулой, определяющей прозрачность барьера (см. 20.2).

В данном случае её следует записать в виде

$$P = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{A_1}^{A_2} \sqrt{2[E_{S+E}(\alpha) - E_0] \sum_i m_i \left(\frac{dx_i}{d\alpha}\right)^2} d\alpha \right\}, \quad (21.10)$$

где  $E_{S+E}(\alpha)$  — потенциальная энергия ядра, зависящая от некоторого параметра  $\alpha$ , характеризующего деформацию ядра,  $E_0$  — начальная энергия ядра,  $m_i$  — массы ядерных частиц,  $x_i$  — их координаты.

Интегрирование совершается в пространстве параметров  $\alpha_i$  вдоль линии «скорейшего спуска», проходящей через точку перевала, которая, как указывалось выше, отвечает критической деформации. Начальная точка пути интегрирования соответствует равновесному состоянию исходного ядра; конечная точка — разошедшимся осколком. Вдоль пути интегрирования координаты частиц следует считать функциями параметра  $\alpha$ . В том случае, когда имеется только одна частица, эта формула переходит в формулу (20.2) для прозрачности барьера.

Необходимо подчеркнуть, что в качестве  $E_{S+E}$  нельзя пользоваться выражением (21.2), справедливым в том случае, когда капля совершает малые колебания, так как в действительности мы имеем дело с большими деформациями ядра (использование выражения (21.2) в качестве  $E_{S+E}(\alpha)$  приводит к периоду полураспада ядер урана, равному примерно 1 часу<sup>[88]</sup>).

Ясно, что вероятность прохождения через барьер будет очень малой из-за большой величины масс осколков. Можно оценить показатель в формуле (21.10) приближённо как  $\sqrt{2ME_f \frac{\alpha}{\hbar}}$ , где  $M$  — масса ядра; полагая  $\alpha \approx 10^{-13} \text{ см}$ , мы получим время жизни урана по отношению к спонтанному распаду равным  $\tau_f \approx 10^{22}$  лет. Согласно экспериментальным данным<sup>[89]</sup>  $\tau_f \approx 10^{16} - 10^{17}$  лет.

Большое значение величины  $\tau_f$  показывает, что спонтанное деление практически не оказывает никакого влияния на устойчивость существующих ядер. Однако, так как с увеличением  $Z^2/A$  величина  $\tau_f$  быстро падает, спонтанное деление может быть ответственно за отсутствие в природе некоторых трансурановых элементов.

Приведём в заключение этого параграфа значения энергии  $\Delta E$ , выделяющейся при делении различного рода ядер<sup>[86]</sup>.

Исходное ядро	Продукты деления	Энергия, выделяемая при делении в MeV	Энергия, выделяемая при последующем распаде осколков
$^{28}\text{Ni}^{61}$	$^{14}\text{Si}^{30,31}$	—11	2
$^{50}\text{Sn}^{117}$	$^{25}\text{Mn}^{58,59}$	10	12
$^{63}\text{Er}^{167}$	$^{34}\text{Se}^{83,84}$	94	13
$^{82}\text{Pb}^{206}$	$^{41}\text{Ne}^{103,103}$	120	32
$^{92}\text{U}^{239}$	$^{46}\text{Pd}^{119,120}$	200	31

В последнем столбце указаны значения энергии, освобождающейся в результате последующих  $\beta$ -распадов осколков деления.

Мы видим, что освобождающаяся при делении ядра урана энергия составляет около 200 MeV ( $E_f$  для урана  $\sim 6$  MeV).

Заметим, что, согласно расчётам<sup>[86]</sup>, при расщеплении ядра урана на три примерно равные части должна выделиться энергия около 210 MeV, что несколько превышает энергию, выделяемую при делении на две части.

Разделение урана на четыре части должно привести к выделению энергии 150 MeV. (Разделение становится эндотермическим, если число дочерних ядер равно 15.)

Деление ядер урана на три и четыре части наблюдалось экспериментально, причём было установлено, в соответствии с теоретическими расчётами, что энергия, выделяющаяся при делении на три части, превышает энергию, выделяющуюся при делении на две части<sup>[119]</sup>.

**§ 22. Вероятность деления.** Ядро, энергия возбуждения которого превосходит  $E_f$ , не обязательно должно подвергнуться делению. Можно лишь сказать, что будет иметь место конкуренция между различными процессами, могущими привести к распаду составного ядра. Наиболее важными из них, помимо деления, являются испускание нейтрона и эмиссия  $\gamma$ -кванта.

Бор<sup>[84]</sup> отмечает, что в то время, как вылет частицы связан с концентрацией энергии возбуждения ядра, распределённой вначале между многими частицами и имеющей характер тепловой энергии, на одной частице, находящейся у поверхности ядра, деление ядра связано с переходом части этой энергии в потенциальную энергию деформации ядра, достаточной для того, чтобы привести к делению.

Сравним между собой частичные ширины составного ядра по отношению к делению, вылету нейтрона и испусканию  $\gamma$ -кванта.

Покажем прежде всего, каким образом можно оценить частичную ширину по отношению к делению  $\Gamma_f$ . Обозначим число состояний составного ядра с энергией возбуждения между  $E$  и  $E + dE$  через  $\rho(E) dE$ .

Рассмотрим совокупность ядер, энергия возбуждения которых лежит между  $E$  и  $E + dE$ . Пусть общее число ядер равняется  $\rho(E) dE$ , так что в каждом состоянии находится по одному ядру. Из этого числа в единицу времени подвергается делению всего  $\rho(E) dE \frac{\Gamma_f}{\hbar}$  ядер.

Рассмотрим слой толщины  $dx$ , ориентированный перпендикулярно к направлению, в котором происходит деление, и расположенный в том месте, где в ядре образуется «шейка», предшествующая делению.

Отнесённое к этому слою общее число квантовых состояний составного ядра, находящегося в переходном состоянии, непосредственно предшествующем делению, можно представить в виде

$$\frac{dp dx}{2\pi\hbar} \rho^*(E - E_f - K) dE,$$

где  $K$  и  $p$  — энергия и импульс, которые приобретают при разлёте осколки деления (величины  $K$  и  $p$  заключены в интервалах  $dK$  и  $dp$ ),  $\rho^*$  — плотность тех уровней составного ядра в переходном состоянии, которые возникают от возбуждения не связанных с делением степеней свободы ядра. (Энергия возбуждения этих степеней свободы в переходном состоянии равна  $E - E_f - K$ ; эта энергия и является аргументом функции  $\rho^*$ .) Наконец,  $dp dx / 2\pi\hbar$  — число квантовых состояний в интервалах  $dp$  и  $dx$  переменных  $p$  и  $x$ . Эти состояния связаны с переменной, которая определяет деформацию, приводящую к делению ядра.

Поскольку вначале в каждом квантовом состоянии находилось по одному ядру, общее число делений в единицу времени равно:

$$dE \int \frac{v dp}{2\pi\hbar} \rho^*(E - E_f - K),$$

где  $v = \frac{dx}{dt}$  — относительная скорость осколков. Замечая, что  $v dp = dK$ , можно переписать это выражение в виде

$$dE \int \frac{v dp}{2\pi\hbar} \rho^*(E - E_f - K) = \frac{dE}{2\pi\hbar} N^*(E - E_f),$$

где  $N^*(E - E_f)$  — общее число уровней составного ядра в переходном состоянии с энергией возбуждения, не превосходящей  $E - E_f$ .

Приравнявая полученное выражение найденному ранее числу делений в единицу времени  $\frac{\rho(E)dE}{\hbar} \Gamma_f$ , получим следующее выражение для ширины деления  $\Gamma_f$ :

$$\Gamma_f = \frac{N^*(E - E_f)}{2\pi\rho(E)} = \frac{1}{2\pi} DN^*(E - E_f), \quad (22.1)$$

где  $D$  — среднее расстояние между соседними уровнями составного ядра с энергией возбуждения, равной  $E$ .

Если  $E \leq E_f$ , то  $\Gamma_f \approx 0$ . Если  $E - E_f \sim \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — расстояние между наименьшими уровнями составного ядра в переходном состоянии, то  $N^* \approx 1$ , и формула (22.1) даёт:

$$\Gamma_f \sim \frac{D}{2\pi} \sim 1 - 10 \text{ eV}.$$

Выясним, как ведёт себя  $\Gamma_f$  при возрастании энергии возбуждения  $E$ .

Напомним для этого, что плотность уровней ядра пропорциональна  $e^{S(E)}$  (см. § 10), где  $S(E)$  — энтропия составного ядра. Полагая  $S = a\sqrt{E}$ , где  $a$  — некоторая константа, получим:

$$\Gamma_f \sim e^{a(\sqrt{E - E_f} - \sqrt{E})}$$

(предэкспоненциальный множитель здесь не выписан). Таким образом, начиная с  $E = E_f$ , величина  $\Gamma_f$  сильно, почти экспоненциально, возрастает с увеличением  $E$ .

Рассмотрим теперь вероятности испускания  $\gamma$ -кванта и эмиссии нейтрона. Что касается радиационной ширины  $\Gamma_\gamma$ , то, как мы знаем, у обычных ядер  $\Gamma_\gamma \approx 0,1 \text{ eV}$ , причём эта ширина почти постоянна в большом интервале энергии.

Можно предполагать, что у ядер, могущих делиться,  $\Gamma$  — того же порядка величины, что и у обычных ядер. Действительно, из всех степеней свободы ядра, способного делиться, только одна степень, отвечающая

колебанию типа  $P_2(\cos \theta)$  (см. выше), обладает аномальными свойствами — большой амплитудой колебаний при сравнительно малой энергии возбуждения. Однако излучение, связанное с этой степенью свободы, мало ввиду малости частот колебаний.

Итак, при  $E - E_f \gg \varepsilon$   $\Gamma_\gamma \ll \Gamma_f$ .

Следует, однако, учитывать, что при  $E - E_f \sim \varepsilon \sim 0,5 \text{ MeV}^*$   $\Gamma_\gamma \sim 0,1 \Gamma_f$ , т. е. сечение радиационного захвата нейтрона только примерно в 10 раз меньше сечения деления.

Нейтронная ширина  $\Gamma_n$  ничтожно мала при очень малых значениях  $E - E_n$  ( $E_n$  — энергия связи нейтрона). Для достаточно малых значений  $E - E_n$  величина  $\Gamma_n$  практически сводится к  $\Gamma_{n0}$  — частичной ширине по отношению к процессу, при котором вылетает нейтрон, а остающееся ядро находится в основном состоянии. При возрастании энергии возбуждения  $E$ , начиная с  $E = E_n$ , величина  $\Gamma_n$  сильно возрастает и очень скоро становится больше  $\Gamma_{n0}$ . Действительно, если  $E > E_n$ , то  $\Gamma_n = \sum_B \Gamma_{nB}$ , где суммирование производится по состояниям  $B$  остающегося после вылета нейтрона ядра. Последнюю сумму можно представить в виде

$$\Gamma_n = \int \Gamma_{nB} \tilde{\rho}(E - E_n - K) dK,$$

где  $\tilde{\rho}$  — плотность уровней ядра, остающегося после вылета нейтрона,  $K$  — кинетическая энергия нейтрона. Вынося за знак интеграла некоторое среднее значение  $\bar{\Gamma}_{nB}$ , которое мы обозначим через  $\bar{\Gamma}_{nB}$ , получим:

$$\Gamma_n = \bar{\Gamma}_{nB} \tilde{N}(E - E_n),$$

где  $\tilde{N}$  — общее число уровней остающегося ядра с энергией возбуждения, меньшей чем  $E - E_n$ .

Предполагая, что  $E - E_n \gtrsim 1 \text{ MeV}$ , можно считать коэффициент прилипания нейтронов  $\zeta$  равным единице. При этом, как было показано в § 11, среднее значение

\*) Можно считать, что  $\varepsilon$  совпадает по порядку величины с соответствующей величиной для обычных ядер.

ширины  $\Gamma_{n\beta}$  по порядку величины равно  $D/2\pi$ , где  $D$  — среднее расстояние между соседними уровнями составного ядра. Поэтому

$$\Gamma_n \sim \frac{D}{2\pi} \tilde{N}(E - E_n). \quad (22.2)$$

Сравнение этой формулы с формулой (22.1) для  $\Gamma_f$  показывает, что при возрастании  $E$ , начиная с  $E = E_n$ ,  $\Gamma_n$  быстро, почти экспоненциально, возрастает с энергией.

Таким образом мы можем сделать следующие выводы. Если энергия возбуждения составного ядра  $E$  меньше или того же порядка величины, что и  $E_f$ , то  $\Gamma_f \sim 0$ . Излучение при этом гораздо более вероятно, чем деление. При увеличении энергии возбуждения, начиная с энергии  $E = E_f$ , частичная ширина по отношению к делению  $\Gamma_f$  быстро возрастает и очень скоро становится больше  $\Gamma_\gamma$ .

При достаточно больших энергиях возбуждения излучение можно вовсе не учитывать, так что основными процессами, ведущими к распаду составного ядра, будут деление и эмиссия нейтрона. Можно предполагать, что асимптотическое поведение  $\Gamma_f$  и  $\Gamma_n$  при  $E \gg E_n$  и  $E \gg E_f$  примерно одинаково, так как при больших энергиях возбуждения температура ядра настолько велика, что экспоненциальные факторы в  $\Gamma_f$  и  $\Gamma_n$  по порядку величины равны единице и различие в  $\Gamma_n$  и  $\Gamma_f$  обуславливается различием предэкспоненциальных множителей, которые являются медленно меняющимися функциями энергии возбуждения.

Отсюда видно, что при больших энергиях возбуждения оба процесса могут играть примерно одинаковую роль.

Следует отметить, что если энергия возбуждения превосходит сумму  $E_f + E_n$ , то сечение деления возрастает благодаря следующему процессу<sup>[90]</sup>.

Сильно возбуждённое составное ядро, образующееся благодаря слиянию исходного ядра с быстрым нейтроном, может подвергнуться делению либо сразу, либо после вылета нейтрона, если только энергия возбужде-

ния остающегося при этом ядра превосходит характерную для этого ядра энергию деления.

Приведём формулы, определяющие эффективное сечение деления. Пусть возбуждение составного ядра создаётся в результате захвата нейтрона.

Рассмотрим сначала тот случай, когда энергия нейтрона лежит вне тепловой области. (О сечениях в тепловой области см. следующий параграф.)

Если существенную роль играет только один уровень с энергией  $E_r$ , то сечение деления  $\sigma_f$  выражается резонансной формулой

$$\sigma_f = \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\Gamma_{n0}\Gamma_f}{(E - E_r)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (\lambda \gg R), \quad (22.3)$$

где  $E$  — энергия падающего нейтрона,  $\lambda$  — длина волны нейтрона,  $\Gamma = \Gamma_f + \Gamma_n + \Gamma_\gamma$  — полная ширина уровня,  $s$  — спин нейтрона,  $i$  и  $J$  — угловые моменты исходного и составного ядер.

При захвате медленного нейтрона  $\Gamma_n \sim \sqrt{E}$ , поэтому  $\sigma_f \sim \frac{1}{v}$  ( $v$  — скорость нейтрона).

Сечение радиационного захвата в этих же условиях имеет вид

$$\sigma_\gamma = \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{(2s+1)(2i+1)} \frac{\Gamma_{n0}\Gamma_\gamma}{(E - E_r)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}, \quad \lambda \gg R. \quad (22.4)$$

Если захватывается медленный нейтрон и при этом состояние составного ядра попадает в область перекрывающихся уровней ( $\Gamma \sim D$ ), то усреднённое сечение деления определяется общей формулой (11.7)

$$\sigma_f = 2\pi^2 \lambda^2 g \frac{\Gamma_{n0}\Gamma_f}{\Gamma D}, \quad \text{где } g \begin{cases} 1, & \text{если } i=0, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } i>0. \end{cases} \quad (22.5)$$

(Мы воспользовались при этом тем обстоятельством, что орбитальный момент нейтрона  $l=0$ , поэтому  $J = i \pm \frac{1}{2}$ , если  $i \neq 0$ , и  $J = \frac{1}{2}$ , если  $i=0$ .)

Усреднённое сечение радиационного захвата в этих же условиях определяется формулой

$$\sigma_r = 2\pi^2 \lambda^2 g \frac{\Gamma_{n0} \Gamma_\gamma}{\Gamma D}, \quad \text{где } g \begin{cases} 1, & \text{если } i = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } i > 0. \end{cases} \quad (22.6)$$

Если деление возможно уже под действием тепловых нейтронов, то ширина деления всегда больше радиационной ширины и полная ширина  $\Gamma$  практически совпадает с шириной деления  $\Gamma_f$ .

В том случае, когда ширина деления меньше расстояния между уровнями  $D$ , в ходе сечения деления с изменением энергии нейтрона могут наблюдаться резонансные эффекты. Если же  $\Gamma_f \gg D$ , то сечения деления и радиационного захвата будут монотонными функциями энергии нейтрона.

Среднее сечение деления, определяемое формулой (22.5), будет равно при этом ( $\Gamma \approx \Gamma_f$ ):

$$\sigma_f = \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_{n0}}{D} = \pi^2 \lambda^2 \zeta, \quad (22.7)$$

где  $\zeta$  — вероятность прилипания нейтрона. Заметим, что сечение  $\sigma_f$  почти совпадает с сечением образования составного ядра, так как  $\Gamma_f$  близко к  $\Gamma$ . Среднее сечение радиационного захвата для ядер, могущих делиться под действием тепловых нейтронов, определяется формулой

$$\sigma_r = \pi^2 \lambda^2 \frac{\Gamma_{n0} \Gamma_\gamma}{\Gamma D} \approx \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_f} \sigma_f. \quad (22.8)$$

Оба выражения (22.7), (22.8) для  $\sigma_f$  и  $\sigma_r$  справедливы вплоть до таких энергий, при которых начинает играть роль неупругое рассеяние нейтронов ( $\sim 1$  MeV). При энергии нейтрона  $E \sim 10^5$  eV  $\sigma_f$  оказывается по порядку величины равным  $10^{-24}$  см<sup>2</sup>, если считать, что коэффициент прилипания для энергии  $E \sim 10^5$  eV равен примерно 1/3.

В случае захвата быстрого нейтрона ( $\lambda \ll R$ ) сечение деления  $\sigma_f$  определяется формулой

$$\sigma_f \approx \pi R^2 \frac{\Gamma_f}{\Gamma}. \quad (22.9)$$

Заметим, что, помимо нейтронов, деление могут вызывать также дейтроны, протоны,  $\gamma$ -лучи и другие частицы, если они обладают достаточно большой энергией, чтобы создать нужное возбуждение ядра [91], [92].

Что касается дейтронов, то следует иметь в виду, что они должны иметь возможность целиком проникнуть в ядро. Нейтрон, захватываемый ядром в результате диссоциации медленного дейтрона в поле ядра (процесс Оппенгеймера-Филлипса), оказывается неспособным вызвать деление, так как возникающее при этом возбуждение ядра меньше критической энергии деления  $E_f$  [86].

**§ 23. Цепная реакция.** При делении тяжёлых ядер под действием нейтронов, помимо ядер-осколков, испускаются вторичные быстрые нейтроны, которые, в свою очередь, способны вызывать деление ядер. Эти нейтроны распределены по энергиям непрерывно, причём основная масса нейтронов имеет энергию около 1—2 MeV (максимальная энергия нейтронов составляет около 10 MeV).

Таким образом появляется возможность осуществления цепной ядерной реакции. Для того чтобы такая реакция происходила, необходимо выполнение ряда условий, к рассмотрению которых мы теперь перейдём.

Рассмотрим сначала простейший случай бесконечной мультиплицирующей системы, когда вещество, ядра которого способны делиться, занимает бесконечное пространство. В таких системах можно не интересоваться потерей нейтронов, имеющей место в системах конечных размеров и происходящей из-за диффузии нейтронов в окружающее пространство.

Пусть в состав мультиплицирующей системы входят только ядра тяжёлых элементов, могущих делиться под действием нейтронов. Обозначим через  $\nu$  среднее число нейтронов, возникающих при одном акте деления ядра. При столкновении таких нейтронов с ядрами наиболее вероятны процессы деления и неупругого рассеяния ней-

тронов (радиационный захват быстрых нейтронов мал, но всё же происходит с заметной вероятностью).

Если неупругое рассеяние мало, то для протекания цепной реакции необходимо, чтобы  $\nu$  было больше единицы.

Это же условие должно выполняться также и в том случае, когда неупругое рассеяние нейтронов не мало, но неупруго рассеянные нейтроны способны вызывать деление ядер. Для возможности последнего кинетическая энергия почти всех неупруго рассеянных нейтронов должна превосходить разность между критической энергией деления  $E_c$  и энергией связи нейтрона  $E_n$ , так как только в этом случае вероятность деления под действием неупруго рассеянных нейтронов будет достаточно большой. (Вблизи порога деления сечение деления стремится к нулю, см. § 22.)

Если неупруго рассеянные нейтроны (после одного или нескольких актов рассеяния) не способны вызывать деление, то возможность протекания цепной реакции будет определяться, кроме величины  $\nu$ , вероятностью неупругого рассеяния и энергетическим спектром неупруго рассеянных нейтронов. Мы не будем, однако, подробно рассматривать этот случай.

Если из-за большого неупругого рассеяния, выходящего нейтроны из области энергии, в которой они способны делить ядра, а также из-за радиационного захвата нейтронов, роль которого возрастает с уменьшением энергии нейтронов, цепная реакция на быстрых нейтронах невозможна, то можно создать условия, благоприятствующие протеканию цепной реакции на медленных (тепловых) нейтронах. Для этой цели в систему необходимо ввести замедлитель—лёгкий элемент, ядра которого эффективно замедляют нейтроны при упругих столкновениях.

Легко вывести формулу, определяющую число столкновений, которое должен испытать быстрый нейтрон, чтобы стать тепловым. Будем для простоты считать, что масса ядра, с которым сталкивается нейтрон, значительно больше массы нейтрона. В этом случае при каждом упругом столкновении нейтрона, энергия которого равна  $E$ , с ядром замедлителя нейтрон в сред-

нем теряет энергию, равную

$$\Delta E = \frac{2E}{A+1}, \quad (*)$$

где  $A$  — отношение массы ядра к массе нейтрона. (Строго говоря, эта формула справедлива при  $A \gg 1$ ; мы добавили в знаменателе к  $A$  единицу для того, чтобы формула давала правильный результат и при  $A=1$ .) Обозначим через  $\nu(E)$  число столкновений, которое в среднем испытывает нейтрон при замедлении от энергии  $E_0$  до энергии  $E$ . Для уменьшения энергии нейтрона на  $dE$  требуется  $d\nu$  столкновений. Поэтому

$$\frac{dE}{d\nu} = -\frac{2E}{A+1},$$

откуда

$$\nu(E) = \frac{A+1}{2} \ln \frac{E_0}{E}.$$

Полагая здесь  $E$  равным  $kT$  ( $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура), мы найдём число столкновений, которое необходимо испытать нейтрону, чтобы стать тепловым.

Легко показать, что, двигаясь в углероде, нейтрон должен испытать в среднем 6,3 столкновения с атомами углерода, чтобы его энергия уменьшилась в  $e$  раз. После 14,6 столкновения его энергия уменьшается в 10 раз. Нейтрон с начальной энергией в 1 MeV, испытав 110 столкновений, становится тепловым с энергией в  $1/40$  eV.

Приведём ещё формулу [120] для среднего квадрата длины замедления нейтронов  $\bar{r}^2(E)$  ( $r(E)$  — прямолинейное смещение нейтрона при замедлении от энергии  $E_0$  до энергии  $E$ )

$$\bar{r}^2(E) = 2 \frac{1-\epsilon}{(1-\epsilon + \epsilon \ln \epsilon) \left(1 - \frac{2}{3} \frac{1}{A}\right)} \int_E^{E_0} l_s^2 \frac{dE}{E},$$

где  $\epsilon = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2$ ,  $l_s$  — длина свободного пробега нейтронов между двумя упругими столкновениями (эта величина зависит, вообще говоря, от энергии нейтрона).

При постоянном  $l_s$

$$\bar{r}^2(E) = 2 \frac{(1-\epsilon) l_s^2}{(1-\epsilon + \epsilon \ln \epsilon) \left(1 - \frac{2}{3A}\right)} \ln \frac{E_0}{E}.$$

В том случае, когда  $1-\epsilon \ll 1$ , эта формула приобретает следующий вид:

$$\bar{r}^2(E) = A l_s^2 \ln \frac{E_0}{E}.$$

Полагая в приведённых формулах  $E \approx kT$ , найдём средний квадрат расстояния, которое должен пройти нейтрон, чтобы стать тепловым.

Цепная реакция на медленных нейтронах осуществляется, например, в системе, состоящей из урана и лёгкого замедлителя (графит, тяжёлая вода).

Как известно, основной изотоп урана делится только под действием быстрых нейтронов, имеющих энергию, большую чем  $\sim 1$  MeV. Поэтому большое неупругое рассеяние препятствует протеканию цепной реакции на быстрых нейтронах с использованием основного изотопа в качестве делящегося материала.

Изотоп  $U^{235}$  делится уже под действием тепловых нейтронов, причём в соответствии с законом  $1/v$  эффективное сечение деления  $U^{235}$  особенно велико именно в тепловой области.

Эффективное сечение радиационного захвата нейтронов в тепловой области (изотопами  $U^{238}$  и  $U^{235}$ ) также следует закону  $1/v$ , так что относительная вероятность деления и радиационного захвата в этой области энергии не зависит от энергии.

Введением замедлителя достигается возможность уменьшить роль радиационного захвата нейтронов ядрами основного изотопа  $U^{238}$  (приводящего к образованию плутония). Благодаря этому замедлением нейтронов до тепловых энергий создаются благоприятные условия для развития цепной реакции с использованием изотопа  $U^{235}$  (главным образом) в качестве делящегося материала.

Хотя при больших энергиях нейтронов ( $E \geq 1$  MeV) радиационный захват ядрами  $U^{238}$  очень мал, уже при энергиях  $\sim 10^5$  eV он достигает величины порядка  $10^{-25}$  см<sup>2</sup>. В области энергий нейтронов  $kT < E < 10^4$  eV этот процесс играет наиболее важную роль.

Благодаря тому, что процентное содержание изотопа  $U^{235}$  очень невелико (число ядер  $U^{235}$  составляет около  $1/140$  общего числа ядер урана), радиационный захват в области энергий нейтронов  $10^4$ — $10^5$  eV мешает протеканию цепной реакции в системах, не содержащих замедлителя.

Неблагоприятное для протекания цепной реакции соотношение между сечением радиационного захвата ядрами  $U^{238}$  и сечением деления ядер  $U^{235}$  (с учётом величины концентрации этого изотопа) имеет место вплоть до самых малых энергий нейтрона.

Положение, однако, резко меняется вблизи тепловой области, точнее говоря, при энергиях, меньших чем энергия наименьшего резонансного уровня  $U^{238}$ .

При приближении энергии нейтрона к тепловой области сечение резонансного поглощения нейтронов ядрами  $U^{238}$  становится малым по сравнению с сечением деления ядер  $U^{235}$ .

Для того чтобы разъяснить это обстоятельство, заметим, что в тепловой области, вообще говоря, нельзя пользоваться введёнными в § 22 сечениями, усреднёнными по большому числу уровней. Последние определяются, главным образом, областью энергии вблизи резонансных уровней. Если вблизи тепловой области нет резонансных уровней, то эффективное сечение в тепловой области может быть существенно меньше усреднённого сечения. Именно так и обстоит дело с радиационным захватом нейтронов ядрами основного изотопа  $U^{238}$ , для которых энергия наиболее низко расположенного резонансного уровня составляет несколько eV.

Определим сечение радиационного захвата нейтронов ядрами  $U^{238}$  в тепловой области, предполагая, что захват нейтронов обуславливается одним наиболее низко расположенным уровнем  $U^{238}$ , энергию которого обозначим через  $E_0$ .

Общая дисперсионная формула [см. (18.1)] приводит к следующему выражению для сечения захвата  $\sigma_r^{238}(kT)$ :

$$\sigma_r^{238}(kT) = \pi \lambda_T^2 \frac{\Gamma_r \gamma_n(kT)}{(kT - E_0)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}, \quad (23.1)$$

где  $\lambda_T = \frac{\hbar}{\sqrt{2mkT}}$  — длина волны нейтрона, соответствующая тепловой энергии  $kT$  ( $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура);  $\gamma_n(kT)$  — значение нейтронной ширины



уровня при энергии нейтрона, равной  $kT$ ;  $\Gamma_\gamma$  — радиационная и  $\gamma$  — полная ширина уровня.

Предполагая, что  $\gamma \ll E_0$  и пренебрегая в знаменателе (23.1) тепловой энергией  $kT$  по сравнению с  $E_0$ , представим сечение захвата  $\sigma_\gamma^{238}(kT)$  в виде

$$\sigma_\gamma^{238}(kT) \approx \pi \lambda_T^2 \frac{\Gamma_\gamma \gamma_n(kT)}{E_0^2}. \quad (23.1')$$

Сравним это выражение со значением усреднённого сечения радиационного захвата при энергии нейтронов, равной  $kT$ . Напомним, что усреднённое сечение определяется большим числом уровней и, согласно (19.5'), в интересующей нас области энергии определяется следующей формулой:

$$\bar{\sigma}_\gamma^{238}(kT) = \pi^2 \lambda_T^2 \frac{\Gamma_n}{D}, \quad (23.2)$$

где  $\Gamma_n$  — значение средней нейтронной ширины при энергии нейтронов, равной  $kT$ ;  $D$  — среднее расстояние между соседними уровнями.

По порядку величины  $D$  равно  $E_0$ ; кроме того,  $\Gamma_n \approx \gamma_n(kT)$ . Поэтому из (23.1') и (23.2) вытекает соотношение

$$\sigma_\gamma^{238}(kT) \approx \bar{\sigma}_\gamma^{238}(kT) \frac{\Gamma_\gamma}{\pi E_0}. \quad (23.3)$$

Считая, что  $\Gamma_\gamma \approx 0,1 \text{ eV}$  и  $E_0 \approx 10 \text{ eV}$ ,<sup>1</sup> мы получим отсюда:

$$\sigma_\gamma^{238}(kT) \approx 0,01 \bar{\sigma}_\gamma^{238}(kT). \quad (23.3')$$

Таким образом в тепловой области сечение радиационного захвата значительно меньше, чем усреднённое сечение захвата.

Рассмотрим теперь сечение деления нейтронами ядер  $U^{235}$  в тепловой области.

Сечение деления ядер  $U^{235}$ , которое мы обозначим через  $\sigma_f^{235}$ , зависит от соотношения между шириной деления  $\Gamma_f$  и средним расстоянием между уровнями  $D$ .

Если  $\Gamma_f \gg D$ , то сечение деления совпадает с усреднённым сечением деления  $\bar{\sigma}_f^{235}(kT)$ , которое, согласно

(19.4), можно представить в виде

$$\bar{\sigma}_f^{235}(kT) = \pi^2 \lambda_T^2 \frac{\Gamma_n \Gamma_f}{GD}. \quad (23.4)$$

Поскольку в этом случае полная (средняя) ширина практически совпадает с шириной деления  $\Gamma_f$ , формула (23.4) приобретает вид

$$\bar{\sigma}_f^{235}(kT) \approx \pi^2 \lambda_T^2 \frac{\Gamma_n}{D}. \quad (23.4')$$

Величины  $\Gamma_n$  и  $D$  относятся к изотопу  $U^{235}$ , однако можно думать, что эти величины не слишком отличаются от соответствующих значений для изотопа  $U^{238}$ . В таком случае сравнение формул (23.4') и (23.2) показывает, что усреднённое сечение деления  $\sigma_f^{235}(kT)$  по порядку величины совпадает с усреднённым сечением радиационного захвата нейтронов ядрами  $U^{238}$  (оба сечения относятся к тепловой области).

Итак, если  $\Gamma_f \gg D$ , то

$$\sigma_f^{235}(kT) \approx \bar{\sigma}_f^{235}(kT) \approx \bar{\sigma}_\gamma^{238}(kT).$$

Используя соотношение (23.3'), мы получим отсюда

$$\sigma_f^{235}(kT) \approx 100 \sigma_\gamma^{238}(kT). \quad (23.5)$$

Это соотношение показывает, что, несмотря на малую концентрацию изотопа  $U^{235}$  ( $\sim 10^{-2}$ ), вероятность деления ядер  $U^{235}$  и вероятность радиационного захвата нейтронов ядрами  $U^{238}$  становятся сравнимыми в тепловой области.

Отсюда следует, что могут быть созданы условия, благоприятные для протекания цепной реакции на медленных нейтронах.

К такому же выводу мы придём и в том случае, когда ширина деления  $\Gamma_f$  меньше среднего расстояния между уровнями. В этом случае сечение деления определяется дисперсионной формулой (16.4). В тепловой области

сечение деления имеет вид

$$\sigma_f^{235}(kT) = \pi \lambda_T^2 \frac{\gamma_n(kT) \Gamma_f}{(kT - E_0)^2 + \frac{1}{4} \gamma^2}, \quad (23.6)$$

где  $E_0$  — энергия наиболее низко расположенного уровня ядра  $U^{235}$ . В рассматриваемом случае полная ширина уровня  $\gamma$  меньше расстояния между соседними уровнями, которое по порядку величины равно  $E_0$ . Поэтому (23.6) можно заменить следующим приближённым соотношением:

$$\sigma_f^{235}(kT) \approx \pi \lambda_T^2 \frac{\gamma_n(kT) \Gamma_f}{E_0^2}. \quad (23.6')$$

Сравнение (23.1') с (23.6') даёт:

$$\sigma_f^{235}(kT) \approx \sigma_r^{235}(kT) \frac{\Gamma_f}{\Gamma_\gamma} \quad (23.7)$$

(мы считаем, что энергия наиболее низко расположенного уровня в двух изотопах  $U$  имеет одинаковый порядок величины).

Если  $\Gamma_f \gg 10^3 \Gamma_\gamma$ , что, повидимому, имеет место, то формула (23.7) приводит к такому же результату, что и формула (23.5), т. е. вероятности деления ядер  $U^{235}$  и захвата ядрами  $U^{235}$  становятся сравнимыми в тепловой области.

Сформулируем теперь условие, необходимое для протекания цепной реакции на медленных нейтронах. Обозначим через  $P$  вероятность того, что первоначально имевшийся быстрый нейтрон будет захвачен ядром урана с последующим делением. Пусть при одном акте деления возникает в среднем  $\nu$  быстрых нейтронов. Тогда среднее число нейтронов второго поколения будет равно:

$$k = P\nu.$$

Эта величина называется коэффициентом размножения системы. Если система имеет бесконечные размеры, так что отсутствует утечка нейтронов через внешнюю гра-

ницу системы, то условие протекания саморазвивающейся цепной реакции состоит, очевидно, в том, что величина  $k$  должна быть больше единицы. Если  $k < 1$ , то протекание цепной реакции невозможно.

Выясним, чем определяется вероятность  $P$ . Рассмотрим для этого историю жизни нейтрона <sup>[93,94]</sup>.

Быстрый нейтрон, появившийся в системе, может быть захвачен ядром урана ещё до того, как его энергия заметно уменьшится из-за столкновений с ядрами. В этом случае нейтрон может вызвать деление ядра  $U^{235}$ . Однако вероятность деления быстрыми нейтронами, которую мы обозначим через  $P_F$ , очень мала (она составляет всего несколько процентов). Это связано с тем, что энергия нейтрона в результате столкновений с ядрами замедлителя и урана очень быстро становится меньше, чем порог деления ядер  $U^{235}$ . (Если система содержит много замедлителя и мало урана, то быстрое уменьшение энергии нейтрона происходит из-за упругих соударений нейтрона с ядрами замедлителя. Если же, напротив, в системе много урана и мало замедлителя, то весьма вероятны неупругие столкновения нейтрона с ядрами  $U^{235}$ , которые ещё быстрее выводят нейтрон из области энергии, в которой он может производить деление.)

Итак, деление вызывается в основном тепловыми нейтронами.

Обозначим вероятность того, что быстрый нейтрон станет тепловым и в дальнейшем вызовет деление, через  $P_T$ . Величину  $P$  можно представить в виде

$$P = P_F + P_T.$$

Рассмотрим подробнее величину  $P_T$ .

В процессе замедления нейтрон может подвергнуться резонансному захвату ядром урана (в основном ядром  $U^{238}$ ). Обозначим через  $\phi$  вероятность того, что быстрый нейтрон замедлится до тепловой энергии, не будучи резонансно захваченным ядрами  $U^{238}$  (величина  $1 - \phi$  представляет собой вероятность резонансного поглощения ядрами  $U^{238}$ ).

Если нейтрон не будет захвачен в процессе замедления, то он достигнет тепловой области и впоследствии будет захвачен либо ядром урана, либо ядром замедлителя.

Пусть  $\theta$  обозначает вероятность поглощения теплового нейтрона ядром урана (безразлично ядром какого именно изотопа). Если  $\sigma_f$  и  $\sigma_r$  — эффективные сечения для деления и резонансного захвата тепловых нейтронов, отнесённые к одному ядру смеси изотопов, то  $\sigma_f / \sigma_f + \sigma_r$  представляет собой относительную вероятность того, что тепловой нейтрон, будучи поглощённым ядром урана, вызовет его деление. Поэтому величина

$$\theta_f = \theta \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_r}$$

определяет, очевидно, вероятность того, что тепловой нейтрон вызовет деление. Согласно теореме умножения вероятностей, искомая величина  $P_T$  равна:

$$P_T = \varphi \theta_f = \varphi \theta \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_r},$$

и, следовательно, коэффициент размножения нейтронов может быть представлен в виде

$$k = P\nu = P_f \nu + \nu \varphi \theta \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_r}. \quad (23.8)$$

Условие протекания саморазвивающейся цепной реакции в бесконечной системе состоит в выполнении неравенства  $k > 1$  [94].

Изложенные до сих пор соображения относились к бесконечным системам. Если система имеет конечные размеры, то для протекания саморазвивающейся цепной реакции, помимо условий, относящихся к бесконечной системе, необходимо выполнение ещё одного условия: размеры системы должны превосходить некоторые минимальные, так называемые критические размеры. Существование критических размеров связано с вылетом нейтронов из системы в окружающее пространство.

Если система имеет слишком малые размеры, то потеря нейтронов, обусловленная их диффузией в окружающее пространство, превосходит число нейтронов, рождающихся в системе в результате деления ядер. Так как вылет нейтронов из системы представляет собой поверхностный эффект, а рождение нейтронов в системе есть эффект объёмный, то с увеличением размеров системы первый из этих эффектов становится всё менее и менее существенным. Критические размеры представляют собой такие размеры, при которых потеря нейтронов, обусловленная их вылетом из системы, как раз компенсируется генерацией нейтронов в системе.

Возвращаясь к рассмотрению свойств бесконечных систем, необходимо отметить, что условие  $k > 1$  может не выполняться для однородной смеси замедлителя и делящегося вещества, однако будет выполняться для неоднородной системы, состоящей из отдельных блоков делящегося вещества, пространство между которыми заполнено замедлителем.

Такая гетерогенная система, в которой расщепляющееся вещество распределено в виде блоковой решётки, включённой в замедлитель, может состоять, например, из стержней урана, упорядоченно расположенных в замедлителе (графите, тяжёлой воде и т. д.).

Выгодность гетерогенной системы связана с уменьшением резонансного поглощения при расположении делящегося вещества в виде отдельных блоков. Это обстоятельство вытекает из следующих соображений. В гомогенной системе нейтроны в процессе замедления всё время находятся в окружении ядер  $U^{238}$ , могущих их поглощать. В блоковой системе у нейтрона имеется возможность проскочить «опасную» зону вблизи уровня резонансного поглощения, находясь вдали от блока; иными словами, нейтрон может замедлиться до тепловой энергии с вероятностью, большей чем в гомогенной системе.

Таким образом радиационный захват нейтронов в блоковой системе может быть сильно уменьшен по сравнению с гомогенной системой.

Другая причина, в силу которой в блоковой системе уменьшается резонансное поглощение, состоит в том,

что внутренние части блоков в области сильного резонансного поглощения экранируются наружными слоями и поэтому «используются» неэффективно. Это экранирование приводит к тому, что радиационное поглощение нейтрона с энергией, близкой к резонансной, ядром урана, находящимся внутри блока, будет значительно меньше поглощения изолированным ядром.

Следует иметь в виду, что вместе с уменьшением резонансного поглощения имеет место также и уменьшение поглощения блоками нейтронов в тепловой области.

Однако эффект уменьшения резонансного поглощения оказывается более значительным, чем эффект уменьшения поглощения нейтронов в тепловой области.

Введённые выше величины  $\varphi$  и  $\theta$  в гомогенной системе являются функциями концентраций делящегося вещества и замедлителя. В блоковой системе эти величины зависят ещё от размеров блоков и расстояний между ними.

Наивыгоднейшие условия протекания цепной реакции реализуются в том случае, когда величина  $\varphi\theta$  достигает максимума. Существование такого максимума видно из следующих соображений. Увеличение  $\theta$ , т. е. вероятности поглощения теплового нейтрона ядрами делящегося вещества, связано с увеличением концентрации делящегося вещества, например урана, и уменьшением концентрации замедлителя. Наоборот, увеличение  $\varphi$ , т. е. вероятности того, что нейтрон станет тепловым, не будучи резонансно захваченным, связано с уменьшением концентрации урана. Отсюда следует, что произведение  $\varphi\theta$  достигает максимума при определённой, оптимальной концентрации урана.

В блоковой системе  $\varphi\theta$  зависит ещё от размеров и расположения блоков урана. При некоторых значениях параметров блоковой решётки величина  $\varphi\theta$  достигает максимума; эти значения параметров являются, очевидно, оптимальными.

Приведём значения вероятностей для различных процессов, происходящих с нейтроном в уран-графитовой блоковой системе [93].

Тип процесса	Вероятность в %
Деление, обусловленное быстрым нейтроном . . .	3
Резонансное поглощение $U^{235}$ (вне тепловой области) . . . . .	10
Поглощение в графите . . . . .	10
Поглощение теплового нейтрона ураном $U^{235}$ и $U^{238}$	77

Плотность нейтронов с определённой энергией в блоковой системе, состоящей из большого числа ячеек, изменяется от точки к точке вдоль решётки.

Для описания свойств неоднородной системы можно в первом приближении не рассматривать локальных изменений нейтронной плотности, связанных с периодической структурой системы \*). Иными словами, в первом приближении мы заменяем истинные нейтронные плотности их средними значениями, которые получаются при усреднении плотности по объёму ячейки (ячейка представляет собой урановый блок вместе с прилегающей к нему частью замедлителя). Такая усреднённая плотность будет плавной функцией точки, как если бы система была однородной. Таким образом мы заменяем неоднородную блоковую систему некоторой эквивалентной однородной системой.

Рассмотрим плотность тепловых нейтронов в точке  $r(x, y, z)$  в момент времени  $t$ , которую мы обозначим через  $n(r, t)$ . Эта функция удовлетворяет диффузионному уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n - \frac{1}{\tau_c} n + q, \quad (23.9)$$

где  $D$ —коэффициент диффузии тепловых нейтронов,  $\tau_c$ — время их жизни по отношению к захвату и  $q$ —плотность источников тепловых нейтронов.

Мы будем рассматривать далее стационарный случай и положим поэтому  $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ .

\*) Мы следуем ниже [93].

Определим плотность источников тепловых нейтронов  $q$ . Обозначим через  $Q(r)$  число быстрых нейтронов, возникающих в единицу времени в единице объёма около точки  $r$  внутри нашей системы. Сталкиваясь при своём движении с ядрами замедлителя, эти нейтроны замедляются, но в ходе замедления часть их резонансно поглощается и не доходит до тепловой области. Мы обозначим через  $\varphi$  вероятность того, что быстрый нейтрон превратится в тепловой, не будучи резонансно захваченным. Замедление быстрого нейтрона, родившегося в точке  $r'$ , может окончиться в различных точках  $r$ . Для простоты можно предполагать, что вероятность нейтрону замедлиться в точке  $r$  выражается гауссовой функцией от расстояния  $|r' - r|$ . Иными словами, мы предполагаем, что вероятность быстрому нейтрону, родившемуся в элементе объёма  $dV'$  около точки  $r'$ , стать тепловым в точке  $r$  имеет вид

$$\frac{\varphi}{\pi^{3/2} r_0^3} \cdot e^{-\frac{|r' - r|^2}{r_0^2}} \cdot dV', \quad (23.10)$$

где  $r_0^2$  — средний квадрат длины замедления нейтронов. (Будучи проинтегрированным по  $dV'$ , это выражение даёт  $\varphi$ , как и должно быть.)

Умножив эту вероятность на  $Q(r')$  и проинтегрировав по  $dV'$ , мы найдём, очевидно, плотность источников тепловых нейтронов, т. е. функцию  $q(r)$ :

$$q(r) = \frac{\varphi}{\pi^{3/2} r_0^3} \int Q(r') e^{-\frac{|r' - r|^2}{r_0^2}} dV'. \quad (23.11)$$

Заметим теперь, что быстрые нейтроны возникают в результате делений ядер, вызываемых, главным образом, тепловыми нейтронами. Иными словами,  $Q(r)$  может быть выражено через плотность тепловых нейтронов  $n(r)$ .

Число тепловых нейтронов, поглощаемых в единицу времени в единице объёма, равно  $\frac{1}{\tau_c} n(r)$ . Умножив эту

величину на  $\theta_f$ , мы найдём число нейтронов, поглощаемых в единицу времени ураном и вызывающих при этом деление его ядер. Так как в одном акте деления возникает в среднем  $\nu$  нейтронов, то число быстрых нейтронов, рождающихся в единицу времени в единице объёма, равняется:

$$\frac{\nu \theta_f}{\tau_c} n(r).$$

Если имеется ещё внешний источник быстрых нейтронов, дающий  $Q_0(r)$  нейтронов в единицу времени в единице объёма, то искомая функция  $Q(r)$  представится в виде

$$Q(r) = Q_0(r) + \frac{\nu \theta_f}{\tau_c} n(r). \quad (23.12)$$

Обычно, однако,  $Q_0 = 0$ .

Подставив (23.12) в (23.11), мы выразим плотность источников тепловых нейтронов  $q(r)$  через плотность тепловых нейтронов  $n(r)$ . Подставив далее полученное выражение для  $q(r)$  в формулу (23.9), получим следующее интегральное уравнение для определения плотности тепловых нейтронов:

$$\begin{aligned} D \Delta n - \frac{1}{\tau_c} n + \frac{\nu \theta_f \varphi}{\pi^{3/2} r_0^3 \tau_c} \int n(r') e^{-\frac{|r' - r|^2}{r_0^2}} dV' = \\ = - \frac{\varphi}{\pi^{3/2} r_0^3} \int Q_0(r') e^{-\frac{|r' - r|^2}{r_0^2}} dV'. \end{aligned} \quad (23.13)$$

Решение этого уравнения можно найти, разлагая  $Q_0(r)$  и  $n(r)$  в ряды Фурье.

Если размеры системы велики по сравнению с длиной свободного пробега нейтронов, то граничное условие задачи заключается в равенстве нулю плотности нейтронов на внешней поверхности системы (см. в связи с этим следующий параграф).

Рассмотрим случай, когда система имеет форму куба, ребро которого равно  $a$ . Компоненты Фурье функции  $Q_0(r')$  имеют вид

$$Q_0 \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \cdot \sin \frac{n_2 \pi}{a} y \cdot \sin \frac{n_3 \pi}{a} z$$

(начало координат — в одной из вершин куба;  $n_1, n_2, n_3$  — положительные целые числа).

Легко убедиться в том, что этой компоненте Фурье  $Q_0(r)$  соответствует следующая компонента Фурье функции  $n(r)$ :

$$n = \tau_c \varphi Q_0 \frac{\sin \frac{n_1 \pi}{a} x \cdot \sin \frac{n_2 \pi}{a} y \cdot \sin \frac{n_3 \pi}{a} z}{(1 + D\tau_c \omega^2) e^{\omega^2 r_0^2/4} - \nu \theta_f \varphi}, \quad (23.14)$$

где

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{a^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2).$$

Критические размеры системы могут быть найдены из условия обращения в нуль знаменателя (23.14) для основной гармоники, т. е. при  $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ . Действительно, в этом случае нейтронная плотность обращается в бесконечность и, следовательно, она будет отлична от нуля в отсутствие внешнего источника, когда  $Q_0 = 0$ .

Итак, для определения критических размеров мы получаем уравнение

$$\left(1 + \frac{3\pi^2}{a^2} D\tau_c\right) e^{\frac{3\pi^2 r_0^2}{4a^2}} = \nu \theta_f \varphi. \quad (23.15)$$

Обычно  $a \gg r_0$ , поэтому экспоненциальный множитель может быть заменён на  $1 - \frac{3}{4} \frac{\pi^2 r_0^2}{a^2}$ . Уравнение (23.15) приводит к следующему значению критического ребра куба:

$$a = \frac{\pi \sqrt{3 \left( D\tau_c + \frac{1}{4} r_0^2 \right)}}{\sqrt{k-1}}, \quad (23.16)$$

где  $k$  — коэффициент размножения, равный в рассматриваемом случае  $\nu \theta_f \varphi$ . (Учитывая деление на быстрых нейтронах, сюда следует вместо  $k$  подставить  $\nu P_F + \nu \theta_f \varphi$ ).

Мы видим, что критические размеры системы (линейные) обратно пропорциональны  $(k-1)^{1/2}$ .

Заметим, что критические размеры могут быть уменьшены, если окружить систему слоем так называемой нейтронной изоляции, которая частично отражает обратно нейтроны, покинувшие систему.

§ 24. Пример определения критических размеров при реакции на быстрых нейтронах. Рассмотрим сферу, состоящую из вещества, в котором цепная реакция может поддерживаться без участия тепловых нейтронов. Ради простоты будем считать, что изоляция отсутствует. Определим критические размеры сферы\*).

Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что критические размеры могут оказаться сравнимыми с длиной свободного пробега нейтронов. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, при реакции на быстрых нейтронах нет необходимости замедлять нейтроны и, во-вторых, в рассматриваемом случае величина коэффициента размножения может быть гораздо больше, чем в случае систем, работающих на медленных нейтронах\*\*).

Если размеры системы велики по сравнению с длиной свободного пробега нейтронов, то для описания цепной реакции можно пользоваться диффузионной картиной; в этом случае плотность нейтронов удовлетворяет диффузионному уравнению (см. § 23).

Если размеры системы сравнимы с длиной свободного пробега, то диффузионная теория неприменима. В этом случае следует исходить из точного кинетического уравнения.

Для получения полукачественных результатов мы сделаем следующие упрощающие предположения:

1. Длина свободного пробега нейтрона  $l$  (с учётом возможности деления, радиационного захвата и рассеяния) не зависит от энергии нейтрона. Иными словами, не зависит от энергии величина

$$\alpha = \frac{1}{l} = N(\sigma_f + \sigma_r + \sigma_s),$$

\* ) Мы следуем ниже изложению Р. Пайерлса [95].

\*\* ) Критические размеры (линейные), согласно (23.16), обратно пропорциональны  $(k-1)^{1/2}$ .

где  $\sigma_f$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_s$  — соответственно сечения деления, радиационного захвата и рассеяния нейтронов,  $N$  — число ядер в единице объёма.

2. Не зависит от энергии величина

$$\beta = N(\sigma_s + \nu\sigma_f),$$

где  $\nu$  — число нейтронов, возникающих при одном акте деления ядра.

3. Все рождающиеся нейтроны имеют одинаковую энергию.

4. Отсутствует неупругое рассеяние нейтронов.

5. Упругое рассеяние нейтронов является сферически симметричным.

При выполнении этих предположений вместо функции распределения, зависящей как от координат, так и от компонент скорости нейтрона для описания нейтронного поля можно пользоваться обычной плотностью нейтронов. Обозначим последнюю в точке  $(x, y, z)$  в момент времени  $t$  через  $n(x, y, z, t)$ .

Общее число рассеянных и родившихся вторичных нейтронов в элементе объёма  $dx' dy' dz'$  за время  $dt'$  равно, очевидно:

$$\beta \nu n(x', y', z', t') dx' dy' dz' dt',$$

где  $\nu$  — скорость нейтронов.

Будем следить за движением этих нейтронов.

На расстоянии  $r$  от точки  $(x', y', z')$  их число уменьшится в  $e^{-\alpha r}$  раз. Они будут равномерно заполнять сферический слой радиуса  $r$  и толщины  $\nu dt'$ . Плотность нейтронов в точке  $(x, y, z)$  рассматриваемого слоя в момент времени  $t' = t - \frac{r}{\nu}$  будет:

$$\frac{\beta}{4\pi r^2} n(x', y', z', t') e^{-\alpha r} dx' dy' dz',$$

$$t' = t - \frac{r}{\nu}.$$

Проинтегрировав это выражение по  $(x', y', z')$ , мы получим, очевидно, плотность в точке  $(x, y, z)$  в момент  $t$ ,

г. е. величину  $n(x, y, z, t)$ . Итак,

$$n(x, y, z, t) = \frac{\beta}{4\pi} \int n(x', y', z', t - \frac{r}{\nu}) \frac{e^{-\alpha r}}{r^2} dx' dy' dz', \quad (24.1)$$

где интегрирование совершается по объёму тела.

Мы получили интегральное уравнение для плотности нейтронов  $n$ , которое при сделанных выше предположениях заменяет общее кинетическое уравнение.

Перейдём к исследованию этого уравнения.

Будем искать решение (24.1) в виде

$$n(x, y, z, t) = n(x, y, z) e^{\lambda t}. \quad (24.2)$$

Развитию цепной реакции отвечают, очевидно, значения  $\lambda > 0$ .

Уравнение (24.1) после подстановки в него (24.2) приобретает вид

$$n(x, y, z) = \frac{\beta}{4\pi} \int n(x', y', z') e^{-(\alpha + \lambda/\nu)r} \frac{dx' dy' dz'}{r^2}. \quad (24.3)$$

Если система имеет критические размеры, то  $\lambda = 0$ . Определение критических размеров сводится поэтому к следующей математической задаче. Требуется выяснить, при каких условиях уравнение

$$n(x, y, z) = \frac{\beta}{4\pi} \int n(x', y', z') e^{-\alpha r} \frac{dx' dy' dz'}{r^2} \quad (24.3')$$

имеет нетривиальные решения.

Мы рассмотрим тот случай, когда мультиплицирующая система имеет форму шара, и покажем, что нетривиальное решение имеет место только при определённом, критическом радиусе сферы.

Заметим, что, найдя решение уравнения (24.3'), мы тем самым найдём решение общего уравнения (24.3), стоит лишь вместо  $\alpha$  подставить  $\alpha + \lambda/\nu$ .

Сформулируем теперь условие протекания саморазвивающейся цепной реакции. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы на единице длины пути нейтрона число появляющихся новых нейтронов превосходило число поглощаемых нейтронов. Первое из этих чисел равно  $N\sigma_f \nu$ , а второе —  $N\sigma_c$ , где  $\sigma_c$  — сечение поглощения

нейтрона, равно

$$\sigma_c = \sigma_f + \sigma_r.$$

Итак, для протекания цепной реакции необходимо выполнение условия

$$N\sigma_f v > N\sigma_c$$

или

$$(v-1)\sigma_f > \sigma_r. \quad (24.4)$$

Если воспользоваться введёнными выше величинами  $\alpha$  и  $\beta$ , то это условие может быть представлено в виде

$$\beta > \alpha. \quad (24.4')$$

Мы рассмотрим далее два предельных случая, когда  $\beta - \alpha \ll \beta$  и когда  $\beta \gg \alpha$ .

1) Если  $\beta - \alpha \ll \beta$ , то требуется много столкновений для существенного возрастания числа нейтронов. Поэтому в этом случае возможно диффузионное рассмотрение задачи (см. предыдущий параграф).

Плотность нейтронов при выполнении условия

$$\beta - \alpha \ll \beta$$

испытывает малое изменение на расстояниях порядка длины свободного пробега. Поэтому функцию  $n(x', y', z')$  в интеграле (24.3') можно разложить в ряд по степеням  $x' - x$ ,  $y' - y$ ,  $z' - z$  и сохранить в нём члены не выше второго порядка. Вдали от границы члены первого порядка при интегрировании по  $dx' dy' dz'$  дают нуль, и мы приходим к диффузионному уравнению

$$\frac{\beta}{3x^2} \Delta n + \left( \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) n = 0. \quad (24.5)$$

Легко убедиться в том, что коэффициенты, стоящие в (24.5) перед  $\Delta n$  и  $n$ , имеют обычный для диффузионного уравнения вид.

Действительно, умножив уравнение (24.5) на  $v$  и воспользовавшись определением величин  $\alpha$  и  $\beta$ , можно представить это уравнение в виде

$$\frac{lv}{3} \Delta n + \frac{v}{l_c} (v\theta - 1) n = 0, \quad (24.5')$$

где  $l$  — длина свободного пробега нейтрона как по отношению к рассеянию, так и по отношению к захвату,  $l_c = (N\sigma_c)^{-1}$  — длина пробега по отношению к захвату и  $\theta = \sigma_f/\sigma_c$ .

Величина  $lv/3$  представляет собой коэффициент диффузии нейтронов, а  $l_c/v$  — время жизни нейтрона по отношению к захвату. Член  $(v/l_c)n$  даёт число нейтронов, поглощаемых в единицу времени в единице объёма, а  $(v/l_c)v\theta n$  — число нейтронов, рождающихся в единицу времени в единице объёма.

Для решения уравнения (24.5) нужно знать граничное условие на внешней поверхности мультиплицирующей системы.

Можно показать<sup>[96]</sup>, что для больших систем, размеры которых значительно больше длины свободного пробега нейтронов, это условие имеет вид

$$0,71l \cdot \frac{\partial n}{\partial x} + n = 0, \quad (24.6)$$

где  $x$  — направление внешней нормали к поверхности тела.

Для больших систем  $\frac{\partial n}{\partial x} \sim \frac{n}{R}$ , где  $R$  по порядку величин характеризует линейные размеры системы. Поэтому отношение первого члена ко второму в (24.6) по порядку величины равно  $l/R \ll 1$ . Таким образом для больших систем граничное условие может быть в первом приближении сформулировано в виде требования, чтобы нейтронная плотность обращалась в нуль на внешней поверхности системы

$$n = 0. \quad (24.6')$$

В рассматриваемом нами случае малых мультипликаторов, когда  $\beta - \alpha \ll \beta$ , размеры системы значительно больше длины свободного пробега, поэтому в первом приближении мы будем пользоваться условием (24.6').

Возвращаясь к уравнению (24.5), найдём его решение в случае мультиплицирующей сферы.

Сферически симметричное решение (24.5) имеет вид

$$n(r) = \text{const} \cdot \frac{\sin pr}{r}, \quad (24.7)$$



где  $r$  — расстояние до центра сферы и

$$p = \sqrt{3\alpha^2 \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}.$$

Если исходить из граничного условия (24.6'), то критический радиус  $R_0$  найдётся из уравнения  $\sin pR_0 = 0$ , откуда \*)

$$R_0 = \frac{\pi}{p} = \frac{\pi}{\alpha \sqrt{3 \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}} = \frac{\pi \sqrt{\frac{1}{3} l_c}}{\sqrt{\nu\theta - 1}} = \frac{\pi \sqrt{D\tau_c}}{\sqrt{k - 1}}, \quad (24.8)$$

где  $l = \frac{1}{\alpha} = [N(\sigma_s + \sigma_c)]^{-1}$  — длина свободного пробега нейтронов по отношению к процессам рассеяния и поглощения,  $l_c = \frac{1}{N\sigma_c}$  — длина пробега нейтрона по отношению к поглощению,  $\theta = \sigma_f/\sigma_c$ ,  $D = \frac{1}{3}lv$  — коэффициент диффузии нейтронов,  $\tau_c = l_c/v$  — время жизни нейтрона по отношению к захвату,  $k = \nu\theta$  — коэффициент размножения нейтронов.

Так как по условию  $1 - \alpha/\beta \ll 1$ , то из (24.8) следует, что критический радиус значительно больше длины пробега  $l$ , как это и утверждалось выше.

Заметим, что формула (24.8) совпадает с формулой (23.16) для критических размеров куба, если считать в последней длину замедления нейтронов  $r_0$  равной нулю и отвлечься от множителя  $\sqrt{3}$ , связанного с другой геометрией задачи. Это обстоятельство является следствием того, что в обоих случаях мы пользовались диффузионным рассмотрением, справедливым при малых мультипликациях.

Использование точного граничного условия (24.6) приводит к следующему уравнению для определения величины  $R_0$ :

$$pR_0 \operatorname{ctg} pR_0 = 1 - \frac{\alpha R_0}{0,71}. \quad (24.9)$$

\*) Плотность нейтронов является существенно положительной величиной, поэтому мы должны взять наименьший (не считая нуля) корень уравнения  $\sin x = 0$ .

Обозначая  $1 - \alpha/\beta$  через  $\xi^2$  и пренебрегая при малых  $\xi$  степенями  $\xi$  выше второй, получим из (24.9):

$$\frac{1}{\beta R_0} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \xi + 0,71 \frac{3}{\pi^2} \xi^2 = 0,55\xi + 0,22\xi^2. \quad (24.10)$$

2) Рассмотрим теперь другой предельный случай — случай больших мультипликаций, когда  $\beta \gg \alpha$ .

Заметим, что этот случай является фиктивным и практически не осуществляется, так как для выполнения условия  $\beta \gg \alpha$  необходимо, чтобы  $\nu$  было значительно больше единицы. Тем не менее рассмотрение этого случая представляет интерес, так как при этом получают критические размеры, значительно меньшие, чем длина свободного пробега  $l$ .

Зная зависимость критического радиуса от эффективных сечений в двух предельных случаях  $R_0 \gg l$  и  $R_0 \ll l$ , можно путём интерполирования находить  $R_0$  в промежуточной области ( $R_0 \approx l$ ), для которой непосредственное вычисление критических размеров очень затруднительно.

При выполнении условия  $\beta \gg \alpha$  можно пренебречь показателем в множителе  $e^{-\alpha R}$ , входящем в интегральное уравнение (24.1), так как оказывается, что радиус сферы в рассматриваемом случае значительно меньше длины свободного пробега.

Итак, при  $\beta \gg \alpha$  мы получаем из (24.3') уравнение

$$n(x, y, z) = \frac{\beta}{4\pi} \int n(x', y', z') \frac{dx' dy' dz'}{r^2}, \quad (24.11')$$

где

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2.$$

Будем предполагать, что плотность нейтронов  $n$  зависит только от расстояния  $\rho$  до центра сферы. В этом случае легко выполнить интегрирование по углам в уравнении (24.11'). В результате мы получим:

$$n(\rho) = \frac{\beta}{2} \int_0^R \frac{\rho'}{\rho} n(\rho') \ln \frac{\rho + \rho'}{|\rho - \rho'|} d\rho', \quad (24.11)$$

где  $R$  — радиус сферы.

Вводя вместо  $n(\rho)$  функцию  $f(\rho) = \rho n(\rho)$  и обозначая  $\rho/R$  через  $x$ , перепишем (24.11) в виде

$$\frac{2}{\beta R} f(x) = \int_0^1 f(x') \ln \frac{x+x'}{|x-x'|} dx', \quad f(0) = 0 \quad (24.12)$$

или иначе:

$$\lambda f = Lf, \quad f(0) = 0, \quad (24.12')$$

где  $\lambda = 2/\beta R$  и  $L$  — интегральный оператор, входящий в (24.12).

Мы получили интегральное уравнение с положительным симметричным ядром. Нас интересует наибольшее собственное значение  $\lambda_0$  этого уравнения.

Чтобы приближённо вычислить  $\lambda_0$ , будем исходить из следующего свойства наибольшего собственного значения. Пусть  $f(x)$  — некоторая функция, не принимающая отрицательных значений и отличающаяся тем свойством, что отношение  $Lf/f$  ограничено. Тогда, если  $Lf/f$  заключено в пределах  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ :

$$\Delta_1 < \frac{Lf}{f} < \Delta_2,$$

то в этих же пределах находится также наибольшее собственное значение  $\lambda_0$ \*

$$\Delta_1 < \lambda_0 < \Delta_2.$$

\* В этом легко убедиться следующим образом. Если  $\varphi_0(x)$  есть собственная функция оператора  $L$ , соответствующая наибольшему собственному числу  $\lambda_0$ :

$$L\varphi_0(x) = \lambda_0 \varphi_0(x), \quad (*)$$

то интеграл

$$\int_0^1 f(x) \varphi_0(x) dx \quad (**)$$

не может быть равен нулю, поскольку подинтегральная функция не изменяет своего знака. Действительно, функция  $f(x)$  по условию принимает только положительные значения, а  $\varphi_0(x)$  как собственная функция, соответствующая наибольшему соб-

Отсюда следует, что если нам удастся подобрать такую функцию  $f(x)$  (не принимающую отрицательных значений), для которой величины  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  будут мало отличаться друг от друга, то тем самым мы найдём с большой степенью точности  $\lambda_0$ .

В качестве  $f(x)$  мы возьмём функцию

$$f(x) = x - bx^3, \quad (24.13)$$

где  $b$  — постоянная, которую мы надлежащим образом подберём.

Легко видеть, что

$$Lf = \frac{1}{2} (1-x^2) \ln \frac{1+x}{1-x} + x - b \left\{ \frac{1}{4} (1-x^2) \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{6} x \right\}.$$

Если  $b=0$ , то  $Lf/f$  изменяется от 1 до 2, причём эти значения достигаются в точках  $x=0$  и  $x=1$ .

ственному числу, ни в одной точке не обращается в нуль и, следовательно, не изменяет своего знака.

Разложим функцию  $f(x)$  в ряд по собственным функциям оператора  $L$  (расположенным в порядке убывания собственных чисел):

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \varphi_j(x). \quad (***)$$

В силу неравенства нулю (\*\*) коэффициент  $C_0$  не может быть равен нулю

$$C_0 \neq 0.$$

Применяя к обеим частям равенства (\*\*\*)  $n$  раз оператор  $L$ , получаем:

$$L^n f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \lambda_j^n \varphi_j(x),$$

откуда

$$\frac{L^n f(x)}{\lambda_0^n} = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left( \frac{\lambda_j}{\lambda_0} \right)^n \varphi_j(x).$$

Если  $n$  устремить к бесконечности, то в правой части послед-

Мы подберём  $b$  таким образом, чтобы на границах интервала  $(0,1)$  функция  $f(x)$  принимала одинаковые значения. Для этого  $b$  должно равняться  $b=0,639$ . Оказывается, если взять функцию (24.13) с этим значением  $b$ , то

$$\Delta_1 = 1,55, \quad \Delta_2 = 1,59.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_0 = 1,57 \pm 0,02.$$

Итак, при  $\beta \gg \alpha$  критический радиус  $R$  равен:

$$R_0 = \frac{2}{1,57\beta} = \frac{1}{0,78\beta}.$$

него равенства все слагаемые, кроме первого, стремятся к нулю. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^{n_f}(x)}{\lambda_0^n} = C_0 \varphi_0(x). \quad (****)$$

С другой стороны, условие  $\Delta_1 < L < \Delta_2$  можно переписать в виде

$$\Delta_1 f < L f < \Delta_2 f.$$

Применяя к этому неравенству оператор  $L$   $k$  раз, получаем:

$$\Delta_1 L^k f < L^{k+1} f < \Delta_2 L^k f.$$

Отсюда

$$\Delta_1 < \frac{L^{k+1} f}{L^k f} < \Delta_2$$

и, следовательно,

$$\Delta_1^k < \frac{\Delta_1^k f}{f} < \Delta_2^k.$$

В частности, имеем:

$$\frac{\Delta_1^n}{\lambda_0^n} f < \frac{L^{n_f}}{\lambda_0^n} < \frac{\Delta_2^n}{\lambda_0^n} f.$$

Отсюда и из (\*\*\*\*) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\Delta_1}{\lambda_0} \right)^n f < C_0 \varphi_0(x) < \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\Delta_2}{\lambda_0} \right)^n f;$$

эти неравенства возможны только в том случае, если

$$\Delta_1 < \lambda_0 < \Delta_2,$$

что и требовалось доказать.

Мы видим, что в случае больших мультипликаций  $\beta \gg \alpha$  критические размеры оказываются значительно меньшими, чем длина свободного пробега нейтронов  $l = 1/\alpha$ .

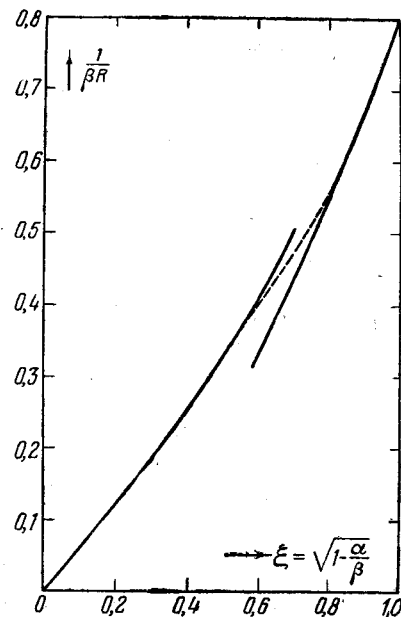


Рис. 8.

Для промежуточных значений отношения  $\beta/\alpha$  критические размеры могут быть найдены интерполированием (см. рис. 8, на котором изображена зависимость  $1/\beta R$  от  $\sqrt{1-\alpha/\beta}$ ).

## ГЛАВА V

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕДЛЕННЫХ НЕЙТРОНОВ  
С ВЕЩЕСТВОМ

## § 25. Захват медленных нейтронов в кристаллах.

При рассмотрении различных процессов взаимодействия медленных нейтронов с веществом необходимо, вообще говоря, учитывать наличие связи между ядрами вещества.

В этой главе мы будем рассматривать, главным образом, взаимодействие нейтронов с кристаллами и покажем, в каких случаях существенно наличие связи между атомами кристалла.

Начнём с рассмотрения захвата нейтронов в кристалле\*).

Будем рассматривать кристалл как дебаевский континуум, состояние которого определяется заданием чисел фононов  $n_s$  с частотой  $\omega_s$  и волновым вектором  $f_s$ . Состояние кристалла, задаваемое совокупностью числа  $n_s$ , мы обозначаем символом  $\{n_s\}$ .

Нас интересует вероятность  $\omega(E)$  радиационного захвата нейтрона с энергией  $E$  ядром типа  $A$ , занимающим определённое положение в кристаллической решётке. В результате захвата излучается  $\gamma$ -квант с импульсом  $k$ , а решётка переходит из состояния  $\{n_s^0\}$  в состояние  $\{n_s\}$ . Для краткости будем обозначать в дальнейшем начальное и конечное состояния всей системы (включающей нейтрон, ядро и  $\gamma$ -квант) соответственно символами  $p\{n_s^0\}A$  и  $k\{n_s\}B$  ( $B$  обозначает конечное состояние ядра,  $p$  — импульс нейтрона).

\* Мы следуем работе Лэмба [97]. Ниже излагаются основные результаты этой работы.

Достижению конечного состояния предшествует образование составного ядра, которое мы обозначим через  $C$ .

Можно сказать, что конечное состояние достигается через промежуточное состояние, в котором нет ни нейтрона, ни  $\gamma$ -кванта. Это промежуточное состояние характеризуется наличием составного ядра  $C$  и некоторым состоянием решётки. Последнее мы будем определять заданием чисел фононов  $n'_s$  и обозначать через  $\{n'_s\}$ . Будем предполагать, что захват нейтрона обусловливается одним резонансным уравнением ядра  $C$ , энергию которого обозначим через  $E_0$ .

На языке теории возмущений интересующая нас задача представляет собой эффект второго порядка. Пользуясь известными формулами теории возмущений [98], можно представить искомую вероятность  $\omega(E)$  в следующем виде:

$$\omega(E) = \sum_{\{n_s\}} \left| \sum_{\{n'_s\}} \frac{(p\{n_s^0\}A | H | \{n'_s\}C) (\{n'_s\}C | H | k\{n_s\}B)}{E - E_0 + \sum_s \hbar\omega_s (n_s^0 - n'_s) - \frac{1}{2} \Gamma(\{n'_s\})} \right|^2, \quad (25.1)$$

где  $(p\{n_s^0\}A | H | \{n'_s\}C)$  обозначает матричный элемент перехода из начального состояния  $p\{n_s^0\}A$  в промежуточное состояние, которое мы обозначаем через  $\{n'_s\}C$ ; далее,  $(\{n'_s\}C | H | k\{n_s\}B)$  есть матричный элемент перехода из промежуточного в конечное состояние  $k\{n_s\}B$ , наконец,  $\Gamma(\{n'_s\})$  обозначает ширину состояния  $C\{n'_s\}$ .

В выражении (25.1) амплитуда вероятности суммируется по всем возможным числам фононов  $n'_1, n'_2, n'_3, \dots$  в промежуточном состоянии; квадрат модуля амплитуды вероятности суммируется по числам фононов в конечном состоянии, а черта над суммой означает, что результат усредняется по возможным начальным состояниям решётки.

Поскольку рассматривается захват медленных нейтронов, полная ширина  $\Gamma(\{n'_s\})$  определяется, главным образом, радиационной шириной, которую можно счи-

тать практически не зависящей от состояния решётки. Поэтому в дальнейшем мы пренебрегаем зависимостью  $\Gamma(\{n_s\})$  от состояния решётки и пишем вместо  $\Gamma(\{n_s\})$  просто  $\Gamma$ .

Перейдём к определению матричных элементов, входящих в (25.1).

Обозначим через  $\mathbf{r}_A$  радиус-вектор, определяющий положение ядра  $A$ ;  $\mathbf{r}_A$  имеет вид  $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_A^0 + \mathbf{u}_A$ , где  $\mathbf{r}_A^0$  — радиус-вектор, определяющий положение равновесия ядра  $A$  ( $\mathbf{r}_A^0$  — радиус-вектор некоторого узла решётки), а  $\mathbf{u}_A$  — смещение  $A$  из положения равновесия, обусловленное тепловыми колебаниями решётки. Это смещение можно представить в виде

$$\mathbf{u}_A = \sum_s \mathbf{e}_s (\xi_s e^{\frac{if_s \mathbf{r}_A^0}{\hbar}} + \xi_s^* e^{-\frac{if_s \mathbf{r}_A^0}{\hbar}}).$$

Здесь индекс  $s \equiv fj$  служит для обозначения колебания, частота и волновой вектор которого равны  $\omega_s \equiv \omega_{fj}$  и  $f/\hbar$  и характер поляризации которого определяется индексом  $j$  ( $j=1, 2, 3$ );  $\xi_s$  и  $\xi_s^*$  — амплитуда колебания и комплексно сопряжённая ей величина,  $\mathbf{e}_s$  — единичный вектор в направлении колебаний.

Волновая функция, описывающая колебательное состояние кристалла, имеет вид

$$\prod_s \varphi_{n_s}(\xi_s),$$

где  $n_s \equiv n_{fj}$  — число фононов сорта  $s$ ,  $\varphi_{n_s}(\xi_s)$  — волновая функция гармонического осциллятора с энергией  $\hbar\omega_s(n_s + \frac{1}{2})$  ( $\xi_s$  — координата осциллятора).

Заметим, что единственные матричные элементы  $\xi$  и  $\xi^*$ , отличные от нуля, равны:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{n_s, n_s+1} &= \sqrt{\frac{\hbar(n_s+1)}{2MN\omega_s}} e^{-i\omega_s t}, \\ \xi_{n_s, n_s-1}^* &= \sqrt{\frac{\hbar n_s}{2MN\omega_s}} e^{i\omega_s t}, \end{aligned} \right\} \quad (25.2)$$

где  $M$  — масса ядра,  $N$  — число ядер в кристалле.

Матричный элемент перехода из начального в промежуточное состояние имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \varphi \{n_s^0\} A | H | \{n_s'\} C \rangle &= \int \frac{1}{V_\Omega} e^{\frac{ip\mathbf{r}}{\hbar}} \psi_A(i_A) \prod_s \varphi_{n_s^0}(\xi_s) H \psi_C^*(i_C) \times \\ &\times \prod_s \varphi_{n_s'}^*(\xi_s) d\mathbf{r} d\tau_i d\tau_\epsilon, \end{aligned} \quad (25.3)$$

где  $\psi_A(i_A)$  — волновая функция ядра  $A$ , зависящая от внутренних координат  $i_A$ ; такой же смысл имеет  $\psi_C(i_C)$  для ядра  $C$ ;  $\frac{1}{V_\Omega} e^{\frac{ip\mathbf{r}}{\hbar}}$  — нормированная на объём волновая функция нейтрона ( $\Omega$  — объём кристалла). Интегрирование совершается по всему конфигурационному пространству ( $d\mathbf{r}$  — элемент объёма в пространстве  $\mathbf{r}$ ,  $d\tau_i$  — элемент объёма в пространстве внутренних координат ядер  $A$  и  $C$ ,  $d\tau_\epsilon = \prod_s d\xi_s$ ).

В § 3 мы видели, что при рассмотрении различных процессов взаимодействия медленных нейтронов с ядрами можно пользоваться своеобразной теорией возмущений, считая энергию взаимодействия нейтрона с ядром пропорциональной  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A)$ .

В силу этого интегрирование по  $\mathbf{r}$  сводится просто к замене  $\mathbf{r}$  на  $\mathbf{r}_A$ .

Обозначая матричный элемент, соответствующий захвату нейтрона свободным ядром  $A$ , через  $M_c$ , перепишем выражение (25.3) в виде

$$\langle \varphi \{n_s^0\} A | H | \{n_s'\} C \rangle = M_c e^{\frac{i}{\hbar} p\mathbf{r}_A^0} (\{n_s^0\} | e^{\frac{i}{\hbar} p\mathbf{u}_A} | \{n_s'\}), \quad (25.3')$$

где

$$\begin{aligned} (\{n_s^0\} | e^{\frac{i}{\hbar} p\mathbf{u}_A} | \{n_s'\}) &= \prod_{n_s'} M_{n_s^0 n_s'}, \\ M_{n_s^0 n_s'} &= \int \varphi_{n_s^0}(\xi_s) e^{\frac{i}{\hbar} p\mathbf{u}_s} \varphi_{n_s'}(\xi_s) d\xi_s \end{aligned}$$

и

$$u_s \equiv u_{fj} = e_s (\xi e^{\frac{i}{\hbar} f_s r^0} + \xi_s^* e^{-\frac{i}{\hbar} f_s r^0}).$$

Вычисление матричных элементов  $M_{n_s^0 n_s^0}$  может быть легко выполнено, если заметить, что  $\xi \sim N^{-1/2}$ ,  $N \gg 1$ .

Вычислим сначала  $M_{n_s^0 n_s^0}$ . Разложив  $e^{\frac{i}{\hbar} p u_s}$  в ряд по степеням  $\xi_s$  и  $\xi_s^*$ , получим:

$$M_{n_s^0 n_s^0} = (n_s^0 | e^{\frac{i}{\hbar} p u_s} | n_s^0) = \\ = 1 - \frac{1}{2\hbar^2} (p e_s)^2 (n_s^0 | \xi_s \xi_s^* + \xi_s^* \xi_s | n_s^0) + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

( $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$  содержит члены, пропорциональные  $N^{-2}$ ,  $N^{-3}$ , ...). Пользуясь (25.2), получим:

$$M_{n_s^0 n_s^0} = 1 - \frac{1}{2\hbar} (p e_s)^2 \frac{n_s + \frac{1}{2}}{MN\omega_s}, \quad (25.4)$$

причём мы пренебрегли членами, содержащими  $N^{-2}$ ,  $N^{-3}$ , ... Отсюда следует, что с точностью до  $N^2$

$$|M_{n_s^0 n_s^0}|^2 \cong 1 - \frac{1}{\hbar} (p e_s)^2 \frac{n_s + \frac{1}{2}}{MN\omega_s}. \quad (25.4')$$

Определим теперь матричные элементы  $M_{n_s^0 n_s^0}$ , когда  $n_s^0 \neq n_s^0$ .

Разлагая снова  $e^{\frac{i}{\hbar} p u_s}$  в ряд, легко убедиться в том, что достаточно ограничиться рассмотрением только тех случаев, когда  $n_s^0 = n_s^0 \pm 1$ .

Вводя для краткости обозначение

$$q_s^2 = \frac{(p e_s)^2}{2MN\hbar\omega_s},$$

получим, на основании (25.2):

$$\left. \begin{aligned} |M_{n_s^0, n_s^0+1}|^2 &= (n_s^0 + 1) q_s^2, \\ |M_{n_s^0, n_s^0-1}|^2 &= n_s^0 q_s^2. \end{aligned} \right\} \quad (25.5)$$

Матричный элемент  $(\{n_s^0\} C | H | k \{n_s\} B)$ , отвечающий переходу из промежуточного в конечное состояние,

можно представить аналогично (25.3') в виде

$$(\{n_s^0\} C | H | k \{n_s\} B) = (\{n_s^0\} | e^{-\frac{i}{\hbar} k r^A} | \{n_s\}) M_r(k), \quad (25.6)$$

где  $M_r$  — матричный элемент, отвечающий испусканию фотона  $k$  свободным ядром.

Заметим, что из закона сохранения энергии следует, что величина  $|k|$  зависит от конечного состояния решётки. Эта зависимость, однако, столь незначительна, что практически можно считать  $|k|$  не зависящим от  $\{n_s\}$ .

Пользуясь этим обстоятельством, легко выполнить суммирование в формуле (25.1) по числам фононов  $n_1, n_2, \dots$  в конечном состоянии решётки.

Заметим для этого, что

$$\sum_{\{n_s\}} (\{n_s^0\} | e^{-\frac{i}{\hbar} k r^A} | \{n_s\}) (\{n_s^0\} | e^{-\frac{i}{\hbar} k r^A} | \{n_s\})^* = \\ = \sum_{\{n_s\}} (\{n_s^0\} | e^{-\frac{i}{\hbar} k r^A} | \{n_s\}) (\{n_s\} | e^{\frac{i}{\hbar} k r^A} | \{n_s^0\}) = \\ = (\{n_s^0\} | I | \{n_s^0\}) = \delta_{\{n_s^0\}, \{n_s^0\}},$$

где  $I$  — единичная матрица.

Пользуясь этим соотношением, представим (25.1) в виде

$$\omega(E) = |M_c M_r|^2 \sum_{\{n_s^0\}} \frac{|(\{n_s^0\} | e^{\frac{i}{\hbar} p u_s} | \{n_s^0\})|^2}{[E - E_0 + \sum_s \hbar \omega_s (n_s^0 - n_s^0)]^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}. \quad (25.7)$$

Это выражение показывает, что различные промежуточные состояния решётки не интерферируют между собой.

Если пренебречь энергией, передаваемой решётке, то мы получим из (25.7):

$$\omega(E) = \frac{\text{const.}}{(E - E_0)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}.$$

Такой формулой, как мы знаем, определяется вероятность поглощения нейтрона свободным ядром.

Преобразуем общую формулу (25.7).

Используя известное свойство  $\delta$ -функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\rho - a) f(\rho) d\rho = f(a),$$

перепишем (25.7) в виде

$$\omega(E) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left[\rho + \sum_s (n_s^0 - n_s') \hbar \omega_s\right] \sum_{\{n_s'\}} \frac{|\{n_s^0\} | e^{i(\hbar/\hbar)\rho u_A} | \{n_s'\} \rangle|^2}{(E - E_0 - \rho)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} d\rho.$$

Замечая, что

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} d\mu,$$

получим:

$$\omega(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu\rho} d\rho}{(E - E_0 - \rho)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \sum_{\{n_s'\}} |\{n_s^0\} | e^{i\hbar\rho u_A} | \{n_s'\} \rangle|^2 e^{i\mu \sum_s \hbar \omega_s (n_s^0 - n_s')} \quad (25.8)$$

[мы опустили здесь множитель  $(M_c M_r)^2$ ].

Выше мы видели, что  $n_s'$  может отличаться от  $n_s^0$  не более чем на единицу. Учитывая это обстоятельство и пользуясь формулами (25.4), (25.5), получим следующее выражение для  $\omega(E)$ :

$$\omega(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu\rho} d\rho}{(E - E_0 - \rho)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \prod_s [1 + (n_s^0 + 1) q_s^2 e^{-i\mu \hbar \omega_s} + n_s^0 q_s^2 e^{i\mu \hbar \omega_s} - (2n_s^0 + 1) q_s^2]. \quad (25.9)$$

В этом выражении легко произвести усреднение по всем начальным состояниям решётки, так как числа фононов в начальном состоянии  $n_s^0$  входят в (25.9)

линейно. Мы должны, очевидно, произвести усреднение по различным значениям чисел фононов  $n_s^0$ . В результате такого усреднения  $n_s^0$  заменится средним значением чисел фононов в состоянии  $s$ , которое, как известно, определяется формулой Планка.

В усреднённую вероятность входит бесконечное произведение вида

$$\prod_s (1 + \lambda_s q_s^2).$$

Так как  $q_s^2$  обратно пропорционально числу атомов в кристалле  $N$ , то при большом  $N$  имеет место приближённая формула

$$\prod_s (1 + \lambda_s q_s^2) = 1 + \sum_s \lambda_s q_s^2 + \sum_{s < r} \lambda_s \lambda_r q_s^2 q_r^2 + \dots \approx e^{\sum_s \lambda_s q_s^2}.$$

Действительно, разложение  $e^{\sum_s \lambda_s q_s^2}$  в ряд по степеням  $q_s^2$  имеет вид

$$e^{\sum_s \lambda_s q_s^2} = 1 + \sum_s \lambda_s q_s^2 + \sum_{s < r} \lambda_s \lambda_r q_s^2 q_r^2 + \frac{1}{2} \sum_s \lambda_s^2 q_s^4 + \dots$$

Таким образом  $\prod_s (1 + \lambda_s q_s^2)$  отличается от  $e^{\sum_s \lambda_s q_s^2}$  отсутствием членов  $\frac{1}{2} \sum_s \lambda_s^2 q_s^4$ ,  $\frac{1}{6} \sum_s \lambda_s^3 q_s^6$ , ..., которые обратно

пропорциональны соответственно  $N, N^2, \dots$  (следует иметь в виду, что каждое слагаемое в первой сумме обратно пропорционально  $N$ , но число слагаемых пропорционально  $N$ ). В пределе, когда  $N \rightarrow \infty$ , приведённая выше формула становится точной.

Используя эту формулу, мы представим  $\omega(E)$  в следующем виде:

$$\omega(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu\rho + g(\mu)}}{(E - E_0 - \rho)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} d\rho d\mu, \quad (25.10)$$

где

$$g(\mu) = \sum_s q_s^2 \{(\bar{n}_s + 1) e^{-i\mu \hbar \omega_s} + \bar{n}_s e^{i\mu \hbar \omega_s} - 1 - 2\bar{n}_s\} \quad (25.11)$$

и  $\bar{n}_s$  — среднее число фононов в состоянии  $s$ , определяемое формулой Планка

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_s}{T}} - 1}$$

( $T$  — температура, выраженная в энергетических единицах).

В формуле (25.10) легко выполнить интегрирование по  $\rho$  с помощью теоремы о вычетах; в результате получим:

$$\omega(E) = \frac{2}{\Gamma} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{i\mu(E-E_0+i\frac{\Gamma}{2})+\sigma(\mu)} d\mu. \quad (25.12)$$

Этой формулой определяется форма линии поглощенная нейтрона в кристалле.

Если не учитывать дисперсии фононов и анизотропии скорости звука, то мы получим для  $g(\mu)$  следующее выражение:

$$g(\mu) = \frac{3}{2} \frac{p^2}{M\theta^3} \int_0^\theta [(1 + \bar{n}_\varepsilon) e^{i\mu\varepsilon} + \bar{n}_\varepsilon e^{-i\mu\varepsilon} - 2\bar{n}_\varepsilon - 1] \varepsilon d\varepsilon, \quad (25.13)$$

где

$$\bar{n}_\varepsilon = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{T}} - 1}$$

и  $\theta$  — температура Дебая, определяемая, как  $\theta = \hbar\omega_{\max}$  ( $\omega_{\max}$  — максимальная частота фононов;  $T$  и  $\theta$  выражены в энергетических единицах).

В общем виде выполнить интегрирование в формуле (25.13) не удаётся. Мы ограничимся поэтому рассмотрением двух предельных случаев «слабой» и «сильной» связи, для которых несущественны значения  $\mu$ , лежащие вблизи  $\mu \sim 1/\theta$ .

В первом из этих случаев — случае малых  $\theta$  — в интеграле, определяющем  $\omega(E)$ , существенными оказываются малые  $\mu$ ,  $|\mu\theta| \ll 1$ . В случае «сильной» связи (большие  $\theta$ ) существенной является область больших  $\mu$ ,  $|\mu\theta| \gg 1$ .

Мы убедимся в справедливости этих утверждений, если рассмотрим выражения для  $g(\mu)$  при  $|\mu\theta| \ll 1$  и  $|\mu\theta| \gg 1$ .

Если  $|\mu\theta| \ll 1$ , то  $g(\mu)$  можно разложить в ряд по степеням  $\mu\theta$ . В изотропном случае [см. (25.13)] мы получим при этом, ограничиваясь квадратичным относительно  $\mu$  членом, следующую формулу для  $g(\mu)$ :

$$g(\mu) = -i\mu \frac{p^2}{2M} - \frac{3}{2} \frac{p^2}{M\theta^3} \mu^2 \int_0^\theta \left( \frac{1}{e^{\varepsilon/T} - 1} + \frac{1}{2} \right) \varepsilon^2 d\varepsilon, \quad |\mu\theta| \ll 1. \quad (25.14)$$

Введём обозначение

$$\varepsilon_0 = 3 \left( \frac{T}{\theta} \right)^3 T \int_0^{\theta/T} \left( \frac{1}{e^t - 1} + \frac{1}{2} \right) t^3 dt;$$

тогда (25.14) переписется в виде

$$g(\mu) = -i\mu\theta \frac{R}{\theta} - (\mu\theta)^2 \frac{R\varepsilon_0}{\theta^2}, \quad (25.15)$$

где  $R$  — энергия отдачи ядра, равная  $R = p^2/2M$ .

Отметим, что

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{3}{8} \theta, & \text{если } T \ll \theta, \\ \varepsilon_0 &= T, & \text{если } T \gg \theta. \end{aligned} \right\} \quad (25.16)$$

Из (25.15) в соединении с формулой (25.12), определяющей  $\omega(E)$ , легко заключить, что область малых  $\mu$ ,  $|\mu\theta| \ll 1$ , будет существенной в интеграле (25.12) при выполнении условия

$$R\varepsilon_0 \gg \theta^2. \quad (25.17)$$

Действительно, условие (25.17) означает, что коэффициент, стоящий при  $(\mu\theta)^2$  в формуле (25.15), значительно больше единицы; поэтому в интеграле (25.12) большие значения величины  $\mu\theta$  не могут играть существенной роли.

Так как  $R \sim (m/M)E$  ( $E$  — энергия нейтрона), то условие (25.17) можно представить ещё в следующем виде:

$$E \gg \frac{M}{m} \frac{\theta^2}{\varepsilon_0}. \quad (25.17')$$



Возвратимся к формуле (25.12) для  $\omega(E)$ .

Подставляя в неё вместо  $g(\mu)$  выражение (25.15), получим следующее выражение для  $\omega(E)$ , справедливое в случае «слабой» связи:

$$\begin{aligned} \omega(E) &= \frac{2}{\Gamma} \int_0^{\infty} d\mu \cos \mu (E - E_0 - R) \exp\left(-\frac{1}{2} \mu \Gamma - \mu^2 R \varepsilon_0\right) = \\ &= \frac{4}{\Gamma^2} \int_0^{\infty} dy \cos xy e^{-y - y^2/\xi^2}, \end{aligned} \quad (25.18)$$

где

$$x = \frac{E - E_0 - R}{\Gamma/2}; \quad \xi = \frac{\Gamma}{\Delta}; \quad \Delta = 2\sqrt{R\varepsilon_0}.$$

Согласно (18.10) последний интеграл может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned} \frac{4}{\Gamma^2} \int_0^{\infty} dy \cos xy e^{-y - y^2/\xi^2} = \\ = \frac{4}{\Gamma^2} \frac{\xi}{2\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4}\xi^2(x-y)^2} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{4}{\Gamma^2} \psi(\xi, x). \end{aligned}$$

Мы получили для  $\omega(E)$  выражение, формально совпадающее с выражением (18.9), справедливым для свободного ядра. Различие заключается в том, что доплеровская ширина  $\Delta$ , входящая в (25.8), определяется формулой

$$\Delta = 2\sqrt{R\varepsilon_0}$$

вместо формулы

$$\Delta = 2\sqrt{RT},$$

относящейся к случаю свободного ядра. Таким образом в  $\Delta$  входит вместо температуры величина  $\varepsilon_0$ , которую можно трактовать как среднюю энергию, приходящуюся на одну колебательную степень свободы кристалла (в  $\varepsilon_0$  входит также энергия нулевых колебаний). На рис. 9, взятом из работы [97], представлена зависимость  $\varepsilon_0/T$  от  $T/\theta$ .

Из предельных формул для  $\varepsilon_0$  вытекает, что доплеровская ширина линии поглощения в кристалле при низких температурах ( $T \ll \theta$ ) больше соответствующей ширины для свободного ядра; при высоких темпе-

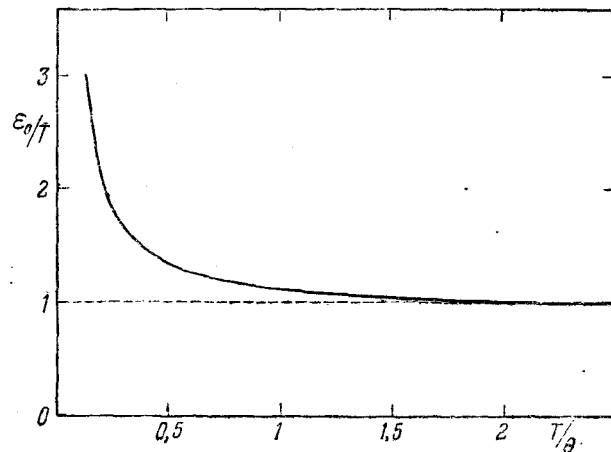


Рис. 9.

ратурах ( $T \gg \theta$ ) ширины для связанного и свободного ядер одинаковы.

Заметим, что в рассматриваемом случае «слабой связи» центр линии поглощения совпадает с энергией  $E_0 + R$ , как и в случае свободного ядра (см. § 18).

Перейдём к рассмотрению случая сильной связи ( $\theta \rightarrow \infty$ ).

Если  $\varepsilon_0 R/\theta^2 \ll 1$ , то, как явствует из формулы (25.13), модуль функции  $g(\mu)$  мал. В этом случае, очевидно, не существенны осциллирующие множители  $e^{\pm i\mu\varepsilon}$ , входящие в (25.13). (Это значит, что главную роль играют большие  $\mu$ ,  $|\mu\theta| \gg 1$ .) Мы можем поэтому не рассматривать этих множителей и считать, что  $g(\mu)$  приближённо равняется:

$$g(\infty) = -\frac{3p^2}{M\theta^2} \int_0^{\theta} \left[ \bar{n}_s + \frac{1}{2} \right] \varepsilon d\varepsilon. \quad (25.15')$$

Подставляя в (25.12)  $g(\infty)$  вместо  $g(\mu)$ , получим следующее выражение для  $w(E)$ , справедливое в случае «сильной связи»:

$$w(E) = \frac{e^{g(\infty)}}{(E-E_0)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}, \quad (25.19)$$

где

$$g(\infty) = \begin{cases} -6 \frac{RT}{\theta^2}, & \text{если } T \gg \theta, \\ -\frac{3}{2} \frac{R}{\theta}, & \text{если } T \ll \theta. \end{cases}$$

В пределе, когда  $\varepsilon_0 R/\theta^2 \rightarrow 0$ ,  $g(\infty)$  стремится к нулю и

$$w(E) = \frac{1}{(E-E_0)^2 + \Gamma^2/4}.$$

Таким образом в предельном случае «сильной» связи ( $\theta \rightarrow \infty$ ) линия поглощения имеет естественную форму, причём центр линии совпадает с  $E_0$ , т. е. с резонансной энергией, отвечающей бесконечно большой массе поглощающего ядра.

В рассмотренных предельных случаях слабой и сильной связи мы нашли аналитический вид функции  $w(E)$ . В промежуточных случаях для определения формы линии поглощения приходится производить численное интегрирование. На рисунках 10 и 11, взятых из работы [97], показано, какую форму имеет линия поглощения для кристалла с температурой Дебая  $\theta = 210^\circ$  для двух значений  $\Gamma$ , равных  $\theta/4$  и  $\theta$  (абсциссой является  $X$ —отношение  $E - E_0$  к  $\Gamma/2$ ). Предполагается, что температура кристалла значительно ниже температуры Дебая. Для сравнения на рисунках показана также форма линии поглощения для свободного ядра при тех же значениях температуры и ширины  $\Gamma$ . Мы видим, что в промежуточных случаях форма линии поглощения в кристалле может сильно отличаться от формы линии поглощения в газе. Могут появляться даже дополнительные максимумы.

Так как  $\varepsilon_0 \approx T$  при  $T \gg \theta$ , то из формулы (25.17') следует, что при выполнении условия

$$E_0 \gg \frac{M}{m} \theta^2$$

в случае высоких температур химическая связь не влияет на радиационный захват нейтронов, обусловленный уровнем  $E_0$ .

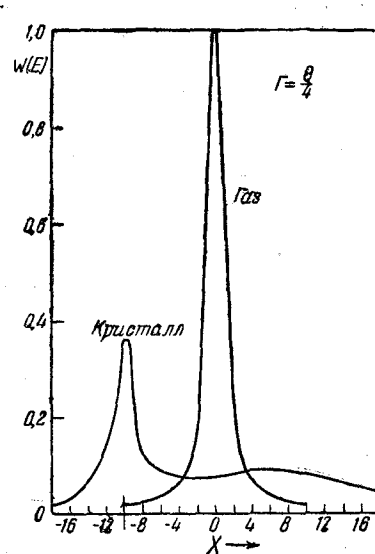


Рис. 10.

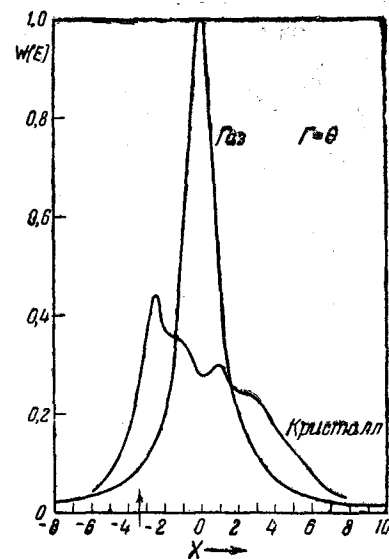


Рис. 11.

Химическая связь может сказаться на радиационном захвате при  $T \gg \theta$ , если  $E_0$  удовлетворяет условию

$$E_0 \leq \frac{M}{m} \theta^2.$$

При  $\theta = 200^\circ$ ,  $T = 300^\circ$ ,  $M/m = 200$  это условие даёт  $E_0 \leq 5 \text{ eV}$ .

Таким образом при  $T \gg \theta$  только та часть поглощения в кристаллах, которая обусловлена наиболее низкими уровнями, может отличаться от поглощения свободными ядрами.

Если  $T \ll \theta$ , то влияние эффекта Доплера на поглощение в кристаллах отличается для всех уровней от соответствующего влияния эффекта Доплера в газах.

Низкие уровни ( $E_0 \lesssim 5 \text{ eV}$ ) при  $T \ll \theta$  могут испытывать ещё и дополнительные искажения.

**§ 26. Упругое рассеяние медленных нейтронов в кристаллах.** Мы рассмотрим в этом и следующих параграфах упругое и неупругое рассеяние медленных нейтронов в кристаллах, понимая под медленными нейтронами, энергия которых недостаточна для возбуждения ядер [199], [1400], [1401], [1402], [1403].

Замедление таких нейтронов может происходить, очевидно, только благодаря возбуждению тепловых колебаний решётки.

Наличие связи между рассеивающими ядрами, образующими кристаллическую решётку; будет сказываться только при рассеянии достаточно медленных нейтронов. Ниже будет показано, что связь оказывается существенной в том случае, если энергия нейтронов меньше  $(M/m)\theta$ , где  $\theta$  — характеристическая температура кристалла,  $m$  и  $M$  — соответственно массы нейтрона и ядра.

При достаточно больших энергиях рассеяние нейтронов в кристалле не будет отличаться от рассеяния свободными ядрами.

При определении эффективных сечений различных процессов рассеяния нейтронов в кристалле мы будем пользоваться теорией возмущения, считая энергию взаимодействия между нейтроном и ядром, так же как в § 3, равной

$$V_l = \alpha_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l), \quad (26.1)$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{R}_l$  — радиусы-векторы, определяющие положение нейтрона и ядра, находящегося в  $l$ -м узле решётки;  $\alpha_l$  — константа, не зависящая от расстояния между нейтроном и ядром. Этот вид энергии взаимодействия означает, что нейтрон сильно взаимодействует с ядром только в том случае, если координаты обеих частиц совпадают.

Для достаточно медленных нейтронов  $\alpha_l$  можно считать не зависящей от энергии нейтрона.

Если отсутствует поглощение нейтронов ядрами, то  $\alpha_l$  является вещественной величиной, могущей принимать как положительные, так и отрицательные значения. При наличии поглощения  $\alpha_l$  — комплексная величина (см. § 30).

Величину  $\alpha_l$  легко связать с сечением упругого рассеяния нейтронов свободными ядрами  $\sigma_s$ .

Пусть нейтрон с импульсом  $\mathbf{p}$  сталкивается с ядром, масса которого равна  $M$ , и в результате столкновения приобретает импульс  $\mathbf{p}'$ . Вероятность такого процесса, отнесённая к единице времени, определяется согласно общей формуле теории возмущений:

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |(\mathbf{p} | V_l | \mathbf{p}')|^2 \delta\left(E - E' - \frac{(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2}{2M}\right). \quad (26.2)$$

Здесь  $E$  и  $E'$  — значения энергии нейтрона до и после столкновения с ядром;  $(\mathbf{p} | V_l | \mathbf{p}')$  — матричный элемент энергии взаимодействия, равный

$$(\mathbf{p} | V_l | \mathbf{p}') = \frac{1}{\Omega} \int e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{r}} \alpha_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l) d\mathbf{r} = \frac{\alpha_l}{\Omega} e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{R}_l},$$

где  $\frac{1}{\Omega^{1/2}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}$  — нормированная на объём  $\Omega$  волновая функция нейтрона,  $d\mathbf{r}$  — элемент объёма;  $\delta$ -функция, входящая в (26.2), обеспечивает выполнение закона сохранения энергии;  $(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2/2M$  представляет собой энергию, приобретаемую ядром в результате столкновения с нейтроном,

Дифференциальное сечение рассеяния, при котором импульс нейтрона лежит в телесном угле  $d\Omega'$ , равняется:

$$\begin{aligned} d\sigma_s &= \frac{w}{v} \frac{\Omega p'^2 dp' d\Omega'}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= \frac{\alpha_l^2}{4\pi^2\hbar^4} \delta\left(E - E' - \frac{(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2}{2M}\right) \frac{p'^2 dp' d\Omega'}{v}. \end{aligned} \quad (26.3')$$

где  $v$  — начальная скорость нейтрона. Переходя от дифференциала импульса к дифференциалу энергии  $E'$ ,

получим:

$$d\sigma_s = \frac{\alpha_1^2 m^2}{4\pi\hbar^4} \frac{p'}{p} \delta \left( E' - E + \frac{(p' - p)^2}{2M} \right) dE do'. \quad (26.3)$$

Проинтегрируем сначала (26.3) по углам  $do'$ . Имея в виду, что под знаком  $\delta$ -функции стоит выражение

$$E' + \frac{m}{M} (E' + E) - E - \frac{2m}{M} \sqrt{EE'} \cos \vartheta = 0$$

( $\vartheta$  — угол между  $p$  и  $p'$ ), найдём:

$$d\sigma_s = \frac{\alpha_1^2 m M}{4\pi\hbar^4} \frac{dE'}{E}, \quad (26.4)$$

$$\left[ \left( \frac{M-m}{M+m} \right)^2 E \leq E' \leq E \right].$$

Полученную зависимость сечения от энергии мы имели уже ранее (см. § 12). В § 12 формула (26.4) была выведена из предположения о сферической симметрии рассеяния в системе координат, где покоится центр инерции сталкивающихся нейтрона и ядра. Мы видим, таким образом, что это предположение, справедливое в случае рассеяния медленных нейтронов, эквивалентно выбору энергии взаимодействия между нейтронами и ядром в виде (26.1).

Интегрируя (26.4) по  $E'$  в пределах  $\left( \frac{M-m}{M+m} \right)^2 E \leq E' \leq E$ , найдём полное сечение упругого рассеяния свободными ядрами:

$$\sigma_s = \frac{\alpha_1^2}{\pi\hbar^4} \left( \frac{mM}{M+m} \right)^2. \quad (26.5)$$

Свяжем ещё  $\alpha$  с так называемой длиной рассеяния <sup>[104]</sup>. Так как рассматриваются медленные нейтроны, рассеяние которых происходит сферически симметрично, то волновая функция нейтрона на больших расстояниях от ядра имеет следующий асимптотический вид:

$$\psi = e^{-ikz} - a \frac{e^{ikr}}{r},$$

где первое слагаемое представляет собой падающую волну (в направлении оси  $z$ ), а второе — рассеянную. Величина  $a$  в рассматриваемом случае рассеяния мед-

ленных частиц не зависит от угла рассеяния. Она называется длиной рассеяния <sup>[104]</sup>. Легко видеть, что сечение рассеяния нейтронов свободными ядрами равно:

$$\sigma_s = 4\pi |a|^2. \quad (26.5')$$

Величина  $a$  может быть как положительной, так и отрицательной (при наличии поглощения  $a$  — комплексная величина). Так как сечение рассеяния медленных частиц может быть представлено ещё и в такой форме:

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0,$$

где  $\delta_0$  — изменение фазы  $S$ -волны [см. § 1, формула (1.1')], то

$$a = \frac{\sin \delta_0}{k}.$$

Отсюда видно, что знак  $a$  зависит от того, будет ли  $\delta_0$  меньше или больше, чем  $\pi$ .

Заметим, что для большинства ядер  $a > 0$  (Ba, Be, C, Ca, Cu, Fe, F, Mg, N, Ni, O, Pb, S, Zn и т. д.) и лишь для некоторых типов ядер  $a < 0$  (Li, Mn) <sup>[105]</sup>. Различные изотопы одного и того же элемента могут обладать отличающимися как по величине, так и по знаку значениями  $a$ .

Сравнение (26.5) с (26.5') показывает, что

$$\alpha = 2\pi\hbar^2 \frac{M+m}{Mm} a. \quad (26.5'')$$

Если ядро обладает механическим моментом (спином), то при рассеянии направление спина нейтрона может измениться на обратное. Это изменение связано с поворотом момента ядра в соответствии с законом сохранения момента количества движения.

При наличии спина ядра величина  $\alpha_1$  складывается из двух членов: постоянной  $A_1$ , не зависящей от спина нейтрона  $S$  и спина ядра  $K_1$ , и члена, учитывающего возможность изменения направления спина. Этот член должен содержать спиновые матрицы нейтрона и матрицы момента ядра. Так как спин нейтрона равен  $1/2$ ,

то квадрат его спиновых матриц равен единице. В силу этого энергия взаимодействия может содержать спиновые матрицы нейтрона только линейно, иными словами, величина  $\alpha_l$  должна иметь вид [100]

$$\alpha_l = A_l I + B_l SK_l,$$

где  $I$  — единичная матрица,  $A_l, B_l$  — константы.

Смысл этой формулы состоит в том, что  $\alpha$ , а следовательно, и длина рассеяния зависят от взаимной ориентации спинов нейтрона и ядра. Иными словами, следует различать значения  $\alpha_+$  и  $\alpha_-$ , относящиеся к параллельной и антипараллельной ориентации спинов нейтрона и ядра. (По имеющимся экспериментальным данным [105] отношение обоих значений  $\alpha$  составляет около 2 для  $B_l$  и около 3 для  $A_l$ .)

Замечая, что

$$SK = \frac{1}{2} \{J^2 - K^2 - S^2\},$$

где  $J = K + S$ , и полагая  $J = j \pm \frac{1}{2}$  ( $j$  — квантовое число, определяющее момент ядра), найдём, что  $SK$  при параллельной ориентации спинов нейтронов и ядра равно:

$$(SK)_+ = \frac{1}{2} \left\{ \left( j + \frac{1}{2} \right) \left( j + \frac{3}{2} \right) - j(j+1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right\} = \frac{1}{2} j,$$

а при антипараллельной ориентации спинов равно:

$$\begin{aligned} (SK)_- &= \frac{1}{2} \left\{ \left( j - \frac{1}{2} \right) \left( j + \frac{1}{2} \right) - j(j+1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} (j+1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\alpha_+$  и  $\alpha_-$  равны соответственно

$$\alpha_+ = A + \frac{1}{2} jB, \quad \alpha_- = A - \frac{1}{2} (j+1)B$$

и

$$A = \frac{(j+1)\alpha_+ + j\alpha_-}{2j+1}, \quad B = \frac{2(\alpha_+ - \alpha_-)}{2j+1}. \quad (26.6')$$

Напомним, что отличные от нуля матричные элементы проекций момента  $K_x, K_y, K_z$  определяются следу-

ющими формулами:

$$(K_z)_{mm} = m,$$

$$(K_x + iK_y)_{m+1, m} = (K_x - iK_y)_{m, m+1} = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)},$$

где  $m$  — магнитное квантовое число ядра.

Представив  $\alpha$  в виде

$$\begin{aligned} \alpha &= AI + BS_z K_z + \frac{1}{2} B \{ (S_x - iS_y)(K_x + iK_y) + \\ &\quad + (S_x + iS_y)(K_x - iK_y) \}, \end{aligned}$$

мы видим, что член  $A + BS_z K_z$  обуславливает переходы, при которых направление спина нейтрона не изменяется, а член  $B(S_x K_x + S_y K_y)$  — переходы, при которых направление спина изменяется.

Легко показать, что если момент ядра отличен от нуля, то в формулу (26.4) вместо  $\alpha_l^2$  нужно подставить

$$A_l^2 + \frac{1}{4} j_l(j_l+1) B_l^2,$$

где  $j_l$  — значение момента количества движения  $l$ -ядра.

Напишем теперь выражение для энергии взаимодействия  $V$  нейтрона с кристаллической решёткой.

Для этого нужно просуммировать  $V_l$  по всем ядрам решётки:

$$V = \sum_l \alpha_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l) = \sum_l [A_l + B_l (SK_l)] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l). \quad (26.6)$$

Если ядра, образующие кристаллическую решётку, абсолютно тождественны, то константы  $A_l$  и  $B_l$  не зависят от  $l$ .

При наличии изотопов и механических моментов ядер величины  $A_l$  и  $B_l$  являются функциями номера узла  $l$ , даже в том случае, когда кристалл построен из атомов одного элемента.

В этом и следующих параграфах предполагается, что различие между ядрами решётки, если оно имеет место, вызывается только наличием изотопов и механических моментов ядер.

Мы будем рассматривать нейтрон и кристаллическую решётку как одну квантовомеханическую систему,

состояние которой характеризуется заданием импульса нейтрона  $p$ , его спинового магнитного квантового числа  $\mu$ , квантовых чисел  $n_i$  всех осцилляторов, описывающих тепловые колебания решётки, и магнитных квантовых чисел ядер  $m_l$  ( $|m_l| \leq j_l$ ).

Рассеяние нейтрона можно рассматривать как переход системы из состояния

$$p, \mu, n_1, n_2, \dots, m_1, m_2, \dots$$

в состояние

$$p', \mu', n'_1, n'_2, \dots, m'_1, m'_2, \dots$$

Волновая функция системы нейтрон + решётка имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{\frac{i}{\hbar} p r} \chi_\mu \prod_i \varphi_{n_i} \prod_l \psi_{m_l}, \quad (26.7)$$

где  $\chi_\mu$  — спиновая функция нейтрона ( $\mu = \pm \frac{1}{2}$ ),  $\varphi_{n_i}$  — волновая функция  $i$ -го осциллятора ( $n_i$  представляет собой число фононов  $i$ -го сорта), наконец,  $\psi_{m_l}$  — спиновая волновая функция  $l$ -го ядра.

Определим матричный элемент энергии взаимодействия нейтрона с решёткой. Интегрирование по координатам нейтрона сводится просто к замене  $r$  на  $R_l$ . Подставляя вместо  $R_l$  сумму  $R_l^0 + u_l$ , где  $R_l^0$  — радиус-вектор, определяющий положение равновесия  $l$ -го ядра, и  $u_l$  — его смещение из положения равновесия, вызванное тепловыми колебаниями решётки, представим матричный элемент в виде

$$M = \frac{1}{\Omega} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p) R_l^0} (\mu, m_l | A_l I + B_l (K_l S) | \mu', m_l) \times \\ \times (\{n_i\} | e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p) u_l} | \{n'_i\}),$$

где для матричного элемента оператора  $V$ , отвечающего переходу из состояния  $a$  в состояние  $b$ , принято обозначение  $(a | V | b)$  (символ  $\{n_i\}$ , так же как и в § 25, служит для обозначения всей совокупности чисел фононов  $n_i$ ).

Матричный элемент, определяющий переходы в решётке, можно переписать в виде (обозначения — см. § 25)

$$(\{n_i\} | e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p) u_l} | \{n'_i\}) = \prod_s (n_s | e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p) u_{ls}} | n'_s),$$

где

$$u_{ls} = e_s (\xi_s e^{\frac{i}{\hbar} f_s R_l^0} + \xi_s^* e^{-\frac{i}{\hbar} f_s R_l^0}). \quad (26.8)$$

Найдём матричный элемент, определяющий переходы в системе магнитных квантовых чисел. Если направление спина нейтрона не изменяется, то матричный элемент равен:

$$(\mu, m_l | A_l I + B_l K_l S | \mu, m_l) = A_l \pm \frac{1}{2} m_l B_l, \quad (26.9)$$

где знак + берётся при  $\mu = +1/2$  и знак — при  $\mu = -1/2$ .

При изменении направления спина нейтрона магнитное квантовое число может измениться только у одного из ядер, скажем у ядра с индексом  $l$ . Тогда  $m'_l = m_l \pm 1$ ,  $m'_l = m_l$  ( $l' \neq l$ ). Матричный элемент равен при этом [16]:

$$(\mu, m_l | A_l I + B_l (S K_l) | \mu', m'_l) = \\ = \frac{B_l}{2} \sqrt{j_l(j_l + 1) - m_l(m_l \pm 1)} \delta_{\mu\mu'}, \quad (26.10)$$

где знак + берётся при  $\mu' = \frac{1}{2}$  и знак — при  $\mu' = -\frac{1}{2}$ .

Перейдём к рассмотрению упругого рассеяния нейтронов, при котором состояние решётки, т. е. числа фононов, не изменяются. Вероятность рассеяния  $d\omega$ , при котором импульс нейтрона  $p'$  находится в телесном угле  $d\omega'$ , связана с соответствующим матричным элементом  $M$  соотношением

$$d\omega = \frac{mp}{4\pi^2 \hbar^4} \Omega |M|^2 d\omega'. \quad (26.11)$$

Вероятность рассеяния, при котором направление спина не изменяется, мы обозначим через  $d\omega_{\uparrow}$ . Она

равна, согласно (26.9), (26.11):

$$d\omega_{\uparrow\uparrow} = \frac{mp}{4\pi^2\hbar^4\Omega} d\sigma' \left| \sum_l \left( A_l \pm \frac{m_l}{2} B_l \right) e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \times \right. \\ \left. \times \prod_s (n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_{ls}} | n_s) \right|^2. \quad (26.12)$$

Определим теперь вероятность рассеяния нейтрона с изменением направления его спина. Для этого нужно найти сначала вероятность рассеяния на  $l$ -м ядре и просуммировать затем результат по всем ядрам решётки. Мы получим, таким образом следующее выражение для вероятности, которую обозначим через  $d\omega_{\uparrow\downarrow}^{[100], [103]}$ :

$$d\omega_{\uparrow\downarrow} = \frac{mp d\sigma'}{4\pi^2\hbar^4\Omega} \sum_l \frac{1}{4} B_l^2 \{j_l(j_l+1) - \\ - m_l(m_l \pm 1)\} \left| \prod_s (n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_{ls}} | n_s) \right|^2. \quad (26.13)$$

Матричный элемент  $(n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_{ls}} | n_s)$  мы определили уже в § 25 [формула (25.4)]. Он равен:

$$(n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_{ls}} | n_s) = 1 - \frac{1}{2\hbar} |(p'-p)e_s|^2 \frac{n_s + \frac{1}{2}}{MN\omega_s}, \quad (26.14)$$

где  $N$  — общее число ядер в кристалле и  $M$  — масса атома. (Мы не будем учитывать в дальнейшем зависимости массы ядра от  $l$ , считая, что массы изотопов мало отличаются друг от друга.)

Так как  $N$  очень велико, то формулу (26.14) можно переписать в виде

$$(n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_{ls}} | n_s) = \exp \left( -\frac{1}{2\hbar} |(p'-p)e_s|^2 \frac{n_s + \frac{1}{2}}{MN\omega_s} \right).$$

Произведение матричных элементов, входящих в (26.12) и (26.13), равняется:

$$\prod_s (n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_{ls}} | n_s) = e^{-W}, \quad (26.15)$$

где

$$W = \frac{1}{2} \sum_s \frac{|(p'-p)e_s|^2}{MN\hbar\omega_s} \left( n_s + \frac{1}{2} \right) \quad (26.16)$$

представляет собой известную из теории рассеяния рентгеновских лучей экспоненту теплового фактора.

Вместо  $n_s$  сюда следует подставить среднее значение числа фононов в состоянии  $s$ , определяемое формулой Планка

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1},$$

где  $T$  — температура, выраженная в энергетических единицах.

Заметим, что в (26.16) суммирование по  $s$  можно заменить интегрированием по

$$\frac{\Omega_s^2 d\mathbf{f}_s d\omega_s}{(2\pi\hbar)^3}$$

и суммированием по состояниям поляризации  $j$  ( $\mathbf{f}_s$  — импульс фонона частоты  $\omega_s$ ,  $d\omega_s$  — элемент телесного угла  $\mathbf{f}_s$ ).

Если не учитывать дисперсии фононов\*) и анизотропии скорости звука, то мы получим следующее выражение для  $W$ :

$$W = \frac{3}{2} \frac{(p'-p)^2}{M\theta} \left[ \frac{1}{4} + \frac{T}{\theta} D \left( \frac{\theta}{T} \right) \right], \quad (26.17)$$

\*) Дисперсия фононов не существенна при низких температурах, когда  $T \ll \theta$ .

где

$$D(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \frac{x dx}{e^x - 1}$$

и  $\theta$  — температура Дебая.

Формулы (26.12) и (26.13), определяющие вероятность рассеяния, должны быть усреднены по всем значениям магнитных квантовых чисел  $m_l$  и по всем распределениям изотопов в решётке.

Пользуясь формулой

$$\sum_{-j_l}^{+j_l} m_l^2 = \frac{1}{3} j_l(j_l + 1)(2j_l + 1),$$

получим следующие выражения для усреднённых вероятностей:

$$d\bar{w}_{\uparrow\uparrow} = \frac{mpd\sigma'}{4\pi^2\hbar^4\Omega} \left\{ \overline{\left| \sum_l A_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \right|^2} + \frac{1}{12} \overline{B_l^2 j_l(j_l + 1) N} \right\} e^{-2W}, \quad (26.18)$$

$$d\bar{w}_{\uparrow\downarrow} = \frac{mpd\sigma'}{4\pi^2\hbar^4\Omega} \frac{1}{6} \overline{B_l^2 j_l(j_l + 1) N} e^{-2W}, \quad (26.19)$$

где черта сверху означает усреднение по всем возможным распределениям изотопов в решётке.

Определим среднее значение величины

$$\left| \sum_l A_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \right|^2. \quad (26.20)$$

Вводя среднее значение  $A_l$ , определяемое как  $\bar{A} = \sum A^{(s)} C_s$ , где  $C_s$  — концентрация ядер \*), для которых

\*) Заметим, что возможны случаи, когда  $\bar{A} = 0$ , так как фазы волн, рассеянных от различных изотопов, могут быть противоположными (см. стр. 253, а также § 30).

величина  $A_l$  равна  $A^{(s)}$ , перепишем (26.20) в виде

$$\begin{aligned} \left| \sum_l A_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \right|^2 &= \left| \sum_l (A_l - \bar{A}) e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} + \bar{A} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \right|^2 = \\ &= \left| \sum_l (A_l - \bar{A}) e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \right|^2 + \\ &+ \bar{A} \sum_{l'} e^{-\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_{l'}^0} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} (A_l - \bar{A}) + \\ &+ \bar{A} \sum_{l'} e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_{l'}^0} \sum_l e^{-\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} (A_l - \bar{A}) + \\ &+ \bar{A}^2 \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \right|^2. \quad (26.20') \end{aligned}$$

При усреднении по распределениям изотопов второе и третье слагаемые дают нуль, так как  $\overline{A_l - \bar{A}} = 0$ . Среднее значение от первого слагаемого (26.20') перепишем в виде

$$\overline{\sum_l \sum_{l'} (A_l - \bar{A})(A_{l'} - \bar{A}) e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)(R_l^0 - R_{l'}^0)}}.$$

Недиагональные члены с  $l \neq l'$  дают при усреднении нуль. Среднее значение диагонального члена равняется:

$$\overline{(A_l - \bar{A})^2} = \bar{A}_l^2 - 2\bar{A}_l \bar{A} + \bar{A}^2 = \bar{A}^2 - \bar{A}^2.$$

Воспользовавшись этой формулой, представим окончательно среднее значение (26.20) в виде

$$\overline{\left| \sum_l A_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \right|^2} = N(\bar{A}^2 - \bar{A}^2) + \bar{A}^2 \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} \right|^2. \quad (26.21)$$

Во втором слагаемом мы произведём сначала суммирование по всем ядрам, входящим в состав одной



элементарной ячейки, а затем результат просуммируем по всем ячейкам. Мы получим таким образом:

$$\left| \sum_i e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})R_i^0} \right|^2 = \left| \sum_\nu e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})R_\nu^0} \right|^2 \left| \sum_j e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})R_j^0} \right|^2, \quad (26.22)$$

где  $R_j$  — радиус-вектор некоторой определённой точки внутри элементарной ячейки,  $R_\nu^0$  — радиус-вектор  $\nu$ -го ядра по отношению к этой точке; суммирование по  $\nu$  распространяется на все ядра, входящие в состав одной элементарной ячейки, а суммирование по  $j$  означает суммирование по всем элементарным ячейкам.

Вторая сумма, входящая в (26.22), при большом (бесконечном) числе элементарных ячеек может быть представлена в виде

$$\left| \sum_j e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})R_j^0} \right|^2 = \frac{(2\pi)^3 N'}{\Delta} \delta \left( \frac{\mathbf{p}' - \mathbf{p}}{\hbar} - 2\pi\boldsymbol{\tau} \right), \quad (26.23)$$

где  $\Delta$  — объём элементарной ячейки,  $\boldsymbol{\tau}$  — вектор обратной решётки\*),  $N'$  — число элементарных ячеек.

Сложив  $dw_{\uparrow\uparrow}$  и  $dw_{\uparrow\downarrow}$  и воспользовавшись формулами (26.24), (26.22), (26.23), получим следующее выражение

\*) Вектор обратной решётки определяется через базисные векторы обратной решётки  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  следующим образом:

$$\boldsymbol{\tau} = p_1 \mathbf{b}_1 + p_2 \mathbf{b}_2 + p_3 \mathbf{b}_3,$$

где  $p_1, p_2, p_3$  — целые числа.

Базисные векторы обратной решётки связаны с базисными векторами (основными периодами) прямой решётки  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  соотношениями

$$\mathbf{b}_1 = \frac{[\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]}{\mathbf{a}_1 [\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{[\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1]}{\mathbf{a}_2 [\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1]}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]}{\mathbf{a}_3 [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]}.$$

Каждому вектору обратной решётки соответствует семейство параллельных кристаллических плоскостей, уравнения которых имеют вид

$$\boldsymbol{\tau} r = m,$$

где  $r = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3$ ,  $n_1, n_2, n_3$  и  $m$  — целые числа. Расстояние между соседними плоскостями равно  $1/\tau$  (при этом предполагается, что  $p_1, p_2, p_3$  — числа взаимно простые).

для вероятности упругого рассеяния:

$$dw_s = \frac{m\rho}{4\pi^2 \hbar^4} \left\{ \rho \left( \bar{A}^2 - \bar{A}^2 + \frac{B^2 j(j+1)}{4} \right) + \bar{A}^2 \frac{(2\pi)^3}{\Delta} \rho' \delta \left( \frac{\mathbf{p}' - \mathbf{p}}{\hbar} - 2\pi\boldsymbol{\tau} \right) S(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \right\} \cdot e^{-2W} d\Omega', \quad (26.24)$$

где  $\rho$  — число ядер в единице объёма,  $\rho'$  — число элементарных ячеек в единице объёма и

$$S(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \left| \sum_\nu e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})R_\nu^0} \right|^2$$

— так называемый структурный фактор.

Разделив  $dw_s$  на  $v/\Omega$ , найдём дифференциальное сечение упругого рассеяния. Отнесённое к одному ядру и единице телесного угла, оно имеет следующий вид:

$$\sigma'_s = \left\{ \frac{2\pi^2 \sigma_0}{\Delta} \frac{\rho'}{\rho} S_\tau \delta \left( \frac{\mathbf{p}' - \mathbf{p}}{\hbar} - 2\pi\boldsymbol{\tau} \right) + \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} \left( \bar{A}^2 - \bar{A}^2 + \frac{1}{4} B^2 j(j+1) \right) \right\} \cdot e^{-2W}, \quad (26.25)$$

где  $\sigma_0 = \frac{\bar{A}^2 m^2}{\pi \hbar^4}$ , и  $S_\tau$  — значение  $S$  при  $\mathbf{p} - \mathbf{p}' = 2\pi\hbar\boldsymbol{\tau}$ :

$$S_\tau = \left| \sum_\nu e^{2\pi i \boldsymbol{\tau} R_\nu^0} \right|^2.$$

Вектор  $R_\nu^0$  можно представить в виде

$$R_\nu^0 = a_1 u_1^\nu + a_2 u_2^\nu + a_3 u_3^\nu.$$

Так как векторы  $\mathbf{a}_i$  перпендикулярны к векторам  $\mathbf{b}_j$  (при  $i \neq j$ ), то  $S_\tau$  можно записать ещё в следующем виде:

$$S_\tau = \left| \sum_\nu e^{2\pi i (p_1 u_1^\nu + p_2 u_2^\nu + p_3 u_3^\nu)} \right|^2,$$

где  $p_1, p_2, p_3$  — целые числа, определяющие вектор  $\boldsymbol{\tau}$ :

$$\boldsymbol{\tau} = b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3.$$

Как известно, аналогичной формулой определяется рассеяние рентгеновских лучей в кристаллах.

Первое слагаемое в (26.25) даёт резкие максимумы интенсивности рассеянных лучей, определяемые формулой Брэгга

$$p' - p = 2\pi h\tau.$$

Это слагаемое описывает когерентное рассеяние нейтронов. Второе слагаемое описывает некогерентное рассеяние нейтронов. Если не считать множителя  $e^{-2W}$ , то оно не зависит от угла рассеяния и аналогично фону, наблюдаемому при рассеянии рентгеновских лучей.

Обратим внимание на то обстоятельство, что когерентное рассеяние определяется средним значением величины  $A$  (по различным изотопам). Некогерентное рассеяние определяется суммой квадрата флуктуации  $A$ , т. е.  $(A - \bar{A})^2$ , и величины  $\frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)}$ .

Мы видим, что когерентное рассеяние обуславливается столкновениями без изменения направления спина нейтрона, а некогерентное — столкновениями с изменением направления спина нейтрона. Это совершенно ясно, так как в интерференционных явлениях должны участвовать все ядра, что и имеет место при рассеянии без изменения направления спина нейтрона. Если же направление спина изменяется, то это происходит благодаря столкновению нейтрона с каким-либо определённым ядром.

Величину  $\sigma_0$  можно назвать сечением когерентного рассеяния связанным ядром. Пользуясь формулами (26.6') и (26.5''), можно выразить  $\sigma_0$  через длины рассеяния, отвечающие параллельной и антипараллельной ориентации спинов нейтрона и связанного ядра. Обозначая эти длины рассеяния через  $a'_+$  и  $a'_-$ , получим [105]:

$$\sigma_0 = \sigma_{\text{ког}} = 4\pi \left\{ \frac{(j+1)a'_+ + ja'_-}{2j+1} \right\}^2, \quad (26.25')$$

где длина рассеяния связанным ядром  $a'$  связана с длиной рассеяния свободным ядром  $a$ , входящей в (26.5''), соотношением

$$a' = \frac{M+m}{M} a.$$

Сечение некогерентного рассеяния связанным ядром, обусловленное изменением направления спина нейтрона, можно представить, согласно (26.6'), в следующем виде [105]:

$$\sigma_{\text{неког.}} = \frac{4\pi j(j+1)}{(2j+1)^2} (a'_+ - a'_-)^2 \quad (26.25'')$$

(в формулах (26.25') и (26.25'') не выписан тепловой множитель  $e^{-2W}$ ).

Экспериментально можно отдельно определить когерентное и некогерентное рассеяние (когерентное рассеяние отсутствует, если длина волны нейтронов больше чем  $2d$ , где  $d$  — наибольшее значение межплоскостного расстояния в кристалле). Таким путём возможно определять экспериментально отношение  $a_+/a_-$  [105], характеризующее зависимость рассеяния нейтронов от спина частиц.

Заметим, что для кристаллов конечных размеров сечение рассеяния при точном выполнении условий Брэгга не обращается в бесконечность, так как величина

$\left| \sum_l e^{i\vec{n} \cdot (\vec{p}' - \vec{p}) R_l^0} \right|^2$  сохраняет конечное значение и становится равной  $N'^2 S^2$  ( $N'$  — число ячеек).

С этим связано то обстоятельство, что для кристаллов конечных размеров брэгговская линия имеет не бесконечно малую, а конечную угловую ширину, а именно охватывает интервал телесных углов, по порядку величины равный  $(\lambda/l)^2$ , где  $\lambda$  — длина волны,  $l$  — линейные размеры кристалла.

Если размеры кристалла достаточно малы, то такой кристалл мало рассеивает падающие на него нейтроны.

Определим по порядку величины максимальные размеры кристалла, который рассеивает ещё малую часть нейтронной волны, падающей на него под брэгговским углом.

Интенсивность рассеянной волны при выполнении условий Брэгга пропорциональна произведению  $\sigma_0$  на квадрат числа атомов в кристалле, т. е. пропорциональна  $\sigma_0 (N_0 l^3)^2$  ( $N_0$  — число атомов в единице объёма,  $l$  — линейные размеры кристалла). Выше мы говорили, что

эффективная величина телесного угла, в котором происходит рассеяние, равна  $(\lambda/l)^2$ . Умножив  $\sigma_0 N_0^2 l^3$  на  $(\lambda/l)^2$  и разделив результат на площадь поперечного сечения кристалла, равную  $l^2$ , мы найдём отношение интенсивностей рассеянной и падающей волн. Обозначая эту величину через  $\beta$ , получим<sup>[104],[107]</sup>:

$$\beta \approx \sigma_0 N_0^2 \lambda^2 l^2 = \left(\frac{l}{l_0}\right)^2,$$

где

$$l_0 = \sigma_0^{-1/2} (N_0 \lambda)^{-1}.$$

Если  $l \ll l_0$ , то кристалл является «тонким», т. е. отражает малую долю падающей на него волны.

В случае тепловых нейтронов мы получим  $l_0 \approx 10^{-3}$  см, считая  $N_0 \approx 5 \cdot 10^{22}$ ,  $\sigma_0 \approx 10^{-24}$  см<sup>2</sup>.

Формула (26.25) относится к монокристаллу.

Для того чтобы получить сечение упругого рассеяния нейтронов в поликристаллах; нужно усреднить в выражении (26.25) первое слагаемое, содержащее  $\delta$ -функцию, по направлениям  $\tau$  (при заданной величине абсолютного значения  $\tau$ ). При этом  $\delta$ -функция от  $\frac{\mathbf{p}' - \mathbf{p}}{\hbar} - 2\pi\tau$  заменится  $\delta$ -функцией от  $\frac{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|}{\hbar} - 2\pi\tau$ , и мы получим следующее выражение для усреднённого сечения, отнесённого к одному ядру и единице телесного угла:

$$\sigma'_s = \left\{ \frac{\sigma_0}{8\pi\Delta\tau^2} \frac{\rho'}{\rho} \bar{S}_\tau \delta\left(\frac{2p}{\hbar} \sin \frac{\vartheta}{2} - 2\pi\tau\right) + \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4} \left(\bar{A}^2 - \bar{A}^2 + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)}\right) \right\} e^{-2W}, \quad (26.26)$$

где  $\bar{S}_\tau$  — среднее значение  $S_\tau$  при заданной величине  $\tau$  и  $\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{p}$ . (Коэффициент при  $\delta$ -функции находится из того условия, что интеграл от первого слагаемого в (26.26) по  $4\pi\tau^2 d\tau$  равен интегралу от первого слагаемого в (26.25) по  $d\tau_x d\tau_y d\tau_z$ .)

Аналогичной формулой определяется, как известно, рассеяние рентгеновских лучей в поликристаллах.

Определим интегральное сечение упругого рассеяния. Для этого необходимо проинтегрировать выраже-

ние (26.26) по углам рассеяния (т. е. по  $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$ ) и первое слагаемое просуммировать по всем возможным векторам обратной решётки, абсолютное значение которых не превосходит  $k/\pi$ . В результате мы получим следующее выражение для интегрального сечения рассеяния:

$$\sigma_s = \frac{\pi\sigma_0}{2\Delta k^2} \frac{\rho'}{\rho} \sum_{\tau < \frac{k}{\pi}} \frac{S_\tau}{\tau} e^{-2W_\tau} + \frac{m^2}{2\pi\hbar^4} \left(\bar{A}^2 - \bar{A}^2 + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)}\right) \int_0^\pi e^{-2W} \sin \vartheta d\vartheta, \quad (26.27)$$

где  $k$  — волновой вектор нейтрона, равный  $p/\hbar$ , а  $W_\tau$  — значение  $W$  при  $\mathbf{p}' - \mathbf{p} = 2\pi\hbar\tau$ :

$$W_\tau = 6\pi^2 \frac{\hbar^2 \tau^2}{M\theta} \left[ \frac{1}{4} + \frac{T}{\theta} D\left(\frac{\theta}{T}\right) \right].$$

Суммирование производится по всем возможным векторам обратной решётки, абсолютное значение которых не превосходит  $k/\pi$ .

Если пользоваться формулой (26.17) для  $W$ , то интеграл, входящий в (26.27), может быть легко вычислен. Он равен:

$$\int_0^\pi e^{-2W} \sin \vartheta d\vartheta = \int_0^\pi e^{-\frac{\alpha}{2}(1-\cos \vartheta)} \sin \vartheta d\vartheta = 2 \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}, \quad (26.28)$$

где

$$\alpha = 24 \frac{m}{M} \frac{E}{\theta} \left[ \frac{1}{4} + \frac{T}{\theta} D\left(\frac{\theta}{T}\right) \right]$$

( $m$  — масса нейтрона,  $E$  — его энергия).

Интегральное сечение (26.27) принимает при этом вид

$$\sigma_s = \frac{\pi\sigma_0}{2\Delta} \frac{\rho'}{\rho} \frac{1}{k^2} \sum_{\tau < \frac{k}{\pi}} \frac{S_\tau}{\tau} e^{-2W_\tau} + \frac{m^2}{\pi\hbar^4} \left(\bar{A}^2 - \bar{A}^2 + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)}\right) \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}. \quad (26.29)$$

Проанализируем это выражение. Здесь первое слагаемое описывает интерференционное рассеяние. Оно, очевидно, исчезает, если волновой вектор нейтрона  $k$  меньше  $\pi\tau_{\min}$ , где  $\tau_{\min}$  — наименьшее значение длины вектора обратной решётки (в простой кубической решётке  $\tau_{\min} = 1/a$ ,  $a$  — постоянная прямой решётки \*)).

Таким образом при  $k < \pi\tau_{\min}$  в формуле (26.29) остаётся только второе слагаемое, описывающее некогерентное рассеяние нейтронов. Когерентное рассеяние нейтронов, волновой вектор которых меньше  $\pi\tau_{\min}$ , невозможно. Рассеяние таких длинноволновых нейтронов обусловлено, следовательно, только наличием изотопов и существованием механических моментов ядер.

Длина свободного пробега нейтронов, волновой вектор которых меньше  $\pi\tau_{\min}$  (по отношению к рассеянию), равняется:

$$l_S = \frac{\pi\hbar^4}{m^2\rho \left[ \bar{A}^2 - \bar{A}^2 + \frac{1}{4} \frac{B^2}{j(j+1)} \right]} \cdot \frac{a}{1 - e^{-a}}. \quad (26.30)$$

С ростом энергии, благодаря уменьшению теплового фактора  $e^{-a}$ ,  $l_S$  возрастает. Это имеет место также при увеличении температуры, так как с ростом последней тепловой фактор уменьшается (при низких температурах, когда  $T \ll \theta$ ,  $\frac{T}{\theta} D \left( \frac{\theta}{T} \right) \approx \left( \frac{T}{\theta} \right)^2$ , при высоких температурах, когда  $T \gg \theta$ ,  $\frac{T}{\theta} D \left( \frac{\theta}{T} \right) \approx \frac{T}{\theta}$ ).

Если ядра решётки не имеют изотопов и не обладают механическими моментами, то упругое рассеяние нейтронов, волновой вектор которых меньше  $\pi\tau_{\min}$ , становится невозможным.

\*) В случае гексагональной решётки, к которой относится графит, базисные векторы обратной решётки определяются следующим образом. Если основные периоды решётки суть  $a_1, a_2, a_3$ , причём  $a_1 = a_2 = a$ ,  $\sphericalangle a_1 a_2 = 60^\circ$ ,  $a_3 \perp a_1, a_2$ , то базисные векторы обратной решётки, которая также является гексагональной, равны  $b_1 = b_2 = \frac{2}{\sqrt{3}a}$ ,  $b_3 = \frac{1}{a_3}$ , причём  $\sphericalangle b_1, b_2 = 60^\circ$ ,  $b_3 \perp b_1, b_2$ .

Для графита  $a = 2,46 \text{ \AA}$ ,  $a_3 = 6,80 \text{ \AA}$  [114].

Ниже будет показано, что неупругое рассеяние нейтронов, волновой вектор которых меньше  $\pi\tau_{\min}$ , в этих условиях также невозможно.

Отсюда следует, что если на кристалл с тождественными ядрами падает пучок тепловых нейтронов, то в направлении первоначального пучка после выхода из кристалла будут двигаться только такие нейтроны, волновой вектор которых меньше  $\pi\tau_{\min}$ . Таким образом можно отфильтровывать очень медленные или, как их называют, «холодные» нейтроны.

В качестве примера решётки, ядра которой не имеют изотопов и не обладают моментами, можно указать на графит.

Используя графит в качестве фильтра для очень медленных нейтронов, удалось получить нейтроны с энергией около  $18^\circ \text{K}$  [108].

Заметим, что жидкий гелий II должен обладать аналогичными свойствами в смысле выделения очень медленных нейтронов. Расчёты показывают, что для нейтронов с энергией, меньшей  $\sim 4^\circ \text{K}$ , гелий II является «прозрачным» [109].

Выясним теперь, как ведёт себя сечение упругого рассеяния при возрастании энергии. При  $k = \pi\tau_{\min}$  сечение скачком возрастает на величину  $\frac{c_0}{2\lambda\pi^2\tau_{\min}^3} \frac{\rho'}{\rho} S e^{-2W\tau_{\min}}$ .

При дальнейшем возрастании энергии вплоть до значения  $k = \pi\tau_2$  ( $\tau_2$  — второе в порядке возрастания значения  $\tau$ ) сечение, обусловленное интерференционным членом, монотонно убывает обратно пропорционально энергии нейтрона. При  $k = \pi\tau_2$  сечение снова скачком возрастает (в (26.29) теперь входят два члена) и затем вплоть до  $k = \pi\tau_3$  ( $\tau_3$  — третье в порядке возрастания значения  $\tau$ ) убывает обратно пропорционально энергии нейтрона \*). С дальнейшим ростом энергии нейтрона

\*) «Скачкообразная» структура сечения рассеяния в соответствии с формулой (26.29) наблюдалась экспериментально при изучении рассеяния нейтронов с энергией в интервале от 0,001 eV до 1 eV в поликристаллах Be и BeO [107].

скачки в сечении уменьшаются, и сечение стремится к некоторому пределу, который легко определить.

Действительно, при достаточно больших  $ka$  ( $a$  — постоянная решётки) сумма, входящая в (26.29), содержит много слагаемых, и поэтому суммирование может быть заменено интегрированием по  $\tau$ , точнее говоря, по  $4\pi\Delta\tau^2 d\tau$  в пределах от  $\tau=0$  до  $\tau=\frac{k}{\pi}$ . Замечая ещё, что в этих условиях структурный фактор даёт просто число ядер в ячейке, мы получим следующее выражение для суммы, входящей в (26.29):

$$\frac{\pi\sigma_0}{2\Delta k^2} \frac{\rho'}{\rho} S \sum_{\tau} \frac{1}{\tau} e^{-2W\tau} = \sigma_0 \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}, \quad (26.31)$$

причём мы воспользовались для  $W$  выражением (26.17).

Складывая (26.31) со вторым слагаемым в (26.29), получим предельное значение сечения в виде

$$\sigma_{\infty} = \frac{m^2}{\pi\hbar^4} \left( \bar{A}^2 + \frac{1}{4} \bar{B}^2 j(j+1) \right) \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}, \quad ka \gg 1. \quad (26.32)$$

Сравнивая это выражение с выражением (26.5) для сечения рассеяния изолированным ядром, мы видим, что даже при  $\alpha=0$ , т. е. без учёта теплового фактора, (26.32) отличается от (26.5) множителем  $\left( \frac{M}{m+M} \right)^2$ .

Наличие этого множителя связано с тем, что мы здесь рассматриваем только чисто упругое рассеяние. Общий вопрос о переходе от рассеяния связанными ядрами к рассеянию свободными ядрами рассматривается в § 28.

**§ 27. Неупругое рассеяние медленных нейтронов в кристаллах.** Перейдём теперь к рассмотрению неупругого рассеяния медленных нейтронов в кристаллах.

Мы рассмотрим наиболее вероятные при малых энергиях нейтрона процессы — испускание и поглощение одного дебаевского фонона (ср. конец этого параграфа).

Определим сначала вероятность испускания фонона с импульсом  $f$  и частотой  $\omega_s \equiv \omega_{fs}$ .

Матричный элемент энергии возмущения нейтрона (26.6), отвечающий эмиссии фонона  $s$ , можно представить в виде

$$M_{\substack{p, \mu; n_1, n_2, \dots, n_s, \dots, m_1, m_2, \dots \\ p', \mu', n_1, n_2, \dots, n_{s+1}, m_1', m_2', \dots}} = \frac{1}{\Omega} \sum_l e^{i(p'-p)R_l^0} \times \\ \times (\mu, m_l | A_l I + B_l (K_l S) | \mu', m_l') (n_s | e^{i(p'-p)u_{ls}} | n_s + 1) \times \\ \times \prod_r (n_r | e^{i(p'-p)u_{lr}} | n_r), \quad (27.1)$$

где штрих над произведением означает, что в нём отсутствует член с  $r=s$ . Так как каждый множитель бесконечно мало отличается от единицы ( $N \rightarrow \infty$ ), то  $\prod_r$  не отличается от произведения  $\prod_s$ , входящего

в матричный элемент для упругого рассеяния. Поэтому мы можем заменить  $\prod_r$  на  $e^{-W}$ , где  $W$  попрежнему выражается формулой (26.16). Иными словами, тепловой фактор для рассеяния с учётом однофононных процессов не отличается от теплового фактора для упругого рассеяния.

Для вычисления матричного элемента

$$(n_s | e^{i(p'-p)u_{ls}} | n_s + 1)$$

мы разложим  $e^{i(p'-p)u_{ls}}$  в ряд, сохранив в нём первые два члена\*). Пользуясь выражением (25.2) для матричных элементов амплитуд колебания  $\xi_s$  и  $\xi_s^*$ , получим:

$$(n_s | e^{i(p'-p)u_{ls}} | n_s + 1) = \\ = \frac{i}{\hbar} e_s(p'-p) \sqrt{\frac{(n_s+1)\hbar}{2MN\omega_s}} e^{i f R_s^0}. \quad (27.2)$$

\*) При рассмотрении двухфононных процессов в разложении  $e^{i(p'-p)u_{ls}}$  нужно сохранить первые три члена.

Заметим, что, заменив здесь  $n_s + 1$  на  $n_s$  и  $f$  на  $-f$ , мы получим матричный элемент, отвечающий поглощению фонона  $s$ .

Подставляя (27.2) в (27.1), получим:

$$M_{\substack{p' \dots n_s \dots \\ p' \dots n_s + 1 \dots}} = \\ = \frac{1}{\Omega} \sum_i e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p + f) R_i^0} \langle \mu, m_i | A_1 I + B_1 (K_1 S) | \mu', m_i' \rangle \times \\ \times \frac{i}{\hbar} e_s (p' - p) \sqrt{\frac{(n_s + 1) \hbar}{2MN\omega_s}} e^{-W}. \quad (27.3)$$

Чтобы найти дифференциальное сечение рассеяния нейтрона в телесном угле  $d\omega'$ , которое сопровождается излучением в телесном угле  $d\omega_f$  фонона с импульсом, лежащим в интервале  $(f, f + df)$ , нужно квадрат матричного элемента (27.3) умножить на  $\frac{m p' \Omega^3}{4\pi^2 \hbar^4 v} d\omega' \frac{j^2 d/d\omega_f}{(2\pi\hbar)^3}$ .

Далее необходимо, так же как и при вычислении сечения упругого рассеяния, усреднить полученное выражение по магнитным квантовым числам и возможным распределениям изотопов в решётке. Так как выражение (27.3) аналогично выражению для матричного элемента, определяющего упругое рассеяние, то при усреднении можно пользоваться полученными ранее результатами.

Дифференциальное сечение рассеяния с испусканием фонона, отнесённое к одному ядру, равняется:

$$d\sigma_s = \left\{ \pi^2 \sigma_0 \frac{p'}{p} \left( \frac{p'}{p} \right)^2 S \frac{|(p' - p) e_s|^2}{M \hbar \omega_s} (n_s + 1) e^{-2W} \times \right. \\ \times \delta \left( \frac{p' - p + f}{\hbar} - 2\pi\tau \right) + \\ \left. + \frac{p'}{p} \frac{m^2}{8\pi^2 \hbar^4 \rho} \left[ \bar{A}^2 - \bar{A}'^2 + \frac{1}{4} B^2 j(j+1) \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{|(p' - p) e_s|^2}{M \hbar \omega_s} (n_s + 1) e^{-2W} \right\} \cdot \frac{j^2 d/d\omega' d\omega_f}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (27.4)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{\bar{A}^2 m^2}{\pi \hbar^4}.$$

При этом величина импульса нейтрона после столкновения определяется из закона сохранения энергии

$$\frac{p'^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} - \hbar\omega_s. \quad (27.5)$$

Дифференциальное сечение рассеяния, при котором поглощается фонон с импульсом  $f$ , может быть получено из формулы (27.4), если заменить в последней  $n_s + 1$  на  $n_s$  и  $f$  на  $-f$ .

Это сечение имеет следующий вид:

$$d\sigma_{-} = \left\{ \pi^2 \sigma_0 \frac{p'}{p} \left( \frac{p'}{p} \right)^2 S \frac{|(p' - p) e_s|^2}{M \hbar \omega_s} n_s e^{-2W} \times \right. \\ \times \delta \left( \frac{p' - p - f}{\hbar} - 2\pi\tau \right) + \frac{m^2}{8\pi^2 \hbar^4 \rho} \left( \bar{A}^2 - \bar{A}'^2 + \frac{1}{4} B^2 j(j+1) \right) \times \\ \left. \times \frac{|(p' - p) e_s|^2}{M \hbar \omega_s} n_s e^{-2W} \right\} \frac{j^2 d\omega' d\omega_f}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (27.6)$$

Первое слагаемое в (27.4) и (27.6) даёт резкие максимумы интенсивности рассеянных нейтронов, определяемые соответственно условиями

$$p' - p + f = 2\pi\hbar\tau, \quad (27.7)$$

$$p' - p - f = 2\pi\hbar\tau. \quad (27.7')$$

Рассмотрим подробнее эти интерференционные условия.

Предполагая, что дисперсию фононов можно не учитывать, перепишем условие (27.7) и закон сохранения энергии (27.5) в виде

$$\frac{p^2 - p'^2}{2m} - sf = 0, \quad p' - p + f = 2\pi\hbar\tau, \quad (27.8)$$

где  $s$  — скорость звука.

Из (27.8) следует, что

$$\frac{1}{2} (v + v') (f - 2\pi\hbar\tau) = sf, \quad (27.8')$$

где  $v$  и  $v'$  — скорости нейтрона до и после рассеяния. Это соотношение показывает, что если считать  $\tau = 0$ ,

то при  $v < s$  условия (27.8) не могут одновременно выполняться.

Иными словами, при точном выполнении закона сохранения импульса испускание фононов нейтронами, скорость которых меньше скорости звука, невозможно в решётке с тождественными ядрами. Оно становится, однако, возможным, если  $\tau \neq 0$ . В этом заключается роль процессов «перевброса», при которых не соблюдается точно закон сохранения импульса.

Заметим, что поглощение фонона при  $v < s$  возможно, но при этом должно выполняться условие  $f \geq 2m(s-v)$ , которое часто противоречит тому, что  $f$  не должно превосходить некоторого ма-

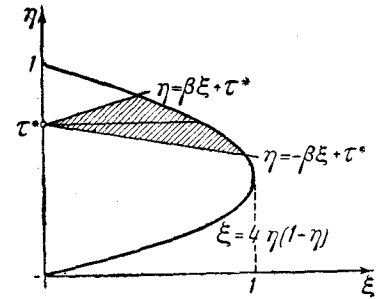


Рис. 12.

ксимального значения, определяемого из условия  $sf_0 = k\theta$  ( $\theta$  — температура Дебая).

Условия (27.8) допускают наглядную геометрическую интерпретацию. Если ввести переменную  $x = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|$ , то из (27.8) следуют неравенства

$$\left. \begin{aligned} x + f &\geq 2\pi\hbar\tau, & |x - f| &\leq 2\pi\hbar\tau, \\ x &\leq p + \sqrt{p^2 - 2msf}, & x &\geq p - \sqrt{p^2 - 2msf}. \end{aligned} \right\} (27.9)$$

Этими неравенствами определяется некоторая область допустимых значений  $x$  и  $f$ , которая изображена на рис. 12 в виде заштрихованной площади.

В качестве переменных на рис. 12 приняты:

$$\xi = \frac{sf}{p^2/2m}, \quad \eta = \frac{x}{2p}, \quad \tau^* = \frac{\pi\hbar\tau}{p}$$

$$\left( \beta = \frac{1}{4} \frac{v}{s} \right).$$

Если при заданном импульсе нейтрона (т. е. при заданной величине  $\beta$ ) увеличивать  $\tau^*$ , то заштрихованная площадь будет уменьшаться и при некотором значении  $\tau^*$  вовсе исчезнет. Это максимально допустимое значение  $\tau^*$  определяется, очевидно, из того условия, что прямая, угловой коэффициент которой равен  $-\beta$ , будет касаться параболы  $\xi = 4(\eta - \eta^2)$ . Точка пересечения касательной с осью  $\eta$  и даёт максимально возможное  $\tau^*$  как функцию  $\beta$ .

Легко убедиться в том, что если  $\beta \leq \frac{1}{4}$ , т. е. если  $v \leq s$ , то максимально возможное значение  $\tau^*$  равняется единице; иными словами, если  $v < s$ , то при неупругом рассеянии, сопровождающемся испусканием фонона, возможные значения  $\tau$ , так же как и при упругом рассеянии, не превосходят  $\hbar/\pi$ .

Если  $v > s$ , то максимально возможное значение  $\tau^*$  равняется:

$$\tau_{\max}^*(v) = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{v}{s} \right) \left( 1 + \frac{s}{v} \right), \quad v > s. \quad (27.10)$$

Пусть  $v < s$ ; если при этом импульс нейтрона меньше  $\pi\hbar\tau_{\min}$ , то неупругое интерференционное рассеяние с испусканием фонона становится невозможным\*). В этих условиях неупругое рассеяние является некогерентным и обуславливается только наличием изотопов и механических моментов ядер и определяется вторым слагаемым формулы (27.4). В случае тождественных ядер, не имеющих спина, рассматриваемое рассеяние отсутствует.

Рассмотрим прежде всего рассеяние, описываемое вторым слагаемым формулы (27.4). Определим дифференциальное сечение рассеяния, при котором энергия нейтрона попадает в интервал  $dE'$ .

Интегрируя второе слагаемое (27.4) по направлениям импульса испущенного фонона и суммируя по

\*) Это рассеяние можно назвать также неупругим некогерентным рассеянием.

состояниям его поляризации, получим:

$$d\sigma_+ = \frac{m^2}{16\pi^4\hbar^2\nu} \frac{p'}{p} \left( \overline{A^2} - \overline{A^2} + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)} \right) \times \\ \times \frac{(p' - p)^2}{Ms^2} \hbar\omega \cdot d(\hbar\omega) d\omega' \left( 1 + \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \right) e^{-2W}, \quad (27.11)$$

где  $d\omega'$  — элемент телесного угла, в котором находится импульс рассеянного нейтрона  $p'$ ,  $\hbar\omega = \frac{p^2 - p'^2}{2m}$ .

При выводе формулы (27.11) мы не учитывали дисперсии фононов и пренебрегли анизотропией скорости распространения колебаний. Если различать скорости продольных и поперечных колебаний, которые мы обозначим соответственно через  $s_l$  и  $s_t$ , то в полученных выше формулах величину  $s^{-2}$  следует заменить на  $\frac{1}{3} (s_l^{-2} + 2s_t^{-2})$ .

Проинтегрируем (27.11) по углам  $d\omega'$ . Не учитывая теплового фактора, мы получим следующее выражение для отнесённого к одному ядру дифференциального сечения рассеяния нейтрона с потерей энергии между  $E - E'$  и  $E - E' - dE'$ :

$$d\sigma_+ = \frac{m^2}{2\pi^3\hbar^4} \left[ \overline{A^2} - \overline{A^2} + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)} \right] \times \\ \times \sqrt{\frac{2m}{M}} \sqrt{\frac{E'}{Ms^2} \frac{E^2 - E'^2}{\hbar^2 s^2 \nu p}} (n_\omega + 1) dE' \quad (27.12)$$

( $n_\omega$  — планковская функция).

Умножив  $d\sigma_+$  на  $\nu p$ , найдём вероятность того, что энергия нейтрона в результате рассеяния в кристалле попадёт в интервал  $E', E' - dE'$ .

Выражение (27.12) показывает, что вероятность неупругого рассеяния растёт с увеличением потерянной энергии, так что главную роль при неупругом рассеянии играют переходы с большой потерей энергии, порядка начальной энергии нейтрона.

Заменив в формуле (27.12)  $n_\omega + 1$  на  $n_\omega$  и  $E^2 - E'^2$  на  $E'^2 - E^2$ , получим выражение для сечения поглоще-

ния фонона, энергия которого заключена в интервале  $(E' - E, E' - E + dE')$ . Обозначая это сечение через  $d\sigma_-$ , получим:

$$d\sigma_- = \frac{m^2}{2\pi^3\hbar^4} \left( \overline{A^2} - \overline{A^2} + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)} \right) \times \\ \times \sqrt{\frac{2m}{M}} \sqrt{\frac{E'}{Ms^2} \frac{E'^2 - E^2}{\hbar^2 s^2 \nu p}} n_\omega dE'. \quad (27.13)$$

В случае достаточно низких температур ( $T \ll \theta$ ,  $\theta$  — температура Дебая) в выражении для  $d\sigma_+$  можно пренебречь  $n_\omega$ , так как при  $T \ll \theta$

$$n_\omega = \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \ll 1.$$

Интегральное сечение неупругого рассеяния нейтрона с испусканием одного фонона в области малых энергий нейтрона, когда  $E < \theta$  (см. конец этого параграфа), при достаточно низких температурах ( $T \ll \theta$ ) определяется следующей формулой:

$$\sigma_+ = \frac{8}{7} \frac{m}{M} \left( \frac{E}{\theta} \right)^3 \frac{m^2}{\pi\hbar^4} \left( \overline{A^2} - \overline{A^2} + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)} \right). \quad (27.14)$$

Температура Дебая определяется здесь следующим образом:  $\theta = (6\pi^2)^{1/3} \hbar s p^{1/3}$ .

Мы видим, что при  $E < \theta$  вероятность неупругого рассеяния быстро растёт с возрастанием энергии нейтрона.

Подчеркнём ещё раз, что формула (27.14) относится к случаю очень малых энергий нейтрона, когда  $v < s$  и  $v < \frac{\pi\hbar c_{\min}}{m}$ . Напомним, что в этом случае сечение упругого рассеяния равняется [см. (26.25)]:

$$\sigma_s = \frac{m^2}{\pi\hbar^4} \left( \overline{A^2} - \overline{A^2} + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)} \right).$$

Отношение обоих сечений равно:

$$\frac{\sigma_+}{\sigma_s} = \frac{8}{7} \frac{m}{M} \left( \frac{E}{\theta} \right)^3. \quad (27.15)$$

Оно значительно меньше единицы.



Выясним теперь, как ведёт себя сечение неупругого рассеяния при увеличении энергии нейтрона.

Ясно, что, начиная с некоторого значения энергии нейтрона, в общем выражении (27.4), определяющем  $d\sigma_+$ , начинает играть роль первое слагаемое, описывающее неупругое когерентное рассеяние. Оно даёт резкие максимумы при выполнении интерференционных условий  $p' - p + f = 2\pi\hbar\tau$ . Это рассеяние отсутствует, если  $v < s$  и  $v < \frac{\pi\hbar\tau_{\min}}{m}$ .

Если  $\pi\hbar\tau_{\min} < ms$ , то интерференционное рассеяние начинается при скорости нейтрона, равной  $v_0 = \frac{\pi\hbar\tau_{\min}}{m}$ , причём вначале возможно лишь одно значение  $\tau$ , равное  $\tau_{\min}$ . При увеличении скорости  $v$  от  $v_0$  до  $s$  постепенно включаются другие значения  $\tau$ .

Если решётка такова, что  $ms < \pi\hbar\tau_{\min}$ , то интерференционное рассеяние начинается при скорости нейтрона, равной скорости звука. В этом случае вначале возможно только значение  $\tau = 0$ , отвечающее точному выполнению закона сохранения импульса в решётке. Процессы переброса становятся возможными при скоростях нейтрона  $v > s$ . Значение  $v$ , при котором допускается значение  $\tau_{\min}$ , определяется из уравнения

$$\tau_{\max}^*(v) = \tau_{\min}^*, \quad (27.16)$$

где  $\tau_{\max}^*(v)$  определяется формулой (27.10).

Для получения полного сечения неупругого рассеяния с испусканием одного фонона нужно проинтегрировать (27.4) по  $df d\sigma' d\sigma_j$  и просуммировать первое слагаемое по всем допустимым значениям вектора обратной решётки  $\tau$ .

Чтобы не усложнять формул, приведём результат для случая простой решётки ( $\rho' = \rho$ ,  $S = 1$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_+ = & \frac{1}{4} \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{v}{s}\right)^2 \sum_{\tau^*}^{\tau^* \leq \tau_{\max}^*(v)} \frac{1}{\tau^*} \int (n_{\omega} + 1) e^{-2W} \eta^2 d\eta d\mathbf{k} + \\ & + \frac{8}{7} \frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta}\right)^3 \left(\overline{A^2} - \overline{A^2} + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)}\right) \frac{m^2}{\pi\hbar^4}. \end{aligned} \quad (27.17)$$

Если  $v < 4s$ , то при интегрировании по  $\eta$  можно заменить подынтегральную функцию в первом слагаемом её значением при  $\eta = \tau^*$  и считать интервал изменения  $\eta$  равным  $2\beta\xi$ . В этом случае формула (27.17) приобретает вид

$$\begin{aligned} \sigma_+ = & \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{p}{ms}\right)^3 \sum_{\tau^*}^{\tau^* \leq 1} \left[ \tau^{*3} (1 - \tau^*)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \tau^{*2} \left(\frac{T}{E}\right)^2 \int_0^{4\tau^*(1-\tau^*)\frac{E}{T}} \frac{z dz}{e^2 - 1} \right] e^{-2W\tau} + \\ & + \frac{8}{7} \frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta}\right)^3 \left[ \overline{A^2} - \overline{A^2} + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)} \right] \frac{m^2}{\pi\hbar^4}, \end{aligned} \quad (27.18)$$

где

$$W\tau = 12 \frac{m}{M} \frac{E}{\theta} \tau^{*2} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{T}{\theta} D\left(\frac{\theta}{T}\right) \right\}.$$

Если длина волны нейтрона значительно меньше постоянной решётки  $a$ , т. е. если выполняется условие  $ak \gg 1$ , то сумма, входящая в (27.18), содержит большое число слагаемых. В этом случае суммирование может быть заменено интегрированием по  $\frac{4\pi a^3 p^3}{(\pi\hbar)^3} \tau^{*2} d\tau^*$ . (Отметим, что этот случай имеет место для тепловых нейтронов при комнатных температурах.)

Пренебрегая тепловым фактором, мы получим в результате:

$$\frac{\sigma_+}{\sigma_s} = \frac{8}{7} \frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta}\right)^3, \quad (27.19)$$

где  $\sigma_s$  — сечение упругого рассеяния нейтронов при условии  $ak \gg 1$ , определяемое по формуле

$$\begin{aligned} \sigma_s = & \sigma_0 + \frac{m^2}{\pi\hbar^4} \left[ \overline{A^2} - \overline{A^2} + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)} \right] = \\ = & \frac{m^2}{\pi\hbar^4} \left( \overline{A^2} + \frac{1}{4} \overline{B^2 j(j+1)} \right). \end{aligned} \quad (27.19')$$

Сравнивая выражения (27.19) и (27.15), мы видим, что отношение сечений неупругого и упругого рассеяния при достаточно больших значениях  $k$  ( $ka \gg 1$ ) имеет такой же вид, как и при рассеянии очень медленных нейтронов ( $k < \pi \tau_{\min}$ ) в решётке с отличающимися ядрами (отличие вызывается только наличием изотопов и механических моментов ядер) [103].

При выполнении условия  $ka \gg 1$  рассеяние нейтронов в решётках с тождественными и отличающимися (в указанном смысле) ядрами происходит одинаково. Это обстоятельство легко понять, если заметить, что при достаточно больших  $k$  играет роль большое число возможных значений  $\tau$ , в силу чего суммирование по  $\tau$  может быть заменено интегрированием. Благодаря этому исчезают  $\delta$ -функции от импульсов.

Таким образом при  $ka \gg 1$  учёт всех возможных процессов переброса приводит к полному устранению интерференционных условий, заменяющих закон сохранения импульса в решётке. Так как в решётке с не-тождественными ядрами также не выполняется закон сохранения импульса, то отсюда следует, что различие между обоими видами решёток при  $ka \gg 1$  не может иметь места.

Если выполняется условие  $ka \gg 1$ , то сечение неупругого рассеяния, сопровождающегося излучением одного фонона, может быть представлено при  $E < \theta$  в виде [103]

$$\sigma_+ = 24 \frac{m}{M} \sigma_s \left( \frac{E}{\theta} \right)^3 \int_0^1 \xi \left( 1 + \frac{1}{e^{E\xi/T} - 1} \right) d\xi \times \\ \times \int_{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-\xi})}^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-\xi})} \eta^3 e^{-\omega\eta^2} d\eta, \quad (27.20)$$

где

$$W = 24 \frac{m}{M} \frac{E}{\theta} \left[ \frac{1}{4} + \frac{T}{\theta} D \left( \frac{\theta}{T} \right) \right],$$

а  $\sigma_s$  определяется формулой (27.19'). Не учитывая тепловой фактор, получим:

$$\sigma_+ = 3 \frac{m}{M} \sigma_s \left( \frac{E}{\theta} \right)^3 \int_0^1 (2-z) \sqrt{1-z} \left( 1 + \frac{1}{e^{\frac{zE}{T}} - 1} \right) z dz. \quad (27.21)$$

Из (27.21) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \sigma_+ &\approx \frac{m}{M} \sigma_s \left( \frac{E}{\theta} \right)^3 \left\{ \frac{8}{7} + \pi^2 \left( \frac{T}{E} \right)^2 \right\} \\ &\quad \text{при } T \ll E \ll \theta, \\ \sigma_+ &\approx \frac{m}{M} \sigma_s \left( \frac{E}{\theta} \right)^3 \left\{ \frac{8}{7} + \frac{16}{5} \frac{T}{E} \right\} \\ &\quad \text{при } T \gg E, E \ll \theta. \end{aligned} \right\} \quad (27.22)$$

Сечение неупругого рассеяния нейтронов с поглощением одного фонона при выполнении условия  $ka \gg 1$  имеет вид (мы пренебрегаем тепловым фактором)

$$\sigma_- = 3 \frac{m}{M} \sigma_s \frac{E}{\theta} \left( \frac{T}{\theta} \right)^2 \times \\ \times \int_0^{\theta/T} \frac{\left( 2 + \frac{T}{E} z \right) \sqrt{1 + \frac{T}{E} z} z dz}{e^z - 1}. \quad (27.23)$$

Если  $\theta \gg E \gg T$ , то

$$\sigma_- = \pi^2 \frac{m}{M} \sigma_s \frac{E}{\theta} \left( \frac{T}{\theta} \right)^2, \quad (27.24)$$

Если  $E \ll T \ll \theta$ , то

$$\sigma_- = 3\Gamma \left( \frac{7}{2} \right) \frac{m}{M} \sigma_s \sqrt{\frac{T}{E}} \left( \frac{T}{\theta} \right)^3, \quad (27.25)$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция. Если  $T \gg \theta \gg E$ , то

$$\sigma_- = \frac{6}{5} \frac{m}{M} \sigma_s \frac{T}{\theta} \sqrt{\frac{\theta}{E}}. \quad (27.26)$$

Приведём ещё формулу для изменения энергии нейтрона на единице пути:

$$-\frac{dE}{dx} = N \sum_{\tau} \int \hbar\omega (d\sigma_+ - d\sigma_-), \quad (27.27)$$

где  $N$  — число ядер в единице объёма.

Предполагая выполненным условие  $ak \gg 1$  (при этом суммирование по  $\tau$  можно заменить интегрированием) и пренебрегая тепловым фактором, получим:

$$-\frac{dE}{dx} = 3 \frac{m}{M} \sigma_s \left(\frac{E}{\theta}\right)^4 \theta N \times \\ \times \left\{ \int_0^1 (2-\xi) \sqrt{1-\xi} \left(\frac{1}{e^{\frac{E\xi}{T}} - 1}\right) \xi^2 d\xi - \right. \\ \left. - \int_0^{E/\theta} \frac{(2+\xi) \sqrt{1+\xi} \xi^2 d\xi}{e^{\frac{E\xi}{T}} - 1} \right\}. \quad (27.28)$$

Если  $\theta \gg E \gg T$ , то

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{64}{105} \frac{m}{M} \sigma_s \left(\frac{E}{\theta}\right)^4 \theta N; \quad (27.29)$$

если  $E \ll \theta \ll T$ , то

$$-\frac{dE}{dx} = -\frac{2}{7} \frac{m}{M} \sigma_s \sqrt{\frac{\theta}{E}} TN. \quad (27.30)$$

Однофононные процессы, которые мы до сих пор рассматривали, дают первый член в разложении сечения неупругого сечения в ряд по степеням энергии нейтрона. Учёт двухфононных процессов даёт сечение, пропорциональное  $\left(\frac{m}{M}\right)^2 \left(\frac{E}{\theta}\right)^6$ .

В самом деле, вероятность двухфононных процессов отличается от вероятности однофононных процессов множителем

$$\frac{|(p' - p) e|^2}{\hbar^2} \frac{\hbar}{2MN\omega},$$

получаемым при разложении  $e^{\frac{i}{\hbar}(p''-p)u}$  в ряд по степеням  $u$ . Среднее значение этого множителя по порядку величины при  $E < \theta$  и  $T < \theta$  равно:

$$\frac{p^2}{M\hbar} \int_0^{E/\hbar} \frac{\omega d\omega}{s^3} \frac{\Omega}{N} \approx \frac{E^3 m \Omega}{MN s^3 \hbar^3} \approx \frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta}\right)^3$$

( $s$  — скорость звука).

Таким образом речь идёт о разложении в ряд по степеням  $\frac{m}{M} (E/\theta)^3$ .

Мы можем ограничиться рассмотрением однофононных процессов только в том случае, если выполняется условие

$$\frac{m}{M} \left(\frac{E}{\theta}\right)^3 \ll 1. \quad (27.31)$$

§ 28. Переход к рассеянию свободными ядрами. Перейдём теперь к выводу общей формулы для эффективного сечения рассеяния нейтронов в кристаллах с учётом поглощения и испускания любого числа фононов.

Для определённости будем считать решётку состоящей из тождественных ядер. Пусть попрежнему  $p$  и  $p'$  — значения импульса нейтрона до и после рассеяния,  $n_1^0, n_2^0, \dots$  и  $n_1, n_2, \dots$  — совокупности чисел фононов в начальном и конечном состояниях решётки.

Интересующая нас вероятность перехода имеет, очевидно, следующий вид:

$$\omega = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{A}{\Omega}\right)^2 \times \\ \times \left| \sum_{n_1 n_2 \dots} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)R_l^0} (n_1^0, n_2^0, \dots | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_l} | n_1, n_2, \dots) \right|^2 \times \\ \times \delta \left( E' + \sum_s (n_s - n_s^0) \hbar \omega_s - E \right). \quad (28.1)$$

Входящий сюда матричный элемент можно представить в виде

$$(n_1^0, n_2^0, \dots | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_l} | n_1, n_2, \dots) =$$

$$= \prod_s (n_s^0 | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)u_{ls}} | n_s) \equiv \prod_s M_{n_s^0 n_s},$$

где

$$u_{ls} = e_s (\xi_s e^{\frac{i}{\hbar} f R_l^0} + \xi_s^* e^{-\frac{i}{\hbar} f R_l^0}).$$

Вспоминая, что матричные элементы  $\xi_s$  и  $\xi_s^*$  содержат множителем  $N^{-1/2}$ , мы можем ограничиться рассмотрением только тех случаев, когда  $n_s$  отличается от  $n_s^0$  не больше чем на единицу. Вводя для краткости обозначение

$$q_s^2 = \frac{|(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{e}_s|^2}{2MN\hbar\omega_s},$$

имеем с точностью до  $N^{-1}$  [см. (25.4) и (25.5)]:

$$\begin{aligned} |M_{n_s^0, n_s^0}|^2 &= 1 - (2n_s^0 + 1) q_s^2, \\ |M_{n_s^0, n_s^0+1}|^2 &= (n_s^0 + 1) q_s^2, \\ |M_{n_s^0, n_s^0-1}|^2 &= n_s^0 q_s^2. \end{aligned}$$

Замечая, что  $\delta$ -функция может быть представлена в виде

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\eta x} d\eta$$

и переходя от вероятности  $w$  к дифференциальному сечению  $d\sigma$ , отнесённому к одному ядру, получим:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\sigma_0}{8\pi^2} \frac{p'}{p} d\omega' dE' \times \\ &\times \int \left\{ \frac{1}{N} \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{R}_l^0} \right|^2 \prod_s [1 - (2n_s + 1) q_s^2] + \right. \\ &+ \sum_s \frac{1}{N} \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{f}) \mathbf{R}_l^0} \right|^2 (n_s + 1) q_s^2 e^{i\mu\hbar\omega_s} + \\ &+ \sum_s \frac{1}{N} \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{f}) \mathbf{R}_l^0} \right|^2 n_s q_s^2 e^{-i\mu\hbar\omega_s} + \\ &+ \sum_s \sum_{s'} \frac{1}{N} \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{f} + \mathbf{f}') \mathbf{R}_l^0} \right|^2 \times \\ &\times (n_s + 1)(n_{s'} + 1) q_s^2 q_{s'}^2 e^{i\mu(\hbar\omega_s + \hbar\omega_{s'})} + \dots \left. \right\} \times \\ &\times e^{i\mu(E' - E)} d\mu, \quad (28.2) \end{aligned}$$

где  $d\omega'$  — элемент телесного угла импульса  $\mathbf{p}'$ ,  $dE'$  — интервал энергии, в который попадает в результате рассеяния нейтрон. Ради простоты из многофононных процессов здесь выписан только один член, отвечающий возникновению двух фононов  $f$  и  $f'$ .

Входящие сюда  $\sum_l$  дают  $\delta$ -функции от импульса;

однако, если энергия нейтрона достаточно велика, а нас интересует именно этот случай, то, как мы видели выше, эти  $\delta$ -функции можно вовсе не учитывать. Поэтому, пренебрегая всеми степенями  $q_s^2$  выше первой, получим:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{p'}{p} \frac{\sigma_0}{8\pi^2} d\omega' dE' \int e^{i\mu(E' - E)} \times \\ &\times \left\{ 1 - \sum_s [(2n_s + 1) q_s^2 - (n_s + 1) q_s^2 e^{i\mu\hbar\omega_s} - n_s q_s^2 e^{-i\mu\hbar\omega_s}] \right\} d\mu. \end{aligned}$$

Учитывая малость  $q_s^2$ , можно представить  $d\sigma$  в виде

$$d\sigma = \frac{\sigma_0}{8\pi^2} d\omega' dE' \frac{p'}{p} \int e^{i\mu(E' - E) + \theta(\mu)} d\mu, \quad (28.3)$$

где

$$g(\mu) = \sum_s \left\{ (n_s + 1) e^{i\mu\hbar\omega_s} + n_s e^{-i\mu\hbar\omega_s} - 2n_s - 1 \right\} q_s^2. \quad (28.3')$$

Вместо  $n_s$  мы должны, очевидно, подставить сюда планковскую функцию.

Напомним, что эта же функция  $g(\mu)$  входит также в выражение для вероятности захвата нейтрона в кристалле [см. формулу (25.11)].

Выполнить интегрирование в формуле (28.3) в общем виде не представляется возможным. Поэтому мы, так же как и в § 25, ограничимся рассмотрением двух предельных случаев: «слабой» и «сильной» связи, для которых не существенна область значений  $\mu$ , лежащих вблизи  $\mu_0 = 1/\theta$  (см. § 25).

В первом из этих случаев — в случае «слабой» связи (малые  $\theta$ ) оказываются существенными малые  $|\mu|$ ,  $|\mu\theta| \ll 1$ .

В случае «сильной» связи (большие  $\theta$ ) существенной в интеграле (28.3), определяющем  $d\sigma$ , является область больших  $|\mu|$ ,  $|\mu\theta| \gg 1$  (ср. аналогичную ситуацию при рассмотрении захвата нейтронов в кристаллах).

Из формулы (25.14), определяющей  $g(\mu)$  при малых  $|\mu|$ , легко заключить, что область малых  $|\mu|$  будет существенной при выполнении условия

$$R\varepsilon_0 \gg \theta^2, \quad (28.4)$$

где

$$\varepsilon_0 = 3T \left( \frac{T}{\theta} \right)^3 \int_0^{\theta/T} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{e^z - 1} \right) z^3 dz$$

и  $R$  — энергия «отдачи» ядра, равная

$$R = \frac{(p' - p)^2}{2M}$$

(по порядку величины  $R$  равняется  $\frac{m}{M} E$ ).

В предельном случае высоких температур ( $T \gg \theta$ ) условие (28.4) может быть записано в виде

$$E \gg \frac{M}{m} \frac{\theta^2}{T}, \quad T \gg \theta. \quad (28.4')$$

При низких температурах ( $T \ll \theta$ ) условие (28.4) даёт:

$$E \gg \frac{M}{m} \theta, \quad T \ll \theta. \quad (28.4'')$$

При выполнении условия (28.4) эффективное сечение  $d\sigma$  имеет вид

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\sigma_0}{8\pi^2} dE' do' \frac{p'}{p} \int e^{i\mu(E' - E + R) - \mu^2 R\varepsilon_0} d\mu = \\ &= \frac{\sigma_0}{8\pi^2} \frac{do' dE'}{\sqrt{R\varepsilon_0}} e^{-\frac{1}{4} \frac{(E' - E + R)^2}{R\varepsilon_0}}. \end{aligned} \quad (28.5)$$

Полученное выражение можно приближённо заметить следующим:

$$d\sigma = \frac{\sigma_0}{4\pi} \frac{p'}{p} \delta(E' - E + R) do' dE'. \quad (28.6)$$

Смысл формулы (28.6) очевиден: нейтрон рассеивается по закону столкновения упругих шаров; связь атомов в кристалле не играет роли. Это и есть случай «слабой» связи, осуществляющейся при выполнении условия (28.4).

Формулу (28.6) мы имели уже ранее [см. (26.3)].

Мы видим, что в случае «слабой» связи сечение рассеяния в кристалле не отличается от сечения рассеяния отдельными ядрами.

Рассмотрим теперь случай «сильной» связи ( $\theta \rightarrow \infty$ ). Пользуясь асимптотической формулой (25.15') для  $g(\mu)$ , представим  $d\sigma$  в виде

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\sigma_0}{8\pi^2} \frac{p'}{p} do' dE' e^{-2W} \int e^{i\mu(E' - E)} d\mu = \\ &= \frac{\sigma_0}{4\pi} e^{-2W} \delta(E' - E) dE' do'. \end{aligned} \quad (28.7)$$

Мы получили формулу для сечения упругого рассеяния.

Проинтегрировав (28.7) по  $dE' do'$ , получим полное сечение упругого рассеяния, совпадающее с выведенным ранее выражением.

Таким образом в области малых энергий нейтрона  $E \ll \frac{M}{m} \theta$  имеет место, главным образом, упругое рассеяние ( $E' = E$ ).

Сечение упругого рассеяния мало отличается от  $\sigma_0$ , так как тепловой фактор практически равен единице.

С ростом энергии сечение упругого рассеяния уменьшается, и одновременно всё большую роль приобретает неупругое рассеяние, возникающее от следующих членов разложения  $\exp g(\mu)$  в ряд по степеням  $g(\mu)$  (§ 27). В области больших энергий ( $E \gg \frac{M}{m} \frac{\theta^2}{\varepsilon_0}$ ) чисто упру-

гое рассеяние ( $E' = E$ ) отсутствует; главную роль играет неупругое рассеяние, происходящее по законам

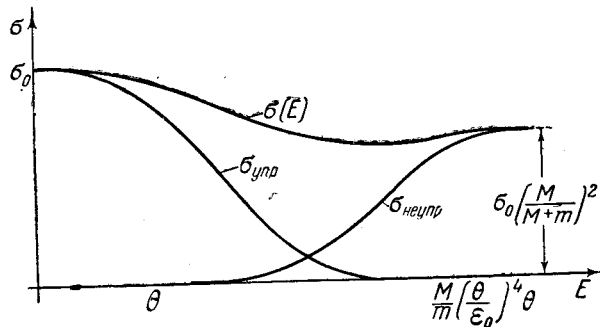


Рис. 13.

столкновения упругих шаров. (Неупругим мы его называем потому, что оно происходит с возбуждением тепловых колебаний решётки.)

С увеличением энергии нейтрона меняется характер неупругого рассеяния. В области малых энергий нейтрона при малом общем сечении неупругого рассеяния наиболее вероятны большие передачи энергии нейтрона, порядка всей его энергии. В области больших энергий, когда неупругое рассеяние составляет главную часть рассеяния, передаваемая энергия по порядку величины составляет  $\frac{m}{M} E$ .

На рис. 13 приведён схематически ход зависимости от энергии сечения рассеяния. Как видно из рисунка, полное сечение  $\sigma(E)$  может обладать минимумом при значении энергии, лежащем между  $\theta$  и  $\frac{M}{m} \frac{\theta^2}{\epsilon_0}$ .

**§ 29. Функция распределения нейтронов в кристаллах.** Остановимся ещё на вопросе о нахождении функции распределения нейтронов в кристалле, которую мы обозначим через  $f(E)$  [ $f(E) dE$  представляет собой число нейтронов в энергетическом интервале  $dE$ ].

Рассмотрим два предельных случая, когда  $E \gg \frac{M}{m} \frac{\theta^2}{\epsilon_0}$  и когда  $E \ll \frac{M}{m} \frac{\theta^2}{\epsilon_0}$  (обозначения см. в предыдущих параграфах).

В первом из этих случаев связь атомов в кристалле несущественна.

Вероятность того, что в результате одного столкновения нейтрон попадёт в энергетический интервал  $dE'$ , равняется:

$$dw = \frac{1}{1-\epsilon} \frac{dE'}{E},$$

где  $\epsilon = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2$  (энергия после столкновения заключена в интервале  $\epsilon E \leq E' \leq E$ ).

Составим уравнение, которому удовлетворяет функция  $f(E)$ .

Число нейтронов в интервале энергии  $dE$ , испытавших упругие столкновения в единицу времени, равняется:

$$f(E) dE \frac{v}{l_s},$$

где  $l_s$  — длина свободного пробега по отношению к рассеянию.

Число нейтронов, поглощаемых в единицу времени в этом интервале, равно:

$$f(E) dE \frac{v}{l_c},$$

где  $l_c$  — длина пробега по отношению к захвату.

Всего из интервала энергии  $dE$  уходит в единицу времени

$$f(E) dE \left( \frac{v}{l_s} + \frac{v}{l_c} \right) \quad (29.1)$$

нейтронов.

Определим число нейтронов, приходящих в интервал энергии  $dE$  из состояний с энергией  $E'$ ,  $E \leq E' \leq E/\epsilon$ .

Число нейтронов в интервале энергии  $dE'$ , испытывающих упругие столкновения, равно:

$$f(E') dE' \frac{v'}{l_s}$$

(штрих означает, что энергия равна  $E'$ ).

Из этих нейтронов в энергетический интервал  $dE$  попадает

$$\frac{1}{1-\varepsilon} f(E') dE' \frac{v'}{l_s} \frac{dE}{E'}$$

нейтронов. Интегрируя это выражение по  $E'$  в пределах от  $E$  до  $E/\varepsilon$ , найдём общее число нейтронов, попадающих в интервал энергии  $dE$ :

$$\frac{dE}{1-\varepsilon} \int_E^{E/\varepsilon} f(E') \frac{v'}{l_s} \frac{dE'}{E'} \quad (29.2)$$

Разность выражений (29.1) и (29.2) в стационарном состоянии должна равняться числу нейтронов, доставляемых источником в интервал энергии  $dE$ .

Если мы имеем дело с источником монохроматических нейтронов с энергией  $E_0$ , то последняя величина равна:

$$Q \delta(E - E_0) dE,$$

где  $Q$  — мощность источника, т. е. число нейтронов, доставляемых источником каждую секунду.

Итак, стационарная функция распределения  $f(E)$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$f(E) v \left( \frac{1}{l_s} + \frac{1}{l_c} \right) - \frac{1}{1-\varepsilon} \int_E^{E/\varepsilon} f(E') \frac{v'}{l_s(E')} \frac{dE'}{E'} = Q \delta(E - E_0). \quad (29.3)$$

Рассмотрим вначале тот случай, когда замедление нейтронов происходит в водороде либо в среде, содержащей водород в достаточно большой концентрации, так что можно не учитывать замедления нейтронов,

вызываемого неводородными атомами. Мы можем в этом случае положить  $\varepsilon$  равным нулю.

Вероятность того, что нейтрон с энергией  $E_0$  в результате одного столкновения с водородным атомом попадёт в энергетический интервал  $dE$ , равна:

$$\frac{dE}{E_0}, \quad 0 \leq E \leq E_0.$$

Поэтому число нейтронов, каждую секунду попадающих в результате одного столкновения в интервал  $dE$ , равняется  $Q \frac{dE}{E_0}$ . Учитывая это обстоятельство, мы можем переписать в рассматриваемом случае уравнение (29.3) в виде

$$f(E) \left( \frac{v}{l_s} + \frac{1}{\tau_c} \right) = \frac{Q}{E_0} + \int_E^{E_0} \frac{f(E')}{l_s(E')} v' \frac{dE'}{E'}, \quad (29.3')$$

( $\tau_c = l_c/v$  — время жизни нейтрона по отношению к захвату).

Решение уравнения (29.3') находится элементарно и имеет следующий вид [110]:

$$f(E) = \frac{Q/E_0}{v/l_s + \frac{1}{\tau_c}} \exp \int_E^{E_0} \frac{dE}{E} \frac{v}{v + \frac{l_s}{\tau_c}}. \quad (29.4)$$

Если захват отсутствует, что соответствует  $\tau_c = \infty$ , то решение уравнения (29.3') приобретает вид

$$f(E) dE = Q \frac{l_s(E)}{v} \frac{dE}{E}. \quad (29.4')$$

Решение общего уравнения (29.3) при  $\varepsilon \neq 0$  выглядит довольно сложно. Если захват мал, то в области энергий  $E \ll E_0$  решение этого уравнения выражается следующей формулой [111]:

$$f(E) dE = \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon} Q \frac{l_s(E)}{v} \frac{dE}{E}. \quad (29.5)$$

Рассмотрим теперь случай малых энергий нейтрона  $E \ll \theta$ , причём мы будем предполагать, что  $T \ll E$ . В этом случае можно не учитывать поглощения фононов.

Вероятность перехода нейтрона с энергией  $E$  в интервал энергии  $dE'$  выражается формулой

$$\omega(E, E') dE' = \omega_0 (E^2 - E'^2) \sqrt{E'} dE', \quad (29.6)$$

где

$$\omega_0 = \frac{c_0}{(2\pi\hbar)^3 s^2} \sqrt{\frac{2m}{M}} \frac{1}{\sqrt{Ms^2}}$$

( $s$  — скорость звука, см. § 27).

Составим кинетическое уравнение для определения функции распределения  $f(E)$ .

В стационарном случае это уравнение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega_0 \int_E^{E_0} (E'^2 - E^2) \sqrt{E'} f(E') dE' - \\ - \omega_0 \int_0^E (E^2 - E'^2) \sqrt{E'} f(E) dE' = \frac{1}{\tau_c} f(E). \end{aligned} \quad (29.7)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой число нейтронов, приходящих в состояние с энергией  $E$  из состояний с энергией  $E' > E$  (предполагается, что энергия нейтронов, испускаемых источником, значительно больше  $\theta$ ); второе слагаемое даёт число нейтронов, уходящих из состояния с энергией  $E$  в состояния с энергией  $E' < E$ .

Справа стоит число нейтронов, поглощаемых ядрами в единицу времени. Напомним, что величину  $\tau_c$  в случае медленных нейтронов можно считать не зависящей от энергии нейтрона, если только в тепловой области нет резонансных уровней, так как в этом случае сечение захвата обратно пропорционально скорости нейтрона.

Выполнив интегрирование во втором слагаемом, представим кинетическое уравнение (29.7) в виде

$$\int_E^{E_0} (E'^2 - E^2) f(E') dE' = \left( \frac{8}{21} E^{7/2} + \frac{1}{\omega_0 \tau_c} \right) E^{-1/2} f(E). \quad (29.8)$$

Вводя обозначение

$$\int_E^{E_0} f(E) dE = \varphi(E)$$

и дифференцируя (29.8) по  $E$ , получим:

$$\frac{d}{dE} \left\{ E^{-1/2} \left( \frac{8}{21} E^{7/2} + \frac{1}{\omega_0 \tau_c} \right) \frac{d\varphi}{dE} \right\} = 2E\varphi(E). \quad (29.9)$$

Если ввести вместо  $E$  новую переменную  $x$ , равную

$$x = \frac{E}{E_0}, \quad E_0 = \left( \frac{21}{8} \frac{1}{\omega_0 \tau_c} \right)^{2/7},$$

то уравнение (29.9) примет вид

$$\frac{d}{dx} \left\{ (x^3 + x^{-1/2}) \frac{d\psi}{dx} \right\} = \frac{21}{4} x\psi(x), \quad (29.10)$$

где

$$\psi(x) \equiv \varphi(E).$$

(При  $x=1$  вероятность неупругого рассеяния равна вероятности захвата.)

Уравнение (29.10) имеет частное решение  $\psi = x^{3/2}$ ; поэтому общее решение этого уравнения ищем в виде

$$\psi = x^{3/2} y(x).$$

Функция  $y$  удовлетворяет уравнению

$$(x + x^{7/2}) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( 6x^{7/2} + \frac{5}{2} \right) \frac{dy}{dx} = 0,$$

которое легко интегрируется.



В результате простых выкладок получаем следующее выражение для  $\psi(x)$ :

$$\psi(x) = C \left\{ 1 - \frac{3}{7} x^{3/2} \sum_{k=1}^7 \omega^{4k} \ln(\sqrt{x} + \omega^k) \right\},$$

где  $\omega = e^{2\pi i/7}$ . Постоянная  $C$  представляет собой число нейтронов с энергией  $E \geq 0$ . Она равна

$$C = Q\tau_c.$$

Функция распределения  $f(E)$  находится дифференцированием  $\psi(x)$ :

$$f(x) = C \left\{ \frac{9}{14} x^{1/2} \sum_{k=1}^7 \omega^{4k} \ln \left( 1 + \frac{\omega^k}{\sqrt{x}} \right) - \frac{3}{2} \frac{x^{5/2}}{1 + x^{7/2}} \right\}. \quad (29.11)$$

Приведём асимптотические выражения для  $f(x)$ .

Если  $x \ll 1$ , что соответствует энергиям нейтронов, меньшим чем

$$E_0 = \left( \frac{21}{8} \right)^{2/7} \left( \frac{M}{2m} \right)^{1/7} (Ms^2)^{1/7} \left( \frac{s^2 h^3}{\sigma_0 \tau_c} \right)^{2/7}, \quad (29.12)$$

то

$$f(x) \approx 2,1 C x^{1/2}. \quad (29.13)$$

Таким образом, при  $x \ll 1$  функция распределения пропорциональна  $\sqrt{E}$ . Этот результат непосредственно следует из уравнения (29.7), в котором при малых энергиях ( $E \ll E_0$ ), когда неупругое рассеяние не играет существенной роли, можно пренебречь вторым членом, дающим число нейтронов, уходящих из состояния с энергией  $E$  в состояние с энергией  $E' < E$ . Так как первый член, дающий число нейтронов, входящих в состояние  $E$  из состояний с большей энергией, пропорционален  $\sqrt{E}$ , то функция распределения, равная числу таких нейтронов, разделенному на вероятность захвата (не зависящую от энергии), оказывается

пропорциональной  $\sqrt{E}$  в соответствии с формулой (29.13).

Если  $x \gg 1$ , то

$$f(x) = \frac{21}{20} C x^{-9/2}. \quad (29.14)$$

Зависимость функции распределения от энергии при  $x \gg 1$  может быть получена элементарно из рассмотрения потока нейтронов в энергетическом пространстве. Так как при  $x \gg 1$  захват мал, то должен сохраняться поток частиц в энергетическом пространстве, равный

$$f(E) \dot{E} = \text{const.}$$

Изменение энергии нейтрона в единицу времени по порядку величины равно:

$$\dot{E} \approx E \sigma_+ v N,$$

где  $\sigma_+$  — сечение неупругого рассеяния. Вспоминая, что

$$\sigma_+ \sim E^3,$$

получаем:

$$\dot{E} \sim E^{9/2},$$

и поэтому

$$f(E) \sim E^{-9/2}.$$

Заметим, что приведённая формула для потока справедлива только по порядку величины; она была бы точной при малых передачах энергии, в действительности же передаваемая нейтроном энергия порядка  $E$ . Поэтому приведённый вывод имеет, главным образом, качественный характер.

Приведём выражение для средней энергии нейтрона

$$\bar{E} = 0,69 \left( \frac{21}{8} \sqrt{\frac{M}{2m}} \frac{h^3 s^2}{\sigma_0} \frac{\sqrt{Ms^2}}{\tau_c} \right)^{2/7}. \quad (29.15)$$

По порядку величины  $\bar{E}$  равно энергии  $E_0$ , при которой вероятность неупругого рассеяния становится

равной вероятности захвата. Этому соответствует то обстоятельство, что нейтроны эффективно замедляются только до энергий порядка  $E_0$ , которыми и обладает наибольшее количество частиц.

С увеличением сечения захвата (уменьшением  $\tau_0$ ) средняя энергия  $\bar{E}$  медленно растёт (пропорционально  $\tau_0^{-2/3}$ ) в соответствии с тем, что вероятность захвата

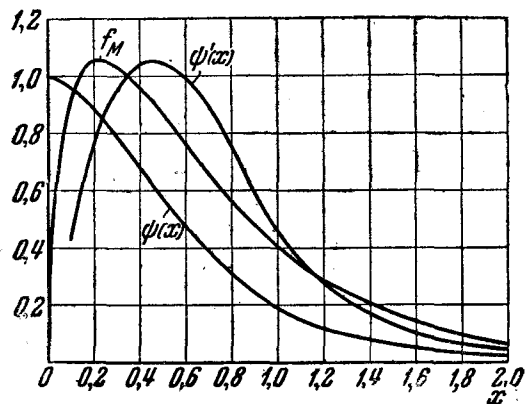


Рис. 14.

сравнивается с вероятностью неупругого рассеяния при больших энергиях.

На рис. 14 показан ход функций  $\psi(x)$ ,  $\psi'(x)$  и  $f(x)$ .

Для сравнения приведена также кривая, изображающая максвелловское распределение с той же средней энергией (кривая  $f_M$ ).

**§ 30. Рефракция нейтронов.** В § 26 мы видели, что в решётках с тождественными ядрами, не имеющими механических моментов, не может происходить рассеяние нейтронов с длиной волны, удовлетворяющей неравенству  $\lambda > (\pi\tau_{\min})^{-1}$ .

Однако при прохождении таких нейтронов из одной среды в другую они могут испытывать преломление и отражение. Эти явления можно описать макроскопически, вводя коэффициент преломления нейтро-

нов  $n$ . Такое макроскопическое рассмотрение законно в том случае (так же, как в оптике), когда длина волны нейтронов больше, чем расстояние между соседними атомами.

Предполагая это условие выполненным, мы выведем здесь выражение для коэффициента преломления  $n$ .

Напомним предварительно, что энергия взаимодействия достаточно медленного нейтрона с ядром может быть представлена в виде

$$A\delta(r-R), \quad (30.1)$$

где  $r$  и  $R$  — радиусы-векторы, определяющие положение нейтрона и ядра, и  $A$  — некоторая константа, не зависящая от расстояния между частицами.

Выше (§ 26) мы пользовались этим выражением при определении сечения упругого рассеяния нейтронов и связали значение константы  $A$ , предполагавшейся нами вещественной, с величиной сечения упругого рассеяния нейтронов. В этом параграфе мы будем учитывать, наряду с упругим рассеянием, также и радиационный захват нейтронов. При этом, как видно из дальнейшего, необходимо считать величину  $A$  комплексной (см. § 12).

Мы покажем сейчас, как связана эта величина с сечениями упругого рассеяния и захвата нейтронов.

Установим для этого связь между величиной  $A$  и комплексной фазой рассеяния  $\eta_0$ , определяющей асимптотическое поведение волновой функции нейтрона (мы рассматриваем, естественно, только  $S$ -волну, поэтому величина  $\eta$  снабжена индексом нуль, см. § 12).

Будем предполагать, что модуль фазы рассеяния  $\eta_0$  мал по сравнению с единицей; это значит, что сечения рассеяния и захвата предполагаются малыми по сравнению с  $\pi\lambda^2$  (последнее условие выполняется во всех практически интересных случаях).

Известно, что если модуль фазы  $\eta_0$  мал, то фаза может быть представлена в виде

$$\eta_0 = \eta^{(r)} + i\eta^{(i)} = -\frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r) |f_0(r)|^2 r^2 dr, \quad (30.2)$$

где  $m$  — масса нейтрона,  $k$  — его волновой вектор и

$$f_0 = \frac{\sin kr}{kr}.$$

Подставляя в качестве  $V(\mathbf{r})$  в (30.2)

$$A\delta(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{A}{4\pi r^2} \delta(r), \quad (30.3)$$

получим:

$$\eta_0 = -\frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^\infty \frac{A}{4\pi r^2} \delta(r) \left(\frac{\sin kr}{kr}\right)^2 r^2 dr = -\frac{Amk}{2\pi\hbar^2}. \quad (30.4)$$

Сечения рассеяния и захвата нейтронов  $\sigma_s$  и  $\sigma_c$  выражаются через  $\eta^{(r)}$  и  $\eta^{(i)}$  следующим образом (см. § 12):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= \frac{4\pi}{k^2} \{ |\eta_0^{(r)}|^2 + |\eta^{(i)}|^2 \}, \\ \sigma_c &= \frac{4\pi}{k^2} \eta^{(i)} (1 - 2\eta^{(i)}). \end{aligned} \right\} \quad (30.5)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \eta^{(i)} &\approx \frac{k^2}{4\pi} \sigma_c, \\ \eta^{(r)} &\approx \pm \sqrt{\frac{k^2}{4\pi} \sigma_s - \left| \frac{k^2}{4\pi} \sigma_c \right|^2}. \end{aligned}$$

Пользуясь (30.4), найдём  $A$ :

$$A = -\frac{2\pi\hbar^2}{mk} \eta_0 = -\frac{2\pi\hbar^2}{m} \left\{ \pm \sqrt{\frac{\sigma_s}{4\pi} - \frac{k^2\sigma_c^2}{16\pi^2}} + i \frac{k}{4\pi} \sigma_c \right\}. \quad (30.6)$$

Определим теперь потенциальную энергию нейтрона в кристалле. Последняя равна, очевидно, сумме энергий взаимодействия нейтрона со всеми ядрами решётки. Предполагая ядра тождественными и не имеющими механических моментов, получим следующее выражение

для потенциальной энергии нейтрона в кристалле:

$$V = A \sum_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l), \quad (30.7')$$

где суммирование распространяется на все ядра решётки.

Мы будем предполагать, что длина волны нейтрона  $\lambda$  значительно больше расстояния между соседними атомами. В этих условиях суммирование по  $l$  может быть заменено интегрированием по  $\rho dV$ , где  $\rho$  — число ядер в единице объёма,  $dV$  — элемент объёма. Поэтому энергия взаимодействия приобретает вид:

$$V = A\rho. \quad (30.7)$$

Смысл проделанной нами замены суммирования интегрированием заключается по существу в том, что матричные элементы операторов (30.7) и (30.7') при выполнении условия  $\lambda \gg a$ , где  $a$  — среднее расстояние между соседними атомами, одинаковы.

Выражение (30.7) можно трактовать как потенциальную энергию нейтрона, находящегося в кристалле или каком-либо другом теле.

Напишем уравнение Шредингера для нейтрона. Обозначим волновую функцию нейтрона через  $\psi(\mathbf{r})$ .

Используя выражение (30.7) в качестве потенциальной энергии, получим:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + A\rho\psi = E\psi, \quad (30.8)$$

где  $E$  — энергия нейтрона.

Вне кристалла уравнение Шредингера имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi_0 = E\psi_0. \quad (30.9)$$

Будем искать решения уравнений (30.8), (30.9) в виде плоских волн

$$\psi = C_1 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \psi_0 = C_2 e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}}, \quad (30.10)$$

где  $k$  — волновой вектор нейтрона в среде, а  $k_0$  — в вакууме;  $C_1$  и  $C_2$  — константы.

Подстановка (30.10) в (30.8) и (30.9) даёт:

$$\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + A\rho = E,$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} k_0^2 = E,$$

откуда

$$k^2 - k_0^2 = 4\pi\rho \left\{ \pm \sqrt{\frac{\sigma_s}{4\pi} - \frac{k^2 \sigma_c^2}{16\pi^2}} + i \frac{k}{4\pi} \sigma_c \right\}. \quad (30.11)$$

Введём теперь коэффициент преломления нейтронов  $n$  (индекс рефракции), как это обычно делается в оптике:

$$n = \frac{k}{k_0}. \quad (30.12)$$

Величина  $n$  очень мало отличается от единицы (см. ниже), поэтому, используя для определения  $n$  формулу (30.11), мы заменим в её правой части  $k$  на  $k_0$ .

Итак [112],

$$n^2 - 1 = \frac{4\pi\rho}{k_0^2} \left\{ \pm \sqrt{\frac{\sigma_s}{4\pi} - \frac{k_0^2 \sigma_c^2}{16\pi^2}} + i \frac{k_0 \sigma_c}{4\pi} \right\}. \quad (30.13)$$

Если поглощение нейтронов отсутствует, то  $\sigma_c = 0$  и

$$n^2 - 1 = \pm \frac{\rho}{k_0^2} \sqrt{4\pi\sigma_s} = \pm \frac{\hbar^2 \rho \sqrt{4\pi\sigma_s}}{2mE}. \quad (30.14)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что при извлечении корня в выражениях (30.13), (30.6), (30.14) может входить произвольный знак.

Знания сечений рассеяния и поглощения недостаточно для определения знака. Последний зависит от распределения резонансных уровней составного ядра (падающий нейтрон + исходное ядро). Так же как и в оптике, резонансные уровни, лежащие выше нулевой энергии, которая определяется здесь как сумма энергий нейтрона и исходного ядра, приводят к положительному знаку; резонансные же уровни, лежащие ниже нуля, приводят к отрицательному знаку. Таким образом тот

или иной знак вещественной части  $A$  определяется соотношением между ролью уровней, лежащих выше и ниже нуля.

Оценим порядок величины коэффициента преломления  $n$ . Считая  $\sigma_s$  и  $\sigma_c$  по порядку величины равными  $10^{-24}$  см<sup>2</sup>, мы получим  $|n^2 - 1| \approx 10^{-6}$  для тепловых нейтронов ( $k \approx 4 \cdot 10^8$  см<sup>-1</sup>).

Таким образом коэффициент преломления нейтронов очень близок к единице. Аналогичное положение имеет место, как известно, и в случае рентгеновых лучей.

Зная коэффициент преломления, можно определить коэффициент отражения нейтронов, падающих на плоскую поверхность.

Граничными условиями для волновой функции  $\psi$  на поверхности являются, как известно, непрерывность  $\psi$  и  $\frac{\partial \psi}{\partial \nu}$ , где  $\nu$  — нормаль к поверхности.

Отсюда легко получить следующее выражение для коэффициента отражения  $R$ :

$$R = \left( \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} - \cos \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} + \cos \theta} \right)^2, \quad (30.15)$$

где  $\theta$  — угол между направлением падающего пучка и нормалью к поверхности.

Рассмотрим подробнее тот случай, когда поглощения нейтронов можно не учитывать.

Если  $n^2 > 1$ , то  $R$  всегда остаётся меньше единицы. Если же  $n^2 < 1$ , то  $R = 1$  для всех углов  $\theta$ , которые больше  $\theta_0$ , где  $\theta_0$  определяется из условия

$$\sin \theta_0 = n. \quad (30.16)$$

Так как  $n$  очень близко к единице, то угол  $\theta_0$  близок к  $\pi/2$ .

Рассмотрим коэффициент отражения для углов  $\theta$ , близких к  $\pi/2$ . Обозначая  $\pi/2 - \theta$  через  $\varphi$  и замечая, что при малых  $\varphi$   $\cos \theta \approx \varphi$ , получим из (30.15) [112]:

$$R = \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2\mu}{\varphi^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2\mu}{\varphi^2}}} \right)^2, \quad (30.17)$$

где  $\mu = 1 - n$ .

Если  $\varphi < \sqrt{2\mu}$ , то имеет место полное внутреннее отражение нейтронов.

В обычных условиях угол  $\sqrt{2\mu}$  порядка  $10'$ . Таким образом нейтроны, падающие под скользящими углами к поверхности, могут испытывать полное отражение от неё. При этом (как и в оптике) нейтронная волна будет экспоненциально затухать при распространении внутрь отражающего тела. Глубина проникновения волны, т. е. длина, на которой интенсивность нейтронной волны уменьшается в  $e$  раз по сравнению с её значениями на поверхности тела, равна <sup>[112]</sup>:

$$d = \frac{1}{k \sqrt{\sin^2 \theta - n}} = \frac{1}{k \sqrt{2\mu}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2\mu}}. \quad (30.18)$$

Если  $\mu \approx 10^{-8}$ , то  $d \approx \lambda \cdot 10^3$ . В случае тепловых нейтронов  $d \approx 10^{-6}$  см.

Заметим, что коэффициент преломления нейтронов в случае намагниченного парамагнитного или ферромагнитного кристалла зависит от ориентации спина нейтрона по отношению к вектору магнитной индукции. Это обстоятельство может быть использовано для получения поляризованного пучка нейтронов.

Если угол падения нейтронов таков, что только нейтроны с одной ориентацией спина полностью отражаются от намагниченного кристалла, то прошедшие в кристалл нейтроны будут полностью поляризованы. Отражённый луч нейтронов будет при этом частично поляризован <sup>[121]</sup>.

## ДОПОЛНЕНИЕ

### Расщепление быстрых дейтронов

Рассмотрим расщепление быстрого дейтрона в кулоновском поле ядра, которое не сопровождается захватом нейтрона <sup>[122]</sup>. Такая реакция в принципе может быть использована для получения быстрых нейтронов.

За исключением случая самых тяжёлых ядер при определении эффективного сечения такого процесса можно пользоваться борновским приближением, так что задача сводится к нахождению матричного элемента электростатической энергии дейтрона  $V$ , соответствующего переходу из начального состояния, описываемого волновой функцией

$$\psi_i = L^{-3/2} e^{ik_0 R} u_0(\rho) e^{iE_0 t/\hbar},$$

в конечное состояние, описываемое волновой функцией

$$\psi_f = L^{-3/2} e^{ikR} u_1(\rho) e^{iE_1 t/\hbar}.$$

Здесь  $R$  — вектор, определяющий положение центра инерции нейтрона и протона, образующих дейтрон,  $\rho$  — радиус-вектор, определяющий положение протона по отношению к нейтрону,  $k_0$  — волновой вектор дейтрона в начальном состоянии,  $k$  — волновой вектор, определяющий движение центра инерции нейтрона и протона после расщепления дейтрона,  $E_0$  и  $E_1$  — энергии обоих состояний;  $u_0$  — нормированная волновая функция основного состояния дейтрона,  $u_1$  — волновая функция, описывающая относительное движение нейтрона и протона после расщепления дейтрона, нормированная на энергию,  $L$  — ребро куба, в котором предполагается находящимся дейтрон.

В системе координат, в которой вначале покоился центр инерции дейтрона, потенциальная энергия может быть представлена в виде

$$V = \frac{Ze^2}{[r_{p\perp}^2 + (r_{pz} - vt)^2]^{1/2}},$$

где  $r_{pz}$  и  $r_{p\perp}$  — проекции радиус-вектора протона на ось  $z$  и перпендикулярно ей (вдоль оси  $z$  движется ядро),  $v$  — скорость ядра.

Пользуясь борновским приближением, мы должны вычислить величину

$$A = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} V_{if} e^{i\omega t} dt,$$

где  $\hbar\omega = E_i - E_o$  и  $V_{if}$  — пространственная часть матричного элемента  $V$ . Сечение процесса определится тогда как

$$\sigma = L^2 |A|^2.$$

Можно показать\*), что

$$A = \frac{2i}{L^2} \frac{Ze^2}{\hbar v} I_p I_\rho,$$

где

$$I_p = \int dr_p e^{i(kr_p - \omega r_{pz}/v)} K_0\left(\frac{\omega r_{p\perp}}{v}\right),$$

$$I_\rho = \int d\rho e^{-i\frac{1}{2}k\rho} u_1^*(\rho) u_o(\rho),$$

$K_0$  — функция Бесселя мнимого аргумента (вектор  $k_o$  в выбранной нами системе координат равен нулю).

Для дейтронов с энергией до 200 MeV величина  $\frac{1}{2}k\rho$  мала по сравнению с единицей. Поэтому в выражении для  $I_\rho$  можно разложить  $e^{-i\frac{1}{2}k\rho}$  в ряд, ограничившись двумя первыми членами.

Отсюда можно заключить, что  $I_\rho \neq 0$  только в том случае, если конечное состояние представляет собой  $^3P$ -состояние.

Мы не будем здесь приводить подробных вычислений интегралов  $I_p$  и  $I_\rho$ , а укажем лишь, что интегральное сечение расщепления дейтрона с энергией в 200 MeV по порядку величины равно  $\sigma = 2 \cdot 10^{-29} Z^2 \text{ см}^2$ , где  $Ze$  — заряд ядра (следует иметь в виду, что в случае самых тяжёлых ядер приближением Борна нельзя пользоваться, поэтому эта формула не относится к таким ядрам)<sup>[122]</sup>.

Наряду с рассмотренным только что эффектом расщепления дейтрона в кулоновском поле ядра может иметь место также следующий своеобразный эффект, приводящий к расщеплению дейтрона\*).

Быстрый дейтрон, проходя мимо ядра, может «задеть» за ядро протоном, нейтрон же может при этом пройти вне ядра. Это приведёт к тому, что протон будет «содран» ядром, а нейтрон будет продолжать свой путь вне ядра. Таким образом могут быть получены быстрые нейтроны, энергия которых составляет примерно половину первоначальной энергии дейтрона. Если ядра коснётся нейтрон, а протон будет проходить вне ядра, то «содранным» окажется нейтрон. Мы получим при этом быстрый протон с энергией, также примерно равной половине первоначальной энергии дейтрона.

Сечение для такого процесса «сдириания» для лёгких и средних ядер оказывается значительно большим сечения дезинтеграции быстрого дейтрона в кулоновском поле ядра. Только в случае самых тяжёлых ядер оба эффекта играют примерно одинаковую роль.

Оценим эффективное сечение этого процесса. Прежде всего заметим, что в случае достаточно быстрого дейтрона можно пренебречь отклонением нейтрона от направления первоначального движения дейтрона. Действительно, если предполагать, что протон, попадая в область ядра, находится от края ядра на расстоянии порядка

\*) Теории этого эффекта посвящена работа<sup>[123]</sup>. Ниже излагаются основные результаты этой работы.

\*) Мы следуем изложению Данкова<sup>[122]</sup>.

«радиуса дейтрона»  $R_d \left( R_d = \frac{1}{2} \hbar (M\varepsilon)^{-1/2} = 2,1 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \right.$   
 $\varepsilon$  — энергия связи дейтрона) и считать, что радиус

ядра  $R$  значительно больше  $R_d$ , то расстояние, которое проходит в ядре протон, будет по порядку величины равно  $l \sim \sqrt{RR_d}$ . Такое расстояние нейтрон проходит за время  $l/v$  ( $v$  — скорость дейтрона). Скорость нейтрона в направлении, перпендикулярном к первоначальному направлению дейтрона, по порядку величины равна  $(\varepsilon/M)^{1/2}$ , поэтому смещение нейтрона в перпендикулярном направлении по порядку величины равно  $(\varepsilon/M)^{1/2} l/v$ . Этого смещения можно не учитывать, если оно значительно меньше  $R_d$ . Легко видеть, что смещения можно не учитывать, если  $E_d > 2 \frac{R}{R_d} \varepsilon$ , где  $E_d$  — энергия дейтрона.

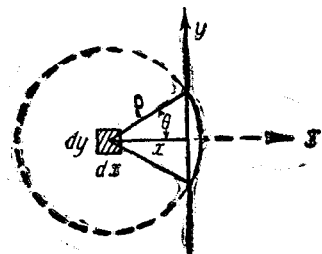


Рис. 15.

Если это неравенство выполняется ( $E_d$  должно быть больше 20 MeV для самых тяжёлых ядер), то при определении сечения достаточно рассматривать только проекции положений нейтрона и протона на плоскость, перпендикулярную направлению движения дейтрона.

Мы должны при этом найти вероятность того, что при столкновении дейтрона с ядром протон (его проекция) попадёт в площадь круга радиуса  $R$ , а нейтрон (его проекция) будет находиться вне этого круга. Рассмотрим столкновение, при котором расстояние между нейтроном и протоном равно  $\rho$ . Будем считать, что радиус ядра  $R$  значительно больше радиуса дейтрона; при этом можно пренебречь кривизной края ядра и считать границу ядра плоской (см. рис. 15). Пусть ось  $y$ -ов направлена вдоль края ядра, а ось  $x$ -ов — перпендикулярна краю (ось  $z$ -ов имеет направление движения нейтрона). Тогда вероятность того, что протон попадёт в заштрихованную площадку, вернее говоря, сечение этого про-

цесса будет равно  $dx dy$ . Вероятность того, что нейтрон будет при этом находиться вне ядра, равна отношению дуги окружности радиуса  $\rho$ , лежащей вне ядра, ко всей окружности, т. е. равна  $\theta/\pi$ . Итак, интересующее нас сечение равно

$$\sigma(\rho) = \int \int \frac{\theta}{\pi} dx dy.$$

Замечая, что  $x = \rho \cos \theta$ ,  $dx = -\rho \sin \theta d\theta$  и выполнив интегрирование по  $dy$ , которое даёт просто  $2\pi R$ , найдём

$$\sigma(\rho) = 2R\rho \int_0^{\pi/2} \theta \sin \theta d\theta = 2\rho R. \quad (1')$$

Мы получили сечение для интересующего нас процесса при заданном  $\rho$ . Это сечение следует ещё усреднить по всем  $\rho$ . Если  $\psi_d(\mathbf{r})$  — дейтронная волновая функция, то вероятность того, что расстояние между проекциями частиц лежит в интервале  $d\rho$ , равна

$$2\pi\rho d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_d(\mathbf{r})|^2 dz.$$

Поэтому полное усреднённое сечение процесса «обдирания» равно

$$\sigma = 4\pi R \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{\infty} \rho^2 |\psi_d(\mathbf{r})|^2 d\rho.$$

Переходя от переменной  $z$  к переменной  $r$  ( $r^2 = \rho^2 + z^2$ ), получим

$$\sigma = 8\pi R \int_0^{\infty} |\psi_d(\mathbf{r})|^2 r dr \int_0^r \frac{\rho^2 d\rho}{(r^2 - \rho^2)^{1/2}}.$$

Интеграл по  $\rho$  равен  $\frac{\pi}{4} r^2$ , поэтому

$$\sigma = 2\pi^2 R \int_0^{\infty} |\psi_d(\mathbf{r})|^2 r^3 dr = \frac{\pi}{2} R \int r |\psi_d(\mathbf{r})|^2 dr$$

$$(dr = 4\pi r^2 dr).$$

Последний интеграл имеет простой физический смысл: это среднее расстояние между нейтроном и протоном в дейтроне. Обозначая его через  $R_g$ , представим  $\sigma$  в виде

$$\sigma = \frac{\pi}{2} R R_g. \quad (1)$$

Если считать, что  $\psi_g$  имеет вид  $\psi_g = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{e^{-\alpha r}}{r}$ , где  $\alpha = \frac{(M\varepsilon)^{1/2}}{\hbar}$ , то величина  $R_g$  будет равна  $R_g = \frac{1}{2\alpha} = 2,1 \cdot 10^{-13}$  см. Полагая  $R$  равным  $1,5 A^{1/3} 10^{-13}$  см, мы получим

$$\sigma = 5 A^{1/3} 10^{-26} \text{ см}^2. \quad (2)$$

Эта величина для всех ядер, кроме самых тяжёлых, гораздо больше сечения расщепления дейтрона в кулоновском поле ядра.

Заметим, что такой же формулой определяется сечение процесса, при котором нейтрон застревает в ядре, а протон проходит мимо ядра.

Остановимся ещё на вопросе об угловом и энергетическом распределении нейтронов, возникающих в результате реакции «сдираания». Мы будем рассматривать два предельных случая, считая в одном случае ядро «прозрачным» для частиц, а в другом «непрозрачным». Оба эти случая не реализуются, конечно, в действительности, но рассмотрение их представляет интерес в том отношении, что угловые распределения, получающиеся в обоих случаях, мало отличаются друг от друга, поэтому можно считать, что получающееся распределение близко к истинному.

В случае «прозрачного» ядра мы считаем его радиус  $R$  малым по сравнению с радиусом дейтрона  $R_g$ ; в случае «непрозрачного» ядра  $R \gg R_g$ . Ясно, что первый случай не соответствует предположениям, которые мы делали выше при определении сечения «обдираания». Тем не менее мы рассмотрим этот случай ввиду его чрезвычайной простоты.

Выясним вопрос о распределении возникающих нейтронов по импульсам. В случае «прозрачного» ядра это

распределение будет таким же, как и в самом дейтроне; наличие ядра, в котором застревает протон, никак не будет сказываться на распределении.

Вероятность того, что импульс нейтрона в дейтроне равен  $p$  (точнее лежит в интервале  $dp$ ) определяется формулой

$$P(p) dp = |\psi(p)|^2 dp, \quad (3)$$

где

$$\psi(p) = \frac{1}{h^{3/2}} \int \psi_g(r) e^{-\frac{i}{\hbar} pr} dr.$$

Подставляя сюда вместо  $\psi_g$  волновую функцию основного состояния дейтрона, получим

$$\psi(p) = \frac{1}{\pi} \frac{(M\varepsilon)^{1/4}}{M\varepsilon + p^2}. \quad (3')$$

Чтобы найти импульс освобождающегося нейтрона, нужно к вектору  $p$  прибавить импульс, связанный с движением центра инерции дейтрона. Это значит, что, не изменяя  $p_x$  и  $p_y$ , нужно к  $p_z$  прибавить величину

$$p_0 = \sqrt{ME_g} \left(1 + \frac{E_g}{8Mc^2}\right)$$

(второй член в скобках — малая релятивистская поправка).

Если  $p_1$  — проекция  $p$  в направлении, перпендикулярном оси  $z$ , то угол вылета нейтрона (по отношению к пучку дейтронов) равен, очевидно,

$$\theta = \frac{p_1}{p_0}$$

(в знаменателе мы пренебрегли величиной  $p_z$ , которая мала по сравнению с  $p_0$ ).

Вероятность того, что  $p_1$  лежит между  $p_1$  и  $p_1 + dp_1$ , равна, очевидно,

$$\begin{aligned} P(p_1) 2\pi p_1 dp_1 &= 2\pi p_1 dp_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(M\varepsilon)^{1/2} dp_z}{\pi^2 (M\varepsilon + p_1^2 + p_z^2)^2} = \\ &= \frac{(M\varepsilon)^{1/2}}{2\pi (M\varepsilon + p_1^2)^{3/2}} 2\pi p_1 dp_1. \end{aligned} \quad (4)$$



Выразив  $p_1$  через  $\theta$ , мы получим угловое распределение освобождающихся нейтронов:

$$P(\theta) d\Omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\theta_0}{(\theta_0^2 + \theta^2)^{3/2}} d\Omega, \quad (5)$$

где

$$\theta_0 = \left(\frac{\epsilon}{E_g}\right)^{1/2} \left[1 - \frac{E_g}{8Mc^2}\right] \approx \left(\frac{\epsilon}{E_g}\right)^{1/2} \quad (5')$$

и  $d\Omega = 2\pi\theta d\theta$ .

Мы видим, что нейтроны в основном движутся в конусе, ось которого совпадает с направлением первоначального пучка дейтронов и угол раствора которого по порядку величины равен  $\theta_0 \sim \left(\frac{\epsilon}{E_g}\right)^{1/2}$ , что составляет около  $6^\circ$  для дейтронов с энергией в 190 MeV (точнее говоря, ширина углового распределения составляет  $\sim 1,54 \theta_0$ ).

Энергия освобождающегося нейтрона равна

$$E = \frac{1}{2M} [(p_0 + p_z)^2 + p^2] = \frac{1}{2M} [p_0^2 + 2p_0 p_z + p^2].$$

Так как  $p_0 \gg p$ , то

$$E \approx \frac{1}{2} E_g + \sqrt{\frac{E_g}{M}} p_z.$$

Отсюда видно, что распределение по энергиям определяется распределением по проекциям импульса на ось  $z$ . Распределение по  $p_z$  согласно (3) и (3') имеет вид

$$P(p_z) dp_z = \frac{2}{\pi} dp_z \int_0^\infty \frac{p_1 dp_1}{(M\epsilon + p_1^2 + p_z^2)^2} = \frac{(M\epsilon)^{1/2} dp_z}{\pi (M\epsilon + p_z^2)}. \quad (6)$$

Выразив здесь  $p_z$  через  $E$ , найдём распределение нейтронов по энергиям:

$$P(E) dE = \frac{\sqrt{\epsilon E_g} dE}{\pi \left[ \left(E - \frac{1}{2} E_g\right)^2 + \epsilon E_g \right]}. \quad (7)$$

Мы видим, что центром распределения является значение энергии  $E_0 = \frac{1}{2} E_g$ ; ширина распределения равна  $2\sqrt{E_g \epsilon}$ , что составляет 41 MeV при энергии дейтронов в 190 MeV.

Определим теперь угловое распределение нейтронов в случае «непрозрачного» ядра, когда  $R \gg R_g$ . В этом случае границу ядра можно считать плоской (см. рис. 15). Нас интересуют такие столкновения дейтрона с ядром, при которых проекция положения протона попадает в область ядра, а проекция нейтрона лежит вне ядра, т. е.  $x_p < 0$  и  $x_n > 0$  (индексы  $p$  и  $n$  относятся соответственно к протону и нейтрону).

Возникает своеобразная диффракционная задача, в которой для учёта наличия ядра мы будем считать, что волновая функция  $\psi$  отлична от нуля только в тех случаях, когда  $x_n > 0$ ,  $x_p < 0$ , и имеет при этом следующий вид:

$$\psi = \psi_0(r) \frac{1}{L}, \quad (8)$$

где  $\psi_0(r)$  — нормированная волновая функция, описывающая внутреннее движение дейтрона, а  $L$  — ребро куба, в котором предполагается находящимся дейтрон.

Мы не выписали в (8) множителя  $L^{-1/2} e^{\frac{i}{\hbar} p_0 z}$ , описывающего движение центра инерции дейтрона, так как нас интересуют только проекции положений нейтрона и протона на плоскость, перпендикулярную оси  $z$ , вдоль которой движется дейтрон.

Величина  $|\psi|^2 dr dX dY$  представляет собой нормированную вероятность того, что  $r$ ,  $X$ ,  $Y$  находятся в интервалах  $dr$ ,  $dX$ ,  $dY$  ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  — координаты центра инерции дейтрона).

Будем считать независимыми переменными функции  $\psi$  величины  $x_n$ ,  $x_p$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $Y$  ( $y = y_n - y_p$ ,  $z = z_n - z_p$ ). Так же, как и в случае «прозрачного» ядра, мы перейдём от волновой функции (8) в обычном пространстве к волновой функции в пространстве импульсов. Этот переход совершается с помощью преобразования Фурье:

$$\psi(p_{nx}, p_{px}, p_y, p_z, Y) = L^{-1} h^{-2} \int_0^\infty dx_n \int_{-\infty}^0 dx_p \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \times \\ \times \psi(x_n - x_p, y, z) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} (p_{nx} x_n + p_{px} x_p + p_y y + p_z z)} \quad (9)$$

( $p_{nx}$  и  $p_{fx}$  — проекции на ось  $x$ -ов импульсов нейтрона и протона).

Интегрирование по  $y$  и  $z$  не отличается здесь от соответствующего интегрирования при выводе формулы (3') для  $\psi(p)$ . Если ввести функцию

$$\psi(p_y, p_x, x_n - x_p) = \hbar^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(p'_x, p_y, p_x) e^{\frac{i}{\hbar} p'_x (x_n - x_p)} dp'_x, \quad (9')$$

то (9) представится в виде

$$\psi(p_{nx}, p_{px}; p_y, p_x, Y) = L^{-1} \hbar^{-1} \int_0^{\infty} dx_n \int_{-\infty}^0 dx_p \psi(p_y, p_x, x_n - x_p) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} (p_{nx} x_n + p_{px} x_p)} = -\hbar^{1/2} (2\pi)^{-3/2} L^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(p'_x, p_y, p_x)}{(p'_x - p_{px})(p'_x + p_{px})} dp'_x. \quad (10)$$

Чтобы устранить полюсы в знаменателе, мы деформируем контур интегрирования в верхнюю полуплоскость. Замечая, что в верхней полуплоскости есть только один полюс функции  $\psi(p'_x, p_y, p_x)$ , получим по теореме о вычетах

$$\psi(p_x, p_{px}; p_y, p_x, Y) = \frac{1}{L} \frac{\hbar^{1/2} (M\varepsilon)^{1/4}}{(2\pi)^{3/2} P (p_x - iP) (p_{px} + iP)}, \quad (11)$$

где

$$P = (M\varepsilon + p_y^2 + p_x^2)^{1/2}, \quad p_x \equiv p_{nx}.$$

Заметим, что  $|\psi(p_{nx}, p_{fx}, p_y, p_x, Y)|^2 dp_{nx} dp_{px} dp_y dp_x dY$  представляет собой пронормированную вероятность нахождения величин  $p_{nx}, p_{fx}, p_y, p_x, Y$  в соответствующих интервалах.

Вероятность того, что импульс нейтрона лежит в интервале  $dp$ , а величина  $Y$  — в интервале  $dY$ , равна

$$P(p) dp dY = dp dY \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(p_x, p_{px}; p_y, p_x)|^2 dp_{px} = \frac{\hbar}{8\pi^2 L^2} \frac{(M\varepsilon)^{1/2}}{P^3 (p_x^2 + P^2)} dY dp. \quad (12)$$

Если разделить эту величину на число дейтронов, падающих на единицу площади, т. е. на  $\frac{1}{L^2}$ , то мы получаем дифференциальное сечение процесса, отнесённое к элементу длины периферии ядра  $dY$ . Вводя угол  $\varphi$ , определяющий положение точки на периферии ядра, и замечая, что  $dY = R d\varphi$ ,  $p_x = p_1 \cos \varphi$ ,  $p_y = p_1 \sin \varphi$ , найдём, интегрируя (12) по  $d\varphi$ , следующее выражение для дифференциального сечения процесса, при котором импульс нейтрона лежит в интервале  $dp$ :

$$d\sigma = \frac{\hbar (M\varepsilon)^{1/2} R dp}{8\pi^2 (M\varepsilon + p^2)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(M\varepsilon + p_x^2 + p_1^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}. \quad (13)$$

Для получения углового распределения нейтронов нужно это выражение проинтегрировать по  $dp_x$ . Выполнив интегрирование, получим:

$$d\sigma = \frac{RR_g}{\pi (1 + \zeta^2)^{3/2}} \left\{ 1 - \frac{1}{2\zeta^2} [(1 + \zeta^2) \operatorname{arctg} \zeta - \zeta] \right\} d\Omega_\zeta, \quad (14)$$

где

$$\zeta = \frac{\theta}{\theta_0}.$$

Если проинтегрировать это выражение по  $d\Omega_\zeta$ , то мы получим  $\frac{\pi}{2} RR_g$ , т. е. величину полного сечения.

Формула (14), относящаяся к случаю «непрозрачного» ядра, отличается от формулы (5) для случая «прозрачного» ядра множителем в фигурных скобках. Вычисления, проведённые по обеим формулам, приводят к очень близким результатам, что уже отмечалось выше.

Чтобы найти распределение нейтронов по энергиям, нужно проинтегрировать (13) по  $p_1 dp_1$ .

В результате получим:

$$d\sigma = \frac{1}{4} \pi RR_g \frac{\varepsilon E_g dE}{\left[ \left( E - \frac{1}{2} E_g \right)^2 + \varepsilon E_g \right]^{3/2}}. \quad (15)$$

Это распределение несколько отличается от распределения (7), относящегося к «прозрачному» ядру (ширина распределения (15) уже, чем ширина (7); для  $E_0 = 190$  MeV ширина (15) составляет 31 MeV).

Подчеркнём в заключение, что рассмотренные предельные случаи могут служить главным образом для качественной характеристики явления; существенно, однако, то обстоятельство, что оба случая приводят к близким результатам, поэтому можно надеяться, что полученные результаты близки к истинным.

## ЛИТЕРАТУРА

1. H. Bethe a. R. Peierls, *Proc. Roy. Soc. A* 148, 146 (1935).
2. Мотт и Мессси, Теория атомных столкновений, стр. 33.
3. Бете и Бечер, Физика ядра, ч. I, ДНТВУ (1938), стр. 42 и след.
4. H. Bethe a. R. Peierls, *Proc. Roy. Soc. A* 148, 146 (1935).  
Бете и Бечер, *loc. cit.*, стр. 59.
5. Л. Ландау и Я. Смородинский, *ЖЭТФ*, 14, 269 (1944).
6. Бете и Бечер, *loc. cit.*, стр. 46.
7. W. Rarita a. J. Schwinger, *Phys. Rev.* 59, 436 (1941).
8. W. Heppner a. R. Peierls, *Proc. Roy. Soc.* 181, 43 (1942).
9. Дирак, Основы квантовой механики, ОНТИ, 1937, стр. 241.
10. J. Kellogg, J. Rabi, N. Ramsey, J. Zacharias, *Phys. Rev.* 57, 677 (1940).
11. Бете, Квантовая механика простейших систем, ОНТИ (1935), стр. 381.
12. E. Condon a. G. Shortley, The Theory of atomic spectra, стр. 60, ф-ла (5).
13. W. Arnold a. A. Roberts, *Phys. Rev.* 71, 878 (1947).
14. L. Alvarez a. F. Bloch, *Phys. Rev.* 57, 111 (1940), *Phys. Rev.* 57, 352 (1940).
15. J. Schwinger a. E. Teller, *Phys. Rev.* 52, 286 (1937).
16. H. Bethe, *Rev. Mod. Phys.* 9, стр. 124 (1937).
17. Мотт и Мессси, *loc. cit.*, стр. 113.
18. W. Jevons, Report on Band Spectra of Diatomic Molecules.
19. M. Hamermesh a. J. Schwinger, *Phys. Rev.* 71, 678 (1947).
20. R. Sutton, T. Hall и др., *Phys. Rev.* 72, 1147 (1947).
21. H. Hanstein, *Phys. Rev.* 59, 489 (1941).
22. C. Wu, L. Rainwater, W. Havens, J. Dunning, *Phys. Rev.* 69, 236 (1946).
23. M. Hamermesh a. J. Schwinger, *Phys. Rev.* 69, 145 (1946).
24. H. Bethe, *Rev. Mod. Phys.* 9, 122 (1937).
25. Hadley, Leith и др., *Bull. Am. Phys. Soc.* 23, 15 (1948).
26. Мотт и Мессси, *loc. cit.*, стр. 100.
27. M. White, *Phys. Rev.* 47, 573 (1935).
28. M. Tuve, N. Heydenburg, L. Haftstad, *Phys. Rev.* 50, 806 (1936).

29. R. Herbig, D. Kerst и др., *Phys. Rev.* **55**, 998 (1939).  
 30. R. Wilson а. E. Greutz, *Phys. Rev.* **71**, 339 (1947); R. Wilson, *Phys. Rev.* **71**, 384 (1947); R. Wilson и др., *Phys. Rev.*, **71**, 560 (1947).  
 31. Бете и Бечер, *loc. cit.*, стр. 81.  
 32. G. Breit, E. Condon, R. Present, *Phys. Rev.* **50**, 825 (1936).  
 33. R. Peierls а. M. Preston, *Phys. Rev.* **72**, 250 (1947).  
 34. Мотт и Мессси, *loc. cit.*, стр. 37.  
 35. Бете и Бечер, *loc. cit.*, стр. 42.  
 36. Бете и Бечер, *loc. cit.*, стр. 87.  
 37. E. Fermi, *Phys. Rev.* **48**, 570 (1935).  
 38. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, Гостехиздат, (1940), стр. 119 и след.  
 39. Бете и Бечер, *loc. cit.*, стр. 79, 72.  
 40. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, 1940, стр. 171.  
 41. Я. Френкель, *Sov. Phys.* **9**, 533 (1936).  
 42. N. Bohr, *Nature* **137**, 344, 351 (1936), *УФН*, т. XVI, 425 (1936); *Nature* **141**, 326 (1938).  
 43. Н. Бор и Ф. Калькар, *УФН*, т. XX (1938), стр. 1.  
 44. H. Bethe, *Rev. Mod. Phys.* **9**, 69 (1937).  
 45. R. Peierls, Reports on progress in physics, т. VII, 89 (1940).  
 46. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат (1944), стр. 407.  
 47. H. Bethe, *Phys. Rev.* **50**, 332 (1936).  
 48. Л. Ландау, *Sov. Phys.* **11**, 556 (1937); *ЖЭТФ*, **7**, 819, 1937.  
 49. V. Weisskopf, *Phys. Rev.* **52**, 295 (1937).  
 50. H. Bethe, *Phys. Rev.* **57**, 1125 (1940).  
 51. M. Goldberger а. F. Seitz, *Phys. Rev.* **71**, 294 (1947).  
 52. H. Bethe а. G. Placzek, *Phys. Rev.* **57**, 1075 A (1940).  
 53. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, ч. II, Гостехиздат (1934), стр. 99, 135, 182.  
 54. Борн, Оптика, ОНТИ (1934).  
 55. Amaldi, Bossiagelli, Cassiaruotti, Trabacchi, *Nuovo Cimento*, **3**, 203 (1946).  
 56. А. Ахизер, И. Померанчук, *Journal of Phys.* **IX**, 471 (1945).  
 57. В. Паули, Общие принципы волновой механики, Гостехиздат (1947), стр. 148.  
 58. А. Мигдал, *ЖЭТФ* **15**, 81 (1945).  
 59. H. Bethe, *Rev. Mod. Phys.* **9**, 224—226 (1937).  
 60. Л. Русинов, *УФН*, т. XXV, 144 (1941).  
 61. И. Курчатов и Л. Русинов, Юбилейный сборник, посвященный 30-летию Октябрьской революции. Издательство АН (1947), стр. 285.  
 62. Weizsäcker, *Naturwiss.*, **24**, 813 (1936).  
 63. M. Hebb а. G. Uhlenbeck, *Physica V*, 605 (1938).  
 64. R. Sachs, *Phys. Rev.* **57**, 194 (1940).

65. G. Breit а. E. Wigner, *Phys. Rev.* **49**, 519 (1936).  
 66. H. Bethe а. G. Placzek, *Phys. Rev.* **51**, 450 (1937).  
 67. В. Паули, Общие принципы волновой механики, Гостехиздат (1947), стр. 309.  
 68. P. Karapur а. R. Peierls, *Proc. Roy. Soc.* **166**, 277 (1938).  
 69. A. Siegert, *Phys. Rev.* **56**, 750 (1939).  
 70. G. Breit, *Phys. Rev.* **69**, 472 (1946).  
 71. E. Wigner, *Phys. Rev.* **70**, 15, 606 (1946).  
 72. H. Feshbach, Peaslee, Weisskopf, *Phys. Rev.* **71**, 145 (1947).  
 73. Goldsmith, Jbser, Feld, *Rev. Mod. Phys.* **19**, 259 (1947).  
 74. Diebner, Herrmann u. Grassmann, *Phys. ZS* **43**, 440 (1942).  
 75. H. Bethe, *Rev. Mod. Phys.* **9**, 114 (1937).  
 76. Griffiths а. Szilard, *Nature* **139**, 323 (1937).  
 77. W. Sturm а. S. Turkel, *Phys. Rev.* **70**, 103 (1946); L. Rainwater а. W. Havens, *Phys. Rev.* **70**, 136, 154 (1946), *Phys. Rev.* **71**, 65 (1947).  
 78. H. Bethe, *Rev. Mod. Phys.* **9**, 166, 172, 163, 196, 212 (1937).  
 79. J. Oppenheimer а. Phillips, *Phys. Rev.* **48**, 500 (1935).  
 80. Е. Лифшиц, *Sov. Phys.* **13**, 224 (1938).  
 81. H. Bethe, *Phys. Rev.* **53**, 39 (1938).  
 82. Volkoff, *Phys. Rev.* **57**, 873 (1940).  
 83. O. Nahn u. F. Strassmann, *Naturwiss.*, **27**, 11 (1939).  
 84. N. Bohr, *Nature* **143**, 330 (1939); *Phys. Rev.* **55**, 418 (1939).  
 85. Я. Френкель, *ЖЭТФ* **9**, 641 (1939).  
 86. N. Bohr а. I. Wheeler, *Phys. Rev.* **56**, 426 (1939).  
 87. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат (1944), стр. 400.  
 88. В. Берестецкий и А. Мигдал, Изв. АН СССР т. V, 602 (1941).  
 89. К. Петржак и Г. Флёров, *УФН*, т. XXV, 178 (1941).  
 90. N. Bohr, *Phys. Rev.* **58**, 864 (1940).  
 91. G. Baldwin а. G. Klaiber, *Phys. Rev.* **71**, 3 (1947).  
 92. J. Jacobsen а. N. Lassen, *Phys. Rev.* **59**, 1042 (1941).  
 93. Э. Ферми, *УФН*, т. XXXII, 54 (1947).  
 94. Я. Зельдович и Ю. Харитон, *ЖЭТФ* **9**, 1425 (1939); **10**, 29, 477 (1940).  
 95. R. Peierls, *Proc. Camb. Phil.* **35**, 610 (1939).  
 96. E. Norf, *Camb. Tracts in Mathematics and Mathem. Physics N. 31* (1934), 54, ур-ние (171).  
 97. W. Lamb, *Phys. Rev.* **55**, 190 (1939).  
 98. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, Гостехиздат (1940), стр. 107.  
 99. G. Wick, *Phys. ZS.* **38**, 403, 689 (1937).  
 100. И. Померанчук, *Sov. Phys.* **13**, 65 (1938).  
 101. R. Weinstock, *Phys. Rev.* **65**, 1 (1944).  
 102. O. Halpern, M. Hammermesh а. M. Johnson, *Phys. Rev.* **59**, 981 (1941).

103. А. Ахнезер и И. Померанчук, *ЖЭТФ* 17, 769 (1947).  
 104. E. Fermi a. L. Marshall, *Phys. Rev.* 71, 666 (1947).  
 105. E. Fermi a. L. Marschall, *Phys. Rev.* 72, 408 (1947).  
 106. В. Паули, Общие принципы волновой механики, Гостехиздат (1947), стр. 174.  
 107. E. Fermi, W. Sturm, R. Sachs, *Phys. Rev.* 71, 589 (1947).  
 108. H. Anderson, E. Fermi, L. Marshall, *Phys. Rev.* 70, 815 (1946).  
 109. А. Ахнезер и И. Померанчук, *Journ. of Phys.* IX, 461 (1945).  
 110. H. Bethe, *Rev. Mod. Phys.* 9, 122 (1937).  
 111. S. Flügge, *Phys. ZS.* 21/22, 445 (1943).  
 112. M. Goldberger a. F. Seitz, *Phys. Rev.* 71, 294 (1947).  
 113. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Квантовая механика, ч. 1, Гостехиздат (1948), § 19.  
 114. P. Ewald a. G. Hermann, *Strukturbericht*, 30 (1931).  
 115. Я. Смородинский, *ЖЭТФ* 15, 89 (1945); 17, 941 (1947).  
 116. Я. Смородинский, *ДАН*, т. LX, № 2, 218 (1948).  
 117. R. Serber, *Phys. Rev.* 72, 1114, (1947).  
 118. Seidl, Harris, Langsdorf, *Phys. Rev.* 72, 168 (1947).  
 119. N. Feather, *Nature*, 159, 607 (1947).  
 E. Wollan, Moak, Sawyer, *Phys. Rev.* 72, 447 (1947).  
 Tsien San-Tsiang и др. *Phys. Rev.* 71, 382 (1947).  
 120. Marshak, *Rev. Mod. Phys.* 19, 185 (1947).  
 121. А. Ахнезер и И. Померанчук, *ЖЭТФ* 18, 475 (1948).  
 122. S. Dancoff, *Phys. Rev.* 72, 1017 (1947).  
 123. R. Serber, *Phys. Rev.* 72, 1008 (1947).

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Брейта-Вигнера формула 145  
 Брэгга формула 263  
 β-радиоактивность осколков 191, 201  
 Вероятность прилипания 113, 125 и д.  
 γ-излучение 94, 135  
 —, внутренняя конверсия 139  
 — дипольное 68, 73, 77, 83, 84, 87, 89, 136  
 — квадрупольное 69, 78, 137  
 — при делении ядер 204  
 — при захвате нейтронов протонами 65  
 Дейтрон, квадрупольный момент 27  
 —, основное состояние 7, 17  
 —, расщепление в поле ядра 303  
 —, сечение «сдирания» 305  
 —, фоторасщепление 81  
 —, энергия связи 18  
 Деление ядер 191  
 —, вероятность 202  
 —, механизм 191  
 —, спонтанное 200  
 —, цепная реакция 209  
 Дисперсионная формула 141, 149  
 Длина рассеяния 252  
 «Закон 1/v» 132, 168, 179  
 Захват нейтронов в кристаллах 236  
 — — протонами 65  
 — — свободными ядрами 162  
 Изомерия 139  
 Капельная модель ядра 99, 192  
 Критическая деформация ядра 193  
 — энергия ядра 193  
 Критические размеры 225  
 Коэффициент размножения 216, 218  
 Линия поглощения, форма — — 173, 247  
 Нейтроны быстрые, рассеяние 54  
 — вторичные 209  
 —, длина свободного пробега 210, 268  
 —, магнитный момент 32  
 —, медленные, рассеяние 7  
 —, рассеяние в кристаллах неупругое 270  
 —, — — упругое 250  
 —, — в параводороде 33  
 —, — в ортоводороде 33  
 —, — свободными протонами 7  
 —, — связанными протонами 48  
 —, рефракция 296  
 —, средний квадрат длины замедления 210  
 —, функция распределения в кристаллах 289  
 Опенгеймера-Филлипа процесс 189, 209, 303  
 Ортоводород 34  
 Параводород 34  
 Потенциальный барьер 183  
 Правила отбора 148, 188  
 Предел устойчивости ядра 196  
 Прозрачность барьера 183

- Протоны, рассеяние протонами 57  
 — связанные 50  
 —, угловое распределение 62  
 Радиус действия ядерных сил 47  
 — ядра 169  
 Распределение частиц по энергиям 133  
 Рассеяние быстрых нейтронов 54, 122  
 —, дифференциальное сечение 13, 16, 50, 54  
 — дифракционное 122, 123  
 —, интегральное сечение 14  
 — медленных нейтронов 7  
 — нейтронов в кристаллах, влияние спина 257  
 — — — — — неупругое 270  
 — — — — — упругое 250  
 — — — ортоводороде 33  
 — — — параводороде 33  
 — — свободными протонами 7  
 — — связанными протонами 48  
 — неупругое 94, 182, 288  
 — потенциальное 10, 155, 181  
 — протонов протонами 57  
 — резонансное 149  
 — свободными ядрами 283  
 — упругое 93, 154, 181, 288  
 Резерфорда формула 57  
 Рефракция нейтронов 296  
 Свободная энергия ядра 101  
 Составное ядро 91  
 — —, распределение частиц по энергиям 133  
 — —, сечение образования 106  
 Столкновения неупругие, эффективное сечение 113  
 — упругие, эффективное сечение 50, 54, 120  
 Форма линии поглощения 173, 244, 247  
 Формула Брейта-Вигнера 145  
 Формула Брэгга 263  
 — дисперсионная 141  
 — для замедления нейтронов 210  
 — — энергии возбуждения 103  
 — Резерфорда 57  
 Функция распределения нейтронов в кристаллах 289  
 Цепная реакция 209  
 — —, гетерогенная система 219  
 — —, критические размеры 225  
 Ширина уровня 95, 106, 171  
 Энергия возбуждения 103  
 — критическая 193  
 — связи дейтрона 18  
 Энтропия ядра 102  
 Эффект Доплера 171  
 Эффективное сечение деления 208  
 — — захвата 72, 77, 78, 80, 82, 164, 172  
 — — неупругих столкновений 113, 272  
 — — образования составного ядра 115  
 — — рассеяния 10, 16, 56, 61, 155, 250, 263, 267  
 — — упругих столкновений 50, 54, 120, 151, 252  
 — — усреднённое 176  
 Ядерные реакции с заряженным частицами 183  
 — силы 54, 58  
 — —, радиус действия 47  
 Ядро, изомерия 139  
 —, капельная модель 99, 192  
 —, критическая деформация 193  
 —, — энергия 193  
 —, предел устойчивости 196  
 —, радиационные свойства 135  
 — составное 91, 106, 133  
 — тяжёлое, деление 191  
 — —, статистические свойства