

И. Я. ПОМЕРАНЧУК

Собрание научных трудов

в трех томах



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1972

И. Я. ПОМЕРАНЧУК

Собрание научных трудов

I

ФИЗИКА
НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
НЕЙТРОННАЯ ФИЗИКА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1972

Собрание научных трудов в трех томах. Померанчук И. Я.
Физика низких температур. Нейтронная физика. Том I.
Изд-во «Наука», 1972.

В собрание трудов выдающегося советского физика-теоретика академика И. Я. Померанчука включены почти все его научные статьи, опубликованные в различное время в отечественных и зарубежных периодических изданиях. Работы И. Я. Померанчука охватывают широкий круг физических вопросов, они содержат важные результаты в таких разделах современной физики, как физика элементарных частиц и ядерная физика, теория ядерных реакторов и теория твердых тел и жидкостей.

В I том вошли статьи по теории металлов и диэлектриков, по физике квантовых жидкостей и нейтронной физике.

Издание представляет значительный интерес для научных работников в области физики, инженеров-физиков, а также преподавателей, студентов и аспирантов физических специальностей вузов.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

В. Б. БЕРЕСТЕЦКИЙ (ответственный редактор),
 Б. Л. ИОФФЕ, И. Ю. КОБЗАРЕВ, Л. А. КОНДРАТЮК,
 Л. Б. ОКУНЬ

Собрание научных трудов включает почти все работы Исаака Яковлевича Померанчука.

Работы распределены по тематическому признаку: первый том посвящен физике низких температур и нейтронной физике, остальные два тома — физике элементарных частиц и квантовой теории поля. Работы по теории сильных взаимодействий элементарных частиц выделены в третий том. Каждый том делится на разделы также по тематическому признаку, внутри раздела работы следуют в хронологическом порядке. Полный хронологический перечень помещен в конце третьего тома.

Каждая статья снабжена ссылкой на журнал, в котором она опубликована. Статьи, опубликованные на русском и иностранном языках, печатаются по русскому тексту со ссылками на оба журнала. Статьи, опубликованные только на иностранном языке, печатаются в переводе. В собрание включено также несколько неопубликованных работ.

В собрание трудов не вошли книги И. Я. Померанчука, написанные совместно с А. И. Ахиезером «Вопросы теории ядра» (М., Гостехиздат, 1948) и «Введение в теорию нейтронных мультилиплицирующих систем» (М., Отчет ИТЭФ, 1947).

Редакционная коллегия



ИСААК ЯКОВЛЕВИЧ
ПОМЕРАНЧУК
Конец 40-х годов

Исаак Яковлевич Померанчук родился 20 мая 1913 г. в Варшаве. Его отец, Яков Исаакович, был инженером-химиком, мать Амалия Давыдовна — врачом. Во время первой мировой войны семья переехала в Ростов, а затем — в Рубежный, в Донбасс, где Исаак Яковлевич окончил в 1927 г. семилетнюю школу, а в 1929 г. — двухлетнюю школу ФЗУ при Рубежанском химическом заводе. Проработав на этом заводе два года рабочим, Исаак Яковлевич поступил в 1931 г. на первый курс Ивановского химико-технологического института. Со второго курса он перевелся на физико-механический факультет Ленинградского политехнического института, который и окончил в 1936 г.

Свою научную деятельность Исаак Яковлевич начал в 1935 г. в Физико-техническом институте в Харькове под руководством Л. Д. Ландау. Он появился у Ландау студентом, у которого окончательно созрело решение заниматься теоретической физикой. В два месяца он сдал теоретический минимум, только что введенный Ландау. Ландау оказал глубокое влияние на формирование Померанчука как ученого. Дружба его с Ландау продолжалась всю жизнь. Будучи уже зрелым теоретиком, всегда богатым новыми замыслами, Померанчук любил прежде всего «пропускать» их через учителя.

Первая работа И. Я. Померанчука, выполненная им совместно с А. И. Ахиезером и Л. Д. Ландау и опубликованная в августе 1936 г. в журнале «Nature», была посвящена рассеянию света светом в случае, когда энергия сталкивающихся фотонов много больше массы электрона. В том же 1936 г. была выполнена работа Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчука, в которой впервые были рассмотрены эффекты, связанные со взаимодействием электронов проводимости друг с другом; до этого в электронной теории металлов совокупность электронов проводимости рассматривалась всегда как газ, частицы которого взаимодействуют лишь с колебаниями решетки. Основной результат этой работы заключался в том, что влияние взаимодействия электронов на электросопротивление приводит к зависимости T^2 сопротивления чистого металла при низких температурах.

Из всего многообразия исследований Исаака Яковлевича в области физики твердого тела необходимо выделить два, принесших ему мировую известность. Речь идет о работах по теории рассеяния нейтронов в кристаллах и теории теплопроводности диэлектриков.

В работе по теории рассеяния медленных нейтронов в кристалле (1938 г.) и более поздней работе, выполненной совместно с А. И. Ахиезером (1947 г.), была дана общая теория неупругого рассеяния нейтронов, сопровождающегося однофононными и многофононными возбуждениями в кристалле. Фактически эти работы послужили отправной точкой для целого ряда более поздних исследований, приведших, в частности, к созданию метода восстановления фононного спектра кристаллов на основе измерения дважды дифференциального сечения медленных нейтронов. К этому же циклу принадлежит работа по рефракции нейтронов (1948 г.), где для медленных частиц получен целый ряд соотношений, очень близких к оптическим.

Следует специально отметить, что глава книги «Некоторые вопросы теории ядра» (написанной Исааком Яковлевичем с А. И. Ахиезером в 1948 г.), посвященная взаимодействию медленных нейтронов с веществом, до сих пор является лучшим введением в рассматриваемую проблему.

Ангармоническое взаимодействие фононов в кристаллах и общая задача теплопроводности решетки всегда были и остаются до сих пор одной из наиболее интересных проблем физики твердого тела. Исаак Яковлевич сделал первый шаг в развитии этого направления. В своей докторской диссертации, защищенной в 1940 г., он дал подробный анализ трехфононных и четырехфононных взаимодействий в кристалле; им построена теория теплопроводности диэлектриков как при низких, так и при высоких температурах.

И. Я. Померанчук обратил внимание на принципиальные дефекты прежних теорий теплопроводности диэлектриков. Он показал, что кубическая ангармоничность колебаний атомов в решетке кристалла, вопреки существовавшему мнению, недостаточна для установления конечной теплопроводности; для получения конечного результата необходимо учитывать ангармоничность более высоких порядков. Совместное действие этих ангармоничностей и других источников рассеяния фононов (примеси, отражение от стенок кристаллитов, рассеяние на упругих деформациях) приводит к сложной картине, которая была исследована И. Я. Померанчуком с исчерпывающей детальностью. Были определены законы, по которым должна меняться теплопроводность диэлектриков в зависимости от температуры, концентрации примесей и размеров кристаллитов в различных областях значений этих параметров и для различных типов кристаллической структуры. Этот цикл работ очень характерен для всего творчества Исаака Яковлевича, ибо здесь физическая интуиция играла не менее важ-

ную роль, чем формальный аппарат. В этой связи показательно, что хотя вся задача в целом в дальнейшем получила широкое развитие, поставленная им проблема о роли длинноволновых фононов в теплопроводности кристаллов, которую часто называют «проблемой Померанчука», и по сей день является весьма актуальной.

Из других исследований Исаака Яковлевича по физике твердого тела следует особо отметить работу, посвященную изотопическому эффекту в остаточном сопротивлении металлов (1958). В ней Исаак Яковлевич впервые обратил внимание на то, что хотя амплитуды рассеяния электронов на ионах различных изотопов в металле имеют одно и то же значение, нарушение строгой периодичности в динамической картине колебаний (за счет разных масс изотопов) приводит к конечному сопротивлению в металлах даже при $T = 0$. Это весьма нетривиальный эффект, и нет сомнений, что в ближайшем будущем он будет обнаружен экспериментально.

К исследованиям Исаака Яковлевича по физике твердого тела примыкают его работы по теории квантовой жидкости НеII и Не³. В работе о движении посторонних частиц в НеII, опубликованной совместно с Л. Д. Ландау в 1948 г., на основе простых качественных соображений показано, что всякая частица, растворенная в сверхтекучем гелии, должна принимать участие в нормальном (а не сверхтекучем) движении, т. е. должна входить в нормальную компоненту жидкости вне зависимости от того, какой статистике эта частица подчиняется. Эта работа имела принципиальное значение; она положила конец существовавшему до нее неправильным представлениям о том, что участие примесей в сверхтекучем движении зависит от статистики. В частности, из этой работы следовало, что в нормальную часть должны входить малые примеси как изотопа Не³ (подчиняющегося статистике Ферми), так и изотопа Не⁶ (подчиняющегося статистике Бозе), что и было подтверждено дальнейшими экспериментами.

Вопрос о влиянии примесей на термодинамические и гидродинамические свойства жидкого гелия был затем подробно исследован И. Я. Померанчуком в 1949 г.

В работе, посвященной теории жидкого Не³ (1950 г.), впервые были качественно рассмотрены квантовые жидкости с фермиевским спектром. Было показано, что вязкость такой жидкости должна возрастать с уменьшением температуры как $1/T^2$. Было показано также, что в жидком Не³ существенную роль играют обменные эффекты, которые приводят к своеобразным явлениям при превращении жидкого Не³ в твердый. Наличие магнитного упорядочения ядерных спинов в жидкости при его отсутствии в твердом кристалле приводит к тому, что энтропия твердой фазы становится (при достаточно низких температурах) больше, чем у жидкой фазы — ситуация, обратная обычной. В результате было предсказано существование минимума на кривой фазового равновесия (на диаграмме pT) гелия — знаменитый эффект Померанчука,

полностью подтвержденный дальнейшими экспериментами. В последнее время эта особенность жидкого Не³ успешно используется для получения сверхнизких температур.

И. Я. Померанчук внес важнейший вклад в создание ядерных реакторов в Советском Союзе. Он начал заниматься этой проблемой в 1943 г. Этот год знаменует развертывание в нашей стране широкого фронта научных исследований, ставящих целью овладевание атомной энергией. Как известно, эта задача была успешно решена в рекордно короткие сроки.

И. Я. Померанчук сразу же становится одним из ближайших помощников научного руководителя всей проблемы И. В. Курчатова и возглавляет разработку теории атомных реакторов. За исключением работ Я. Б. Зельдовича и Ю. Б. Харитона, выполненных перед войной, теория реактора стала интенсивно развиваться в нашей стране именно с 1943 г. и в первую очередь благодаря работам И. Я. Померанчука.

При создании первого советского физического реактора фундаментальную роль сыграли так называемые экспоненциальные эксперименты, проводившиеся И. В. Курчатовым. В этих экспериментах оказалось возможным определять такие важнейшие величины, как поглощение тепловых нейтронов замедлителем, длины замедления нейтронов деления. Эти эксперименты были бы невозможны без теории экспоненциальных опытов, и эту теорию построил И. Я. Померанчук, обеспечив, таким образом, осуществление важнейшего этапа по овладеванию ядерной энергией в нашей стране.

Еще более крупным вкладом Исаака Яковлевича в теорию реактора была созданная им теория резонансного поглощения нейтронов в гетерогенных системах. Как сейчас хорошо известно, только гетерогенное размещение блоков урана в замедлителе позволяет эффективно осуществить незатухающую цепную реакцию в системах из естественного урана и замедлителя. Теория резонансного поглощения в блочных системах И. Я. Померанчука, созданная совместно с И. И. Гуревичем, несмотря на внешнюю простоту, дает глубокую физическую картину явления.

Большое значение имеют работы И. Я. Померанчука по теории критических размеров. Так, ему принадлежит формула для критического размера в возрастном приближении. Важны работы И. Я. Померанчука по теории температурных эффектов в реакторе. Померанчук первым начал исследование процессов размножения нейтронов при замедлении.

Являясь одним из создателей диффузионной теории реактора, И. Я. Померанчук первый заложил основы более точной теории, начав систематически применять кинетические уравнения к процессам замедления и диффузии нейтронов в реакторе.

Вклад И. Я. Померанчука в теорию ядерных реакторов не ограничен его непосредственным участием, его научными трудами. Ему принадлежит важная роль в создании советской школы



Конференция по физике частиц высоких энергий. Москва, 1956.
И. Я. Померанчук. За столом Л. Д. Ландау

теории ядерных реакторов. В частности, под его руководством начали работать в этой области А. Д. Галанин, Б. Л. Иоффе, А. П. Рудик и др.

Несколько работ Исаака Яковлевича посвящены теории магнитно-тормозного (так называемого синхротронного) излучения, возникающего при движении релятивистской заряженной частицы в магнитном поле. Первая работа, принадлежащая этому направлению, была опубликована в 1939 г. В ней было указано на характерную особенность излучения электронов при движении в магнитном поле: интенсивность его так растет с энергией, что после движения частицы в магнитном поле в течение заданного промежутка времени энергия частицы, независимо от ее начального значения, стремится к некоторому пределу. По этой причине, например, приходящий из космоса электрон при движении в земном магнитном поле должен терять энергию таким образом, что на земной поверхности его энергия не может быть больше, чем $5 \cdot 10^{17}$ эв. В последующих работах (1944—1946 гг.) было обращено внимание на важную роль магнитно-тормозных потерь энергии при движении электронов в циклических ускорителях (бетатроне и синхротроне) и проведен более детальный анализ излучения. В дальнейшем выяснилось, что вскрытая Исааком Яковлевичем особенность поведения заряженных частиц в магнитном поле наблюдается и при движении в поле электромагнитной волны с достаточно низкой частотой. Этот эффект (существование предельной

энергии) очень важен при решении проблемы происхождения космических лучей.

На протяжении многих лет И. Я. Померанчук занимался исследованием процессов взаимодействия излучения с веществом. Им было проведено теоретическое рассмотрение вопроса о флуктуациях ионизационных пробегов заряженных частиц в веществе. Решение этой задачи оказалось весьма существенным для опытов с космическими лучами. В 1950 г., исследуя вопрос об излучении квантов тяжелыми частицами, Исаак Яковлевич (совместно с И. М. Шмушкевичем) показал, что наличие обменных сил между протоном и нейтроном должно приводить к значительному возрастанию интенсивности излучения фотонов при столкновениях между этими частицами или их столкновениях с ядрами.

Большое значение имели совместные работы И. Я. Померанчука и Л. Д. Ландау по электронно-лавинным процессам при высоких энергиях (1953 г.). В них было показано, что поскольку расстояния, на которых происходит тормозное излучение электрона, растут с ростом энергии электрона, при достаточно высоких энергиях в процессе тормозного излучения одновременно участвует целая совокупность атомов среды. Действие большого числа атомов вызывает многократное кулоновское рассеяние электрона во время акта тормозного излучения и приводит к тому, что формулы Бете — Гайтлера оказываются неприменимыми при высоких энергиях. В работах Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчука были получены качественные оценки влияния многократного рассеяния на тормозное излучение и рождение пар. В дальнейшем эта задача переросла в целую область физики.

В 1947 г. И. Я. Померанчук рассчитал сечения аннигиляции позитронов на электронах с учетом поляризации и обнаружил, что в S -состоянии с полным спином, равным единице, двухквантовая аннигиляция запрещена. Эта работа легла в основу дальнейшего развития теории позитрония. В настоящее время физика позитрония и ее приложения составляют целую область.

Благодаря обнаруженному И. Я. Померанчуком эффекту позитроний применяется как весьма точный индикатор в разнообразных исследованиях.

В 1952 г. Исаак Яковлевич совместно с А. Д. Галаниным рассмотрел влияние поляризации вакуума на расщепление уровней μ -мезоатомов. В отличие от обычных атомов, в μ -мезоатомах из-за их малого радиуса поляризация вакуума дает большой вклад. Обнаруженное явление интересно как с теоретической точки зрения (возможность наблюдения поляризации вакуума), так и для экспериментальной физики мезоатомов.

Начало 50-х годов, когда в лабораториях стали искусственно получать мезоны, стало временем зарождения физики элементарных частиц в современном смысле этого слова. С этого момента интересы Исаака Яковlevича все больше концентрируются на проблеме сильных взаимодействий элементарных частиц. На первом



На 9-й конференции по физике высоких энергий в Дубне, 1964 г.
Слева направо И. Я. Померанчук, С. Н. Вернов и В. И. Векслер

этапе он развивает феноменологический подход к теории сильного взаимодействия. В цикле работ И. Я. Померанчука с соавторами была развита теория взаимодействия π -мезонов с дейtronами. Эта теория (так называемое импульсное приближение) связывает сечение процессов, происходящих при столкновении мезонов с дейtronами, с сечениями процессов, происходящих при столкновениях мезонов со свободными нуклонами. Анализ дейtronных реакций, принадлежащий Исааку Яковлевичу, имеет большое значение. Ведь большинство сведений о взаимодействиях с нейтронами при высоких энергиях физики получают, делая опыты с дейtronами.

С 1953 г. после того, как окончательно выяснилось, что мезоны сильно взаимодействуют с нуклонами и теория возмущений совершенно не применима к процессам взаимодействия π -мезонов и нуклонов, Исаак Яковлевич обращается к фундаментальной проблеме: исследованию общих свойств уравнений квантовой теории поля в тех случаях, когда взаимодействие нельзя считать малым. В совместной с А. Д. Галаниным и Б. Л. Иоффе работе исследуется перенормировка массы и заряда в ковариантных уравнениях теории поля. В это время Л. Д. Ландау и его сотрудниками было получено решение уравнений квантовой электродинамики при высоких энергиях. Исаак Яковлевич анализирует это решение и совместно с Л. Д. Ландау показывает, что из его свойств вытекает возможность пренебречь в лагранжиане системы электронов и квантов

при высоких энергиях действием свободного электромагнитного поля еще в той области, где эффективный заряд мал. Отсюда был получен весьма важный вывод о том, что в квантовой электродинамике любой сколь угодно большой затравочный заряд полностью экранируется зарядами, возникшими при поляризации вакуума, так что физический заряд электрона, наблюдаемый на больших расстояниях, должен быть равен нулю. Тем самым было указано на внутреннюю противоречивость квантовой электродинамики. Для электродинамики проблемы, связанные с нулем заряда, могут оказаться существенными только при энергиях $\sim m_e c^2 e^{137}$ и не затрагивают области, где обычная техника перенормировок достаточна для решения реальных задач. Для мезонных теорий с сильной связью это может быть не так. Развивая эти идеи, Исаак Яковлевич показал, что в мезонной теории может возникнуть аналогичная ситуация с обращением в нуль физического заряда, т. е. что есть серьезные основания считать мезонную теорию также внутренне противоречивой. Итоги этих исследований были подведены в совместной с К. А. Тер-Мартиросяном и В. В. Судаковым работе.

Вывод о внутренней противоречивости теорий, использующих лагранжиев метод, привел Исаака Яковлевича к поискам других подходов к теории сильных взаимодействий, не использующих уравнений теории поля. Исаак Яковлевич возвращается к феноменологическому подходу. Основываясь на общих свойствах амплитуд квантовой теории поля, он совместно с Л. Б. Окунем показывает, что фазы рассеяния с большими орбитальными моментами определяются полюсными диаграммами, соответствующими обмену наилегчайшей частицей. Теоретическое вычисление фаз, обусловленных обменом одним и двумя мезонами, которое было выполнено на основе этих соображений, позволило значительно упростить фазовый анализ нуклон-нуклонного рассеяния.

В течение длительного времени (начиная еще с 1946 г.) Исаак Яковлевич неоднократно возвращался к модели дифракционного сильного взаимодействия при высоких энергиях. Эта модель рассматривала частицы как черные шарики и позволяла предсказывать некоторые свойства процессов, не конкретизируя механизмы взаимодействия. По существу именно дифракционные представления привели Исаака Яковлевича в 1956 г. совместно с Л. Б. Окунем к формулировке предсказаний о том, что при предельно высоких энергиях сечения процессов перезарядки должны стремиться к нулю, а сечения упругих процессов для частиц из данного изотопического мультиплета не должны зависеть от их заряда. С другой стороны, он же впервые обратил внимание на неудовлетворительность дифракционной теории. Изучая реакции рождения нескольких частиц при малых импульсах отдачи мишени, И. Я. Померанчук и В. Б. Берестецкий пришли к заключению, что обычная теория дифракции приводит к трудностям и нуждается в существенном изменении.



Весенняя школа теоретической и экспериментальной физики. Ереван, 1965. И. Я. Померанчук и К. Штраух

Переход Исаака Яковлевича к исследованиям в области предельно высоких энергий не был случаен. Он искал в физике сильного взаимодействия такие общие свойства, которые проявлялись бы наиболее простым образом. Известно, что при создании квантовой механики решающую роль сыграло знание свойств простейшей квантовомеханической системы — атома водорода. В создании теории сильного взаимодействия Исаак Яковлевич отводил роль «атома водорода» процессам взаимодействия при асимптотически высоких энергиях. В 1958 г. на основе анализа дисперсионных соотношений Исаак Яковлевич формулирует свою знаменитую теорему, согласно которой при предельно высоких энергиях сечения взаимодействия с нуклоном частицы и античастицы должны быть равны.

Теорема Померанчука знаменовала рождение нового направления — физики предельно высоких энергий. В последующие годы эта область получила быстрое развитие. Ее разрабатывали физики-теоретики в десятках научных центров во всем мире. Крупнейшие ускорители были использованы для экспериментальной проверки ее предсказаний. Исаак Яковлевич был признанным лидером этого направления. Совместно с В. Н. Грибовым, с начала 60-х годов Исаак Яковлевич разрабатывает подход к теории асимптотик, основанный на математическом аппарате комплексных угловых моментов, введенном Т. Редже.

Почти все существенные результаты, полученные в этой области, связаны с именем И. Я. Померанчука. В течение 1962—1964 гг. он совместно с В. Н. Грибовым исследовал свойства дифракционного рассеяния, обусловленного одним полюсом Редже, получившим название полюса Померанчука. Результатом этих исследований явились важные теоремы о соотношениях между сечениями различных процессов, свойствах траектории полюса Померанчука, существовании максимума при рассеянии назад, поляризационных явлениях при высоких энергиях и др. Одновременно развивались и чисто теоретические аспекты метода комплексных моментов. Было установлено сгущение полюсов Редже при пороговых энергиях. Было обнаружено замечательное свойство парциальной волны при моменте, равном минус единице, послужившее началом нового этапа в развитии теории комплексных моментов — обнаружения точек ветвления в плоскости комплексных моментов. Дальнейшие работы Исаака Яковлевича в этом направлении также сыграли большую роль. Им совместно с В. Н. Грибовым и К. А. Тер-Мартиросяном была исследована структура точек ветвления в комплексной плоскости и высказана идея об усилении ветвлений полюсом, совершенно по-новому поставившая вопрос о структуре дифракционного ко-
нуса.

Исаак Яковлевич придавал большое значение методу комплексных моментов. Этот метод был для него не только средством для описания процессов при высоких энергиях, но и новым языком в теории сильных взаимодействий, в котором отсутствуют частицы как объект исследования, и их место занимают траектории полюсов Редже. Научные интересы Исаака Яковлевича охватывали и область слабого взаимодействия. Опубликованная посмертно его работа о поведении слабого взаимодействия при высоких энергиях вызвала большой интерес и стимулировала появление ряда работ. Влияние этой области интересов Исаака Яковлевича сказалось и в том, что теория слабого взаимодействия (в частности, при высоких энергиях) занимала значительное место в работах его учеников (Б. Л. Иоффе, И. Ю. Кобзарева, Л. Б. Окуня, А. П. Рудика).

Исаак Яковлевич Померанчук создал большую школу советских физиков-теоретиков. Он организовал теоретический отдел в Институте теоретической и экспериментальной физики и руководил им со дня основания института до последних дней жизни. Он был основателем и в течение ряда лет руководителем теоретических групп в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова и Лаборатории ядерных проблем Объединенного Института Ядерных Исследований (С. М. Биленский, Л. И. Лапидус и др.); его влияние плодотворно сказалось на выборе основных направлений их работ. В течение 20 лет он был профессором Московского инженерно-физического института.

За научные работы Исааку Яковлевичу дважды была присуж-

дена Государственная премия первой степени. Он был награжден орденом Ленина, орденом Трудового Красного Знамени и орденом Знак почета.

В 1953 г. И. Я. Померанчук был избран членом-корреспондентом, а в 1964 г. — действительным членом Академии наук СССР.

Исаак Яковлевич был скромным и даже застенчивым, когда дело касалось его личных удобств; однако он совершенно преобразился, становился настойчивым и непреклонным, когда речь шла об интересах науки.

Исаак Яковлевич очень любил физику. Он радовался каждому новому научному результату. Любовь к физике означала для Исаака Яковлевича неустанный труд. Работа была его высшим наслаждением. Он был неутомим. Он жил физикой. Он не понимал, как можно тратить время на что-либо другое. Самым главным было для него установление научной истины. Именно этот критерий определял его отношение к физическим идеям и проектам, научным статьям и людям. Он всегда был устремлен вперед. Если ему рассказывали о том, как стал «работать» один из «эффектов Померанчука», он только устало и несколько виновато улыбался. Что из того, когда так много непонятного, когда так много проблем, к которым пока нет подступа. Он нес на себе бремя человеческого стремления к познанию. Даже страшная болезнь, рак пищевода, не изменила его поведения. Исаак Яковлевич продолжал интенсивно работать буквально до самого последнего дня. Он продолжал встречаться с физиками. Он обсуждал научные проблемы; его волновало все связанное с развитием физики в нашей стране. Последнюю свою научную работу — о поведении полного сечения аннигиляции электронно-позитронных пар в адроны при высоких энергиях — Исаак Яковлевич закончил за два дня до смерти, наступившей 14 декабря 1966 года.

В. Б. Берестецкий

ТЕОРИЯ МЕТАЛЛОВ

1

О СВОЙСТВАХ МЕТАЛЛОВ ПРИ ОЧЕНЬ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ *

Совместно с Л. Ландау

В первой части разбирается влияние взаимодействия электронов, рассматриваемого как малое возмущение, на сопротивление металлов. Сопротивление, вызванное взаимодействием электронов, пропорционально T^2 .

Во второй части выводится выражение для термо-электродвижущей силы, находящееся в согласии с соотношением Онсагера — Томсона.

§ 1. Существующая теория металлов не учитывает взаимодействия электронов металла друг с другом, хотя последнее должно быть весьма большим и пренебрегать им ни в какой степени нельзя. Так как, однако, строгое рассмотрение вопроса невозможно при существующем положении теории, то необходимо по крайней мере рассмотреть взаимодействие электронов как малое возмущение. Такое рассмотрение дает возможность по крайней мере выяснить пределы применимости существующей теории. При этом оказывается, что при низких температурах порядка нескольких абсолютных градусов электрическое сопротивление, вызванное взаимодействием электронов, нельзя считать малым, так как эффекты, им обусловленные, сравнимы по величине или больше эффектов, обусловленных взаимодействием электронов с тепловыми колебаниями решетки. Увеличение сопротивления, вызванное взаимодействием электронов, пропорционально T^2 и при низких температурах больше обычного сопротивления, пропорционального T^6 . Имеющиеся здесь соотношения аналогичны соотношениям, существующим в области теплоемкости металлов, где при низких температурах (несколько абсолютных градусов) теплоемкость

электронов играет существенную роль (так как она пропорциональна T , а дебаевская — T^3), несмотря на то что при обычных температурах теплоемкостью можно пренебречь по сравнению с теплоемкостью решетки.

Как известно, состояние электрона в периодической решетке описывается волновой функцией $\psi = e^{ikr} \phi(k, r)$, где компоненты вектора k определены только с точностью до периодов обратной решетки, а функция $\phi(k, r)$ является периодической функцией с периодами, равными периодам решетки

$$\begin{aligned}\Phi(k, x + d_1, y, z) &= \phi(k, x, y + d_2, z) = \phi(k, x, y, z + d_3) = \\ &= \phi(k, x, y, z),\end{aligned}$$

где d_1, d_2 и d_3 — периоды решетки.

Вектор $\hbar k$ (квазимпульс) играет роль импульса свободной частицы; $v = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \epsilon}{\partial k}$ — скорость электрона, ϵ — его энергия, $\hbar \dot{k} = F$, где F — сила, действующая на электрон. Благодаря неоднозначности определения вектора k сумма векторов k у взаимодействующих электронов сохраняется с точностью до периодов обратной решетки, так как возможны только такие переходы, для которых

$$\sum k_i - \sum k^i = 0, \quad \frac{2\pi}{d}, \quad \frac{4\pi}{d}, \dots,$$

где k_i — векторы в начальном состоянии, k^i — векторы в конечном состоянии.

Таким образом, увеличение импульса, вызванное электрическим полем, может разрушаться и вследствие взаимодействия электронов друг с другом, а не только с тепловыми колебаниями решетки.

Напишем теперь условия стационарности для функции распределения электронов при наличии электрического поля, рассматривая пока только их взаимодействия между собой. Мы получаем

$$\frac{dn_1}{d\epsilon} v_1 e F = \int W_{k_1 k_2 k' k''} [n_1 n_2 (1 - n') (1 - n'') - n' n' (1 - n_1) (1 - n_2)] \times d\tau_2 d\tau''. \quad (1)$$

Здесь F — напряжение электрического поля; n_1 и n_2 — плотности электронов в начальном состоянии, n' и n'' — в конечном.

Благодаря законам сохранения (энергия и квазимпульс) интегрируем только по квазимпульсам электронов в состояниях n_2 и n'' , так как состояние n' будет задано, если известны состояния n_1, n_2 и n''

$$\epsilon' = \epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon'', \quad k' = k_1 + k_2 - k'' - \frac{2\pi m}{d}, \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

Вероятность перехода $W_{k_1 k_2 k' k''}$ определяется обычным образом через матричный элемент перехода возмущающей энергии $V_{k_1 k_2 k' k''}$.

* ЖЭТФ, 1937, 7, 379; Phys. Zs. Sowjet, 1936, 10, 649.

Предполагая энергию взаимодействия кулоновской, можно ожидать, что область малых углов «отклонения» (т. е. переходов, при которых электрон от состояния с некоторым вектором \mathbf{k} переходит в состояние, характеризующееся вектором \mathbf{k}' , мало отличающимся от \mathbf{k}), будет играть особую роль (как известно, при кулоновском взаимодействии вероятность рассеяния обратно пропорциональна $\sin^4 \vartheta/2$, где ϑ — угол рассеяния) в металле; однако эта область ничем не замечательна, так как малые углы отклонения означают, что взаимодействующие электроны в среднем находятся на больших расстояниях друг от друга, вследствие чего всегда имеется экранирование посторонними зарядами и энергия взаимодействия уже не будет кулоновской. Произведем теперь подстановку в (1), вместо $n n + \delta n$, где n — фермиевская равновесная функция распределения, равная $\left[\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) + 1 \right]^{-1}$, δn — отклонение равновесного значения, предполагаемое малым. δn положим равным $\frac{dn}{d\varepsilon} \varphi(\mathbf{k})$, где φ — некоторая функция. Так как фермиевская функция обращает в нуль правую часть уравнения (1), то справа берем члены 1-го порядка малости, т. е. линейные относительно φ . Слева же производной от δn пренебрегаем. При этом (1) переходит в

$$-\frac{dn}{d\varepsilon} v_1 eF = \int W_{k_1 k_2 k' k''} \left\{ \varphi_1 \frac{dn_1}{d\varepsilon} [(1 - n')(1 - n'')n_2 + n'n''(1 - n_2)] + \varphi_2 \frac{dn_2}{d\varepsilon} [(1 - n')(1 - n'')n_1 + n'n''(1 - n_1)] \right. - \text{члены},$$

где нижние значки заменены верхними и наоборот}. (2)

Так как n и $dn/d\varepsilon$ суть функции только от $(\varepsilon - \mu)/kT$, то δn можно положить функцией от $\chi = (\varepsilon - \mu)/kT$ и углов в импульсном пространстве. От переменных k_x, k_y, k_z переходим к переменным $(\varepsilon - \mu)/kT$ и углам в импульсном пространстве. Тогда вместо (2) будет

$$-\frac{dn_1}{d\varepsilon} v_1 eF = \int W_{k_1 k_2 k''} \{ \} \Delta_2 \Delta'' d\chi_2 d\chi'' d\omega_2 d\omega'' (kT), \quad (2a)$$

где $\Delta = \frac{\partial (k_x k_y k_z)}{\partial (\varepsilon \varphi)}$ — якобиан перехода к переменным $\varepsilon, \vartheta, \varphi, d\omega$ — элементы углов. { } означает выражение, заключенное между фигурными скобками в (2). Подынтегральное выражение в (2a) есть функция от χ_1, χ_2, χ'' и ω_1, ω_2 и ω'' ; весь интеграл является функцией от χ_1 и ω_1 . (Буква k , стоящая перед T , означает постоянную Больцмана и не должна быть смешиваема с квазимпульсом, который всегда сопровождается специальным индексом.) Если теперь в (2a) подставить вместо

$$n_1 = \left(\exp\left(\frac{\varepsilon_1 - \mu}{kT}\right) + 1 \right)^{-1}$$

и соответственно вместо n_2 и n'' их фермиевские выражения, то получаем

$$-\frac{dn_1}{d\varepsilon} v_1 eF = kT \int W_{k_1 k_2 k' k''} \left\{ \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{(e^{-\chi_1} + 1)(e^{-\chi_2} + 1)(e^{\chi'} + 1)(e^{\chi''} + 1)} - \frac{\varphi' + \varphi''}{(e^{\chi_1} + 1)(e^{\chi_2} + 1)(e^{-\chi'} + 1)(e^{-\chi''} + 1)} \right\} \Delta_2 \Delta'' d\chi_2 d\chi'' d\omega_2 d\omega''. \quad (3)$$

В члене с φ_1 можно выполнить оба интегрирования по χ_2 и χ'' , в членах с φ_2, φ' и φ'' — только одно (в члене с φ' интегрирование по χ'' заменяется интегрированием по χ'). При этом якобиан преобразования Δ и вероятность $W_{k_1 k_2 k' k''}$ в нашем приближении можно рассматривать независящими от энергии, т. е. от χ (так как на самом деле они являются медленно меняющимися функциями по сравнению с φ , которая меняет порядок своей величины при изменении ε от μ до $\mu \pm kT$). В результате простого, но длинного интегрирования получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} v_1 eF = & - \frac{e^{\chi_1} v_1 eF}{(1 + e^{\chi_1})^2 kT} = (kT) \int W_{k_1 k_1 k' k''} \left\{ \left[2 \int_0^\infty \frac{\chi d\chi}{e^\chi + 1} + \right. \right. \\ & + 2 \int_0^\infty \frac{\chi d\chi}{e^\chi - 1} + \frac{\chi^2}{2} \left. \right] \frac{\varphi_1}{(e^{\chi_1} + 1)(e^{-\chi_1} + 1)} + \\ & + \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi_{11} (\chi_1 - \chi'') d\chi_2}{(e^{-\chi_1} + 1)(e^{-\chi_{11}} + 1)(e^{\chi_1} - e^{\chi_{11}})} - \\ & - \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi^1 (\chi_1 - \chi') d\chi'}{(e^{-\chi_1} + 1)(e^{-\chi'} + 1)(e^{\chi_1} - e^{\chi'})} - \\ & \left. \left. - \int \frac{\varphi'' (\chi_1 - \chi'') d\chi''}{(e^{-\chi_1} + 1)(e^{-\chi''} + 1)(e^{\chi_1} - e^{\chi''})} \right\} \Delta_2 \Delta'' d\omega_2 d\omega'' \right\} \Delta_2 \Delta'' d\omega_2 d\omega''. \end{aligned} \quad (4)$$

Из этого уравнения следует, во-первых, что $\varphi(\chi) = \varphi(-\chi)$, так как $\varphi(-\chi)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и $\varphi(\chi)$, только с φ_2 от $-\chi_2$, φ' от $-\chi'$ и φ'' от $-\chi''$; во-вторых, если уравнение (4) переписать в виде

$$\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} v_1 eF = A \varphi_1 + \int L(\chi_1 \chi) \varphi(\chi) d\chi,$$

то оператор L имеет симметричное ядро

$$L(\chi_1 \chi) = \frac{\chi_1 - \chi}{(e^{-\chi_1} + 1)(e^{-\chi} + 1)(e^{\chi_1} - e^\chi)} = L(\chi, \chi_1);$$

в-третьих, из уравнения (4) следует, что $\varphi = Fg(\chi, \omega)/T^2$, где $g(\chi, \omega)$ — некоторая четная функция χ .

Находим ток

$$i = -2e \int v \frac{\partial n}{\partial e} \varphi d\tau = -\frac{2eF}{T} \int \frac{\partial n}{\partial e} v \Delta g(\chi\omega) d\chi d\omega = \frac{aF}{T^2},$$

$$a = +2e \int \frac{e^\chi g(\chi\omega)}{(1+e^\chi)^2} \Delta v d\chi d\omega, \quad \Delta = \frac{\partial (k_x k_y k_z)}{\partial (\varepsilon \theta \varphi)}.$$

Так как $\partial n/\partial e$ имеет при низких температурах вид δ -функции от $e - \mu$, т. е. отлично от нуля только при e , близких к μ , можно при интегрировании по e (χ) рассматривать $v\Delta$ равными своему значению при $e = \mu$.

Таким образом, сопротивление, вызванное взаимодействием электронов друг с другом, пропорционально T^2 .

При температурах, меньших дебаевской, но больших, чем те, при которых существенно взаимодействие электронов, сопротивление пропорционально T^5 (определяется тепловыми колебаниями решетки).

При очень низких температурах порядка нескольких абсолютных градусов сопротивление пропорционально T^2 . В промежуточной области температур должно получиться качественное согласие с опытом, если соединить эти два закона формулой вида

$$R = \alpha T^2 + \beta T^5.$$

Эта формула хорошо описывает данные о сопротивлении платины до температур порядка 20° с коэффициентами α и β , равными $16 \cdot 10^{-7}$ и $3 \cdot 10^{-7}$.

§ 2. Существующие теории термо-электрических явлений при низких температурах не являются удовлетворительными. Так, Бете¹ выводит выражение для термо-электродвижущей силы, не учитывая установления равновесия по направлениям (идущее при низких температурах медленнее, чем по энергиям), получает поэтому результат, который противоречит соотношениям Томсона — Онсагера² между теплом Пельтье Π , теплом Томсона M и произвольной от термо-электродвижущей силы по температуре E

$$E = \Pi \frac{1}{T}, \quad M = T \frac{dE}{dT}. \quad (5)$$

Выполнение этих соотношений обеспечивается симметричностью $s \otimes s$ -операторов, приводящей к тому, что если написать

электрический i и тепловой s ток в виде

$$i = \alpha_{11} \frac{d(\varphi - \mu/e)}{dz} + \frac{\alpha_{12}}{T} \frac{dT}{dz}, \quad s = \alpha_{21} \frac{d(\varphi - \mu/e)}{dz} + \alpha_{22} \frac{dT}{dz},$$

причем z — координата, φ — потенциал, то $\alpha_{12} = \alpha_{21}$.

Это равенство и дает соотношения (5); у Бете это равенство не соблюдается. Бете пользуется при низких температурах функцией распределения (вернее, ее отклонением от равновесного фермиевского значения) такого вида:

$$\delta n = \frac{\partial n}{\partial e} \frac{\alpha(\omega)}{T^5} \frac{d(\varphi - \mu/e)}{dz} + \frac{\partial n}{\partial e} \left[\frac{U(\chi, \omega)}{T^3} + \frac{g(\chi, \omega)}{T^2} \right] \frac{dT}{dz},$$

где α — функция только углов в импульсном пространстве, U и g — функции углов и энергии, причем $U(\chi, \omega)$ — нечетная функция $\chi = (e - \mu)/kT$, $g(\chi, \omega)$ — четная функция χ . Найдем α_{12} и α_{21} ; α_{12}/T — есть ток от членов в δn , пропорциональных dT/dz , т. е.

$$\frac{1}{T} \alpha_{12} = -2e \int v_z \frac{\partial n}{\partial e} \left[\frac{U(\chi, \omega)}{T^3} + \frac{g(\chi, \omega)}{T^2} \right] \Delta d\chi d\omega; \quad \Delta = \frac{\partial (k_x k_y k_z)}{\partial (\varepsilon \theta \varphi)}.$$

Ввиду того что $\partial n/\partial e$ имеет при низких температурах вид δ -функций от $e - \mu$, т. е. отлично от нуля при e , близких к μ , можно в интеграле с g считать $v_z \Delta = [v_z \Delta]_{e=\mu} = \text{const}$. В интеграле с $U(\chi, \omega)$ такое приближение дает нуль ввиду нечетности функции $U(\chi, \omega)$, поэтому там разлагаем $v_z \Delta$ в ряд

$$v_z \Delta = [v_z \Delta]_{e=\mu} + \left[\frac{\partial}{\partial e} [v_z \Delta] \right]_{e=\mu} (e - \mu) = [v_z \Delta]_{e=\mu} + \chi kT \left[\frac{\partial}{\partial e} [v_z \Delta] \right]_{e=\mu}.$$

Благодаря этому $\alpha_{12}/T = a/T^2$, где

$$\alpha = 2e \int \frac{e^\chi}{(1+e^\chi)^2} g(\chi\omega) d\chi d\omega [v_z \Delta]_{e=\mu} + \\ + 2e \left[\frac{\partial}{\partial e} [v_z \Delta] \right]_{e=\mu} k \int \frac{e^\chi}{(1+e^\chi)^2} \chi U(\chi\omega) d\chi d\omega;$$

α_{21} — есть тепловой поток от члена в δn , пропорционального электрическому полю,

$$\alpha_{21} = 2 \int v_z (e - \mu) \frac{\alpha(\omega)}{T^5} \frac{\partial n}{\partial e} \Delta d\chi d\omega = \\ = -2k \int v_z \chi \frac{e^\chi}{(1+e^\chi)^3} \frac{\Delta \alpha(\omega)}{T^4} d\chi d\omega = \\ = -2k \int \chi \frac{e^\chi}{(1+e^\chi)^2} \frac{\alpha(\omega)}{T^4} \left\{ (v_z \Delta)_{e=\mu} + \chi kT \left[\frac{\partial}{\partial e} (v_z \Delta) \right]_{e=\mu} \right\} d\chi d\omega = \\ = -\frac{2k^2}{T^3} \int \chi^2 \frac{e^\chi}{(1+e^\chi)^2} \alpha(\omega) d\chi d\omega \left[\frac{\partial}{\partial e} v_z \Delta \right]_{e=\mu}.$$

Таким образом, $\alpha_{21} \sim T^{-3}$, а $\alpha_{12} \sim T^{-1}$.

¹ H. A. Bethe. Handbuch der Physik, 24, Teil 2, S. 579.

² L. Onsager. Phys. Rev., 1931, 38, 2265; L. Nordheim. Ann. d. Phys., 1931, 9, 626.

Кролль¹ при рассмотрении членов кинетического уравнения, соответствующих установлению равновесия по направлениям, пренебрегает величинами того же порядка, что оставляемые им. Благодаря этому у него оказывается невозможным перенос тепла в металле, по которому не течет электрический ток. Это следует из того, что при равенстве нулю электрического тока (условие, из которого, как известно, определяется термо-электродвижущая сила) у Кролля исчезает отклонение функции распределения от равновесного фермиевского значения, т. е. функция распределения при наличии градиента температуры остается фермиевской, не могущей, как известно, дать какой-либо тепловую поток.

Для выяснения вопроса рассмотрим сперва в общем виде уравнение стационарности при наличии градиента температуры. Как известно, изменение числа электронов в единице фазового пространства под влиянием взаимодействия с тепловыми колебаниями решетки равняется:

$$\int A_{k,k'} \{n(1-n')(N+1) - n'(1-n)N\} df_x df_y df_z + \\ + \int B_{k,k'} \{n(1-n'')N - n''(1-n)(N+1)\} df_x df_y df_z, \quad (6)$$

где $A_{k,k'}$ и $B_{k,k'}$ — вероятности переходов, отличающиеся только знаками в δ -функциях: именно в $A_{k,k'}$ входит $\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \hbar\omega)$, в $B_{k,k'}$ — $\delta(\varepsilon' - \varepsilon - \hbar\omega)$; N — функция распределения фононов, f — волновой вектор фонона. Интеграл с $A_{k,k'}$ учитывает переходы из состояния ε в состояние ε' , лежащее энергетически ниже, чем ε , интеграл с $B_{k,k'}$ — переходы в состояния ε'' , лежащие энергетически выше, чем ε .

Фононы, принимающие участие в переходах электрона с данным k , должны удовлетворять условию $\varepsilon(k+f) = \varepsilon(k) \mp \hbar\omega(f)$, т. е. лежать на поверхности в импульсном пространстве фононов $\varepsilon(k+f) - \varepsilon(k) \mp \hbar\omega(f) = 0$. Поэтому число фононов, принимающих участие в данном переходе, пропорционально элементу этой поверхности, т. е. величине $|f| d|f|$ при низких температурах возбуждения колебания малых частот, при которых

$$|f| \sim \omega = \frac{|\varepsilon' - \varepsilon|}{\hbar} = \frac{kT |\chi' - \chi|}{\hbar}.$$

Окончательно

$$df_x df_y df_z \sim |f| d|f| d\omega \sim (kT)^2 |\chi' - \chi| d\chi' d\omega.$$

Вероятности перехода $A_{k,k'}$ и $B_{k,k'}$ при малых частотах фононов пропорциональны, как известно, частоте, т. е.

$$A_{k,k'} = \omega A_{k,k'}^0 = \frac{kT}{\hbar} |\chi' - \chi| A_{k,k'}^0.$$

¹ W. Kroll. Zs. Phys., 1933, 80, 50.

В (6) вместо N подставляем планковскую функцию распределения

$$\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{1}{e^{|\chi' - \chi|} - 1},$$

вместо n , $n + \delta n$, где n — фермиевская функция распределения, $(e^{(\varepsilon - \mu)/kT} + 1)^{-1}$, δn — малая функция, которую положим равной $\delta n/\partial\varepsilon \cdot \varphi(\chi\omega)$, φ — некоторая функция. Ввиду малости δn оставляем только члены, содержащие δn линейно. С учетом всего этого выражение (6) переписываем в виде

$$(kT)^2 q \int A_{k,k'}^0 \Delta' \frac{\Phi(\chi_1\omega) - \Phi(\chi'\omega')}{(e^{\chi'} + 1)(e^{-\chi} + 1)(e^{|\chi' - \chi|} - 1)} |\chi' - \chi|^2 d\chi' d\omega' + \\ + (kT)^2 q \int B_{k,k''}^0 \Delta'' \frac{[\Phi(\chi_1\omega_1) - \Phi(\chi''\omega'')] \cdot |\chi - \chi''|^2}{(e^\chi + 1)(e^{-\chi''} + 1)(e^{|\chi'' - \chi_1|} - 1)} d\chi'' d\omega'', \quad (7)$$

$$\Delta = \frac{\partial(f_x f_y f_z)}{\partial(\varepsilon, \Theta, \varphi)},$$

где q — числовой множитель (в него входит коэффициент пропорциональности между частотой и волновым вектором и пр.). В первом интеграле $\varepsilon' = \varepsilon + \hbar\omega$, во втором $\varepsilon = \varepsilon' + \hbar\omega$. Так как волновые векторы фононов при низких температурах значительно меньше квазимпульсов электронов, т. е. $|f| \ll |k|$, то углы $\omega'(\omega'')$ и ω отличаются друг от друга на очень маленькую величину. Поэтому $\Phi(\chi'\omega')$ можно разложить в ряд по степеням $\omega' - \omega_1$

$$\Phi(\chi'\omega') = \Phi(\chi'\omega_1) + \frac{\partial\Phi(\chi'\omega_1)}{\partial\omega} (\omega' - \omega_1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Phi(\chi'\omega_1)}{\partial\omega^2} (\omega' - \omega_1)^2.$$

Разлагать в ряд по энергиям фонона, как известно, нельзя, так как хотя $\hbar\omega \ll \varepsilon$, однако $\varphi(\chi\omega)$ есть быстро меняющаяся функция энергии. $\omega - \omega_1$ пропорционально волновому вектору фонона

$$|\omega' - \omega_1| \sim |f| \sim \omega \sim kT |\chi' - \chi_1|.$$

При интегрировании по углам (азимуту) член, содержащий $\omega' - \omega_1$ (т. е. f), сократится (в предположении шаровой симметрии) и остается член, содержащий квадрат волнового вектора. Теперь (7) переходит в

$$q_1 (kT)^2 \int \Delta' A_{k,k'}^0 \frac{[\Phi(\chi_1\omega_1) - \Phi(\chi'\omega_1)] |\chi' - \chi_1|^2}{(e^{\chi'} + 1)(e^{-\chi_1} + 1)(e^{|\chi' - \chi_1|} - 1)} d\chi' d\omega' + \\ + q_1 (kT)^2 \int \Delta'' B_{k,k''}^0 \frac{[\Phi(\chi_1\omega_1) - \Phi(\chi''\omega_1)] |\chi'' - \chi_1|^2}{(e^{-\chi''} + 1)(e^{\chi_1} + 1)(e^{|\chi'' - \chi_1|} - 1)} d\chi'' d\omega'' +$$

$$+ q_2 (kT)^4 \int \Delta' A_{k,k'} \frac{\partial^2 \Phi(\chi' \omega_1)}{\partial \omega^2} |\chi' - \chi_1|^4 d\chi' d\omega' + \\ + q_2 (kT)^4 \int \frac{\Delta'' B_{k,k'}}{(e^{-\chi''} + 1)(e^{\chi_1} + 1)(e^{|\chi'' - \chi_1|} - 1)} d\chi'' d\omega'', \quad (8)$$

где q_1, q_2 — численные множители.

Это выражение можно записать так:

$$(kT)^2 L_1(\varphi) + (kT)^4 L_2(\varphi), \quad (9)$$

где L_1 — stoss-оператор, заключенный в первых квадратных скобках (8), L_2 — во вторых. Выражение (8) нужно приравнять теперь изменению функции распределения под влиянием градиента температуры, т. е.¹

$$-\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} v_z \chi_1 k \frac{dT}{dz}.$$

Для функции φ получаем уравнение

$$-\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} v_z \chi_1 k \frac{dT}{dz} = (kT)^2 L_1(\varphi) + (kT)^4 L_2(\varphi). \quad (10)$$

В L_1 учитываются только те переходы, при которых направление квазимпульса не меняется (т.е. переходы внутри конуса в фазовом пространстве электронов). В L_2 входят переходы, при которых квазимпульс меняет направление. Переходов первого рода недостаточно для того, чтобы установить равновесие при наличии градиента температуры. Чтобы показать это, проинтегрируем обе части уравнения (10) по энергии (т. е. по конусу в фазовом пространстве электронов). Помня, что

$$d\varepsilon = d\chi \cdot kT, \quad \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} = -\frac{e^\chi}{(1 + e^\chi)^2 kT},$$

имеем

$$k \frac{dT}{dz} \int v_z \frac{-e^{\chi_1} \chi_1}{(1 + e^{\chi_1})^2} \Delta_1 d\chi_1 = (kT)^3 \int L_1(\varphi) \Delta_1 d\chi_1 + (kT)^5 \int \Delta_2 L_2(\varphi) d\chi_1.$$

Но $\int \Delta_1 L_1(\varphi) d\chi_1 = 0$, так как число электронов внутри конуса не может изменяться вследствие переходов, при которых электрон остается в том же конусе². Член же с dT/dz не равен нулю

¹ R. Peierls. «Ergebnisse der Exakten Naturwissenschaften». Elektronentheorie der Metalle, стр. 298.

² В самом деле

$$I = \int \Delta_1 L_1(\varphi) d\chi_1 = \int \Delta_1 \Delta'' \{\Phi(\chi_1) - \Phi(\chi'')\} B_{k,k''}^0 [(e^{-\chi_1} + 1)(e^{+\chi''} + 1)(e^{|\chi'' - \chi_1|} - 1)]^{-1} \times \\ \times |\chi'' - \chi_1|^2 d\chi'' d\chi_1 + \int \Delta_1 \Delta' \{\Phi(\chi_1) - \Phi(\chi')\} A_{k,k'}^0 [(e^{\chi'} + 1)(e^{|\chi' - \chi_1|} - 1)]^{-1} \times \\ \times |\chi' - \chi_1|^2 d\chi' d\chi_1.$$

При перемена местами χ_1 и χ' (χ_1 и χ'') I меняет знак, оставаясь равным самому себе, т. е. он равен нулю (при такой замене $B_{k,k''}^0$ переходит в $A_{k,k'}^0$).

$$\int \chi_1 v_z \Delta_1 \frac{e^{\chi_1}}{(1 + e^{\chi_1})^2} d\chi_1 = \int \chi_1 \frac{e^{\chi_1}}{(1 + e^{\chi_1})^2} \left\{ (v_z \Delta)_\varepsilon = \mu + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (v_z \Delta) \right]_{\varepsilon = \mu} \chi_1 kT \right\} d\chi_1 = \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (v_z \Delta) \right]_{\varepsilon = \mu} kT \int \chi_1^2 \frac{e^{\chi_1}}{(1 + e^{\chi_1})^2} d\chi_1 \neq 0.$$

Таким образом, градиент температуры меняет число электронов с данным направлением квазимпульса, в то время как столкновения с фононами, входящие в L_1 , не меняют его. Поэтому необходимо рассмотреть также и переходы с изменением направления квазимпульса, хотя они происходят гораздо медленнее, чем переходы, при которых это направление сохраняется.

Для решения уравнения (10) ищем функцию $\varphi(\chi \omega)$ в виде суммы функций только от углов в импульсном пространстве и функции от углов и энергии (т. е. от χ) $\varphi = \beta(\omega) + \gamma(\chi \omega)$. При этом предположим, что $\gamma \ll \beta$, так что будем пренебречь γ рядом с β . В L_1 β не войдет, ибо там содержится разность

$$\varphi(\chi_1 \omega_1) - \varphi(\chi' \omega_1) = \gamma(\chi_1 \omega_1) - \gamma(\chi' \omega_1).$$

В L_2 войдет $\gamma + \beta$, но так как мы полагаем $\gamma \ll \beta$, то оставляем только β . Уравнение (10) перепишется так:

$$-\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} v_z \chi_1 k \frac{dT}{dz} = (kT)^2 L_1(\gamma) + (kT)^4 L_2(\beta). \quad (11)$$

Для решения уравнения проинтегрируем его по ε (т. е. по конусу импульсного пространства). Интеграл с L_1 при таком интегрировании, как мы видели, исчезает и остается

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (v_z \Delta) \right]_{\varepsilon = \mu} \frac{dT}{dz} k^2 T \int \chi_1^2 \frac{e^{\chi_1}}{(1 + e^{\chi_1})^2} d\chi_1 = (kT)^5 \int \Delta L_2(\beta) d\chi_1.$$

Из этого уравнения следует, что $\beta(\omega)$ обратно пропорциональна температуре в четвертой степени, т. е.

$$\beta(\omega) = \frac{\beta_1(\omega)}{T^4} \frac{dT}{dz}.$$

Для определения $\gamma(\chi \omega)$ имеем теперь уравнение

$$-\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} v_z k \chi_1 \frac{dT}{dz} = (kT)^2 L_1(\gamma) + k^4 L_2(\beta_1) \frac{dT}{dz}, \quad (12)$$

или

$$-\frac{e^{\chi_1} v_z \chi_1}{(1 + e^{\chi_1})^2 kT} \frac{dT}{dz} = (kT)^2 L_1(\gamma) + k^4 L_2(\beta_1) \frac{dT}{dz}. \quad (12a)$$

Отсюда можно сделать заключение, что $\gamma(\chi \omega)$ состоит из двух функций, из которых одна пропорциональна T^{-3} , другая — T^{-2} ; так как $\beta \approx T^{-4}$, то при низких температурах β действительно больше γ .

В дальнейшем нам потребуется только выражение для электрического тока, которое получается из β , в отличие от теплового потока, уже в первом приближении (т. е. заменой $(v_z \Delta)$ на $\{v_z \Delta\}_{e=\mu}$). Поэтому γ нам не потребуется.

Итак, при наличии градиента температуры мы получаем δn в виде

$$\delta n = \frac{\partial n}{\partial e} \frac{\beta_1(\omega)}{T^4} \frac{dT}{dz}.$$

Полное отклонение функции распределения от равновесного значения при наличии градиента температуры и электрического поля будет¹

$$\delta n = \frac{\partial n}{\partial e} \frac{\beta_1(\omega)}{T^4} \frac{dT}{dz} + \frac{\partial n}{\partial e} \frac{\alpha(e)}{T^5} \frac{d(\varphi - \frac{\mu}{e})}{dz},$$

где α — функция углов, отличная от β_1 . Найдем ток

$$\begin{aligned} i &= -2e \int v_z \frac{\partial n}{\partial e} \left[\frac{\beta_1(\omega)}{T^4} \frac{dT}{dz} + \frac{\alpha(\omega)}{T^5} d\left(\varphi - \frac{\mu}{e}\right) \right] \Delta d\omega d\omega = \\ &= \frac{dT}{dz} \frac{2e}{T^4} \int v_z \frac{e^\chi}{(1+e^\chi)^2} \beta_1(\omega) \Delta d\chi d\omega + \\ &\quad + \frac{2e}{T^5} \int v_z \frac{e^\chi}{(1+e^\chi)^2} \alpha(\omega) \Delta d\chi d\omega \frac{d\left(\varphi - \frac{\mu}{e}\right)}{dz} = \\ &= \frac{1}{T^4} \frac{dT}{dz} (v_z \Delta)_{e=\mu} \int \frac{e^\chi \beta_1(\omega)}{(1+e^\chi)^2} d\chi d\omega + \\ &\quad + \frac{1}{T^5} \frac{d\left(\varphi - \frac{\mu}{e}\right)}{dz} \int \frac{e^\chi}{(1+e^\chi)^2} \alpha(\omega) d\chi d\omega = \\ &= \frac{c_1}{T^4} \frac{dT}{dz} + \frac{c_2}{T^5} \frac{d\left(\varphi - \frac{\mu}{e}\right)}{dz}, \end{aligned}$$

где c_1 и c_2 — постоянные. Отсюда следует, что $\alpha_{12} \cong T^{-3}$.

Найдем тепловой поток от члена $d(\varphi - \mu/e)/dz$. Он будет

$$\begin{aligned} \int (e - \mu) v_z \frac{\partial n}{\partial e} \frac{\alpha(\omega)}{T^5} \Delta d\chi d\omega &= -kT \int \chi \frac{e^\chi}{(1+e^\chi)^2} \Delta \frac{\alpha(\omega)}{T^5} d\chi d\omega = \\ &= kT \int \frac{e^\chi \alpha(\omega)}{(1+e^\chi)^2 T^5} \left\{ (v_z \Delta)_{e=\mu} + \left[\frac{\partial}{\partial e} (v_z \Delta) \right]_{e=\mu} \chi kT \right\} d\chi d\omega = \\ &= \frac{1}{T^8} k^2 \int \chi^2 \frac{e^\chi \alpha(\omega)}{(1+e^\chi)^2} d\chi d\omega \left[\frac{\partial}{\partial e} (v_z \Delta) \right] = \alpha_{21}, \end{aligned}$$

¹ Член $\frac{\partial n}{\partial e} \frac{\alpha}{T^5} \frac{d}{dz} \left(\varphi - \frac{\mu}{e} \right)$ найден Блохом.

где $\alpha_{21} \cong T^{-3}$, как и α_{12} . При наличии электрического поля функция распределения состоит из двух членов¹:

$$\left[\frac{\partial n}{\partial e} \frac{\alpha(\omega)}{T^5} + \frac{\partial n}{\partial e} g \frac{(\chi\omega)}{T^3} \right] \frac{d\left(\varphi - \frac{\mu}{e}\right)}{dz},$$

где $g(\chi\omega)$ — функция энергии и углов; g — четная функция $\chi = (e - \mu)/kT$. При вычислении потока тепла следует в обоих членах брать второе приближение, ввиду чего тепловые потоки от α и g будут относиться друг к другу как T^{-2} . Поэтому при низких температурах член $g(\chi\omega)$ можно не рассматривать (так же, как это делается при вычислении электропроводности).

Положив теперь ток i равным нулю, находим производную от термо-электродвижущей силы по температуре

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{T^4} \frac{dT}{dz} + \frac{c_2}{T^5} \frac{d(\varphi - \mu/e)}{dz} &= 0, \\ \frac{d(\varphi - \mu/e)}{dT} &= -\frac{c_1}{c_2} T. \end{aligned}$$

Таким образом, при низких температурах производная от термо-электродвижущей силы по температуре пропорциональна T , как и при высоких температурах. В силу соотношений (5) коэффициент Томсона $M \cong T$, а тепло Пельтье должно быть пропорционально T^2 . Если обозначить $d(\varphi - \mu/e)/dT$ через E , то при низких температурах отношение E/T должно быть постоянным. Имеющиеся экспериментальные данные относительно термо-электродвижущих сил чистых (наличие примеси вносит сильные усложнения) металлов при низких температурах² подтверждают этот вывод при температурах, больших 5°К (в отношении Sn, Ag, Pt).

До сих пор при рассмотрении термо-электрических явлений мы учитывали только влияние тепловых колебаний решетки. Однако как электрическое сопротивление, так и термо-электрические эффекты обусловливаются еще примесями (остаточное сопротивление) и взаимодействием электронов. Действием этих двух факторов пренебрегать при низких температурах нельзя, так как величина остаточного сопротивления или сопротивления, вызванного взаимодействием электронов, при очень низких температурах больше сопротивления, вызванного колебанием решетки. При рассмотрении влияния на термо-электродвижущие силы примесей (остаточного сопротивления) оказывается, что коэффициент пропорциональности в соотношении $E \cong T$ два раза претерпевает изменение: первый раз, когда сравниваются электрические сопротивления (от примесей и от колебания решетки), и второй раз — при более низких температурах, когда сравниваются

¹ L. Nordheim. Ann. d. Phys., 1932, 9, 648.

² Borelius. Leiden Comm., № 217.

тепловые сопротивления от примесей и от колебания решетки. (В то время как отношение электрических сопротивлений пропорционально T^5 , отношение тепловых сопротивлений пропорционально T^3 , откуда видно, что тепловые сопротивления сравниваются при более низких температурах, чем электрические.)

Те же результаты получаются и при рассмотрении взаимодействия электронов, т. е. соотношение $E \sim T$ справедливо только в тех областях температур, где одно из сопротивлений (электронное или обычное) больше другого. Если остаточное сопротивление сравнимо с величиной электронного сопротивления, соотношение $E \approx T$ перестает выполняться.

При измерениях термо-электродвижущей силы пользуются цепью из двух металлов с несовпадающими температурами, при которых происходит изменение коэффициента пропорциональности в соотношении $E \sim T$. Благодаря этому наблюдаемая картина термо-электродвижущей силы отличается большой сложностью при температурах, когда оказывается влияние примесей и взаимодействия электронов.

Украинский
физико-технический институт
Харьков

Получено
4 декабря 1936 г.

КРИТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ У СВЕРХПРОВОДНИКОВ МАЛЫХ РАЗМЕРОВ *

Целью работы является выяснение зависимости критического значения магнитного поля от радиуса образца. Учитывая поверхностную энергию для H , как для функции радиуса r , получаем выражение

$$H = H_0 \sqrt{1 + \rho/r},$$

где ρ порядка 10^{-5} см.

Как известно, критическое магнитное поле, разрушающее сверхпроводимость, связано с разностью термодинамических потенциалов сверхпроводящего и несверхпроводящего состояний соотношением Рутгерса — Гортера [1]

$$H^2/8\pi = F_n - F_s \quad (1)$$

(F_n и F_s — соответственно термодинамические потенциалы единицы объема нормального и сверхпроводящего состояний). Это соотношение не учитывает изменения поверхностной энергии, которое происходит при переходе от сверхпроводящего к нормальному состоянию. Такое изменение может оказаться существенным при рассмотрении маленьких сверхпроводников, у которых большая удельная поверхность. Легко видеть, что изменение поверхностной энергии приведет к тому, что для маленьких сверхпроводников критическое поле будет иметь значение, отличное от получаемого из соотношения (1).

Представим себе, например, цилиндрический проводник, помещенный во внешнее магнитное поле, направленное параллельно его оси. Условие равенства термодинамических потенциалов нормальной и сверхпроводящей фаз во внешнем магнитном поле H можно записать так ¹:

$$VF_s + s\alpha_s + \frac{H^2}{8\pi} V = VF_n + s\alpha_n. \quad (2)$$

V — объем проводника, равный $\pi r^2 h$; r — радиус проводника; h — длина; s — площадь боковой поверхности, равная $2\pi r h$;

* ЖЭТФ, 1938, 8, 1096.

¹ Это уравнение не учитывает в явной форме кинетической энергии сверхпроводящих токов.

α_s , α_n — коэффициенты поверхностного натяжения сверхпроводящей и нормальной фаз соответственно. Подставляя вместо V и s их значения, имеем

$$\frac{H^2}{8\pi} = F_n - F_s + \frac{2(\alpha_n - \alpha_s)}{r},$$

где $F_n - F_s$ равняется $H_0^2/8\pi$, где H_0 — значение критического поля для толстого образца. Отсюда

$$H(r) = H_0 \sqrt{1 + \frac{16\pi(\alpha_n - \alpha_s)}{H_0^2 r}}. \quad (3)$$

При малых значениях разности $H(r) - H_0$ можно (3) разложить в ряд

$$H(r) = H_0 \left(1 + \frac{8\pi(\alpha_n - \alpha_s)}{H_0^2 r} \right).$$

Полученная зависимость H от r хорошо совпадает с результатами измерений Понтиуса [2], если положить $\alpha_n - \alpha_s$ равным $0,1 \text{ эрд}/\text{см}^2$. $\alpha_n - \alpha_s$ есть, очевидно, коэффициент поверхностного натяжения раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами. Как и следовало ожидать, коэффициент поверхностного натяжения нормальной фазы α_n оказался больше коэффициента поверхностного натяжения сверхпроводящей фазы. Это обстоятельство является необходимым для того, чтобы сверхпроводники малых размеров были устойчивы. С другой стороны, имеются некоторые теоретические аргументы в пользу того, что условия, благоприятствующие переходу в сверхпроводящее состояние, выполнены для маленьких кусков металла лучше, чем для больших [3].

В соотношение (3) входит характеристическая длина

$$\rho = \frac{16\pi(\alpha_n - \alpha_s)}{H_0^2},$$

которая, очевидно, имеет порядок величины глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник. Подставляя найденное значение $\alpha_n - \alpha_s$, для глубины проникновения поля в сверхпроводник получаем значение $2 \cdot 10^{-5} \text{ см}$.

Соотношение (3) справедливо до тех пор, пока радиус r в несколько раз больше глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник (т. е. величины $16\pi(\alpha_n - \alpha_s)/H_0^2$). Это условие при измерениях Понтиуса было выполнено (радиусы его образцов больше 10^{-4} см). В том случае, когда радиус образца примерно равен $16\pi(\alpha_n - \alpha_s)/H_0^2$, для рассмотрения условий перехода становится существенной структура слоя, в которую проникает поле. По этому вопросу пока ничего нельзя сказать.

Измеряя $H(r)$ при различных температурах, можно получить зависимость коэффициента поверхностного натяжения между нормальной и сверхпроводящей фазами от температуры (следовательно, и глубины проникновения поля ρ).

Такие измерения представляются весьма желательными. При разрушении сверхпроводимости током, в отличие от рассмотренного здесь случая разрушения магнитным полем, рассмотрение вопроса может усложниться в связи с тем, что при разрушении током возникает промежуточное состояние [4]. Лауз [5] рассматривал вопрос о зависимости критического поля от радиуса, пользуясь уравнениями Лондона. Представляется небезинтересным указать на возможность несколько иной трактовки этого вопроса.

Академия наук СССР

Получено 17 июня 1938 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. J. Gorter. Nature, 1933, 132, 931.
2. R. B. Pontius. Nature, 1937, 139, 1066.
3. F. Hund. Ann. d. Phys., 1938, 32, 102.
4. H. E. Алексеевский. ЖЭТФ, 1938, 8, 342.
5. M. V. Laue. Ann. d. Phys., 1938, 32, 71; 1938, 32, 253.

О ВЛИЯНИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ МОНОКРИСТАЛЛОВ ВИСМУТА ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ *

Совместно с Б. Давыдовым

Рассматривается влияние квантования электронов на рост остаточного сопротивления в поперечном магнитном поле. Предполагается при этом, что электронов проводимости и дырок в висмуте мало и что они имеются в почти одинаковом количестве. Найдены волновые функции для блоховских «сильно связанных» электронов в магнитном поле при малых энергиях и показано, что они аналогичны функциям совершенно свободных электронов с анизотропной массой. Показано, что число столкновений, создающих остаточное сопротивление, изотропно, т. е. может зависеть только от энергии электронов. Вычислена сила тока.

Если считать, что вследствие малой эффективной массы электронов существенно только квантование в верхней зоне, то на параболический рост сопротивления накладываются осцилляции, что находится в хорошем соглашении с опытом. Температура вырождения электронов получается около 70° К и число свободных электронов порядка 10^{-5} на атом. При более высоких температурах оно должно расти как $T^{3/2}$. Этим объясняется наблюдаемое увеличение постоянной Холла при низких температурах.

1. Введение

Рассматривая изменение сопротивления металлов в магнитном поле, можно большей частью не учитывать вызываемое этим полем квантование электронных состояний. Магнитное поле входит только в кинетическое уравнение как причина переходов из одного состояния в другое. При учете анизотропии кристалла обычно получается увеличение сопротивления правильного порядка величины.

Особенно резкое возрастание сопротивления уже в сравнительно слабых полях наблюдается у висмута. Это связано там с малой эффективной массой свободных электронов, а также с тем, что в чистом висмуте имеются в почти одинаковом количестве и электроны проводимости и дырки в заполненной зоне [1].

Однако наиболее чистые образцы монокристаллов висмута дают при низких температурах вообще аномальный ход кривой сопротивления в магнитном поле: на монотонное параболическое противление накладываются осцилляции, так что получается не-возрастание и несколько максимумов и минимумов [2]. Подобным же образом ведет

себя и магнитная восприимчивость висмута [3]. Этот аномальный диамагнетизм висмута связан с квантованием электронов в магнитном поле [4–6]. Аномальный ход сопротивления естественно поэтому приписать той же причине. Вследствие малой эффективной массы свободных электронов и связанной с этим большой величины магнетона квантование у висмута оказывается уже в полях, при которых у других металлов оно еще незаметно.

В достаточно сильных полях и при низкой температуре расстояние между дискретными уровнями энергии электронов в магнитном поле становится больше kT . Для силы тока существенны электроны, обладающие энергией, близкой к химическому потенциалу. Когда дискретные уровни, смещаясь кверху при усилении магнитного поля, пересекают уровень химического потенциала, получается увеличение силы тока. Это и создает наблюдающиеся на опыте минимумы на кривой сопротивления.

Если воспользоваться значениями составляющих тензора обратной массы электронов проводимости, получающимися из осцилляций магнитной восприимчивости [7], то по положению минимумов сопротивления можно определить значения химического потенциала. Получается температура вырождения $\zeta/k \approx 70^{\circ}$ К. Это несколько ниже, чем значение, полученное из магнитной восприимчивости (140° К). Концентрация электронов проводимости получается отсюда порядка 10^{-5} на атом.

Число электронов проводимости можно также определить по электропроводности и по зависимости ее от магнитного поля. При комнатной температуре оно порядка 10^{-4} на атом [1]. Такое расхождение заставило Блекмана [6] предположить, что осцилляции магнитной восприимчивости создаются особой небольшой группой электронов, которая мало сказывается на электропроводности. Это предположение является, однако, излишним. Вследствие наличия двух перекрывающихся полос уровней при высоких температурах число электронов проводимости должно расти пропорционально $T^{3/2}$. Если при низких температурах оно порядка 10^{-5} на атом, то при комнатной температуре мы получим уже около 10^{-4} электронов на атом. Этим, к тому же, объясняется и наблюдаемое на опыте увеличение эффекта Холла при переходе к низким температурам [8]. Из постоянной Холла для поликристаллического висмута получаются как раз приведенные выше числа электронов проводимости.

Влияние квантования электронов на рост сопротивления металлов в магнитном поле рассматривал Титейка [9]. Он считал электроны совершенно свободными и учитывал только столкновения их с упругими волнами. Осцилляций, о которых мы говорили выше, Титейка не рассматривал [10]. Результаты его нельзя, впрочем, непосредственно переносить на висмут, так как он не учитывал ни анизотропии, ни наличия дырок.

Мы будем рассматривать волновые функции электронов проводимости в магнитном поле в блоховском приближении, исходя-

* ЖЭТФ, 1939, 9, 1294; J. Phys. USSR, 1940, 2, 147.

щем из атомных функций. При этом мы ограничимся случаем малых энергий, т. е. состояний, энергия которых близка к краю дозволенной полосы. В висмуте вследствие небольшого числа электронов проводимости и дырок существенны только такие состояния.

Зависящая от атомного номера часть волновых функций при этом совпадает с волновыми функциями совершенно свободных электронов, обладающих анизотропной массой. Блоховские «сильно связанные» электроны и электроны совершенно свободные представляют два предельных случая электронов проводимости. Можно поэтому думать, что и в промежуточном случае волновые функции имеют подобный же вид.

При вычислении силы тока мы для простоты будем рассматривать только остаточное сопротивление, т. е. столкновения с атомами примесей. Несмотря на анизотропию массы вероятности переходов при этом получаются изотропные (опять-таки для случая малых энергий) и могут зависеть только от энергии электронов.

2. Волновые функции

Как указывалось выше, у висмута очень мало свободных электронов и положительных дырок. Поэтому химический потенциал тех и других невелик, и для электропроводности существенны только состояния, уровни энергии которых лежат возле перекрывающихся краев полос дозволенных уровней. Для таких состояний энергии при отсутствии поля квадратично зависят от волновых чисел.

Для того чтобы найти волновые функции электронов при наличии электрического и магнитного поля, мы воспользуемся блоксовским приближением «сильно связанных» электронов и будем исходить из атомных функций в магнитном поле. Пусть электрическое поле F будет направлено по оси z , магнитное H — по оси y и векторный потенциал $A = A_x = Hz$. Если обозначить $eH/hc = \gamma$ (h — планковская постоянная, деленная на 2π), то волновое уравнение будет

$$H\Psi = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\gamma z \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] + V(\mathbf{r}) + eFz \right\} \Psi = E\Psi. \quad (1)$$

Здесь $V(\mathbf{r})$ означает потенциал периодического поля кристалла. Обозначим $V_n(\mathbf{r})$ потенциал n -го иона решетки, соответствующим образом заэкранированного объемным зарядом (n означает совокупность трех значков, нумерующих ионы). Пусть далее $\psi_0(\mathbf{r})$ означает волновую функцию основного состояния электрона в поле $V_0(\mathbf{r})$ при наличии магнитного поля. Это последнее на опыте всегда гораздо слабее, чем атомные поля, так что ψ_0 от H зависит слабо. Тогда волновой функцией электрона в поле $V_n(\mathbf{r}) = V_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)$ будет не $\psi_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)$, а

$$\psi_n(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) e^{-i\gamma z_n(x-x_n)}. \quad (2)$$

Действительно, волновое уравнение для $\psi_n(\mathbf{r})$:

$$H_n \psi_n = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\gamma(z - z_n) + i\gamma z_n \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] + V_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \right\} \psi_n = E_0 \psi_n \quad (3)$$

отличается от соответствующего уравнения для $n = 0$ не только заменою \mathbf{r} на $\mathbf{r} - \mathbf{r}_n$, но и появлением добавочного члена $-i\gamma z_n$ у векторного потенциала. Это приводит, как известно, к появлению экспоненциального множителя у ψ_n . Решение уравнения (1) в первом приближении будем искать в виде

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_m a_m \psi_m(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Умножая (1) почленно на ψ_n^* и интегрируя, получаем

$$\int \psi_n^* H \Psi d\tau = E \int \psi_n^* \Psi d\tau. \quad (5)$$

Если сюда подставить (4), то у нас появятся следующие интегралы:

$$\begin{aligned} \int \psi_0^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \psi_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{n+\nu}) e^{-i\gamma \zeta_\nu x} d\tau &= S_\nu e^{-i\gamma \zeta_\nu (x_n + \frac{1}{2} \xi_\nu)} [1 + O(d^2)], \\ \int \psi_0^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \psi_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{n+\nu}) (V - V_n) e^{-i\gamma \zeta_\nu x} d\tau &= V_\nu e^{-i\gamma \zeta_\nu (x_n + \frac{1}{2} \xi_\nu)} \times \\ &\quad \times [1 + O(d^2)]. \end{aligned}$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} \xi_\nu &= x_{n+\nu} - x_n, \quad \eta_\nu = y_{n+\nu} - y_n, \quad \zeta_\nu = z_{n+\nu} - z_n; \\ S_\nu &= \int \psi_0^*(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\nu) d\tau, \quad (S_0 = 1), \\ V_\nu &= \int \psi_0^*(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\nu) (V - V_0) d\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

где S_ν и V_ν от n уже не зависят и экспоненциально убывают с увеличением $|\nu|$. $O(d^2)$ обозначает также не зависящую от n поправку порядка γd^2 , где d — постоянная решетки. Этой поправкой при всех достижимых полях можно пренебречь. Мы можем пренебречь также членами порядка Fd , считая электрическое поле слабым. Нас интересуют только состояния с энергией, близкой к краю дозволенной полосы уровней. Поэтому $a_n = a(\mathbf{r}_n)$ можно считать медленно меняющейся функцией от n . Раскладывая ее, а также экспоненциальные множители в (2) в ряд по степеням ξ_ν , η_ν , ζ_ν и

ограничиваясь квадратичными членами, получаем, учитывая (3)

$$\sum_v [(E - E_0 - eFz) S_v - V] \left\{ a(r) + \xi_v \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\gamma z \right) + \eta_v \frac{\partial}{\partial y} + \zeta_v \frac{\partial}{\partial z} \right\} a(r) + \frac{1}{2} \left[\xi_v^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\gamma z \right)^2 + \eta_v^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \zeta_v^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\eta_v \xi_v \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \xi_v \xi_v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\gamma z \right) + \xi_v \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\gamma z \right) \times \left(2\eta_v \frac{\partial}{\partial y} + \xi_v \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] a(r) \right\} = 0. \quad (7)$$

При отсутствии внешнего поля коэффициенты $a(r_n)$ для волновой функции с малым волновым числом приближенно удовлетворяют, как известно, такому уравнению:

$$-\frac{\hbar^2}{2} \sum_{\alpha, \beta} \mu_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 a}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = (E - E_l) a, \quad (8)$$

где $x_\alpha = x, y, z$; $\mu_{\alpha\beta}$ означает тензор обратной массы; l — край рассматриваемой l -й полосы уровней. Формула (7) показывает, что уравнение для $a(r)$ при наличии электрического и магнитного полей отличается только тем, что $(E - E_0 - eFz)$ стоит вместо $E - E_0$ и $\partial/\partial x + i\gamma z$ вместо $\partial/\partial x$. Это уравнение имеет, следовательно, вид:

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \mu_{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta a = (E - E_l - eFz) a, \quad (9)$$

где

$$P_1 = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\gamma z \right), \quad P_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad P_3 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Тензор $\mu_{\alpha\beta}$ здесь немного зависит от магнитного поля, так как функция Ψ_0 , входящая в S_v и V_v , учитывает действие поля (атомный диамагнетизм). В первом приближении этой зависимостью можно, однако, пренебречь.

В уравнение (9) внешнее поле входит так же, как в волновое уравнение для совершенно свободных электронов. Действие периодического поля кристалла сводится, таким образом, только к анизотропии тензора обратной массы. Необходимо подчеркнуть, что это имеет место только для состояний, лежащих вблизи края дозволенной полосы уровней: только для таких состояний коэффициенты a_n медленно меняются с изменением n .

Бисмут обладает тригональной симметрией. Вследствие этого мы должны иметь три группы электронов проводимости и три группы дырок. Каждая из групп при абсолютном нуле заполняет эллипсоид в пространстве волновых чисел, причем эти эллипсоиды повернуты друг по отношению к другу на $2\pi/3$. Пусть ось z , по которой направлено электрическое поле, совпадает с тригональной осью кристалла. Мы примем для простоты, что она является

также главной осью всех эллипсоидов, хотя результаты Шёнберга и показывают, что в действительности соответствующие главные оси расположены под небольшим углом к тригональной оси. Две другие главные оси каждого эллипсоида будут тогда лежать в плоскости xy .

Угол между главной осью одного из эллипсоидов, совпадающей с бинарной осью кристалла, и осью x обозначим ϑ . Тогда углы ϑ_l между одноименными осями всех трех эллипсоидов и осью x будут:

$$\vartheta_1 = \vartheta, \quad \vartheta_2 = \vartheta + 2\pi/3, \quad \vartheta_3 = \vartheta + 4\pi/3. \quad (10)$$

Составляющие тензора обратной массы $\mu_{\alpha\beta}^l$ имеют при этом вид:

$$\mu_{11}^l = \mu_1 \cos^2 \vartheta_l + \mu_2 \sin^2 \vartheta_l, \quad \mu_{22}^l = \mu_1 \sin^2 \vartheta_l + \mu_2 \cos^2 \vartheta_l, \\ \mu_{12}^l = (\mu_1 - \mu_2) \sin \vartheta_l \cos \vartheta_l, \quad \mu_{33}^l = \mu_3,$$

прочие — нули. Здесь μ_α означают главные оси тензора.

Это дает при $\vartheta_l = 0$ $\mu_{\alpha\beta}^l = \mu_\alpha \delta_{\alpha\beta}$; при $\vartheta_l = 2\pi/3$ и $4\pi/3$

$$\mu_{11}^l = \frac{1}{4} (\mu_1 + 3\mu_2), \quad \mu_{22}^l = \frac{1}{4} (3\mu_1 + \mu_2), \\ \mu_{12}^l = \pm \frac{\sqrt{3}}{4} (\mu_1 - \mu_2), \quad \mu_{33}^l = \mu_3. \quad (11a)$$

Если же $\vartheta = \pi/2$ ($\vartheta_1 = \pi/2, \vartheta_2 = 7\pi/6, \vartheta_3 = -\pi/6$), то μ_1 и μ_2 следует поменять местами.

К сожалению, тензор обратной массы известен только для тех состояний, которые создают осцилляции магнитной восприимчивости; мы условно примем, что это — состояние верхней полосы уровней. Согласно Шёнбергу [7] для этих состояний

$$1/\mu_1 \sim 0,003m_0, \quad 1/\mu_2 \sim 5m_0, \quad 1/\mu_3 \sim 0,05m_0, \quad (12)$$

где m_0 — нормальная масса электрона.

Решения уравнения (9) с такими значениями $\mu_{\alpha\beta}$ имеют вид:

$$a(r) = e^{i(k_x x + k_y y)} \Phi(z). \quad (13)$$

Если ввести новую переменную

$$s = z\gamma^{1/2} (\mu_{11}/\mu_{33})^{1/4} \quad \left(\gamma = \frac{eH}{hc} \right), \quad (14)$$

то для $\Phi_n (s - s_0)$ получается уравнение осциллятора:

$$-\Phi_n'' + (s - s_0)^2 \Phi_n = \frac{2E_n}{\hbar\omega} \Phi_n. \quad (15)$$

Здесь

$$z_0 = s_0 \sqrt{\frac{h\mu_3}{\omega}} = \frac{1}{\gamma} \left(k_x + \frac{\mu_{12}}{\mu_{11}} k_y \right) - \frac{eF}{h^2 \gamma \mu_{11}}, \quad (16)$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad \omega = \frac{eH}{c} \sqrt{\mu_{11} \mu_{33}},$$

где n означает осцилляторное квантовое число.

Таким образом, полная энергия

$$E = E_l + \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega + \frac{1}{2} \alpha k_y^2 + eFz_0, \quad (17)$$

где

$$\alpha = h^2 (\mu_{22} - \mu_{12}^2 / \mu_{11}).$$

Величины α , ω и z_0 у нас будут разные для разных эллипсоидов, так как $\mu_{\alpha\beta}$ — разные. При $\vartheta_l = 0$ значения очевидны. При $\vartheta_l = 2\pi/3$ и $4\pi/3$ имеем:

$$\alpha = 4h^2 \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + 3\mu_2}, \quad \omega = \frac{eH}{2c} \sqrt{\mu_3 (\mu_1 + 3\mu_2)}. \quad (18)$$

Обычным путем легко убедиться, что волновому уравнению (9) с анизотропной массой соответствует плотность тока:

$$j_\alpha = e \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} \left[\frac{h}{2i} \left(a^* \frac{\partial a}{\partial x_\beta} - a \frac{\partial a^*}{\partial x_\beta} \right) - \frac{e}{c} A_\beta a a^* \right]. \quad (19)$$

В нашем случае при $A = A_x = Hz$, усредняя по всему пространству, находим среднюю плотность тока:

$$\begin{aligned} \bar{j}_z &= 0 & \bar{j}_x &= ecF/H, \\ \bar{j}_y &= eh\mu_{22}k_y + e\mu_{12} \left(hk_x - \frac{e}{c} Hz_0 \right) = e \left(\mu_{22} - \frac{\mu_{12}^2}{\mu_{11}} \right) hk_y + ec \frac{\mu_{12}}{\mu_{11}} \frac{F}{H}. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, если не учитывать столкновений, то сила тока в направлении электрического поля равна нулю. Конечное сопротивление появляется при этом только в результате столкновений.

3. Столкновения

Мы будем рассматривать только столкновения электронов с искажениями решетки, например с атомами примесей. Как уже указывалось, в висмуте приходится рассматривать шесть групп стационарных состояний: три электронных группы и три дырочных. При столкновениях электроны будут переходить из одного состояния в другое как в пределах одной группы, так и из одной группы в другую.

Пусть атом примеси расположен в начале координат. Создаваемое им искажение периодического поля обозначим $U(\mathbf{r})$. Волновое уравнение запишется тогда в виде:

$$\{H + U(\mathbf{r})\} \psi = E\psi, \quad (21)$$

где H означает гамильтониан при отсутствии искажений периодического поля.

Энергию $U(\mathbf{r})$ нельзя считать малой, поэтому теорию возмущений здесь применять нельзя. Мы рассмотрим сначала столкновения при отсутствии внешнего поля. Решение (21) ищем в виде:

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_l(\mathbf{k}, \mathbf{r}) + \psi_s(\mathbf{r}). \quad (22)$$

Здесь $u_l(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ означает модулирующую функцию падающей волны, l — номер группы состояний ($l = 1, \dots, 6$).

Подставляя (22) в (21), получаем уравнение для рассеянной волны ψ_s

$$(H - E) \psi_s = U(\mathbf{r}) [e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_l(\mathbf{k}, \mathbf{r}) + \psi_s]. \quad (23)$$

Если длина волны $\lambda = 2\pi/k$ больше, чем размеры области, в которой $U(\mathbf{r})$ заметно отличается от нуля, то здесь можно $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ приближенно заменить на единицу, а $u_l(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ — на $u_l(0, \mathbf{r})$, соответствующую $\mathbf{k} = 0$

$$(H - E) \psi_s \cong -U(\mathbf{r}) [u_l(0, \mathbf{r}) + \psi_s]. \quad (24)$$

Вероятность перехода W^0 из состояния (\mathbf{k}, l) в состояние (\mathbf{k}', l') с той же энергией должна быть пропорциональна $|\psi_s|^2$. Но в приближенное уравнение (24) для ψ_s волновой вектор \mathbf{k} вообще не входит. Следовательно, W^0 не может зависеть ни от \mathbf{k} , ни, в силу симметрии, от \mathbf{k}' ; она может зависеть только от l и l' (и при этом симметрично) и от энергии электрона. Зависимость от энергии мы, впрочем, можем не учитывать, так как нас интересуют только состояния, близкие к уровню химического потенциала. Таким образом, вероятность перехода есть

$$W_{ll'}^0 \delta(E - E').$$

Несмотря на анизотропию массы, мы получили для состояний с малыми волновыми числами изотропные вероятности перехода, т. е. изотропное число столкновений. Что же касается вероятностей W^0 для различных l и l' , то все они должны быть одного порядка, так как u_l , входящие в (24), как правило, одинаковы по величине.

Интересно отметить, что вероятности перехода не обращаются в нуль при квазимпульсе $k = 0$, если полосы дозволенных уровней перекрываются. Действительно, при $k = 0, k' \neq 0$, и поток электронов, рассеянных в другую группу состояний, вовсе не ра-

вен нулю. Здесь мы имеем чисто квантовое явление: эффективное сечение атома примеси для падающего на него электрона при перекрывающихся полосах стремится к бесконечности, когда длина волны $\lambda = 2\pi/k \rightarrow \infty$.

При наличии электрического и магнитного полей вместо плоских волн мы имеем функции (13). Решение уравнения (24) ищем теперь в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i(k_x x + k_y y)} \varphi_{ln}(z - z_0) u_{ln}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) + \psi_s(\mathbf{r}). \quad (25)$$

Здесь n — осцилляторное квантовое число, $\varphi_{ln}(z - z_0)$ — осцилляторная волновая функция с положением равновесия z_0 .

Нас интересуют только состояния, лежащие возле края до- зволенной полосы. Для них мы можем приближенно заменить опять $e^{i(k_x x + k_y y)}$ на единицу, модулирующую функцию $u_{ln}(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ на $u_l(0, \mathbf{r})$, а также $\varphi_{ln}(z - z_0)$ на $\varphi_{ln}(z_0)$. Вместо (24) получаем:

$$(\mathbf{H} - E) \psi_s \approx -U(\mathbf{r}) [\varphi_{ln}(z_0) u_l(0, \mathbf{r}) + \psi_s]. \quad (26)$$

Вероятность перехода между состояниями (l, n, \mathbf{k}) и (l', n', \mathbf{k}') с одинаковой энергией в первом приближении опять не зависит от $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$. Она должна быть теперь пропорциональна $|\varphi_{ln}(z_0)|^2$, а следовательно, в силу симметрии, также и $|\varphi_{l'n'}(z_0')|^2$ т. е. она будет

$$W_{ll'}^0 |\varphi_{ln}(z_0) \varphi_{l'n'}(z_0')|^2 \delta(E - E').$$

Если рассеивающий атом примеси расположен не в начале координат, а в точке $z = z_1$, то вероятность перехода будет, очевидно,

$$W_{ll'}^0 |\varphi_{ln}(z_1 - z_0) \varphi_{l'n'}(z_1 - z_0')|^2 \delta(E - E'). \quad (27)$$

4. Функция распределения и сила тока

В стационарном состоянии функция распределения f у нас зависит от трех параметров: от группы состояний l , от осцилляторного квантового числа n и от волнового числа k_y в направлении магнитного поля. Как мы сейчас убедимся, от k_x она не зависит. Условие стационарности имеет вид:

$$\sum_l \sum_{n, k_x, k_y} \int dz_1 W_{ll'} |\varphi_{ln}(z_1 - z_0) \varphi_{l'n'}(z_1 - z_0')|^2 \times \times \delta(E - E') [f(l, n, k_y) - f(l', n', k_y')] = 0. \quad (28)$$

Здесь $W = v_s W^0$, где v_s означает концентрацию рассеивающих электроны примесей, которые мы считаем хаотически распределенными.

Если ограничиваться членами, линейными относительно электрического поля, то это уравнение удовлетворяется фермиевским распределением, причем в показателе должна стоять энергия за вычетом члена, пропорционального F [9],

$$f(\varepsilon) = \left(\exp \frac{E - eF_{z_0} - \zeta}{kT} + 1 \right)^{-1} = \left(\exp \frac{\varepsilon - \zeta}{kT} + 1 \right)^{-1}, \quad (29)$$

где согласно (17)

$$\varepsilon = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_l + \frac{1}{2} \alpha_l k_y^2 \quad (30)$$

для состояний верхней полосы уровней ($l = 1, 2, 3$) и

$$\varepsilon = \Delta - \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_l + \frac{1}{2} \alpha_l k_y^2 \quad (31)$$

для нижней, почти заполненной полосы ($l = 4, 5, 6$). Здесь Δ означает перекрытие полос (расстояние от нижнего края верхней полосы до верхнего края нижней).

В уравнении (28) мы можем разложить $f(l, n, k_y)$ в ряд по степеням $(z_0' - z_0)$. Ограничивааясь линейными членами, получаем:

$$f(l, n, k_y) - f(l', n', k_y') = eF(z_0' - z_0) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}. \quad (32)$$

Стационарность распределения (29) вытекает из того, что в (28) при суммировании по k_x , т. е. по всевозможным z_0 , каждому члену, пропорциональному $(z_0' - z_0)$, сопоставится член, равный по величине и противоположный по знаку.

В магнитном поле химический потенциал ζ в (29) не остается неизменным. Полное число электронов меняться не может; следовательно, разность между числом электронов v_- в верхней полосе и числом дырок v_+ в нижней также не должна меняться. В достаточно чистом висмуте эта разность мала, и мы будем считать, что она равна нулю. Таким образом, ζ у нас определяется условием для концентраций: $v_- = v_+$. С распределением (29) имеем для электронов

$$v_- = 2 \sum_{l=1}^3 \sum_{n, k_x, k_y} \left(\exp \frac{\varepsilon - \zeta}{kT} + 1 \right)^{-1}. \quad (33)$$

От суммирования по k_x, k_y переходим к интегрированию. Мы будем рассматривать кубический кристалл, ребра которого равны единице. На промежуток dk_x, dk_y приходится тогда $dk_x dk_y / 4\pi^2$ состояний. Далее из (16) и (30) имеем:

$$dk_x dk_y = \frac{2\gamma}{\alpha_l k_y} dz_0 d\varepsilon. \quad (34)$$

Двойка здесь появляется вследствие двух ветвей интегрирования по

$$k_y = \pm \sqrt{[2\epsilon - (2n+1)\hbar\omega_l]/\alpha_l}.$$

Это дает

$$\begin{aligned} v_- &= \frac{\gamma}{\pi^2} \sum_{l,n} \int_0^1 dz_0 \int_{(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_l}^\infty d\epsilon \frac{\left(\exp \frac{\epsilon-\zeta}{kT} + 1\right)^{-1}}{\sqrt{[2\epsilon - (2n+1)\hbar\omega_l]\alpha_l}} \approx \\ &\approx \frac{\gamma}{\pi^2} \sum_{l,n} \sqrt{[2\zeta - (2n+1)\hbar\omega_l]/\alpha_l}, \end{aligned} \quad (35)$$

и аналогично для дырок

$$v_+ = \frac{\gamma}{\pi^2} \sum_{l,n} \sqrt{[2(\Delta-\zeta) - (2n+1)\hbar\omega_l]/\alpha_l}. \quad (35a)$$

Таким образом, химический потенциал ζ определяется условием

$$\sum_{l,n} \sqrt{\frac{2\zeta - (2n+1)\hbar\omega_l}{\alpha_l}} = \sum_{l,n} \sqrt{\frac{2(\Delta-\zeta) - (2n+1)\hbar\omega_l}{\alpha_l}}. \quad (36)$$

В слабом магнитном поле $\hbar\omega_1 \ll \zeta$, и суммирование по n можно заменить интегрированием. Пренебрегая единицей по сравнению с $2n$, получаем

$$\int_0^{\zeta/\hbar\omega_l} \sqrt{2(\zeta - \hbar\omega_l)} dn = \frac{(2\zeta)^{3/2}}{3\hbar\omega_l}.$$

Теперь формула (36) дает:

$$\sum_{l=1}^3 \frac{\zeta^{3/2}}{\alpha_l^{1/2} \omega_l} = \sum_{l=4}^6 \frac{(\Delta-\zeta)^{3/2}}{\alpha_l^{1/2} \omega_l}. \quad (37)$$

Здесь магнитное поле выпадает, так как согласно (16) все ω_l одинаково пропорциональны H . Следовательно, в слабых полях химический потенциал остается постоянным. Он меняется только в сильном магнитном поле, когда оказывается квантование, и в (36) от суммирования по n нельзя перейти к интегралам.

Переходим к вычислению силы тока в направлении электрического поля. При каждом переходе, учитываемом в уравнении (28), электрон смещается в направлении поля на величину $z'_0 - z_0$. Следовательно, полная сила тока получится, если подынтегральное выражение в (28) помножить на $e(z_0 - z'_0)$ и просуммировать не только по всем начальным состояниям, но и по конечным, разделив затем на два, так как при двойном суммировании каждый пе-

реход учитывается дважды: один раз через начальное состояние, другой — через конечное. Такой способ вычисления тока проще, чем примененный Титейкой, так как сразу приводит к двойному интегралу (39) вместо тройного. Мы получаем таким образом:

$$\begin{aligned} j_z &= \frac{e}{16\pi^4} \sum_{l,l'=1}^6 \sum_{n,n'} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk'_x dk'_y \int_0^1 dz_1 (z_0 - z'_0) \times \\ &\times W_{ll'} |\varphi_{ln}(z_1 - z_0) \varphi_{l'n'}(z_1 - z'_0)|^2 \delta(E - E') \times \\ &\times [f(l, n, k_y) - f(l', n', k'_y)]. \end{aligned} \quad (38)$$

Учитывая спиновое вырождение, мы удвоили только число начальных состояний, считая, что спин при столкновениях не меняется. Интегрирование по z_1 здесь производится по рассматриваемой области. По остальным переменным при этом можно условно интегрировать от $-\infty$ до $+\infty$.

В (38) заменяем переменные согласно (30) и (34). При этом

$$\delta(E - E') = \delta[\epsilon - \epsilon' + eF(z_0 - z'_0)].$$

Выполняя интегрирование по ϵ' , получаем:

$$\begin{aligned} j &= \frac{e^3 H^2}{4\pi^4 \hbar^2 c^2} \sum_{l,l'=1}^6 \sum_{n,n'} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_0 dz'_0 \int_0^1 dz_1 \int d\epsilon (z_0 - z'_0) W_{ll'} \times \\ &\times |\varphi_{ln}(z_1 - z_0) \varphi_{l'n'}(z_1 - z'_0)|^2 \frac{f(l, n, k_y) - f(l', n', k'_y)}{\alpha_l \alpha_{l'} k_y k'_y}. \end{aligned}$$

Раскладываем подынтегральное выражение в ряд по степеням F и ограничиваемся линейными членами согласно (32). По свойствам осцилляторных функций

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} dz_0 dz'_0 |\varphi_{ln}(z_1 - z_0) \varphi_{l'n'}(z_1 - z'_0)|^2 (z_0 - z'_0)^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz_0 |\varphi_{ln}(z_1 - z_0)|^2 (z_1 - z_0)^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} dz'_0 |\varphi_{l'n'}(z_1 - z'_0)|^2 (z_1 - z'_0)^2 = \\ &= \frac{1}{\gamma} [(n + \frac{1}{2}) \sqrt{\mu_{33}/\mu_{11}} + (n' + \frac{1}{2}) \sqrt{\mu'_{33}/\mu'_{11}}]. \end{aligned} \quad (39)$$

Интегрирование по z_1 дает теперь ребро куба, т. е. единицу. Окончательно имеем

$$j = -\frac{e^3 F H}{2\pi^4 \hbar c} \sum_{l,l'=1}^6 \sum_{n,n'} W_{ll'} \frac{n + \frac{1}{2}}{\alpha_l \alpha_{l'}} \sqrt{\frac{\mu_{33}^l}{\mu_{11}^l}} \int \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \frac{d\epsilon}{k_y k'_y}. \quad (40)$$

Суммирование по n и n' и интегрирование по ϵ здесь распространяется на все те неотрицательные значения этих величин, для которых согласно (30) и (31) k_y и k'_y вещественны.

5. Сопротивление

Удельное сопротивление равно отношению составляющей электрического поля в направлении тока к плотности тока:

$$\rho = \frac{j_z F}{I^2} = \frac{j_z F}{J^2}. \quad (41)$$

Параболический рост сопротивления в магнитном поле показывает, что в чистом висмуте дырок столько же, сколько электронов проводимости. В этом случае согласно (20) $j_{x+} = -j_{x-}$, и, следовательно, «холловский» ток $j_x = 0$; точно так же и $j_y = 0$. При этом

$$\rho = F/j_z. \quad (42)$$

В слабом магнитном поле квантование электронов несущественно ($\hbar\omega_l \ll kT$), и мы можем в (40), так же как и в (37), заменить суммы по n и n' интегралами. Имеем, например:

$$\int_0^{\epsilon/\hbar\omega_l} dn \int_0^{(\Delta-\epsilon)/\hbar\omega_l} \frac{dn' n}{\sqrt{(e-n\hbar\omega_l)(\Delta-\epsilon-n'\hbar\omega_l')}} = \frac{8}{3} \frac{\epsilon^{3/2} (\Delta-\epsilon)^{1/2}}{h^3 \omega_l^2 \omega_{l'}^2}$$

и т. п. Далее, $\partial f/\partial \epsilon$ можно здесь заменить на δ -функцию:

$$\partial f/\partial \epsilon \cong \delta(\epsilon - \zeta).$$

Таким образом, в слабом магнитном поле

$$j_z = \frac{4e^3 FH}{3\pi^4 h^4 c} \left\{ \sum_{l=1}^3 \sum_{l'=4}^6 \frac{W_{ll'}}{\sqrt{\alpha_l \alpha_{l'}}} \sqrt{\frac{\mu_{33}^l}{\mu_{11}^l} \frac{\zeta^2}{\omega_l^2 \omega_{l'}^2}} + \sum_{l=1}^6 \sum_{l'=4}^6 \frac{W_{ll'}}{\sqrt{\alpha_l \alpha_{l'}}} \times \right. \\ \times \sqrt{\frac{\mu_{33}^l}{\mu_{11}^l} \frac{(\Delta-\zeta)^2}{\omega_l^2 \omega_{l'}^2}} + \sum_{l=1}^3 \sum_{l'=4}^6 \frac{W_{ll'}}{\sqrt{\alpha_l \alpha_{l'}}} \left[\sqrt{\frac{\mu_{33}^l}{\mu_{11}^l} \frac{\zeta^{3/2} (\Delta-\zeta)^{1/2}}{\omega_l^2 \omega_{l'}^2}} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{\mu_{33}^l}{\mu_{11}^l} \frac{\zeta^{1/2} (\Delta-\zeta)^{3/2}}{\omega_l^2 \omega_{l'}^2}} \right] \right\}. \quad (43)$$

Значения $-\mu_{ab}^l$, α и ω определяются формулами (11) и (16) – (18).

Формула (42) в основном совпадает с выражением, полученным Джонсом [1] для случая, когда $\rho \gg \rho_0$, т. е. $\omega_l t \gg 1$, где ρ_0 — сопротивление без магнитного поля и t — средний промежуток времени между двумя столкновениями. Разница заключается только в том, что у Джонса вместо шести групп состояний было только две (электронная и дырочная).

Таким образом, если в (40) от суммирования по n переходить к интегрированию, то при $\omega_l t \gg 1$ результат совпадает с тем, который получается, если рассматривать магнитное поле как слабое возмущение, т. е. как причину переходов. Если $\omega_l t < 1$, то наш метод непригоден, так как столкновения будут тогда более сильным возмущением, чем магнитное поле.

В более сильных полях $\hbar\omega_l$ становится сравнимым с kT , и дискретность n становится существенной. Можно думать, что

у «шенберговских» состояний вследствие их малой массы квантование сказывается раньше. Поэтому для дырок мы сохраним интегрирование по n . Сила тока (40) распадается у нас теперь на три части:

$$j_z = j_+ + j_- + j_{\pm}, \quad (44)$$

где ток j_+ связан с переходами в пределах нижней полосы, т. е. между «дырочными» состояниями, ток j_- связан с переходами в пределах верхней полосы и, наконец, j_{\pm} обязан переходам из одной полосы уровней в другую.

Ток j_+ у нас будет иметь прежний вид (43), причем суммирование по l и l' производится от 4 до 6:

$$j_+ = \frac{4e^3 FH}{3\pi^4 h^4 c} \sum_{l,l'=4}^6 \frac{W_{ll'}}{\sqrt{\alpha_l \alpha_{l'}}} \sqrt{\frac{\mu_{33}^l}{\mu_{11}^l} \frac{(\Delta-\zeta)^2}{\omega_l^2 \omega_{l'}^2}}. \quad (45)$$

Переходим к току j_{\pm} . Интегрирование по дырочным состояниям дает

$$\int_0^{\Delta-\epsilon} \frac{dn'}{\sqrt{\Delta-\epsilon-n'\hbar\omega_{l'}}} = 2 \frac{(\Delta-\epsilon)^{1/2}}{\hbar\omega_{l'}}; \quad \int_0^{\Delta-\epsilon} \frac{n'dn'}{\sqrt{\Delta-\epsilon-n'\hbar\omega_{l'}}} = \\ = \frac{4}{3} \frac{(\Delta-\epsilon)^{3/2}}{\hbar^2 \omega_{l'}^2}.$$

Второй из этих интегралов значительно больше первого. Мы получаем

$$j_{\pm} = -\frac{2e^3 FH}{3\pi^4 h c} \sum_{l=1}^3 \sum_{l'=4}^6 \sum_n \frac{W_{ll'}}{\sqrt{\alpha_l \alpha_{l'}}} \int_{(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_l}^{\infty} ds \frac{ds}{\partial \epsilon} \left[\epsilon - \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_l \right]^{-1/2} \times \\ \times \left\{ \sqrt{\frac{\mu_{33}^l}{\mu_{11}^l} \frac{(\Delta-\epsilon)}{h^2 \omega_{l'}^2}} + \frac{3}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{\mu_{33}^l}{\mu_{11}^l} \frac{(\Delta-\epsilon)^{1/2}}{h\omega_{l'}}} \right\}. \quad (46)$$

Здесь множители $(\Delta-\epsilon)$ — медленно меняющиеся функции, и их можно вынести из-под интеграла. Там, где $\partial f/\partial \epsilon$ велико, $\Delta-\epsilon \approx \Delta-\zeta$. Следовательно,

$$j_{\pm} = \frac{2e^3 FH}{3\pi^4 h c} \sum_{l=1}^3 \sum_{l'=4}^6 \sum_n \frac{W_{ll'}}{\sqrt{\alpha_l \alpha_{l'}}} \left[\sqrt{\frac{\mu_{33}^l}{\mu_{11}^l} \frac{(\Delta-\zeta)^{3/2}}{h^2 \omega_{l'}^2}} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{\mu_{33}^l}{\mu_{11}^l} \frac{(\Delta-\zeta)^{1/2}}{h\omega_{l'}}} \right] J_n(\omega_l), \quad (47)$$

где

$$J_n(\omega_l) = - \int_{(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_l}^0 \frac{\partial f/\partial \epsilon d\epsilon}{\sqrt{\epsilon - \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_l}}.$$

Для простоты мы будем здесь считать эффективную массу дырок изотропной

$$\left(\mu_{\alpha\beta}^l = \frac{1}{m_+} \delta_{\alpha\beta} \right)$$

и вероятности перехода одинаковыми ($W_{ll'} = W$).

Если магнитное поле перпендикулярно к бинарной оси кристалла, то это дает:

$$\begin{aligned} j_{\pm} = & \frac{2e^3 FH}{\pi^4 hc} \sum_n W \sqrt{m_+} \left\{ \frac{(\Delta - \zeta)^{1/2}}{h^2 \omega_+} \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_2}} J_n \left(\frac{eH}{c} \sqrt{\mu_1 \mu_2} \right) + \right. \right. \\ & + \sqrt{\frac{\mu_1 + 3\mu_2}{\mu_1 \mu_2}} J_n \left(\frac{eH}{2c} \sqrt{\frac{\mu_1 + 3\mu_2}{\mu_3}} \right) \left. \right] + \frac{3}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \times \\ & \times \frac{(\Delta - \zeta)^{1/2}}{h \omega_+} \sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_1 \mu_2}} \left[J_n \left(\frac{eH}{c} \sqrt{\mu_1 \mu_3} \right) + J_n \left(\frac{eH}{2c} \sqrt{\frac{\mu_1 + 3\mu_2}{\mu_3}} \right) \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

Если магнитное поле направлено по бинарной оси, то нужно поменять местами μ_1 и μ_2 .

Интегралы $J_n(\omega_l)$ представляют собой функцию от H , обладающую максимумом при $(n + 1/2) h \omega_l \approx \zeta$. В точке максимума их значение $\approx (kT)^{-1/2}$. Вследствие наложения этих максимумов ток $j_{\pm}(H)$ приобретает осциллирующий характер.

Наконец, для тока j_- имеем из (40):

$$j_- = \frac{e^3 FH}{2\pi^4 hc} \sum_{l,l'=1}^3 \sum_{n,n'} W_{ll'} \frac{n + 1/2}{\sqrt{\alpha_l \alpha_{l'}}} \sqrt{\frac{\mu_{33}^l}{\mu_{11}^l}} J_{nn'}(\omega_l, \omega_{l'}), \quad (49)$$

где

$$J_{nn'}(\omega_l, \omega_{l'}) = - \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{\partial f / \partial \varepsilon}{\sqrt{\left[\varepsilon - \left(n + \frac{1}{2} \right) h \omega_l \right] \left[\varepsilon - \left(n' + \frac{1}{2} \right) h \omega_{l'} \right]}}.$$

Интегрирование здесь простирается от $\varepsilon_1 = (n + 1/2) h \omega_m$, где ω_m — большее из ω_l и $\omega_{l'}$, и до бесконечности. Если $(n + 1/2) \omega_l \neq (n' + 1/2) \omega_{l'}$, то интеграл сходится; в противном случае он расходится. Это связано с тем, что согласно (28) и (34) при $k_y \rightarrow 0$ вероятности перехода у нас стремятся к бесконечности как $1/k_y$. Продолжительность каждого отдельного столкновения при малом k_y уже не мала по сравнению со средним промежутком времени τ , отделяющим два последовательных столкновения; следовательно, взаимодействие электронов с рассеивающими атомами примеси при малых k_y нельзя разложить на отдельные столкновения.

Наш расчет сохраняет смысл, очевидно, только до тех пор, пока продолжительность столкновения или, точнее, квантовая неопределенность момента столкновения меньше, чем τ . Но если мы выберем $\Delta t \sim \tau$, то с этим связана неопределенность энергии $\Delta \varepsilon \sim h/\tau$, и только с такой точностью мы можем указать ε_1 . Можно

поэтому думать, что получится разумный результат, если взять

$$\varepsilon_1 = (n + 1/2) h \omega_l \sim h/\tau (\varepsilon_1). \quad (50)$$

У нас τ пропорционально $\sqrt{\varepsilon - (n + 1/2) h \omega_l}$. Следовательно, $\tau(\varepsilon_1) \sim \bar{\tau} \sqrt{[\varepsilon_1 - (n + 1/2) h \omega_l]/\bar{\varepsilon}}$. Здесь $\bar{\tau}$ и $\bar{\varepsilon}$ — их средние значения; мы возьмем $\bar{\tau} \sim 4 \cdot 10^{-10}$ сек, $\bar{\varepsilon} \sim 10^{-14}$ эрг (см. ниже). Это дает

$$\varepsilon_1 = (n + 1/2) h \omega_l \sim (h^2 \bar{\varepsilon} / \bar{\tau}^2)^{1/3} \sim 2 \cdot 10^{-17} \text{ эрг.}$$

Интеграл $J_{nn'}(\omega_l, \omega_{l'})$ также дает максимум при $(n + 1/2) h \omega_m \approx \zeta$. При $(n + 1/2) \omega_l \neq (n' + 1/2) \omega_{l'}$ в точке максимума

$$J_{nn'}(\omega_l, \omega_{l'}) \sim (kT [\zeta - (n' + 1/2) h \omega_m])^{-1/2}.$$

Если же $(n + 1/2) \omega_l = (n' + 1/2) \omega_{l'}$, то при максимуме $J_{nn'}(\omega_l, \omega_{l'}) \sim 1/kT \ln \varepsilon_1/kT$; поэтому при самых низких температурах соответствующие члены играют большую роль.

Если же вероятности переходов $W_{ll'}$ одного порядка величины, то вблизи максимума $j_- \lesssim j_{\pm}$.

6. Обсуждение результатов

Ток «неквантующихся» дырок j_+ обратно пропорционален H^2 . На него накладываются осциллирующие j_{\pm} и j_- . Отношение осциллирующей части тока при ее максимуме к монотонно убывающей по порядку величин будет:

$$\frac{j_{\pm \max}}{j_+} \sim \frac{h \omega_+}{V(\Delta - \zeta) kT} \sim \frac{h e H}{m_+ c V(\Delta - \zeta) kT}. \quad (51)$$

Положение максимума тока, т. е. минимума сопротивления, определяется условием:

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) h \omega_l = \zeta, \text{ т. е. } H = \frac{c}{e h} \frac{\xi}{n + 1/2} \left(\mu_{11}^l \mu_{33}^l \right)^{-1/2}, \quad (52)$$

где n — «порядок» максимума, т. е. осцилляторное квантовое число, μ_{11}^l и μ_{33}^l определяются формулами (10) — (12). Таким образом, относительная амплитуда осцилляций обратно пропорциональна $n + 1/2$, и заметить можно только осцилляции, соответствующие небольшим $n = 0, 1, \dots$

Вычисление по формулам предшествующего параграфа сопротивление мы должны сравнивать с сопротивлением при отсутствии магнитного поля. По обычной формуле

$$j_0 \equiv j_{0-} = e^2 \mu_3 v_{-} F.$$

Всего у нас имеется три группы свободных электронов. Следовательно,

$$v_- = 6 \frac{4\pi}{3} \frac{(2m\xi)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{(2m\xi)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3},$$

где $\bar{\mu} = (\mu_1 \mu_2 \mu_3)^{-1/3}$. При вычислении τ главную роль играют пе-
реходы в состояния нижней полосы, так как там уровни расположены гуще. Поэтому

$$\frac{1}{\tau} = 3 \cdot 4\pi W \int \delta(\varepsilon - \Delta + \zeta) \frac{2m_{+}e^2 \sqrt{2m_{+}\varepsilon}}{8\pi^2 h^3} = \frac{3W}{2\pi^2 h^3} m_{+} \sqrt{2m_{+}(\Delta - \zeta)}.$$

Таким образом,

$$\rho_0 = \frac{F}{j_0} \approx \frac{3}{4} \frac{W}{e^2 \mu_3} \left(\frac{m_{\pm}}{m_{+}\zeta} \right)^{1/2} (\Delta - \zeta)^{1/2}. \quad (53)$$

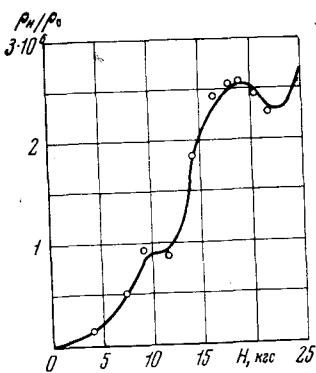
На рисунке изображен приблизительный ход отношения ρ_H/ρ_0 . При этом мы приняли: $m_{+} = 1/4 m_0$, $\tau = 4 \cdot 10^{-10}$ сек, $T = 4,2^\circ$ К (такому τ соответствует при комнатной температуре $\tau \sim 10^{-13}$ сек). Ток направлен по тригональной оси кристалла; магнитное поле перпендикулярно к бинарной оси. Теоретическая кривая хорошо согласуется с экспериментальными точками, полученнымными при тех же условиях [2]. Трехмиллионное увеличение сопротивления получается, с одной стороны, за счет большого τ и, с другой — вследствие наличия свободных электронов и дырок в почти одинаковом числе, благодаря чему параболический рост идет достаточно далеко.

На опыте минимумы получаются приблизительно при 12 и 24 кгс. Эти минимумы можно приписать $n = 0$, $\vartheta_1 = 0$ и $\vartheta_{2,3} = 2\pi/3$. Тогда положение минимума около 14 кгс, который наблюдается, когда магнитное поле направлено по бинарной оси, также совпадает с теоретическим: $n = 0$, $\vartheta_{2,3} = \pm\pi/3$, $H = 24/\sqrt{3}$ кгс [формулы (52) и (11); если магнитное поле направлено по бинарной оси, то μ_1 и μ_2 нужно поменять местами].

По положению минимумов мы можем теперь определить химический потенциал электронов. Получается $\zeta/k = 70^\circ$ К, т. е. несколько ниже, чем по Шёнбергу (140° К). Отсюда концентрация свободных электронов и дырок: $v_{-} = v_{+} = 1,6 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, или $0,6 \cdot 10^{-5}$ на атом.

Приблизительно такое же значение получается при низких температурах из постоянной Холла для поликристаллического висмута [8]. Монокристаллы висмута дают более низкое значение постоянной Холла, но это, очевидно, объясняется взаимной компенсацией электронов и дырок.

При комнатной температуре число свободных электронов и дырок у висмута больше. По электропроводности и по росту сопротивления в магнитном поле получается 10^{-4} свободных электронов



на атом [1]. Это объясняется тем, что вследствие наличия двух перекрывающихся полос при температурах выше, чем ζ/k , число как электронов проводимости, так и дырок в нижней зоне должно увеличиваться как $T^{1/2}$.

Действительно, число электронов проводимости и дырок

$$v = \frac{3}{\pi^2 h^3} \int_0^{\infty} \left(\exp \frac{p^2/2m_{+} - \zeta}{kT} + 1 \right)^{-1} p^2 dp = \\ = \frac{3}{\pi^2 h^3} \int_0^{\infty} \left(\exp \frac{p^2/2m_{+} - \Delta + \zeta}{kT} + 1 \right)^{-1} p^2 dp. \quad (54)$$

При высоких температурах $\Delta < kT$, и в последнем интеграле Δ можно пренебречь. Введем новые переменные: $x = p/\sqrt{2m_{+}kT}$, $y = \zeta/kT$. Тогда

$$v = 3 \frac{(2\bar{m}kT)^{3/2}}{\pi^2 h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^{x^2-y} + 1} = 3 \frac{(2\bar{m} + kT)^{3/2}}{\pi^2 h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^{x^2+y} + 1}. \quad (55)$$

Из правого равенства вытекает, что y от температуры не зависит. Но в таком случае v пропорционально $T^{3/2}$.

Таким образом, хотя висмут и металл, число свободных электронов и положительных дырок в нем зависит от температуры, что сближает его с полупроводниками.

Рассмотрим теперь случай очень сильных полей. С увеличением магнитного поля осцилляторная нулевая энергия должна стать больше, чем расстояние от верхнего края нижней полосы уровней до нижнего края верхней полосы ($1/2\hbar\omega_l > \Delta$). После того как это произойдет для всех трех групп электронов ($l = 1, 2, 3$), кристалл должен был бы стать изолятором, электропроводность которого экспоненциально убывала бы с увеличением магнитного поля. Если магнитное поле перпендикулярно к бинарной оси кристалла, то это должно было бы получаться уже начиная с $H \sim 30$ кгс, при других положениях — в более сильных полях; если магнитное поле направлено по бинарной оси, то — при полях, в несколько десятков раз больших.

В действительности, однако, вследствие наличия примесей число свободных электронов и дырок никогда в точности не совпадает. Разность между ними не может зависеть от поля. Поэтому небольшая металлическая проводимость сохранится в любых полях.

Если положительных дырок больше, чем квантующихся в более слабых полях электронов проводимости, то в сильных полях останутся одни дырки. При этом в дальнейшем могут еще появиться осцилляции, связанные с квантованием дырок.

Если же свободных электронов больше, чем дырок, то в сильном магнитном поле останутся одни электроны и притом только в состояниях с $n = 0$. Ход кривой сопротивления при этом должен

быть монотонным. Химический потенциал будет зависеть от магнитного поля; вместо условия (35) имеем

$$v' = \frac{eH}{\pi^2 hc} \int_{\frac{1}{2} h\omega}^{\infty} d\varepsilon \frac{\left(\exp \frac{\varepsilon - \zeta}{kT} + 1\right)^{-1}}{\sqrt{(2\varepsilon - h\omega)a}}. \quad (56)$$

Значок l мы отбросили, так как сохранится только та группа электронов, для которой ω_l наименьшее; v' означает число избыточных электронов проводимости.

Обозначим $\varepsilon - \frac{1}{2}h\omega = \varepsilon'$, $\zeta - \frac{1}{2}h\omega = \zeta'$. В очень сильном поле получится максвелловское распределение

$$f(\varepsilon) \approx e^{(\zeta' - \varepsilon')/kT} (\zeta' < 0).$$

Следовательно,

$$v' = \frac{eH}{\pi^2 hc} e^{\zeta'/kT} \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon' e^{-\varepsilon'/kT}}{\sqrt{2\alpha\varepsilon'}} = \frac{eH}{2\pi hc} \sqrt{\frac{kT}{2\alpha}} e^{\zeta'/kT}. \quad (57)$$

Сила тока согласно (49) будет

$$j_- = \frac{e^3 FH}{4\pi^4 hc} \frac{W}{\alpha kT} \sqrt{\frac{\mu_{33}}{\mu_{11}}} e^{\zeta'/kT} \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{d\varepsilon'}{\varepsilon'} e^{-\varepsilon'/kT}. \quad (58)$$

Но согласно (57) $H e^{\zeta'/kT}$ от H не зависит. Следовательно, j_- — также не зависит от H .

С другой стороны, холловский ток согласно (20) обратно пропорционален H . Следовательно, при избытке электронов проводимости ($v_- > v_+$) в очень сильном магнитном поле сопротивление, увеличиваясь с усилением поля, стремится к постоянному пределу. При указанных выше условиях переход к пределу должен получаться при полях $\sim 10^6$ гс.

Ленинградский Физико-технический институт
Академии наук СССР

Получено
11 августа 1939 г.

Физический институт
Ленинградского государственного университета

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Jones. Proc. Roy. Soc., 1936, A, 155, 653.
2. Proc. Amst., 1930, 33, 130, 363, 418; Physica, 1935, 2, 907.
3. W. J. de Haas, P. M. van Alphen. Proc. Amst., 1930, 33, 1106; 1932, 35, 454.
4. L. Landau. Zs. f. Phys., 1930, 64, 629.
5. R. Peterls. Zs. f. Phys., 1933, 80, 763, 81, 187.
6. M. Blackman. Proc. Roy. Soc., 1938, A, 166, 1.
7. D. Shoenberg. Proc. Roy. Soc., 1939, A, 170, 341.
8. Kamerlingh-Onnes, B. Beckman. Proc. Amst., 1912, 15, 307, 649; 981; Kamerlingh-Onnes and K. Hof. Proc. Amst., 1914, 17, 520.
9. S. Titeica. Ann. d. Phys., 1935, 22, 129.
10. A. Ахиезер. ЖЭТФ, 1939, 9, 426.

О ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ВИСМУТА *

Совместно с А. Ахиезером

Исследуется температурная зависимость теплопроводности висмута в различных областях температур. Показано, что при температурах, удовлетворяющих условию $\theta > T > \hbar s n_e^{1/3}/k$ (θ — дебаевская температура, s — скорость звука, n_e — число электронов в единице объема), теплопроводность висмута, в отличие от обычных металлов, определяется колебаниями решетки, а не электронами.

Известно, что висмут при низких температурах обнаруживает «периодичность» в изменении сопротивления и диамагнитной восприимчивости с магнитным полем. Эти явления связаны с тем обстоятельством, что у висмута, в отличие от других металлов, число электронов проводимости крайне мало (по порядку величины оно равно $n_e \sim 10^{18} 1/cm^3$ [1]). Отсюда следует, что энергия электрона может считаться квадратичной функцией его квази-импульса. Несмотря на малость числа электронов проводимости, последние удовлетворяют, однако, статистике Ферми — Дирака, а не Больцмана, но с очень низкой температурой вырождения, порядка 100° К.

В настоящей статье мы рассмотрим, исходя из этих предположений, вопрос о теплопроводности висмута. Так как в дальнейшем нас будет интересовать только порядок величин и зависимость их от температуры, то мы не будем учитывать анизотропии; электрон характеризуется поэтому в дальнейшем одной массой m . Далее, мы не учитываем дисперсии фононов и полагаем энергию фона равной sf (s — скорость звука, f — импульс фона).

Рассмотрим взаимодействие электрона с решеткой. Обозначим квази-импульс электрона через p . В силу законов сохранения импульса и энергии имеем

$$\frac{p^2}{2m} \pm sf = \left(\frac{p \pm f}{2m} \right)^2,$$

причем знак плюс относится к поглощению фона электроном, а минус — к испусканию. Так как скорость электрона значительно больше скорости звука, то

$$f = \mp 2p \cos \vartheta.$$

* ЖЭТФ, 1945, 15, 587.

где θ — угол между p и f . Таким образом, импульс фона, сталкивающегося с электроном, не может быть больше удвоенного значения импульса электрона. Максимальное значение импульса электрона по порядку величины равно $\hbar n_e^{1/3}$, поэтому максимальная энергия фона, участвующих во взаимодействии электронов с решеткой, по порядку величины равна

$$\hbar \omega_{\max} = s f_m \approx \hbar s n_e^{1/3}.$$

Если считать скорость звука равной $2 \cdot 10^5$ см/сек, то температура T_0 , соответствующая максимальной энергии фона, будет порядка 1° . Эта температура значительно ниже дебаевской температуры. Поэтому во взаимодействии электронов с решеткой участвует лишь небольшая часть фонового спектра. Этим обстоятельством мы воспользуемся для того, чтобы оценить длину свободного пробега электронов, обусловленную их взаимодействием с решеткой. Для определения порядка величины достаточно ограничиться рассмотрением случая поглощения фона. Вероятность такого процесса может быть представлена в виде

$$\frac{2\pi}{N} \frac{f u^2}{\hbar M s} \frac{1}{e^{\hbar \omega / kT} - 1} \delta(\epsilon_{p+f} - \epsilon_p - sf),$$

где u — величина порядка атомной энергии (в частности, порядка $M s^2$), M — масса атома, N — число атомов кристалла. Средняя вероятность поглощения равна

$$w = \frac{\Omega}{N} \frac{2\pi u^2}{\hbar M s} \int_0^m \frac{f^2 \delta(\epsilon_{p+f} - \epsilon_p - sf)}{e^{\hbar \omega / kT} - 1} \frac{df dO_p}{(2\pi\hbar)^2}.$$

Здесь Ω — объем кристалла, dO_p — элемент телесного угла f . Уничтожив δ -функцию интегрированием по углам, получим

$$w = \frac{mu^2 a^3}{2\pi\hbar^4 p s M} \int_0^{2(3\pi^2)^{1/3} \hbar^{1/3} e} \frac{f^2 df}{e^{sf/kT} - 1}.$$

Если температура значительно превосходит T_0 , то при определении w можно разложить экспоненциальную функцию в ряд. Мы получим при этом

$$w \sim \frac{4(3\pi^2)^{2/3} a^3 u^2 n_e^{2/3}}{4\pi\hbar^2 u^2 v M s^2} kT,$$

где v — скорость электрона.

Длина свободного пробега электрона равна

$$l_e \sim \frac{v}{w} \sim \frac{M s^2 \hbar^2 v^2}{n_e^{2/3} a^3 u^2 k T} \sim a \frac{M s^2}{k T}, \quad (1)$$

где $\hbar^2 m a^2$ порядка u .

Таким образом, длина свободного пробега электронов при температурах, больших T_0 , обратно пропорциональна абсолютной температуре. У обычных металлов граничной температурой, разделяющей области высоких и низких температур, является дебаевская температура. Мы видим, что у висмута роль граничной температуры играет $kT_0 = \hbar s n_e^{1/3}$. Поэтому, в частности, электрическое сопротивление висмута, обусловленное взаимодействием электронов с решеткой, будет пропорционально T^5 при температурах, меньших T_0 , а не θ .

Определим теперь теплопроводность висмута. Она складывается из электронной и фоновой частей. Теплопроводность, обусловленная электронами, по порядку величины равна $\chi_e \sim l_e c_e v$, где c_e — теплоемкость электронов, отнесенная к единице объема. Теплопроводность, обусловленная фонарами, равна $\chi_f \sim l_f c_f s$, где c_f — теплоемкость решетки, отнесенная к единице объема, а l_f — длина свободного пробега фона, определяемая из соотношения

$$\frac{1}{l_f} = \frac{1}{l_{ff}} + \frac{1}{l_{fe}}.$$

Здесь l_{ff} — длина свободного пробега, связанная с взаимодействием волн решетки между собой, а l_{fe} — длина свободного пробега по отношению к взаимодействию фона и электронов.

Рассмотрим прежде всего температуры, заключенные между θ и T_0 . Так как температура вырождения электронов T_e того же порядка величины, что и дебаевская температура, то мы можем считать теплоемкость электронов пропорциональной температуре

$$c_e \sim k n_e \frac{T}{T_e},$$

поэтому теплопроводность, обусловленная электронами, равна

$$\chi_e \sim \frac{M s^2}{T_e} v a n_e; \quad (2)$$

она не зависит, следовательно, от температуры.

В рассматриваемой области температур длина свободного пробега фона определяется главным образом взаимодействием фона и друг с другом, а не взаимодействием их с электронами, так как концентрация электронов в висмуте очень мала.

Теплопроводность, обусловленная фонарами, обратно пропорциональна $T^{2/3}$ [2]. Сравнение χ_f и χ_e показывает, что при дебаевской температуре их отношение по порядку величины становится равным десяти, если считать $s/v \sim 10^{-3}$. Поэтому при температурах ниже дебаевской, в области $T_0 < T < \theta$, теплопроводность, обусловленная фонарами, превосходит электронную теплопроводность. У обычных металлов при низких температурах теплопроводность обусловливается главным образом электронами, так как теплоемкость фона пропорциональна T^3 . Поэтому теплопровод-

нность решетки оказывается пропорциональной T^2 , тогда как теплопроводность электронов обратно пропорциональна T^2 (длина свободного пробега электронов пропорциональна T^{-3}).

Если мы перейдем в область более низких температур, меньших T_0 , то соотношение между ролями электронов и фононов изменится. Теплопроводность будет определяться главным образом электронами. Действительно, длины свободного пробега электронов и фононов, определяемые предыдущими формулами, безгранично возрастают с уменьшением температуры; поэтому в этой области температур длина свободного пробега электронов определяется примесями и по порядку величины равна a/ϵ , где ϵ — относительная концентрация атомов примесей. Что касается длины свободного пробега фононов, то она теперь определяется размерами тела L (длина свободного пробега фононов, обусловленная примесями, обратно пропорциональна T^4). Поэтому электронная и фононная теплопроводности равны

$$\chi_e \sim k n_e \frac{T}{T_e} \frac{a}{\epsilon} v, \quad \chi_l \sim \frac{k}{a^3} \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 L s, \quad (3)$$

отношение между ними равно

$$\frac{\chi_e}{\chi_l} \sim n_e a^3 \frac{a}{L \epsilon} \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{T}{T_e} \frac{v}{s}.$$

Это отношение становится равным единице при температуре $\theta \sqrt{\frac{a^4 n_e v}{\epsilon L s}}$ (при $\epsilon \sim 10^{-5}$, $L \sim 1$ см эта температура составляет доли градуса). При температурах, меньших $\theta \sqrt{\frac{a^4 n}{\epsilon L}} e \frac{v}{s}$, теплопроводность определяется электронами.

Резюмируя, мы можем сказать, что при температурах, меньших T_0 , теплопроводность уменьшается с понижением температуры, тогда как при температурах $T_0 < T < \theta$ теплопроводность увеличивается с понижением температуры. Поэтому вблизи $T \sim T_0$ теплопроводность должна достигать своего максимума.

Заметим, что максимум в температурной кривой теплопроводности висмута наблюдался С. С. Шалытом в области температур 4–14° К.

Рассмотрим, наконец, высокие температуры $T > \theta$. Длина свободного пробега фононов в этом случае обратно пропорциональна $T^{5/4}$. Фононная теплопроводность определяется по формуле [3]

$$\chi_l \sim ka \left(\frac{Ms^2}{kT} \right)^{5/4} \frac{s}{a^3}. \quad (4)$$

При рассмотрении электронной теплопроводности нужно иметь в виду, что температура вырождения того же порядка величины, что и дебаевская температура. Далее следует учитывать

увеличение числа электронов, а также дырок, которое вызывается наличием двух перекрывающихся энергетических полос. Легко видеть, что благодаря этому обстоятельству число электронов проводимости и дырок растет с увеличением температуры пропорционально $T^{3/2}$ [4]. Действительно, считая числа электронов n_- и дырок n_+ одинаковыми, имеем

$$n_- = \frac{2}{h^3} \int \frac{4\pi p^2 dp}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1} = \frac{2}{h^3} \int \frac{4\pi p^2 dp'}{e^{(\mu-\Delta E+\epsilon')/kT} + 1} = n_+.$$

Здесь ΔE — перекрытие полос, ϵ и ϵ' — энергия электрона и дырки. Если $\Delta E < kT$, то

$$n_- = n_+ \cong \frac{1}{h^3} (mkT)^{5/4}.$$

Теплопроводность, обусловленная электронами и дырками, равна

$$\chi \sim n_- l_- v_- c_- + n_+ l_+ v_+ c_+$$

(знак минус относится к электронам, плюс к дыркам). Длина свободного пробега обратно пропорциональна температуре, скорость пропорциональна $T^{1/2}$, и теплоемкость не зависит от температуры, поэтому

$$\chi \sim \frac{kma}{h^3} Ms^2 kT. \quad (5)$$

Электронная теплопроводность пропорциональна, таким образом, температуре и превосходит фононную теплопроводность, определяемую формулой (4).

Остановимся еще на вопросе о влиянии магнитного поля на теплопроводность висмута. Магнитное поле влияет в первом приближении на электронную теплопроводность. По порядку величины относительное изменение электронной теплопроводности равно $(\omega_L t)^2$, где $\omega_L = eH/mc$ и t — время свободного пробега электронов, равное при низких температурах $(a/v) / (Ms^2/kT)$.

При достаточно сильном поле наступает насыщение. Порядок величины этого поля H_s определяется из условия $\omega_L t \sim 1$. Поэтому

$$H_s \sim \frac{c}{ea} \frac{kT}{Ms^2} \hbar n_e^{1/3}. \quad (6)$$

Таким образом, следует ожидать, что поле, при котором наступает насыщение, пропорционально температуре. Считая $n_e \sim 10^{18} \cdot 1/cm^3$, получим при $T = 100^\circ K$ $H_s \sim 2000$ гауссов.

Экспериментальному изучению теплопроводности висмута при азотных и водородных температурах посвящена работа де-Гааза и др. [5]. Рассматривая влияние магнитного поля на теплопроводность и предполагая, что магнитное поле действует на электрон-

ИЗОТОПИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В ОСТАТОЧНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СОПРОТИВЛЕНИИ МЕТАЛЛОВ *

ную часть теплопроводности, авторы производят разделение теплопроводности на электронную и фононную части (см. табл. IX [5]). Данные таблицы показывают, что в интервале температур 68—80° К электронная теплопроводность не зависит от температуры, тогда как фононная теплопроводность растет с убыванием температуры и в несколько раз превосходит электронную теплопроводность. Эти данные находятся в соответствии с результатами настоящей работы.

Далее в цитируемой работе показано, что при сравнительно слабых полях, порядка 10^3 гауссов, наступает насыщение в ходе теплопроводности с магнитным полем. Формула (6) настоящей статьи дает тот же порядок величины.

Как и следует ожидать, с уменьшением температуры насыщение наступает при меньших полях. Пересекаемость кривых на рис. 7 в работе [5] объясняется тем, что при насыщении теплопроводность определяется преимущественно фононной частью, которая в рассматриваемом интервале температур убывает с повышением температуры.

В области гелиевых температур теплопроводность висмута изучалась С. С. Шалытом. Он обнаружил наличие максимума в температурной кривой теплопроводности в области 4—14° К. Далее им показано, что вблизи максимума, со стороны более низких температур, магнитное поле не оказывает влияния на теплопроводность. Этот факт следует понимать как указание на то, что вблизи максимума основную роль продолжает еще играть фононная теплопроводность, электронная же теплопроводность вступает в свои права при более низких температурах.

В заключение выражаем благодарность С. С. Шалыту за сообщение им своих экспериментальных данных до их опубликования, а также проф. Л. Ландау за интерес к работе.

*Физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР*
*Ленинградский физико-технический институт
Академии наук СССР*

Получено
15 октября 1944 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Shoenberg. Proc. Roy. Soc., 1939, 170, 341.
2. I. Pomeranchuk. J. Phys. USSR, 1942, 6, 237, формула (2.4). 1942 (Собр. трудов, № 11).
3. I. Pomeranchuk. J. Phys. USSR, 1943, 7, 197 (Собр. трудов, № 12).
4. Б. Даудов, И. Померанчук. ЖЭТФ, 1939, 9, 1925. (Собр. трудов, № 3).
5. W. J. de Haas, A. N. Gerritsen, W. H. Capel. Physica, 1936, 3, 1143.

Существование в металле разных изотопов приводит к различию нулевых колебаний в соответствии с различием масс этих изотопов. Это в свою очередь вызывает появление нерегулярного возмущающего поля, могущего рассеивать электроны проводимости. Таким образом, в кристалле без физических дефектов и химических примесей возникает конечное остаточное электрическое сопротивление. Производится оценка величины этого сопротивления.

Если в решетке металла находятся ядра различных изотопов, то возникает рассеяние электронов проводимости, вызванное отклонением нулевых колебаний данного изотопа от среднего значения. Этот эффект приводит к конечному остаточному электрическому сопротивлению металлов при абсолютном нуле температуры в условиях, когда сопротивление, обязанное химическим и физическим примесям, отсутствует. Иначе говоря, при очистке металла его остаточное сопротивление должно вначале уменьшаться, а затем стремиться к постоянному пределу. Интересующее нас рассеяние появляется в результате комбинированного действия следующих членов в гамильтониане, которые мы будем рассматривать как возмущение.

1) Дополнительная кинетическая энергия изотопа дает в гамильтониане член (начало координат совпадает с атомом изотопа в его равновесном положении)

$$-\frac{M - \bar{M}}{2} \dot{\mathbf{u}}(0)^2 = -\sum_{f_1 f_2 i_1 i_2} \frac{M - \bar{M}}{2} (a_{f_1 i_1} - a_{f_1 i_1}^+) (a_{f_2 i_2} - a_{f_2 i_2}^+) (\mathbf{j}_1 \mathbf{j}_2) \frac{\hbar \sqrt{\omega_1 \omega_2}}{2MN}; \quad (1)$$

M — масса атома изотопа, \bar{M} — средняя масса атомов металла:

$$\bar{M} = \sum_s c_s M_s, \quad \sum_s c_s = 1, \quad (2)$$

c_s — концентрация изотопа с массой M_s , $\mathbf{u}(0)$ — вектор смещения из положения равновесия атома изотопа, \mathbf{f} — вектор поляризации.

* ЖЭТФ, 1958, 35, 992.

2) Взаимодействие электрона с колебаниями решетки V . Рассматривая идеализированную изотропную модель металла без звуковой дисперсии, запишем обычным образом:

$$V(x) = V_0 \sum_{fj} \sqrt{\frac{\hbar^2}{2Ms^2N}} (a_{fj} e^{ifx/\hbar} + a_{fj}^* e^{-ifx/\hbar}); \quad (3)$$

V_0 — энергия атомного порядка, s — скорость звука. Формулы (1) и (3) дают рассеяние электронов в третьем приближении теории возмущений. Так как (1) содержит матричные элементы трех типов: а) отвечающие рассеянию фона ($\sim a_{f_1} a_{f_2}^*$), б) отвечающие испусканию двух фонанов ($\sim a_{f_1}^* a_{f_2}^*$) и в) отвечающие поглощению двух фонанов ($\sim a_{f_1} a_{f_2}$), то процесс рассеяния под действием (1) и (3) получится суммированием трех цепочек переходов, графически изображенных на рисунке (начальное состояние электрона характеризуется импульсом p_0 , конечное — p).

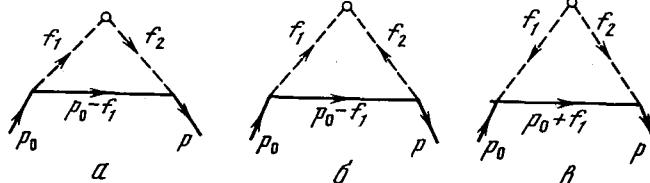
Матричный элемент, возникающий под действием цепочки б, имеет вид

$$-\sum_{j_1 j_2} \int V_0^2 \frac{\hbar^2 \omega_1 \omega_2}{4M^2 s^2 N^2} (M - \bar{M}) (j_1 j_2) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{[E(p_0) - E(p_0 - f_1) - s|f_1|] [-s|f_1| - s|f_1 - q|]} \right\} \frac{\Omega d^3 f_1}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (4)$$

Здесь $\hbar\omega_1 = sf_1$; $\hbar\omega_2 = sf_2 = s|q - f_1|$; $q = p_0 - p$ — изменение импульса электрона. Интересуясь только порядком величины эффекта, мы не учитываем различия скоростей продольного и поперечного звука. В случае цепочки в получаем матричный элемент, отличающийся от (4) только тем, что вместо выражения, поставленного в фигурные скобки, стоит:

$$\left\{ \frac{1}{[E(p_0) - E(p_0 + f_1) - s|f_1 + q|] [-s|f_1 + q|]} \right\}. \quad (5)$$

При интегрировании (4), (5) первый множитель может проходить через нуль. Эту особенность надо обходить так, как это соот-



ветствует функции $\delta_+(x)$. При этом возникают два члена — интеграл в смысле главного значения и член, содержащий $i\delta [E(p_0) - E(p_0 - f_1) - sf_1]$ в случае (4) и $i\delta [E(p_0) - E(p_0 + f_1) - s|f_1 + q|]$ в случае (5). Части, содержащей главное значение, отвечает $|E(p_0) - E(p_0 \mp f_1)|$ порядка атомных энергий, что значительно больше, чем sf_1 или $s|f_1 + q|$. Поэтому главное значение, обязанное цепочке (2) и (3), одинаково. Так как функция

$\delta [E(p_0) - E(p_0 - f_1) - sf_1]$ входит с множителем i , то она дает вклад в мнимую часть матричного элемента перехода. Однако сумма мнимых частей, происходящих от всех цепочек, должна равняться нулю, так как матричный элемент обязан быть вещественным. Рассеяние электронов атомом изотопа происходит из-за того, что вблизи изотопа появляется небольшое возмущающее поле, рассеивающее электрон. Это поле своим возникновением обязано отличию нулевых колебаний данного изотопа от средней амплитуды колебаний. Учитывая, что средние нулевые колебания малы по сравнению с постоянной решетки a и, кроме того, отличие нулевых колебаний изотопа дополнительно мало в силу малости $(M - \bar{M})/\bar{M}$, действующее на электрон возмущающее поле очень мало. Рассеяние в таком поле $V_{\text{эфф}}(x)$ должно описываться борновским приближением. Матричный элемент рассеяния с передачей импульса q выражается интегралом:

$$\int V_{\text{эфф}}(x) e^{iqx/\hbar} d^3 x,$$

который является вещественным числом, так как $V_{\text{эфф}}(x) = V_{\text{эфф}}(-x)$.

Таким образом, в (4) следует оставить только главное значение интеграла, которое одинаково для цепочек б и в. Матричный элемент, отвечающий цепочке а, имеет вид

$$-\sum V_0^2 \int \frac{\hbar^2 \omega_1 \omega_2}{4M^2 s^2 N^2} \frac{\Omega d^3 f_1}{(2\pi\hbar)^3} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{[E(p_0) - E(p_0 - f_1) - s|f_1|] [E(p_0) - E(p_0 - f_1) - s|f_1 - q|]} \right\} (j_1 j_2). \quad (6)$$

В интеграле здесь могут обращаться в нуль оба множителя в фигурных скобках. Поэтому мы имеем здесь: 1) интеграл в смысле главного значения; 2) два члена, пропорциональных $i\delta [E(p_0) - E(p_0 - f_1) - sf_1]$ либо $i\delta [E(p_0) - E(p_0 - f_1) - s|f_1 + q|]$. Согласно сказанному ранее мы их опускаем.

При оценке порядка величины мы можем в цепочке а выбросить и главное значение интеграла, так как ему отвечают энергетические разности в фигурных скобках (6) порядка атомных энергий. В (4) и (5) одна из разностей была $\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 \sim \Theta \ll V_0$ (V_0 порядка нескольких электроновольт). Поэтому по порядку величины мы имеем следующий матричный элемент (пренебрегая цепочкой а) (полагая $E = p^2/2m$, m — эффективная масса электрона) при $q = 0$:

$$\begin{aligned} M &= -\frac{3}{2} V_0^2 a^3 \frac{M - \bar{M}}{(2\pi\hbar)^3 N M^2 s} \int \frac{f_1 |f_1 - q|}{f_1 + |f_1 - q|} \frac{d^3 f_1}{E(p_0) - E(p_0 - f_1)} = \\ &= -\frac{3}{2} V_0^2 a^3 \frac{M - \bar{M}}{(2\pi\hbar)^3 N M_s} \frac{\pi m_0^3}{3p_0} F\left(\frac{f_0}{2p_0}\right); \\ F\left(\frac{f_0}{2p_0}\right) &= \ln \frac{2p_0 - f_0}{2p_0 + f_0} - \frac{2p_0}{f_0} - \frac{8p_0^3}{f_0^3} \ln \frac{4p_0^2 - f_0^2}{4p_0^2}; \end{aligned} \quad (7)$$

**О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ
МЕЖДУ ЭЛЕКТРОНАМИ ПРОВОДИМОСТИ
В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ ***

Совместно с А. И. Ахнегером

Показывается, что в ферромагнетиках имеет место добавочное притяжение между электронами проводимости, обусловленное обменом спиновыми волнами.

1. Если взаимодействие электронов в металле приводит к эффективному взаимному притяжению между ними вблизи поверхности Ферми, то пара электронов может иметь, как известно [1], связанное состояние с отрицательной энергией связи. Это явление лежит в основе недавно построенной теории сверхпроводимости [2,3].

В обычных металлах эффективное взаимное притяжение между электронами возникает благодаря виртуальному обмену фононами. Матричный элемент энергии взаимодействия, обусловленный этим обменом, стремится к конечному пределу при стремлении к нулю импульса фонона. Такое поведение матричного элемента связано с тем, что он содержит в знаменателе энергию фонона, матричные же элементы поглощения и испускания фонона пропорциональны квадратному корню из энергии фонона.

Мы хотели бы обратить внимание на то обстоятельство, что в ферромагнетиках возникает добавочное взаимодействие притяжения между электронами проводимости, обусловленное виртуальному испусканию и поглощению спиновых волн. Так как энергия спиновой волны пропорциональна квадрату ее импульса, а матричные элементы испускания и поглощения спиновой волны не содержат дополнительного множителя, пропорционального квадратному корню из энергии спиновой волны, то матричный элемент эффективной энергии взаимодействия между электронами, обусловленного обменом спиновыми волнами, оказывается обратно пропорциональным квадрату импульса спиновой волны, т. е. квадрату передаваемого импульса.

Передаваемый импульс должен, однако, превосходить некоторое минимальное значение, так как энергия электрона проводимости в ферромагнетике зависит от ориентации спина [4] и поэтому обеим ориентациям спина соответствуют фермиевские сферы раз-

f_0 — максимальный импульс фонона, p_0 — импульс электрона на фермиевской поверхности. Мы считаем, что $2p_0 > f_0$. Подставляя в (7) $(2\pi^2)^{1/3} \hbar/a$ вместо f_0 , находим

$$\mathcal{M} = -\frac{V_0^2(M-\bar{M})m}{8\bar{M}^2sp_0N} F \left(\frac{f_0}{2p_0} \right). \quad (8)$$

Отсюда находим полную вероятность рассеяния W в веществе, состоящем из s изотопов с концентрацией c_s , пренебрегая зависимостью \mathcal{M} от q :

$$W \approx \frac{F^2}{64\pi} \frac{a^3 V_0^4 (\bar{M}^2 - M^2)m^2}{\bar{M}^4 s^2 \hbar^4} \frac{dp_0}{dE} = \frac{V_0^4 F^2 (\bar{M}^2 - M^2) a^3 m^3}{64\pi \bar{M}^4 s^2 \hbar^4 p_0}; \quad (9)$$

$$\bar{M}^2 - M^2 = \sum_s c_s M_s^2 - \left(\sum_s c_s M_s \right)^2.$$

Соответствующая длина пробега l равна:

$$l = \frac{dE}{dp} \frac{1}{W} \approx \frac{64\pi \bar{M}^4 s^2 \hbar^4 p_0^2}{(\bar{M}^2 - M^2) V_0^4 F^2 m^4 a^3}. \quad (10)$$

Входящие сюда величины можно частично выразить через электропроводность σ при высоких температурах ($T \gg \Theta$), которая в нашей модели равна

$$\sigma = 4(4\pi)^{1/3} e^2 n_e^2 \hbar^3 a \bar{M} s^2 / m^2 V_0^2 T \quad (11)$$

(T в энергетических единицах, n_e — число электронов проводимости в 1 см^3). Подставляя $m^2 V_0^2 / \bar{M} s^2$ из (11) в (10), находим

$$l \approx (36)^{1/3} \pi^{4/3} \frac{\bar{M}^2}{\bar{M}^2 - M^2} \frac{\sigma^2 T^2}{n_e^2 v_e^{4/3} a^3 s^2 F^2 e^4} \quad (v_e = n_e a^3). \quad (12)$$

При $\frac{\bar{M}^2 - M^2}{\bar{M}^2} \sim 10^{-4}$, что отвечает естественному олову, мы получаем l порядка нескольких миллиметров. Если ввести пробег, обвязанный примесям в виде

$$l_i = a/\epsilon \quad (13)$$

(ϵ — концентрация примесей), то (12) отвечает следующей эффективной концентрации ϵ_0 :

$$\epsilon_0 \approx \frac{1}{(36)^{1/3} \pi^{4/3}} \frac{\bar{M}^2 - M^2}{\bar{M}^2} \frac{n_e^2 v_e^{4/3} a^3 s^2 F^2 e^4}{\sigma^2 T^2}. \quad (14)$$

При $\epsilon \gg \epsilon_0$ остаточное сопротивление пропорционально ϵ . При $\epsilon < \epsilon_0$ оно уже не зависит от ϵ .

Оценку l можно несколько улучшить, если привлечь данные об электронной теплоемкости.

В заключение выражают благодарность акад. Л. Д. Ландау и Ю. В. Шарвину за дискуссию по поводу этой статьи.

ных радиусов. Это обстоятельство приводит к уменьшению эффективного взаимодействия между электронами.

В настоящей заметке мы определим характер эффективного взаимодействия между электронами, обусловленного обменом спиновыми волнами.

2. Мы будем пользоваться упрощенной моделью ферромагнетика, исходящей из представления о двух группах электронов — электронов проводимости (*s*-электроны) и ферромагнитных электронов (*d*-электроны).

Оператор энергии взаимодействия между *s*- и *d*-электронами $V(\mathbf{r})$ должен, очевидно, содержать линейно как спин *s*-электрона \mathbf{s} , так и магнитный момент $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ единицы объема ферромагнетика, обусловленный *d*-электронами. Поэтому $V(\mathbf{r})$ можно представить в виде

$$V(\mathbf{r}) = \hat{C}\mathbf{s}\mathbf{M}(\mathbf{r}),$$

где \hat{C} — некоторый линейный интегральный оператор. Так как обменные силы быстро спадают с расстоянием, то величину \hat{C} можно приближенно считать константой. Мы запишем ее в виде $C = -\Delta a^3/\mu_0$, где μ_0 — магнетон Бора, a — постоянная решетки и Δ — некоторая энергия, связанная с температурой Кюри Θ соотношением $\Delta \sim \sqrt{\Theta A}$. Здесь A имеет порядок величины атомной энергии. Такая оценка величины Δ соответствует предположению о том, что обменная энергия между *d*-электронами обусловлена *s*-электронами и приводит, по-видимому, к завышенному значению Δ [5].

Итак, энергия взаимодействия между *s*- и *d*-электронами имеет вид [5]

$$V(\mathbf{r}) = (\Delta a^3/\mu_0) \mathbf{s}\mathbf{M}(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Из этой формулы следует, что энергия электрона проводимости в ферромагнетике имеет вид

$$\epsilon(\mathbf{p}, \sigma) = \epsilon^0(\mathbf{p}) + 2\sigma\Delta,$$

где \mathbf{p} — импульс электрона, $\sigma = \pm \frac{1}{2}$ — проекция спина электрона на ось z и $\epsilon^0(\mathbf{p})$ — величина, не зависящая от σ ; в дальнейших расчетах мы для простоты будем считать, что $\epsilon^0(\mathbf{p}) = p^2/2m$.

Испускание и поглощение спиновых волн связано с проекциями вектора $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, перпендикулярными осям легчайшего намагничения (ось z). Эти проекции определяются формулами [6]

$$M_x = \sqrt{\mu_0 M_0 / 2\Omega} \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^*) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (2)$$

$$M_y = i \sqrt{\mu_0 M_0 / 2\Omega} \sum_{\mathbf{k}} (a_{-\mathbf{k}}^* - a_{\mathbf{k}}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

где M_0 — магнитный момент насыщения, Ω — нормировочный объем и $a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^*$ — операторы рождения и уничтожения спиновой волны с импульсом \mathbf{k} , удовлетворяющие соотношениям

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^*] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}}.$$

Определим теперь матричный элемент энергии эффективного взаимодействия между двумя *s*-электронами, связанного с обменом спиновыми волнами. Обозначим начальные импульсы и спины электронов через $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \sigma_1, \sigma_2$, а конечные — через $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \sigma'_1, \sigma'_2$. Интересующее нас взаимодействие, так же как и известное меллеровское взаимодействие, является эффектом второго приближения теории возмущений. Так как матричные элементы операторов $s_x \pm is_y$ отличны от нуля, лишь если $\sigma + \sigma' = 0$, то взаимодействуют электроны только в том случае, когда их спины имеют противоположные направления.

Учитывая два типа промежуточных состояний, отвечающих испусканию спиновой волны первым и вторым электроном, получим следующее выражение для искомого матричного элемента:

$$U_{ij} = \frac{a^3}{\Omega} \Delta^2 \left\{ \frac{\delta_{\sigma_1, \frac{1}{2}} \delta_{\sigma_2, -\frac{1}{2}}}{\epsilon(\mathbf{p}_1, \sigma_1) - \epsilon(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}, \sigma_1) - \theta(ak)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\delta_{\sigma_2, \frac{1}{2}} \delta_{\sigma_1, -\frac{1}{2}}}{\epsilon(\mathbf{p}_2, \sigma_2) - \epsilon(\mathbf{p}_2 + \mathbf{k}, \sigma_2) - \theta(ak)^2} \right\}, \quad (3)$$

где $\theta(ak)^2$ — энергия спиновой волны.

Притяжение между электронами имеет место в триплетном состоянии с суммарной проекцией спина, равной нулю. Отсюда следует, что пространственная часть волновой функции электронов является антисимметричной. (В простейшем случае она представляет собой *p*-состояние.)

Введем радиусы фермиевых сфер p_+ и p_- электронов с различными ориентациями спинов. Предполагая, что $\epsilon^0(p) = p^2/2m$, получим

$$p_+ = \sqrt{2m(\mu - \Delta)}, \quad p_- = \sqrt{2m(\mu + \Delta)},$$

где μ — химический потенциал.

Ясно, что, если $p_+ \sim p_+$, то $p'_+ \sim p_-$. Отсюда легко заключить, что минимальное значение импульса спиновой волны будет

$$k_{\min} = p_0 (\sqrt{1 + \Delta/\mu} - \sqrt{1 - \Delta/\mu}),$$

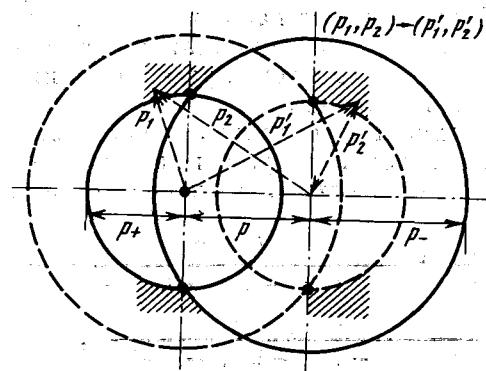
где $p_0 = \sqrt{2m\mu}$. Считая, что $\Delta \ll \mu$, получим отсюда $k_{\min} \sim p_0 \Delta/\mu$. Поэтому максимальное значение матричного элемента равно

$$(U_{ij})_{\max} \equiv -a^8 U / \Omega, \quad U = \mu^2 / \Theta. \quad (4)$$

Этому значению энергии взаимодействия соответствует, очевидно, суммарный импульс пары электронов, равный

$$P_0 = \sqrt{p_-^2 - p_+^2} = p_0 \sqrt{2\Delta/\mu}$$

(см. рисунок, на котором изображены смещенные на p фермиевские сферы радиусов p_+ и p_- . Наибольшее взаимодействие имеет место в том случае, когда окружность пересечения будет большим кругом меньшей сферы. На рисунке заштрихованы области, в которых расположены импульсы электронов до и после рассеяния).



Сравнение матричного элемента (4) с матричным элементом взаимодействия, обусловленного обменом фононами, показывает, что последний по порядку величины в μ/Θ раз меньше матричного элемента (4). Более сильное взаимодействие, обусловленное обменом спиновыми волнами, компенсируется, однако, уменьшением статистического веса, связанным с тем обстоятельством, что суммарный импульс взаимодействующих электронов отличен от нуля. Кроме того, уменьшению эффективного притяжения электронов содействует антисимметричность волновой функции. Поэтому вопрос о связанных состояниях электронов, обусловленных обменом спиновыми волнами, требует специального исследования.

Однако наличие дополнительного притяжения между электронами проводимости в ферромагнетиках может, вообще говоря, содействовать при подходящих условиях появлению сверхпроводимости. Возможно, что такие условия могут осуществляться в тонких пленках, в которых повышается критическое магнитное поле [7].

Примечание при корректуре (12 февраля 1959 г.) В появившейся недавно работе (B. Matthias, H. Suhl, E. Corenzwit. Phys. Rev. Lett., 1, 449, 1958) экспериментально установлено наличие сверхпроводимости ферромагнитных сплавов (Ge, Pr) Ru₂ (Ge, Gd) Ru₂.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. L. Cooper. Phys. Rev., 1956, 104, 1189.
2. J. Bardeen, L. Cooper, J. Schriffer. Phys. Rev., 1957, 108, 1175.
3. Н. Н. Боголюбов. ЖЭТФ, 1958, 34, 58, 73.
4. А. А. Абрикосов, И. Е. Дзялошинский. ЖЭТФ, 1958, 35, 771.
5. C. Kittel, A. Mitchell. Phys. Rev., 1956, 101, 1611.
6. C. Kittel, E. Abrahams. Rev. Mod. Phys., 1953, 25, 233.
7. В. Л. Гинзбург. ЖЭТФ, 1956, 31, 202.

СВОЙСТВА ДИЭЛЕКТРИКОВ

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПАРАМАГНИТНЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ*

В парамагнитных диэлектриках имеется парамагнитный энергетический спектр. Этот спектр участвует в теплопроводности (само по себе парамагнитная теплопроводность) и, кроме того, приводит к добавочному рассеянию упругих волн. В некоторой области температур главную роль в теплопроводности играет парамагнитный спектр. При низких температурах теплопроводность парамагнитных диэлектриков имеет существенно немонотонный характер, резко отличаясь от теплопроводности обычных диэлектриков.

Как указал Пайерлс [1], при температурах, значительно меньших, чем дебаевская, теплопроводность диэлектриков должна экспоненциально возрастать с понижением температуры, именно теплопроводность $\kappa \sim e^{\alpha \theta_D/T}$ (θ_D — дебаевская температура, T — температура, α — численный коэффициент порядка единицы). Такому быстрому возрастанию теплопроводности при низких температурах отвечает очень большая длина свободного пробега фононов. Это обстоятельство было экспериментально подтверждено на примере KCl [2], где при температурах от 2,5 до 4,5° К теплопроводность зависела от формы образца, т. е. длина свободного пробега фононов имела макроскопические размеры, будучи порядка 10^{-1} см. [При таких низких температурах ($\sim 1^\circ$ К) становится существенным действие примесей, граней поликристаллов и т. п. Это обстоятельство приводит к прекращению экспоненциального хода κ с температурой]. Экспоненциальное возрастание κ с понижением температуры обусловливается тем, что для установления стационарного состояния при наличии градиента темпе-

туры в диэлектрике необходимы такие столкновения фононов, при которых суммарный квазиймпульс решетки менялся бы, т. е. необходимы процессы переброса. Как известно, такие процессы возможны только при наличии коротковолновых фононов, у которых $\hbar\omega \sim \theta_D^1$. Так как при низких температурах число этих фононов N экспоненциально мало ($N \sim e^{-\hbar\omega/T}$), то процессы переброса, устанавливающие стационарные состояния, происходят очень редко, что и приводит к установленному Пайерлсом соотношению $\kappa \sim e^{\alpha \theta_D/T}$.

Совершенно иной зависимости κ от температуры при $T \ll \theta_D$ следует ожидать у парамагнитных диэлектриков. В качестве примера таких тел могут служить парамагнитные соли², твердый кислород и т. д. Иной ход теплопроводности у парамагнитных диэлектриков связан с тем, что у них существует магнитный энергетический спектр, обязанный обменному взаимодействию электронов парамагнитных атомов и взаимодействию магнитных моментов с электрическим полем решетки [3]. Этот спектр оказывает влияние на пробег фононов и, кроме того, сам участвует непосредственно в переносе тепла.

1. В случае, когда обменный интеграл имеет знак, приводящий к ферромагнетизму, соответствующая система магнитных уровней (ферромагнитный спектр) была подробно исследована Блохом [4] для такой модели ферромагнетика, в которой при $T = 0$ имеет место абсолютное насыщение. Независимо от детального характера магнитного спектра, очевидно, что он имеет температуру вырождения порядка температуры Кюри у ферромагнетиков и порядка температуры θ_K у парамагнетиков, где θ_K связана с парамагнитной восприимчивостью χ соотношением: $\chi = \text{const}/T + \theta_K$.

При температурах, малых по сравнению с θ_K , возбуждены уровни, близкие к основному, который осуществляется при $T = 0$. Так как число возбужденных состояний при этих условиях мало по сравнению с числом атомов, то магнитный спектр можно характеризовать, исходя из следующего представления. Низкие возбужденные магнитные состояния означают собою такие распределения магнитных моментов атомов всей решетки, которые немного отличны от распределения, осуществляющегося при $T = 0$. Как и в случае модели со спиновыми волнами [4], магнитным возбужденным уровням будут соответствовать отклонения от основного распределения магнитных моментов, не локализованные в определенном месте решетки, а бегущие через весь кристалл.

¹ Здесь и в дальнейшем температуры измеряются в энергетических единицах.

² Исключая те из них, которые называются криомагнитные аномалии. Теплопроводность в таких солях будет рассмотрена в другой работе. Выводы данной теории не могут быть также применены к сильно гидратированным солям, у которых обменные эффекты не играют существенной роли.

Такие магнитные возбуждения в дальнейшем будут называться магнонами (это название предложено Л. Ландау). Так как при $T \ll \theta_K$ число магнонов мало по сравнению с числом атомов, то взаимодействием магнонов можно в первом приближении пренебречь; это дает возможность рассматривать энергию возбуждения как сумму энергий магнонов. Так же как и у фононов¹, трансляционная симметрия решетки приводит к тому, что состояние магнона характеризуется некоторым вектором-квазимпульсом \mathbf{p} , определенным с точностью до вектора обратной решетки (умноженного на \hbar). Энергия магнона есть функция его квазимпульса; очевидно, что при малых квазимпульсах энергия E представляет собою квадратичную функцию компонент квазимпульса. Отбрасывая аддитивную постоянную, мы имеем:

$$E = \frac{1}{2} p_i p_k m_{ik}^{-1}, \quad (1.1)$$

где m_{ik}^{-1} — тензор обратной массы магнона. Порядок величины компонент тензора m_{ik}^{-1} может быть определен следующим образом. При $p \sim \hbar/a$ (a — постоянная решетки), формула (1.1) хотя уже и не справедлива, но по порядку величины дает еще приемлемые результаты. С другой стороны, магноны с длиной волны порядка a имеют энергию порядка θ_K . Отсюда $\hbar^2/ma^2 \sim \theta_K$; это дает

$$m \sim \frac{\hbar^2}{a^2 \theta_K}. \quad (1.2)$$

Определим еще предельную скорость V_m магнона (т. е. скорость магнонов с длиной волны порядка a)

$$V_m \sim \frac{\hbar}{ma} \sim \frac{\hbar}{a} \frac{a^2 \theta_K}{\hbar^2} = a \frac{\theta_K}{\hbar}. \quad (1.3)$$

Формулы (1.2) и (1.3) выведены, считая, что число парамагнитных атомов в решетке того же порядка, что и общее число атомов.

В дальнейшем нам понадобится функция распределения магнитных уровней по энергиям. При $T \gg \theta_K$, когда спектр не вырожден, мы можем воспользоваться классической статистикой (гипббово распределение), разлагая статистическую сумму в ряд по степеням $1/T$ (см. § 5). При $T \ll \theta_K$ необходимо знание статистики, которой подчиняются магноны. Имеющиеся экспериментальные данные говорят в пользу того, что магноны подчиняются статистике Ферми. Именно, при $T \ll \theta_K$ восприимчивость стремится к постоянному пределу, по порядку величины равному const/θ_K [5] (при $T > \theta_K$, $\chi = \text{const}/(T + \theta_K)$). Очевидно, что здесь мы имеем дело с паулиевским парамагнетизмом, который непосредственно получается из распределения Ферми. Кроме того, очевидно, что состояние парамагнетика при $T = 0$ легче всего опи-

¹ И у электронов в металлах.

сывается как наложение большого количества коротковолновых магнонов. Наличие магнонов с большим импульсом при $T = 0$ представляет собой сильный аргумент в пользу распределения Ферми. Поэтому, в тех случаях, когда будет необходимо знание статистики магнонов, мы будем исходить из фермиевской¹. Благодаря фермиевскому характеру распределения магнонов, импульсы магнонов всегда порядка \hbar/a , поэтому при столкновениях с участием магнонов процессы переброса могут происходить столь же часто, как и процессы, при которых квазимпульс сохраняется.

Теплопроводность парамагнитных тел слагается из фононной χ_f и магнонной (χ_m) частей. Каждая из них может быть определена из соотношения

$$\chi \cong c l V, \quad (1.4)$$

где c — теплоемкость единицы объема, V — эффективная скорость, l — длина свободного пробега. У фононов длина свободного пробега определяется теперь не только ангармоничностью, но и их взаимодействием с магнонами. У магнонов при определении l необходимо учитывать как их взаимодействие друг с другом, так и взаимодействие с тепловыми колебаниями. Взаимодействие магнонов с фононами приводит либо к поглощению (испусканию) фононов, либо к рассеянию их (ограничиваясь процессами наименьшего порядка). При столкновениях магнонов с фононами, кроме энергии, сохраняется квазимпульс. В частности, при процессах первого порядка (испускание, поглощение) мы имеем условие:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' \pm \mathbf{f} + \mathbf{q}, \quad (1.5)$$

где \mathbf{p} — импульс магнона до столкновения, \mathbf{p}' — то же после столкновения, \mathbf{f} — импульс фонона, \mathbf{q} — вектор обратной решетки (умноженный на \hbar). При $T \ll \theta_D$ импульс \mathbf{f} мал по сравнению с \mathbf{q} . В силу фермиевского характера распределения магнонов по энергиям, импульс \mathbf{p} , напротив, порядка \mathbf{q} , т. е. $\mathbf{p} \gg \mathbf{f}$. Поэтому закон сохранения энергии в применении к процессу (1.5) приводит к соотношению²:

$$E_p - E_{p'} = \pm s f, \quad f_{\nabla p} E = \pm s f, \quad (1.6)$$

где s — скорость звука, $f_{\nabla p} E$ — скорость магнона. Очевидно, что условие (1.6) может быть выполнено только в том случае, если скорость магнона больше, чем скорость звука: $|f_{\nabla p} E| > s$. Пользуясь

¹ Полученный Блохом [4] иной результат (статистика Бозе для спиновых волн) объясняется тем, что в его модели ферромагнетика при $T = 0$ осуществляется особое состояние (абсолютное насыщение), имеющее механический экстремальный характер по отношению ко всем другим состояниям.

² ∇_p означает градиент в импульсном пространстве.

(1.3) и подставляя для скорости звука выражение порядка $a = -\theta_D/\hbar$, мы находим, что поглощение фононов магноном возможно только в таких парамагнетиках, у которых $\theta_K > \theta_D$. У большинства парамагнитных диэлектрических солей это неравенство не выполнено, θ_K оказывается иногда значительно меньше, чем θ_D . У таких тел необходимо рассматривать процессы второго порядка. В дальнейшем будет рассматриваться отдельно случай, когда $\theta_K > \theta_D$ и $\theta_K < \theta_D$.

2. Случай, когда $\theta_K > \theta_D$. Магнонная теплопроводность при $T < \theta_K$. Для нахождения χ_m необходимо вычислить длину свободного пробега магнонов l_m^m . Она получается из соотношения:

$$\frac{1}{l_m^m} = \frac{1}{l_f^m} + \frac{1}{l_m^M}. \quad (2.1)$$

здесь l_m^M — длина свободного пробега магнонов по отношению к взаимодействию их друг с другом, l_f^m — длина свободного пробега магнонов по отношению к взаимодействию их с тепловыми колебаниями решетки. Рассмотрим температуры, значительно меньшие дебаевской:

$$T \ll \theta_D; \quad T \ll \theta_K.$$

При этих условиях в силу фермиевского характера магнонного спектра длина l_m^M обратно пропорциональна T^2 [6, 7]

$$l_m^M = \frac{\text{const}}{T^2}. \quad (2.2)$$

Очевидно, что при $T = \theta_K$ пробег магнонов, обвязанный их взаимодействию друг с другом, будет порядка постоянной решетки a . Комбинируя это обстоятельство и (2.2), получаем

$$l_m^M \sim a \left(\frac{\theta_K}{T} \right)^2. \quad (2.3)$$

Для вычисления l_f^m мы найдем полную вероятность столкновения магнона с фононом, не учитывая того, что при таких столкновениях импульс p магнона изменяется на очень небольшую величину. В отличие от металлов, где это пренебрежение является незаконным [8], в нашем случае мы получим правильный результат, так как даже преуменьшенная при таком подсчете длина l_f^m оказывается значительно больше l_m^M и поэтому длина свободного пробега магнонов l_m^m определяется только их взаимодействием друг с другом.

Матричный элемент возмущающей энергии, обвязанной тепловым колебаниям решетки при низких температурах, когда играют роль только длинноволновые фононы, как и в случае металлов

[9], может быть записан в виде $\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{MN\omega}} U_1$. Это выражение дает вероятность перехода, пропорциональную частоте фонона ω . U_1 имеет порядок величины θ_K . Это соответствует тому обстоятельству, что при изменении расстояний атомов решетки друг от друга на величину того же порядка, что и сами расстояния, обменные интегралы и взаимодействия магнитных моментов с электрическим полем кристалла претерпевают относительные изменения порядка единицы¹. Вероятность перехода W_f^m по порядку величины равна²:

$$W_f^m \sim \int \theta_K^2 \frac{\hbar}{MN\omega\lambda^2} \frac{\delta(E_p - E_{p-f} - s_f)}{\hbar} \frac{\omega^2 d\omega \Omega dO}{(2\pi)^3}, \quad (2.4)$$

где M — масса элементарной ячейки, N — число элементарных ячеек в кристалле, dO — элемент телесного угла в импульсном пространстве фононов, λ — длина волны фонона, деленная на 2π , Ω — объем кристалла, δ — дираковская δ -функция.

Так как нас интересует только порядок величины l_f^m , мы нигде в (2.4) не пишем численных множителей. В (2.4) не написана также плаковская функция распределения фононов и не записан в явной форме принцип Паули. Оба эти обстоятельства учитываются тем, что интегрирование по $\hbar\omega$ производится от 0 до величины порядка T . Разлагая $E_p - E_{p-f}$ в ряд по степеням f и уничтожая δ -функцию интегрированием по dO , получаем

$$W_f^m = \int \theta_K^2 \frac{\hbar\omega^2 d\omega \Omega}{M\lambda\hbar|\nabla_p E|/s^3 N} \sim \frac{\theta_K^2 T^3 \Omega}{Ms |\nabla_p E| N s^3 \hbar^4}. \quad (2.5)$$

В формулах (2.4) и (2.5) все величины, относящиеся к магнонам, берутся на месте спада распределения Ферми, т. е. при $E \sim \theta_K$. Пользуясь соотношением

$$\frac{\Omega}{\hbar^3 s^3 N} \sim \frac{1}{\theta_D^3},$$

получаем

$$W_f^m \sim \frac{\theta_K^2 T^3}{Ms |\nabla_p E| \hbar \theta_D^3} \sim \frac{\theta_K T^3}{Ms a \theta_D^3}. \quad (2.6)$$

При последнем преобразовании мы использовали (1.3). Для вели-

¹ Как известно, θ_K имеет порядок величины обменного интеграла.

² Очевидно, что учет процессов поглощения фононов магноном не может изменить порядок величины W_f^m , поэтому мы их не рассматриваем из-за простоты. То же относится и к суммированию по поляризациям фононов.

чины l_f^m , используя соотношение: $l_f^m = \frac{|\nabla_p E|}{W_f^m}$, находим следующее выражение:

$$l_f^m \sim a \frac{Ms^2}{\hbar} \left(\frac{\theta_D}{T} \right)^3 = a \frac{Ms^2}{\left(\frac{\hbar s}{a} \right)} \left(\frac{\theta_D}{T} \right)^3 \sim a \frac{Ms^2}{\theta_D} \left(\frac{\theta_D}{T} \right)^3. \quad (2.7)$$

Сравнивая (2.7) и (2.3), мы видим, что $l_f^m \gg l_m^m$:

$$\frac{l_f^m}{l_m^m} \sim \frac{Ms^2}{\theta_D} \left(\frac{\theta_D}{T} \right)^3 \left(\frac{T}{\theta_K} \right)^2 = \frac{Ms^2}{\theta_D} \left(\frac{\theta_D}{\theta_K} \right)^2 \frac{\theta_D}{T} \gg 1. \quad (2.8)$$

(Следует учесть, что $Ms^2/\theta_D \sim 100$, в то время как диэлектрических парамагнетиков, у которых θ_K было бы значительно больше θ_D , не существует.) Таким образом, окончательное выражение для l^m имеет вид

$$l^m \sim a \left(\frac{\theta_K}{T} \right)^2. \quad (2.9)$$

Для нахождения теплопроводности магнонов мы должны определить еще их теплоемкость c_m . Как известно, у вырожденного ферми-газа с температурой вырождения θ_K она по порядку величины равна

$$c_m \sim nk \frac{T}{\theta_K}, \quad (2.10)$$

где n — число парамагнитных атомов в единице объема, k — постоянная Больцмана. Подставляя (1.3), (2.9) и (2.10) в (1.4), находим теплопроводность магнонов:

$$\kappa_m \sim nk \frac{\theta_K}{T} \frac{a^2 \theta_K}{\hbar} \quad (T \ll \theta_K). \quad (2.11)$$

Таким образом, магнонная теплопроводность возрастает с понижением температуры обратно пропорционально температуре. Этот рост будет происходить до тех пор, пока не станет существенным действие примесей, механических напряжений в решетке и т. п. причин, приводящих к постоянной, не зависящей от температуры, длине свободного пробега магнонов. В этом случае, по порядку величины l^m оказывается равной a/ε , где ε — относительная концентрация примесей. (Такой результат соответствует эффективному сечению атомов примеси порядка атомных размеров.) Теплопроводность магнонов при этих условиях оказывается равной

$$\kappa_m \sim nk \frac{T}{\theta_K} \frac{a^2 \theta_K}{\hbar} \frac{1}{\varepsilon}. \quad (2.12)$$

¹ В отличие от металлов, где сопротивление, обязанное взаимодействию электронов, существенно только при очень низких температурах [6, 7]. Для нашего результата оказалась существенной малость температуры вырождения θ_K .

Переход от (2.11) к (2.12) происходит при температурах порядка $\theta_K \sqrt{\varepsilon}$.

3. Случай, когда $\theta_K > \theta_D$. Фононная и полная теплопроводности при $T < \theta_K$. Длина свободного пробега фононов l^f определяется из соотношения

$$\frac{1}{l^f} = \frac{1}{l_f^m} + \frac{1}{l_m^f}, \quad (3.1)$$

где l_f^m — длина свободного пробега фононов по отношению к их взаимодействию друг с другом (ангармоничность), l_m^f — длина свободного пробега фононов по отношению к их взаимодействию с магнонами. Рассмотрим сначала l_f^m . Так как в дальнейшем окажется, что при интересующих нас температурах пробег фононов определяется их столкновением с магнонами, а ангармоничность не играет существенной роли, то мы не будем выделять процессы переброса, а определим полную вероятность столкновения фононов друг с другом W_f^f . По порядку величины матричный элемент возмущающей энергии в нашем случае равен

$$\zeta N \sqrt{\frac{\hbar^3 N(\omega_1) N(\omega_2) [N(\omega_3) + 1]}{M^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3 N^3}} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}, \quad (3.2)$$

где $N(\omega)$ — планковская функция распределения фононов ¹. В выражении (3.2) учтено то обстоятельство, что для длинноволновых фононов вероятность столкновения пропорциональна частотам участвующих в столкновении фононов. Величину ζ можно определить из того условия, что при температурах, при которых относительное смещение атомов вследствие тепловых колебаний оказывается порядка единицы, энергия ангармоничности будет порядка кинетической энергии колеблющихся атомов. При таких температурах мы имеем:

$$\left[\left(\frac{\hbar^2 N(\omega_1) N(\omega_2) [N(\omega_3) + 1]}{M \omega_1 \omega_2 \omega_3} \right)^{1/2} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \right]_{\text{eff}} \sim 1,$$

а кинетическая энергия равна $M \omega_{\text{eff}}^2 a^2 \sim Ms^2$, отсюда $\zeta \sim Ms^2$.

Для вероятности W_f^f при $T \ll \theta_D$ получаем выражение ²:

$$W_f^f \sim \int \frac{(Ms^2)^2 \hbar^3 N(\omega_1) N(\omega_2) [N(\omega_3) + 1] \Omega \omega_1^2 d\omega_1 d\Omega (\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)}{M^3 N s^3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \hbar^3 N^3}. \quad (3.3)$$

¹ В отличие от числа элементарных ячеек в кристалле N планковская функция $N(\omega)$ всегда сопровождается указанием аргумента (ω, f), от которого зависит распределение фононов.

² В (3.3) учитывается только один из возможных типов столкновений фононов друг с другом, так как нас интересует порядок величины.

По частотам, как и в (2.4), интегрирование должно производиться до $\hbar\omega \sim T$. Это дает

$$W_f^f \sim \frac{T^6 Q}{Ms^6 \hbar^4 N} \sim \frac{T}{Ms^2} \frac{T}{\hbar} \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3. \quad (3.4)$$

Отсюда находим l_f^f

$$l_f^f \sim a \frac{Ms^2}{T} \left(\frac{\theta_D}{T} \right)^4 \quad (T \ll \theta_D). \quad (3.5)$$

При температурах, больших чем дебаевская, пробег фононов из-за ангармоничности, как известно [10], обратно пропорционален температуре. Сравнивая с (3.5), мы имеем:

$$l_f^f \sim a \frac{Ms^2}{T} \quad (T \gg \theta_D). \quad (3.6)$$

Перейдем теперь к рассмотрению l_m^f . Вероятность определяется выражением, аналогичным (2.4),

$$W_m^f \sim \int \theta_k^2 \frac{\hbar}{Ms\kappa} \frac{\Omega}{N} \frac{d\mathbf{p}}{\hbar^3} \frac{\delta(E_p - E_{p-f} - s_f)}{\hbar}. \quad (3.7)$$

Здесь не написаны функции распределения магнонов и фононов; вместо этого интегрирование по энергиям магнонов производится в интервале порядка T . Уничтожая δ -функцию интегрированием по углам, получаем

$$W_m^f \sim \int \theta_k^2 \frac{\hbar}{Ms\kappa} \frac{\Omega}{N} \frac{dE m p}{\hbar^4} \frac{m}{p_f} = \int \frac{\theta_k^2 m^2 dE \Omega}{Ms \hbar^4 N} \sim \frac{T \theta_k^2 m^2 \Omega}{Ms \hbar^4 N}. \quad (3.8)$$

Подставляя вместо m (1,2) и выражая N/Ω через постоянную решетки, преобразовываем (3.8) к виду

$$W_m^f \sim \frac{T}{Ms\kappa}. \quad (3.9)$$

Отсюда для l_m^f получаем

$$l_m^f \sim aMs^2/T. \quad (3.10)$$

Сравнивая (3.5), (3.6) и (3.10), мы видим, что при $T \ll \theta_D$ отношение l_m^f к l_f^f значительно меньше единицы

$$l_m^f/l_f^f \sim (T/\theta_D)^4 \ll 1.$$

Когда температура высока по сравнению с дебаевской, можно легко показать (рассматривая соответствующие *stoss*-операторы), что l_m^f не зависит от температуры, т. е. имеет вид aMs^2/θ_D . Отсюда

следует, что при $T > \theta_D$ становится существенной l_f^f . Так как при $T > \theta_D$ процессы переброса столь же часты, как и процессы с сохранением квазиймпульса, вычисленная нами длина l_f^f , в которой не выделялись процессы переброса, имеет правильный порядок величины в той области, где она имеет значение. Таким образом, при $\theta_K > T > \theta_D$ мы получаем для длины свободного пробега фононов ту же температурную зависимость, что и в не парамагнитных диэлектриках, если в этих диэлектриках не существенны столкновения с участием четырех фононов (см. ниже). Если необходимо рассмотреть четверные столкновения, то и при $T > \theta_D$ в некоторой области температур существуетна l_m^f . При $T < \theta_D$ пробег фононов определяется их столкновениями с магнонами и имеет вид:

$$l^f \sim aMs^2/T. \quad (3.11)$$

Пользуясь выражением для дебаевской теплоемкости решетки $c \sim nk(T/\theta_D)^3$, мы получаем следующее выражение для фононной теплопроводности κ_f :

$$\kappa_f \sim nk \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^2 sa \frac{Ms^2}{T} = nksa \frac{Ms^2}{\theta_D} \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^2. \quad (3.12)$$

Мы видим, что в наших условиях теплопроводность фононов падает с температурой пропорционально T^2 . Это обстоятельство является следствием быстрого падения фононной теплоемкости ($\sim T^3$) при понижении температуры. При очень низких температурах на κ_f могли бы оказывать влияние примеси. Легко видеть, однако, что это не имеет места. Вероятность рассеяния фонона частицами примеси пропорциональна T^4 [11], а вероятность столкновения фонона с магном пропорциональна T , откуда видно, что последняя вероятность всегда больше первой. Из (2.11) и (3.12) следует, что выше температуры T_1 , удовлетворяющей равенству $\kappa_f(T_1) = \kappa_m(T_1)$ и по порядку величины равной

$$T_1 \sim \theta_D \sqrt[3]{\frac{\theta_K^2}{\theta_D Ms^2}}, \quad (3.13)$$

суммарная теплопроводность определяется фононами ($\kappa = \kappa_f$) и оказывается пропорциональной T^2 . Ниже этой температуры основную роль в теплопроводности играют магноны ($\kappa = \kappa_m$) и κ обратно пропорциональна T . Таким образом, при $T = T_1$, теплопроводность имеет минимум (рис. 1). Так как $Ms^2 \gg 100 \theta_D$ и, как уже отмечалось, по-видимому не существует диэлектрических парамагнетиков, у которых θ_K было бы много больше θ_D , температура T_1 оказывается много меньше дебаевской. При очень низких температурах магнитная теплопроводность снова начинает падать пропорционально температуре под действием примесей

(2.12). Поэтому κ имеет максимум, положение которого зависит от концентрации примесей. Температура, при которой этот максимум расположен, определяется по порядку величины соотношением

$$T_2 \sim \theta_K \sqrt{\epsilon}. \quad (3.14)$$

$\kappa_m(T_2)$ по формуле (2.11) равна $\kappa_m(T_2)$ по формуле (2.12). Мы считали, что $T_2 < T_1$ для чего необходимо, чтобы примесей было достаточно мало. Если $\epsilon \ll \sqrt{\left(\frac{\theta_D}{\theta_K}\right)^2 \left(\frac{\theta_D}{Ms^2}\right)^2}$, можно считать, что T_2 будет значительно ниже, чем T_1 . Полагая $Ms^2 = 100\theta_D$, и θ_K того же порядка, что и θ_D , видим, что относительное содержание примесей должно быть много меньше одного процента для того, чтобы максимум при T_2 и минимум при T_1 были ясно разделены. Хотя при $T < T_2$ магнитная теплопроводность убывает пропорционально T , фоновая теплопроводность, убывающая по-прежнему пропорционально T_2 , не играет роли и при $T < T_2$.

Следует отметить, что все существенные для теплопроводности длины свободного пробега получаются сравнительно малыми. Пробег магнитонов (2.9) имеет максимальную величину порядка a/ϵ . Полагая $\epsilon \sim 10^{-3} - 10^{-4}$, мы имеем максимальный пробег в $10^{-5} - 10^{-4}$ см. Пробег фононов (там, где он играет роль) оказывается не больше, чем $a \frac{Ms^2}{\theta_D} \left(\frac{\theta_D Ms^2}{\theta_K^2} \right)^{1/3} \sim 10^3 a \approx 10^{-5}$ см. Поэтому

можно думать, что поликристаллическая структура не окажет влияния на температурный ход теплопроводности тел, у которых $\theta_K > \theta_D$, если размеры поликристаллов больше, чем 10^{-5} см.

При $T > \theta_D$ начинает играть роль ангармоничность [см. (3.6) и (3.10)]. Выше дебаевской температуры мы имеем либо температурный закон: $\kappa \sim 1/T$, либо $\kappa \sim T^{-1/2}$ (см. ниже). Комбинируя

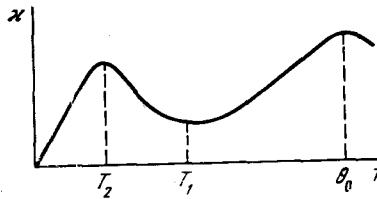


Рис. 1. Примерный ход теплопроводности κ при $\theta_K > \theta_D$

это с (3.12) мы видим, что при $T \sim \theta_D$ теплопроводность имеет второй максимум. Так как l_f^m при $T \sim \theta_D$ примерно равно l_f^l , следует ожидать, что при T , близких к θ_D , теплопроводность рассматриваемых парамагнетиков будет, как правило, меньше теплопроводности обычных диэлектриков.

Таким образом, при $T < \theta_K$ теплопроводность наших объектов имеет сравнительно сложный характер, совершенно отличный от того, который имеет место у обычных диэлектриков [1]. Пример-

ный ход κ представлен на рис. 1; κ имеет два максимума при $T \sim \theta_D$ и $T \sim \theta_K \sqrt{\epsilon}$ и минимум при $T = T_1$.

4. Термопроводность при $\theta_D > \theta_K$. Температуры малые по сравнению с θ_K . Когда $\theta_D > \theta_K$, процессы поглощения фононов магнитонами невозможны. Взаимодействие между тепловыми колебаниями решетки и магнитонами может осуществляться только в результате процессов высшего порядка, простейшими из которых являются процессы второго порядка. Последние могут протекать либо с участием двух фононов (расщепление фононов магнитоном), либо с участием двух магнитонов (столкновение двух магнитонов с испусканием одного фонона). Рассмотрим сначала первый процесс. Он возможен в первом приближении под действием членов второго порядка в разложении энергии магнитона в ряд по степеням тепловых колебаний и во втором приближении под действием членов первого порядка в этом разложении. Матричный элемент первого приближения имеет вид

$$U_2 \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega N}} \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega' N}} \frac{1}{\lambda'}, \quad (4.1)$$

| U_2 |, очевидно, порядка $\theta_K; \omega, \lambda$ и ω', λ' — частоты и длины волн участвующих в процессе фононов. Мы не написали второго члена, в котором переставлены ω и ω' (λ и λ'), так как мы интересуемся только порядком величины. Амплитуда вероятности второго приближения равна

$$\frac{U_{1p} U_{1p+f} \sqrt{\frac{\hbar^2}{M^2 N^2 \omega \omega'} \frac{1}{\lambda \lambda'}}}{E_p - E_{p+f} + sf} + \frac{U_{1p} U_{1p-f'} \sqrt{\frac{\hbar^2}{M^2 N^2 \omega \omega'} \frac{1}{\lambda \lambda'}}}{E_p - E_{p-f'} - s'f'}, \quad (4.2)$$

| U_1 | $\sim \theta_K$; $\sqrt{\frac{\hbar}{M\omega N}} U_{1p}$ — матричный элемент перехода магнитона от состояния с импульсом p к состоянию с импульсом $p + f$ под действием фонона с импульсом f .

Здесь написаны члены, соответствующие двум имеющимся при рассеянии промежуточным состояниям. Выражения (4.1) и (4.2) не сокращаются друг с другом. Поэтому в нашем приближении можно не интересоваться интерференционными членами, возникающими при сложении (4.1) с (4.2). Вероятность перехода данного фонона под влиянием (4.1) $W_{mf}^{(1)}$ получится интегрированием квадрата модуля (4.1) по импульсам магнитонов и по импульсам другого участвующего фонона ¹:

$$W_{mf}^{(1)} \sim \int \frac{\theta_K^2 \hbar^2}{N^2 M^2 s s' \lambda \lambda'} \frac{\delta(E_p + sf - E_{p+f} - s'f')}{\hbar} \frac{\Omega^2 d\omega d\omega'}{\hbar^6}, \quad (4.3)$$

¹ Для простоты суммирование по поляризациям не производится, это несущественно при определении порядка величины.

где s и s' — скорости звука, могущие быть различными (например, s — скорость продольных колебаний, s' — скорость поперечных колебаний).

Переходя к переменным энергии магнона и углам в его импульсном пространстве, мы должны интегрировать по энергии магнона в интервале $\sim T$

$$W_{mf}^{II} \sim \frac{\Omega^2}{M^2 N^2 s s'} \int \frac{m \theta_K^2}{p} \frac{m p dE}{\hbar^2} f d\mathbf{f}' \sim \frac{\theta_K^3 T^5 m^2 \Omega^2}{M^2 N^2 \hbar^2 s^6 \theta_D} \sim \\ \sim \frac{\theta_K^3 m^2 T^5}{M^2 \theta_D^7 \hbar} \sim \frac{\hbar^4 \theta_K T^5}{a^4 M^2 \hbar \theta_D^7} \sim \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \frac{\theta_K}{\hbar}. \quad (4.4)$$

В (4.4) использовано (1.2) и все величины sf заменены на T . Заметим, что интервал интегрирования по $d\mathbf{f}'$ по порядку величины равен ¹

$$\frac{V}{T} f \sim \frac{\theta_K}{\theta_D} f \sim \frac{\theta_K}{\theta_D} \frac{T}{s}.$$

Определим теперь вероятность перехода W_{mf}^{III} , получающуюся из (4.2). При этом прежде всего следует учесть, что первый и второй члены в (4.2) почти сокращаются друг с другом. Для этого приведем оба члена в (4.2) к одному знаменателю

$$\times \sqrt{\frac{\hbar^2}{M^2 N^2 \omega \omega'}} \times \\ \times \frac{U_{1p} U_{1p} (2E_p - E_{p+f} - E_{p-f} + sf - s'f') + O[(E_p - E_{p-f} + sf)(f \nabla_p U_{1p}) U_{1p}]}{\lambda \lambda' (E_p - E_{p+f} + sf)(E_p - E_{p-f} - s'f')} \quad (4.5)$$

Здесь написан нулевой и первый члены в разложении матричных элементов (например, U_{1p}) в ряд по степеням f . Более высокие члены в разложении не существенны. Ради простоты мы не выписали точно всех линейных членов; O — означает порядок величины.

Рассматриваемый процесс состоит в столкновении фонара с импульсом \mathbf{f} с магоном с импульсом \mathbf{p} , в результате получается фонон с импульсом \mathbf{f}' и магон с импульсом $\mathbf{p} + \mathbf{f} - \mathbf{f}'$, причем

$$E_{p+f-f'} = E_p + sf - s'f'. \quad (4.6)$$

Разложим $E_{p+f-f'}$ в ряд по степеням $\mathbf{f} - \mathbf{f}'$

$$E_{p+f-f'} = E_p + (\mathbf{f} - \mathbf{f}') \cdot \nabla_p E + \frac{1}{2} (\mathbf{f} - \mathbf{f}')_i (\mathbf{f} - \mathbf{f}')_k \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_k}.$$

Подставим это в (4.6)

$$sf - s'f' - (\mathbf{f} - \mathbf{f}') \cdot \nabla_p E = \frac{1}{2} (\mathbf{f} - \mathbf{f}')_i (\mathbf{f} - \mathbf{f}')_k \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_k}. \quad (4.7)$$

¹ Это легко видно из (4.7).

Воспользовавшись этим равенством и разложениями

$$E_{p+f} = E_p + f \nabla_p E + \frac{1}{2} f_i f_k \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_k},$$

$$E_{p-f'} = E_p - f' \nabla_p E + \frac{1}{2} f'_i f'_k \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_k},$$

получаем соотношение

$$2E_p - E_{p+f} - E_{p-f'} + sf - s'f' = - \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_k} f_i f'_k. \quad (4.8)$$

Мы видим, что в (4.5) члены нулевого и первого порядка в импульсах фононов сокращаются. Знаменатель в (4.5) может быть заменен на $-ss'ff'$. В самом деле

$$E_p - E_{p+f} + sf = - f \nabla_p E + sf = - f V + sf \cong sf, \quad (4.9)$$

так как скорость магнона меньше скорости звука ($\theta_K < \theta_D$!).

Подставляя (4.8) и (4.9) в (4.5), находим следующее выражение для вероятности W_{mf}^{III}

$$W_{mf}^{III} \sim \int \frac{\theta_K^4 \hbar^2 \left[-f_i f'_k \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_k} + O\left(\frac{s'^2}{p}\right) \right]^2 d\mathbf{p} d\mathbf{f}' \Omega^2 \delta(E_p + sf - E_{p+f-f'} - s'f')}{M^2 N^2 s s' \lambda \lambda' / f'^2 s^2 / f'^2 s'^2 / \hbar^6 \hbar} \quad (4.10)$$

Здесь градиент матричного элемента U_1 в импульсном пространстве заменен на U_1/p (p по условию $\sim \hbar/a$).

Выберем в качестве переменных энергию магнона E и углы в его импульсном пространстве. При интегрировании по углам уничтожаем δ -функцию

$$W_{mf}^{III} \sim \int \frac{\theta_K^4 m^2 \left[-f_i f'_k \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_k} + O\left(\frac{s'^2}{p}\right) \right]^2 \Omega^2}{M^2 s^4 f'^2 s^2 |\mathbf{f} - \mathbf{f}'| \hbar^2 N^2} d\mathbf{f}' dE'. \quad (4.10')$$

Используя приближенное (по порядку величины) равенство

$$\frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_k} f_i f'_k \sim \frac{f f'}{m},$$

можем написать

$$W_{mf}^{III} \sim \int \frac{\theta_K^4 m^2 dE / \Omega^2 d\mathbf{f}'}{M^2 s^6 \hbar^2 N^2} \left[\frac{1}{m} + O\left(\frac{s}{p}\right) \right]^2 \sim \frac{\theta_K^4 T^5 \left[1 + O\left(\frac{ms}{p}\right) \right]^2 \theta_K}{(Ms^2)^2 \theta_D^6 \hbar} \sim \\ \sim \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \left(\frac{\theta_K}{\theta_D} \right)^4 \frac{\theta_K}{\hbar} \left[1 + O\left(\frac{\theta_D}{\theta_K}\right)^2 \right]^2. \quad (4.11)$$

Сравнивая (4.11) с (4.4), мы видим, что (4.11) можно пренебречь.

Следует отметить, что при малых ω вероятность рассеяния, как и следует ожидать, идет пропорционально ω^4 [это легко видно из (4.11) и (4.4)]. Это обстоятельство, в отличие от случая рассеяния фононов примесями в диэлектриках [11], не существенно, так как пробег фононов в наших условиях определяется не их рассеянием магнонами (4.18').

Пробег фонона по отношению к рассеянию оказывается равным:

$$a \left(\frac{Ms^2}{T} \right)^2 \left(\frac{\theta_D}{T} \right)^3 \frac{\theta_D}{\theta_K}. \quad (4.12)$$

Обратимся теперь к рассмотрению вероятности поглощения (испускания) фонона при столкновении двух магнонов. Эту вероятность мы обозначим W_{mm}^f . Амплитуда вероятности запишется следующим образом:

$$\left\{ \frac{U_{1p'} H_{pp'-f}}{E_{p'} - E_{p'-f} - sf} + \frac{U_{1p} H_{p-fp'}}{E_p - E_{p-f} - sf} + \frac{H_{pp'} U_{1p''+f}}{E_p + E_{p'} - E_{p''} - E_{p''+f}} + \frac{H_{pp'} U_{1p''+f}}{E_p + E_{p'} - E_{p'+f} - E_{p''}} \right\} \times \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega N}} \frac{1}{\lambda} \frac{a^3}{\Omega}, \quad (4.13)$$

где U_1 , как и в (4.1), имеет порядок θ_K . $U_1 \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega N}} \frac{1}{\lambda}$ — матричный элемент взаимодействия магнона с колебаниями решетки. H определяется взаимодействием магнонов друг с другом¹ также порядка θ_K . Множитель $1/\Omega$ происходит от нормировки магнонных функций на объем; Ha^3 написано в соответствии с тем, что взаимодействие двух магнонов отлично от нуля только тогда, когда расстояние между ними порядка a . Следует отметить, что символический метод теории возмущений в применении к взаимодействию магнонов дает приемлемые результаты только при $T \ll \theta_K$ [6], что мы считаем выполненным. Рассматриваемый процесс осуществляется с помощью двух типов промежуточных состояний.

1) Сначала магнон с импульсом p (или p') испускает фонон с импульсом f , переходя при этом в состояние с импульсом $p - f$ [первый и второй члены в (4.13)]; затем магнон с импульсом $p - f$ сталкивается с магноном с импульсом p' , в результате чего получаются два магнона с импульсами p'' и p''' . Закон сохранения импульса дает:

$$p - f + p' = p'' + p'''; \quad (4.14)$$

2) Сначала сталкиваются магнены с импульсами p и p' , давая в результате магнены с импульсами $p'' + f$ (или $p'' + f$ и p'''),

¹ $H_{p_1 p_2}$ соответствует переходу двух магнонов от состояний с импульсами p_1 и p_2 к состояниям p_3 и p_4 .

после чего происходит испускание фонона [третий и четвертый члены в (4.14)].

Из уравнения

$$E_p + E_{p'} = E_{p''} + E_{p'''} + sf \quad (4.15)$$

мы заключаем, что все члены в (4.13) имеют одинаковый порядок величины. В отношении числителей это очевидно. Знаменатели же записываются так:

a) у первых двух членов

$$E_p - E_{p-f} - sf = fV_p E - sf \approx -sf; \quad E_{p_1} + E_{p'-f} - sf \approx -sf$$

б) у третьего и четвертого членов, в соответствии с (4.15)

$$E_p + E_{p'} - E_{p''+f} - E_{p'''} = E_{p''} - E_{p''+f} + sf \approx sf; \\ E_p + E_{p'} - E_{p''} - E_{p'''+f} \approx sf.$$

В нашем приближении мы ограничимся рассмотрением только одного члена из написанных в (4.13)¹. Для получения вероятности W_{mm}^f необходимо квадрат модуля (4.13) проинтегрировать по p , p'' и p''' :

$$W_{mm}^f \sim \int \frac{\theta_K^4 a^6}{M\omega N \lambda^2 s^2 / \Omega^2} \frac{\delta(E_p + E_{p'} - E_{p''} - E_{p'''} - sf)}{\hbar} \frac{\Omega^2 dp dp'' dp'}{\hbar^9} = \\ = \int \frac{\theta_K^4 a^6 \Omega}{M s^3 / \hbar^{10} N} \delta(E_p + E_{p+p''+p'''+f} - E_{p''} - E_{p'''} - sf) dp dp'' dp'''.$$

Вводим в качестве переменных энергию и углы в импульсном пространстве

$$W_{mm}^f \sim \int \frac{\theta_K^4 a^6 \Omega}{M s^3 / \hbar^{10} N} \delta(E_p + E_{p''+p'''+f-p} - E_{p'} - E_{p''} - sf) \times \\ \times (mp)^3 dEdE''dE'''dOdO''dO'''.$$

где δ — функция может быть уничтожена при интегрировании по одному из телесных углов. Каждое интегрирование по энергии магнона дает множителем первую степень температуры; величину sf в знаменателе можно заменить на T

$$W_{mm}^f \sim \int \frac{\theta_K^4 a^6}{M s^2 T \hbar^{10}} \frac{\Omega}{N} \frac{(mp)^3 dEdE''dE'''}{(p^2/m)} dO''dO''' \sim \\ \sim \frac{T^2 \theta_K^4 a^6 m^4 p \Omega}{M s^2 \hbar^{10} N} \sim \frac{T^2 \theta_K^4 a^6 m^4 p}{M s^2 \hbar^{10}} \sim \frac{T^2 \theta_K^4 a^8 m^4}{M s^2 \hbar^9} \sim \frac{T^2}{M s^2 \hbar}.$$

¹ В отличие от (4.2) различные члены в (4.13) не сокращаются друг с другом, так как матричные элементы U_1 во всех членах в (4.13) не одинаковы.

Сравнивая (4.4) и (4.11) с (4.18), мы видим, что вероятность последнего процесса оказывается значительно больше вероятности рассеяния

$$\frac{W_{\text{MM}}^f}{W_{Mf}^f} \sim \frac{T^2}{Ms^2\hbar} \left(\frac{Ms^2}{T}\right)^2 \left(\frac{\theta_D}{T}\right)^3 \frac{\hbar}{\theta_k} = \frac{Ms^2}{T} \frac{\theta_D}{\theta_k} \left(\frac{\theta_D}{T}\right)^2 \gg 1.$$

Пробег фонона l_f^f определяется поглощением (испусканием) при столкновении двух магнонов. Он оказывается равным ¹:

$$l_f^f \sim s \frac{Ms^2\hbar}{T^2} = a \frac{\hbar s}{aT} \frac{Ms^2}{T} \sim a \frac{\theta_D}{T} \frac{Ms^2}{T}. \quad (4.19)$$

Мы получим отсюда фононную теплопроводность κ_f , умножив (4.19) на скорость звука и теплоемкость $nk(T/\theta_D)^3$.

Это дает

$$\kappa_f \sim nksa \frac{Ms^3}{\theta_D} \frac{T}{\theta_D} \sim nk \frac{Ms^2}{\theta_D} \frac{T}{\theta_D} \frac{a^2\theta_D}{\hbar}. \quad (4.20)$$

В отличие от случая, когда θ_k было больше θ_D , теперь фононная теплопроводность идет пропорционально T [а не T^2 , см. (3.12)].

Переходя к магнонной теплопроводности κ_m , можно сказать, что она и при $\theta_k < \theta_D$ будет определяться формулой (2.11):

$$\kappa_m \sim nk \frac{\theta_K}{T} \frac{a^2\theta_K}{\hbar}.$$

Это выражение непосредственно получается из рассмотрения длины пробега магнона. В § 2 было показано, что пробег магнонов определяется не их взаимодействием с колебаниями решетки, а взаимодействием магнонов друг с другом. В нашем случае взаимодействие с решеткой слабее, чем в случае, разобранном в § 2, так как запрещены наиболее вероятные процессы первого порядка. Это, в частности, привело к тому, что длина пробега фонона (4.19) оказалась значительно больше, чем (3.10). С другой стороны, взаимодействие магнонов друг с другом не изменилось и дает ту же длину пробега $a(\theta_K/T)^2$, что и в § 2. Отсюда мы заключаем, что пробег магнонов и при $\theta_k > \theta_D$ и при $\theta_k < \theta_D$ определяется одним и тем же выражением $a(\theta_K/T)^2$ (при $T \ll \theta_K$). Такой резуль-

¹ Легко видеть, что ангармоничность при $T \ll \theta_D$ не играет роли. Пробег по отношению к ангармоничности l_f^f равен (3.5):

$$l_f^f \sim a \frac{Ms^2}{T} \left(\frac{\theta_D}{T}\right)^4$$

Отношение (3.5) к (4.19) значительно больше единицы:

$$\frac{l_f^f}{l_{\text{MM}}^f} \sim \left(\frac{\theta_D}{T}\right)^3 \gg 1.$$

тат непосредственно приводит к (2.11). Магнонная (2.11) и фононная (4.20) теплопроводности сравниваются при температуре T_1 , равной

$$T_1 \sim \theta_K \sqrt{\frac{\theta_D}{Ms^2}}. \quad (4.21)$$

Выше этой температуры тепло переносят фононы, и полная теплопроводность пропорциональна температуре:

$$\begin{aligned} \kappa \sim nk \frac{T}{\theta_D} \cdot \frac{Ms^2}{\theta_D} \cdot \frac{a^2\theta_D}{\hbar}, \\ \left(\theta_K \sqrt{\frac{\theta_D}{Ms^2}} \ll T \ll \theta_K \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ниже температуры T_1 главную роль в теплопроводности играют магноны; теплопроводность с понижением температуры возрастает обратно пропорционально температуре. При температуре T_1 κ имеет минимум. Действие примесей начинает сказываться с температурой T_2 порядка

$$T_2 \sim \theta_K \sqrt{\varepsilon}. \quad (3.14)$$

В интервале от T_1 до T_2 теплопроводность имеет вид

$$\begin{aligned} \kappa \sim nk \frac{\theta_K}{T} \frac{a^2\theta_K}{\hbar}, \\ \left(\sqrt{\varepsilon\theta_K} \ll T \ll \theta_K \sqrt{\frac{\theta_D}{Ms^2}} \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Для того чтобы такой интервал температур существовал, необходимо, чтобы относительное содержание примесей ε было значительно меньше, чем 10^{-2} :

$$\varepsilon \ll \frac{\theta_D}{Ms^2}, \quad (\sim 10^{-2}).$$

Ниже температуры T_2 теплопроводность снова падает пропорционально температуре (2.12)

$$\kappa \sim nk \frac{T}{\theta_K} \frac{a^2\theta_K}{\varepsilon\hbar}, \quad (T \ll \theta_K \sqrt{\varepsilon}). \quad (4.24)$$

При температуре T_2 κ имеет максимум. Отметим, что в максимуме значение κ в $\sqrt{\frac{\theta_D}{\varepsilon Ms^2}}$ больше, чем в минимуме при T_1 . При ε порядка сотой процента, теплопроводность в максимуме примерно в 10 раз больше, чем в минимуме. Из всех существенных длин пробег наибольшей является фононная длина l_f (4.19) при тем-

пературе T_1 (4.21), когда она достигает значения

$$a \left(\frac{Ms^2}{\theta_K} \right)^2 \sim 10^5 a,$$

если $\theta_K = 40^\circ\text{K}$. Поэтому поликристаллическая структура будет несущественна для температурной зависимости, если поликристаллы будут иметь размеры, значительно превышающие 10^{-3} см .

Следует заметить, что для тел, у которых θ_K почти равно θ_D , будучи больше чем θ_D , нужно пользоваться формулами § 3. Формулы, выведенные в этом параграфе, не переходят при $\theta_K = \theta_D$ в формулы § 3; это объясняется тем, что при увеличении отношения θ_K к θ_D , когда это отношение проходит вблизи единицы, практически внезапно снимается запрещение процессов испускания и поглощения фононов одним магноном.

5. Температуры, большие чем θ_K ($\theta_K < \theta_D$). Когда температура в несколько раз больше чем θ_K , парамагнитный спектр можно рассматривать самым общим образом, пользуясь разложением свободной энергии в ряд по степеням $1/T$. Такое разложение представляется возможным, потому что подавляющее большинство всех магнитных энергетических уровней по порядку величины не больше $N\theta_K$ [14]. Если в статистической сумме $Z = \sum e^{-E_n/T}$ собрать члены, соответствующие всем возможным ориентациям механического момента отдельного атома, то энергия системы E во всех этих членах будет отличаться на величину порядка θ_K . Отсюда следует, что статистическую сумму можно записать, отбрасывая члены более высокого порядка (см. [12,13]):

$$Z = \left(\sum_i 1 - \sum_i \frac{\epsilon_i}{T} + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\epsilon_i^2}{T^2} \right)^N, \quad (5.1)$$

где ϵ_i — энергия парамагнитного атома.

Сумма по i распространяется по всем ориентациям механического момента отдельного атома. Следует отметить, что возможность независимо ориентировать отдельные атомы решетки имеет место только при температурах, высоких по сравнению с энергией взаимодействия, т. е. при $T \gg \theta_K$. Свободная энергия равна

$$F = -NT \ln \left(\sum_i 1 \right) - NT \ln \left(1 - \frac{1}{T} \sum_i \frac{\epsilon_i}{\sum_i 1} + \frac{1}{2T^2} \sum_i \frac{\epsilon_i^2}{\sum_i 1} \right). \quad (5.2)$$

Разлагаем это выражение с точностью до членов порядка $1/T^2$

$$F = -NT \ln \left(\sum_i 1 \right) + N \frac{\sum \epsilon_i}{\sum 1} - \frac{N}{2T} \left\{ \frac{\sum \epsilon_i^2}{\sum 1} - \frac{(\sum \epsilon_i)^2}{(\sum 1)^2} \right\}. \quad (5.3)$$

Отсюда находим парамагнитную теплоемкость c_m

$$c_m = - \frac{T_k}{\Omega} \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = \frac{nk}{T^2} \left\{ \frac{\sum \epsilon_i^2}{\sum 1} - \frac{(\sum \epsilon_i)^2}{(\sum 1)^2} \right\}. \quad (5.4)$$

(c_m — теплоемкость единицы объема). С помощью соотношения

$$\frac{\sum \epsilon_i^2}{\sum 1} - \frac{(\sum \epsilon_i)^2}{(\sum 1)^2} \sim \theta_K^2.$$

Для c_m получается выражение

$$c_m \approx nk (\theta_K/T)^2. \quad (5.5)$$

Определение парамагнитной теплопроводности требует еще задания длины пробега и скорости, с которой передается возбуждение от одного парамагнитного атома к другому. Длина l^m (2.9) становится порядка a , когда температура достигает величины θ_K . Очевидно, что дальнейшее повышение температуры никак не может увеличить длину пробега; с другой стороны, l^m не может быть меньше, чем a . Отсюда,

$$l^m \approx a, \quad (T \gg \theta_K). \quad (5.6)$$

Частота ω , с которой происходит передача возбуждения, определяется обменным интегралом

$$\omega \sim \theta_K/\hbar.$$

Умножив ω на длину порядка постоянной решетки (возбуждения передаются соседним атомам)¹, получаем независящую от температуры скорость

$$a\theta_K/\hbar, \quad (\theta_K \ll T). \quad (5.7)$$

Полученная из (5.5), (5.6) и (5.7) магнитная теплопроводность оказывается равной

$$\kappa_m \sim a^2 \frac{\theta_K}{\hbar} nk \left(\frac{\theta_K}{T} \right)^2, \quad (\theta_K \ll T). \quad (5.8)$$

Перейдем теперь к фононной теплопроводности. При рассмотрении взаимодействия между фононами и парамагнитным спектром, когда $T \gg \theta_K$, следует учесть невозможность поглощения

¹ Выражение (5.7) справедливо только при $T \gg \theta_K$, когда возбуждения имеют длину волны порядка a .

основной части фононов. Это следует из того, что энергия большинства фононов порядка T ; поглощение таких порций энергии может иметь место только в результате одновременного действия многих парамагнитных атомов, что мало вероятно, вопреки [15]. Лишь небольшая часть длинноволновых фононов ($\hbar\omega \lesssim \theta_K$) может поглощаться магнитным спектром, имея в результате этого значительно меньший пробег, чем остальная главная часть фононов. Большинство фононов взаимодействует с магнитным спектром либо непосредственно путем рассеяния, либо взаимодействуя с длинноволновыми фононами с частотами $\lesssim \theta_K/\hbar$. За последний процесс ответственна ангармоничность. Так как фононы с частотами $\lesssim \theta_K/\hbar$ скорее взаимодействуют с магнитным спектром, чем с другими фононами, эффективная длина пробега основной части фононов, определяемая ангармоничностью, будет равна той длине, на которой происходит столкновение фона на с энергией T с фононом с энергией $\lesssim \theta_K$, если рассеяние мало.

Вероятность такого столкновения может быть получена из соответствующего *stoss*-оператора, который, как известно (см., например, [16]), имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{N}_1^{st} = & \sum_{2,3} A_{1-2-3} \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) [(N_1 + 1) N_2 N_3 - N_1 (N_2 + 1) (N_3 + 1)] \times \\ & \times \omega_1 \omega_2 \omega_3 + \sum_{2,3} A_{+1-2+3} \delta(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3) [(N_1 + 1) N_2 (N_3 + 1) - \\ & - N_1 (N_2 + 1) N_3] \omega_1 \omega_2 \omega_3 + \sum_{2,3} A_{+1+2-3} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) [(N_1 + 1) \times \\ & \times (N_2 + 1) N_3 - N_1 N_2 (N_3 + 1)] \omega_1 \omega_2 \omega_3, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где N — функция распределения фононов. Суммирование распространяется по всем возможным состояниям фононов 2, 3, т. е. по f_2 , j_2 и f_3 , j_3 , (j — отличает поляризацию фононов). Величины A от частоты не зависят. В нашем случае одна из частот ω_2 , ω_3 мала по сравнению с ω_1 ($\hbar\omega_1 \sim T$, $\hbar\omega_2$, $\hbar\omega_3$ порядка θ_K). Это дает возможность разложить выражения, стоящие в квадратных скобках в (5.9), по степеням малого волнового вектора

$$\begin{aligned} & \{N(f_1) + 1\} N(f_2) N(f_3) - N(f_1) \{N(f_2) + 1\} \{N(f_3) + 1\} = (N_1 + 1) \times \\ & \times N_2 \left\{ N_1 - f_2 \nabla_{f_1} N_1 + \frac{1}{2} f_2 i f_{2k} \frac{\partial^2 N_1}{\partial f_{1i} \partial f_{1k}} \right\} - N_1 (N_2 + 1) \left\{ N_1 + 1 - \right. \\ & \left. - f_2 \nabla_{f_1} N_1 + \frac{1}{2} f_2 i f_{2k} \frac{\partial^2 N_1}{\partial f_{1i} \partial f_{1k}} \right\} = -N_1 (N_1 + 1) - f_2 \nabla_{f_1} N_1 \{N_2 - N_1\} + \\ & + \frac{1}{2} f_2 i f_{2k} \frac{\partial^2 N_1}{\partial f_{1i} \partial f_{1k}} \{N_2 - N_1\}, \end{aligned} \quad (f_1 = f_2 + f_3); \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} & \{N(f_1) + 1\} N(f_1 + f_3) \{N(f_3) + 1\} - N(f_1) \{N(f_1 + f_3) + 1\} N(f_3) = \\ & = (N_1 + 1) \left\{ N_1 + f_3 \nabla_{f_1} N_1 + \frac{1}{2} f_3 i f_{3k} \frac{\partial^2 N_1}{\partial f_{1i} \partial f_{1k}} \right\} (N_3 + 1) - \\ & - N_1 \left\{ N_1 + 1 + f_3 \nabla_{f_1} N_1 + \frac{1}{2} f_3 i f_{3k} \frac{\partial^2 N_1}{\partial f_{1i} \partial f_{1k}} \right\} N_3 = \\ & = N_1 (N_1 + 1) + f_3 \nabla_{f_1} N_1 \{N_1 + N_3 + 1\} + \frac{1}{2} f_3 i f_{3k} \frac{\partial^2 N_1}{\partial f_{1i} \partial f_{1k}} \{N_1 + N_3 + 1\}, \end{aligned} \quad (f_1 + f_3 = f_2); \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} & \{N(f_1) + 1\} \{N(f_2) + 1\} N(f_1 + f_2) - N(f_1) N(f_2) \{N(f_1 + f_2) + 1\} = \\ & = (N_1 + 1) (N_2 + 1) \left\{ N_1 + f_2 \nabla_{f_1} N_1 + \frac{1}{2} f_2 i f_{2k} \frac{\partial^2 N_1}{\partial f_{1i} \partial f_{1k}} \right\} - N_1 N_2 \left\{ N_1 + \right. \\ & \left. + 1 + f_2 \nabla_{f_1} N_1 + \frac{1}{2} f_2 i f_{2k} \frac{\partial^2 N_1}{\partial f_{1i} \partial f_{1k}} \right\} = (N_1 + 1) N_1 + f_2 \nabla_{f_1} N_1 \times \\ & \times \{N_1 + N_2 + 1\} + \frac{1}{2} f_2 i f_{2k} \frac{\partial^2 N_1}{\partial f_{1i} \partial f_{1k}} \{N_1 + N_2 + 1\}, \end{aligned} \quad (f_1 + f_2 = f_3), \quad (5.12)$$

$$N_1 = N(f_1), \quad N_2 = N(f_2), \quad N_3 = N(f_3).$$

Учитывая, что в сумме, которой соответствует (5.10), вдвое больше членов, чем в суммах, которые соответствуют (5.11) и (5.12)¹, мы видим, что нулевые члены в (5.10), (5.11) и (5.12) взаимноокращаются. (Величины $A_{\pm 1 \pm 2 \pm 3}$ симметричны по отношению к индексам 1, 2, 3). Пользуясь

$$\begin{aligned} \omega(f_1) &= \omega(f_2) + \omega(f_1 - f_2) = \\ &= \omega(f_2) + \omega(f_1) - f_2 \nabla_{f_1} \omega(f_1) = \omega_1 + \omega_2 - \frac{i V_{f_1}}{\hbar}, \\ \hbar\omega(f_2) &= s_2 f_2, \end{aligned}$$

получаем следующее выражение для угла между f_2 и V_{f_1} в (5.10):

$$\cos(f_2, V_{f_1}) = \frac{s_2}{V_{f_1}}, \quad (5.10')$$

где V_{f_1} — групповая скорость фона f_1 , по величине равная скорости звука ($\hbar\omega_1 \ll \theta_D$!).

$$\cos(f_3, V_{f_1}) = s_3 / V_{f_1}, \quad (5.11')$$

$$\cos(f_2, V_{f_1}) = s_2 / V_{f_1}. \quad (5.12')$$

¹ В первой сумме в (5.9) f_2 и f_3 играют равноправную роль, а в двух других суммах только f_3 (во второй сумме) и f_2 (в третьей сумме) могут быть малыми по сравнению с f_1 .

Только фононы с такими поляризациями, которым соответствуют наименьшие скорости звука, могут непосредственно взаимодействовать с фононами малых частот¹. Остальные фононы будут осуществлять такое взаимодействие через промежуточный этап столкновения с фононами, способными удовлетворить равенствам (5.10'), (5.11'), (5.12'). Так как прохождение через такой промежуточный этап последует значительно быстрее, чем время взаимодействия с фононами малых частот, можно не рассматривать отдельно фононы f_1 не могущие удовлетворить вышеуказанным равенствам.

Легко видеть, что линейные и квадратичные члены в (5.10) — (5.12) имеют одинаковый порядок величины. В самом деле, в коэффициенте при линейном члене разложения по степеням f_2 (f_3) сокращается $N(f_2)$ ($N(f_3)$), в то время как в коэффициенте при квадратичном члене этого не происходит. Отсюда для отношения линейного к квадратичному члену находим:

$$\left| \frac{f_2 \nabla_{f_1} N_1}{f_{2i} \cdot f_{2k} \frac{\partial^2 N_1}{\partial f_{1i} \cdot \partial f_{1k}}} \right| \sim \frac{f_2 N_1}{f_1} \frac{f_1^2 s f_2}{f_2^2 N_1 T} = \left| \frac{s f_1}{T} \right| \sim 1.$$

Помня, что весь stoss-оператор, определяющийся ангармоничностью, равен (3.4)

$$W_f^l \sim \frac{T}{Ms^2} \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \frac{T}{\hbar},$$

можно оценить вероятность интересующих нас переходов, умножая W_f^l на $(\theta_K/T)^4$. Множитель $(\theta_K/T)^2$ появляется благодаря разложениям (5.10), (5.11) и (5.12), если мы $s_1 f_1$ положим равным T , а $s_2 f_2$ ($s_3 f_3$) равным θ_K . Такой же множитель $(\theta_K/T)^2$ мы получим, если пределы интегрирования по частоте в (3.3) распространим не до T/\hbar [как было сделано при выводе (3.4)], а до θ_K/\hbar . Заметим, что согласно (5.10), (5.11) и (5.12) вероятность перехода пропорциональна величине $N(f_2)$ ($N(f_3)$). Поэтому, хотя квадрат матричного элемента (3.2) пропорционален малой частоте, будучи умноженным на $N(f_2) = (T/s_2 f_2)$, он дает вероятность, не стремящуюся к нулю, когда $f_2 \rightarrow 0$. Таким образом, для вероятности мы получаем выражение

$$\frac{T}{Ms^2} \frac{\theta_K}{\hbar} \left(\frac{\theta_K}{\theta_D} \right)^3.$$

Длина свободного пробега фононов оказывается равной:

$$l^l = l_f^l \sim a \frac{Ms^2}{T} \left(\frac{\theta_D}{\theta_K} \right)^4. \quad (5.13)$$

¹ $\cos(\mathbf{f}_1, \mathbf{V}_{f_1}) = 1$ исключается [2].

Оценим теперь время τ_0 взаимодействия длинноволновых фононов с магнитным спектром. Для этого в (4.18) нужно подставить вместо T^2 величину порядка θ_K^3/T . Для того чтобы убедиться в этом, обратимся к соответствующему stoss-оператору:

$$\int \{Nf(E) - (N+1)f(E + \hbar\omega)\} dE \rho(E) A(\omega, E);$$

A определяется вероятностью перехода, $f(E)$ — функция распределения магнитных уровней ($\sim e^{-E/T}$) $\rho(E)$ (dE) — число механически возможных уровней в интервале энергии dE . Разложим выражение в фигурных скобках в ряд по степеням $\hbar\omega/T$:

$$\begin{aligned} Nf(E) - (N+1)f(E) + \frac{\hbar\omega}{T}(N+1)f(E) - \frac{1}{2}(N+1) \times \\ \times \left(\frac{\hbar\omega}{T} \right)^2 f(E) = -f(E) + f(E) \frac{N\hbar\omega}{T} + \\ + \frac{\hbar\omega}{T} f(E) - \frac{1}{2}(N+1) \frac{\hbar^2\omega^2}{T^2} f(E). \end{aligned}$$

Положим N равным

$$N = N_0 + N' = \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1} + N' = \frac{T}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} + N'.$$

Это выражение для N дает:

$$\{Nf(E) + (N-1)f(E + \hbar\omega)\} = N' \frac{\hbar\omega}{T} f(E).$$

Так как $\int f(E) \rho A dE$ не зависит от температуры при $T > \theta_K$, весь stoss-оператор обратно пропорционален T . Отсюда получаем [сравнивая с (4.18)] следующее выражение для времени взаимодействия τ_0 между отдельными фононами ($\hbar\omega \ll \theta_K$) и магнитным спектром:

$$\frac{1}{\tau_0} \sim \frac{\theta_K^3}{Ms^2 \hbar T}. \quad (5.14)$$

Этот результат является несколько парадоксальным, так как τ_0 возрастает с повышением температуры. Отметим, что кроме рассмотренного поглощения длинноволновых фононов, начиная с некоторых температур, для их времени пробега становятся существенными процессы более высокого порядка.

Из (5.13) и (5.14) мы заключаем, что τ_0 значительно меньше, чем время, определяющее l_f^l (5.13), если $T < \theta_D$. С помощью (5.13) получается теплопроводность κ ,

$$\kappa_l \sim nk \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^2 \left(\frac{\theta_D}{\theta_K} \right)^4 \frac{Ms^2}{\theta_D} \frac{a^2 \theta_D}{\hbar}, \quad (T > \theta_K). \quad (5.15)$$

Отношение κ_f к κ_m при $T > \theta_K$ оказывается равным (5.15) и (5.8)

$$\kappa_f/\kappa_m = \frac{T^4 \theta_D^2 M s^2}{\theta_K^4 \theta_K^2 \theta_K} \gg 1.$$

Основную роль в теплопроводности в этих условиях играют фононы

$$\kappa \sim nk \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^2 \left(\frac{\theta_D}{\theta_K} \right)^4 \frac{Ms^2}{\theta_D} \frac{a^2 \theta_D}{\hbar}, \quad (T > \theta_K). \quad (5.15')$$

При температурах, меньших чем θ_K , мы имели для κ выражения (4.20), которое при $T = \theta_K$ оказывалось равным

$$nk \frac{\theta_K}{\theta_D} \frac{Ms^2}{\theta_D} \frac{a^2 \theta_D}{\hbar}$$

Приближаясь к θ_K сверху ($T > \theta_K$), мы для κ при $T \sim \theta_K$ получаем значительно большее выражение

$$nk \left(\frac{\theta_D}{\theta_K} \right)^2 \frac{Ms^2}{\theta_D} \frac{a^2 \theta_D}{\hbar}.$$

Таким образом, теплопроводность резко изменяется $\left[\text{в } \left(\frac{\theta_D}{\theta_K} \right)^3 \text{ раз} \right]$ при прохождении через $T \sim \theta_K$. Такое резкое увеличение κ является следствием внезапного прекращения процессов поглощения основной части фононов магнитным спектром. Следует отметить, что этот результат не зависит от характера магнитного спектра при $T > \theta_K$, так как теплопроводность при $T \sim \theta_K$ может быть по порядку величины получена, пренебрегая вырождением магнитного спектра.

Ход теплопроводности при дальнейшем увеличении температуры может быть прослежен лишь качественно, так как интервал от θ_K до θ_D обычно не очень велик. Сначала κ при повышении температуры сверх θ_K резко возрастает (в θ_D^3/θ_K^3 раз), затем растет пропорционально T^2 (5.15). Этот рост, однако, идет недолго, так как вскоре начинает играть существенную роль рассеяние фононов магнитным спектром. Вероятность W такого процесса при $T > \theta_K$ можно оценить, рассматривая рассеяние фона на отдельным парамагнитным атомом:

$$W \sim \left(\frac{\hbar}{M \omega N} \right)^2 \frac{N}{\lambda^4} \theta_K^2 \frac{\omega^2 \Omega}{\hbar^2 s^3}, \quad (\theta_K < T < \theta_D).$$

Вместо $\hbar \omega$ подставим сюда T

$$W \sim \frac{\theta_K^2 T^4 \Omega}{M^2 \hbar^4 s^7 N} \sim \left(\frac{\theta_K}{Ms^2} \right)^2 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \frac{T}{\hbar}. \quad (5.16)$$

Пробег, определяемый этой вероятностью, равен ¹:

$$l \sim a \left(\frac{Ms^2}{\theta_K} \right)^2 \left(\frac{\theta_D}{T} \right)^4. \quad (5.17)$$

При температуре

$$T_1 \sim \theta_K \left(\frac{Ms^2}{\theta_K} \right)^{1/4}; \quad (5.18)$$

(5.16) и (5.13) сравниваются. В небольшой области температур теплопроводность в соответствии с (5.17) будет падать с возрастанием температуры обратно пропорционально первой степени температуры [1] ²:

$$\kappa \sim nk \left(\frac{Ms^2}{\theta_K} \right)^2 \frac{a^2 \theta_D}{\hbar} \frac{\theta_D}{T}, \quad (T \gg \theta_K [Ms^2/\theta_K]^{1/4}). \quad (5.19)$$

При $T = T_1$ мы имеем, таким образом, максимум теплопроводности. Дальнейшее возрастание температуры влечет за собой появление частых процессов переброса, когда температура стремится к дебаевской. Так как пробег, обязанный ангармоничности, имеет вид

$$a \cdot Ms^2/T, \quad (T \gg \theta_D),$$

мы видим, что вблизи θ_D теплопроводность сильно уменьшается в отношении порядка $Ms^2 \theta_D/\theta_K^2 \sim 100$.

Теплопроводность при $T > \theta_D$ ведет себя примерно так же, как и у обычных диэлектриков. Примерный ход κ при $\theta_D > \theta_K$ представлен на рис. 2.

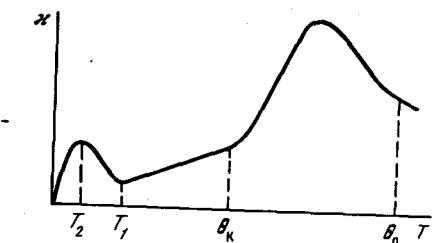


Рис. 2. Примерный ход теплопроводности κ при $\theta_K < \theta_D$

Разбор экспериментальных данных будет произведен в подготавливающейся к печати работе, в которой будут рассмотрены соли с необменным взаимодействием.

¹ Как и следует ожидать, при $T \sim \theta_K$ (5.16) дает тот же результат, что и (4.4).

² Формула Пайерлса справедлива в том случае, когда длина пробега, определяемая из рассеяния, больше длины пробега, определяемой из ангармоничности. Это условие у нас выполнено [ср. (5.17) и (3.5)].

В заключение считаю своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность проф. Л. Ландау за интересные дискуссии, ценные указания и постоянный интерес к работе.

Физический институт
Академии наук СССР

Получено 4 ноября 1940 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Peierls. Ann. d. Phys., 1929, 3, 1055.
2. W. de Haas, Th. Biermasz. Physica, 1938, 5, 320.
3. Van Fleck. The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities. Oxford, 1932.
4. F. Bloch. Zs. f. Phys., 1930, 61, 206.
5. Intern. Crit. Tables, 1929, 6, 354; B. Cabrera. L'étude expérimentale du magnétisme; le magnétron, Rep. Inst. Phys. Solvay, 1932, 6, 183; G. Foex. Les lois expérimentales du paramagnétisme. Mémorial des Sciences Physiques, 27, Paris, 1935.
6. L. Landau, I. Pomeranchuk. Phys. Zs. Sowjet., 1936, 10, 649 (Собр. трудов, № 1).
7. W. Baber. Proc. Roy. Soc., 1937, A, 158, 383.
8. F. Bloch. Zs. f. Phys., 1929, 57, 545.
9. Г. Беме, А. Зоммерфельд. Электронная теория металлов, стр. 187.
10. P. Debye. Vorträge über die kinetische Theorie, Teubner, 1914.
11. R. Peierls. Ann. d. Phys., 1929, 3, 1097.
12. Waller. Ann. d. Phys., 1937, 104, 132.
13. Шоттки, цит. по Ubbelohde. Modern Thermodynamics.
14. W. Heisenberg. Zs. f. Phys., 1928, 49, 619.
15. Temperly. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1939, 35, 256.
16. A. Ахиезер. ЖЭТФ, 1938, 8, 1318.

О ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДИЭЛЕКТРИКОВ ПРИ ТЕМПЕРАТУРАХ БОЛЬШЕ ДЕБАЕВСКОЙ *

Доказывается, что полученный Дебаем и Пайерлсом температурный ход теплопроводности диэлектриков при высоких температурах имеет место только при определенном виде дисперсии скорости тепловых колебаний и определенном виде зависимости этой скорости от направления. В общем случае в идеальном монокристалле ангармоничность не дает никакого теплового сопротивления. Необходимо учитывать столкновения с участием четырех фононов, которые дают тепловое сопротивление, пропорциональное $T^{\frac{1}{2}}$.

Теплопроводность кристаллических диэлектриков была впервые рассмотрена Дебаем [1], указавшим на то, что кристаллическая решетка будет обладать бесконечной теплопроводностью, если ее атомы связаны с положениями равновесия квазиупругими силами. Это хорошо известное обстоятельство получается непосредственно при рассмотрении собственных колебаний гармонической модели кристалла. Именно в такой модели мы имеем совокупность плоских волн, не взаимодействующих друг с другом и обладающих, таким образом, бесконечным пробегом (пренебрегая отражениями от стенок и т. п.). Для установления равновесия необходимо ввести взаимодействие между отдельными фононами (плоскими волнами). Такое взаимодействие Дебай получил, рассматривая следующий член в разложении потенциальной энергии по степеням смещения атомов из положений равновесия, т. е. рассматривая член кубический в смещениях (ангармоничность). Таким путем для теплопроводности κ при высоких температурах ($T \gg \theta$, T — температура в энергетических единицах, θ — дебаевская температура в тех же единицах) была получена Дебаем пропорциональность $1/T$ (убывание κ обратно пропорционально температуре). Важный дальнейший шаг был сделан Пайерлсом [2], который подверг вопрос последовательному квантово-механическому рассмотрению. Пайерлсом было выяснено отличие в поведении дискретной решетки и континуума (см., впрочем [3 и 4]) и указано то свойство дискретной решетки, которое приводит к конечной теплопроводности при взаимодействии фононов в отличие от бесконечной теплопроводности в случае континуума.

* ЖЭТФ, 1941, 11, 246; J. Phys. USSR, 1941, 4, 259.

В случае дискретной решетки, кроме столкновений фононов, сопровождающихся сохранением суммарного волнового вектора, мы имеем еще так называемые процессы переброса Пайерлса, при которых суммарный волновой вектор изменяется на величину вектора обратной решетки. Без процессов переброса установление равновесия оказывается невозможным.

При высоких температурах ($T \gg \theta$) процессы переброса столь же часты, как и обычные столкновения. Поэтому Пайерлс ограничивавшийся, подобно Дебаю, рассмотрением столкновений с участием трех фононов (ангармоничность), получил для κ также обратную пропорциональность температуре при $T \gg \theta$. При $T \ll \theta$ процессы переброса приводят к экспоненциальному возрастанию κ при понижении температуры.

В настоящей работе показывается, что для теплопроводности существенную роль играет дисперсия скорости тепловых колебаний, которую мы кратко будем называть дисперсия звука, а также зависимость скорости тепловых колебаний (мы будем говорить скорости звука — ради краткости) от направления распространения. Оказывается, что в теле с отсутствующей дисперсией и с изотропными скоростями звука ангармоничность сама по себе не дает никакого теплового сопротивления. Для того чтобы в таком теле получить конечную теплопроводность, нужно привлечь в рассмотрение члены 4-го порядка в разложении потенциальной энергии в ряд по степеням смещений атомов из положений равновесия, т. е. необходимо рассматривать столкновения 4 фононов. Такой результат является следствием очень быстрого возрастания длины пробега фононов, обладающих наибольшей скоростью, когда их частота ω стремится к нулю. Именно, оказывается, что пробег таких фононов обратно пропорционален ω^4 . Такая ситуация, как и в случае эффекта одних примесей [2], приводит к расходимости интеграла:

$$\kappa \approx \int \frac{d\mathbf{f}}{8\pi^3\hbar^3} c_f v_f l_f,$$

где c_f — теплоемкость фона, l_f — его пробег, v_f — его групповая скорость, $d\mathbf{f} = df_x df_y df_z$; f/\hbar — волновой вектор фона, определяющего теплопроводность.

Для того чтобы дисперсия и анизотропия звука могли изменить положение, необходимо выполнение некоторого условия (1.3) каждой точкой поверхности, выражающей скорость звука как функцию углов при заданной частоте. Ввиду тождественного характера этого условия по отношению к углам представляется маловероятным, чтобы оно могло быть выполнено во всех реальных кристаллах. Можно поэтому заключить, что в природе осуществляется несколько классов диэлектриков — у одного класса теплопроводность ведет себя по Дебаю — Пайерлсу, у другого — совсем иначе. В частности, при $T \gg \theta$ у этого второго класса κ обратно пропорциональна $T^{3/2}$. Наконец, может иметь место промежуточный случай.

1. Пробег длинноволновых фононов в приближении кубической ангармоничности

Поглощение длинноволнового фона может иметь место в результате либо его столкновения с коротковолновыми фононами (собственно поглощение — длинноволновый фонон, поглощаясь коротковолновым, дает другой коротковолновый фонон), либо в результате столкновения с длинноволновым же фононом. Рассмотрим возможность первого процесса. Из закона сохранения:

$$\mathbf{f} + \mathbf{F} = \mathbf{F}', \quad (1.1)$$

$$\omega(\mathbf{f}) + \omega(\mathbf{F}) = \omega(\mathbf{F}') = \omega(\mathbf{F} + \mathbf{f}), \quad (1.2)$$

где f — волновой вектор, умноженный на \hbar (длинноволнового фона), F — то же коротковолнового фона. Разлагая (1.2) в ряд по степеням \mathbf{f} , получаем условие:

$$\omega(\mathbf{f}) = \mathbf{f} \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\mathbf{f}}{\hbar} v_F.$$

Для длинных волн дисперсия несущественна, поэтому $\hbar\omega(\mathbf{f}) = s_f f$,

$$s_f f = \mathbf{f} v_F. \quad (1.3)$$

Мы видим, что фонон может поглощаться только таким высокочастотным фонаном F , у которого групповая скорость больше, чем скорость звука, соответствующего фонану f . В изотропном теле с отсутствующей дисперсией звуковых колебаний наибольшей скоростью обладают, как известно, продольные колебания. В таком случае из (1.3) следует, что продольные длинноволновые фононы в таком теле не могут вообще поглощаться в результате столкновений с коротковолновыми фононами. Этот результат был получен Ландау и Румером [5]. В реальных кристаллах всегда в той или иной степени имеет место дисперсия скорости звука и анизотропия. Если эти эффекты малы, то положение не меняется, так как в предельном случае их отсутствия мы имеем только что рассмотренный случай изотропного тела без дисперсии. Когда дисперсия и анизотропия велики, нетрудно себе представить, что для фононов f , движущихся в некотором направлении, можно подобрать такие фононы F , у которых групповая скорость v_F будет больше, чем наибольшая скорость звука s_f . (Теперь термин «продольные колебания» не имеет смысла. Очевидно, что их роль играют длинноволновые колебания, которым соответствует наибольшая скорость звука. Мы их в дальнейшем все время будем иметь в виду). Однако существенное изменение положения может наступить только в том случае, если соответствующие фононы F будут находиться в распоряжении фононов f , движущихся под любым углом. Такое тождественное условие накладывает жесткое

ограничение на анизотропию и дисперсию, так что представляется мало вероятным, чтобы во всех кристаллах оно было выполнено. Поэтому следует ожидать по крайней мере двух типов диэлектриков. Для одного из них должно иметь место соотношение $\kappa \sim 1/T$ ($T \gg 0$), для другого же типа κ будет нами определена в дальнейшем. В том случае, когда область углов, для которых не выполнено условие (1.3), мала по сравнению с 2π , может встретиться «смешанная» ситуация. Именно, κ будет состоять из двух частей, сравнимых между собой, например, при комнатных температурах, но имеющих различную температурную зависимость.

Перейдем к рассмотрению второго типа столкновений, при которых все участвующие фононы имеют малые частоты¹. Определим вероятность такого процесса. Матричный элемент возмущающей энергии записывается следующим образом:

$$Q(OO'OO'') N \zeta \left(\frac{\hbar}{M\omega N} \frac{\hbar}{M\omega'N} \frac{\hbar}{M\omega''N} \right)^{1/2} \times \\ \times [N_\omega (N_{\omega'} + 1) (N_{\omega''} + 1)]^{1/2} \frac{1}{\lambda \lambda' \lambda''}, \quad (1.4)$$

где $Q(OO'OO'')$ — функция углов, dO — элемент телесного угла, в f -пространстве фонара f , соответственно O, O'', ζ — энергия порядка $M s^2$. Такой порядок величины ζ определяется условием, чтобы при колебаниях порядка постоянной решетки и длине волны того же порядка изменение потенциальной энергии было порядка атомных энергий. M — масса элементарной ячейки, N — число элементарных ячеек в кристалле; (1.4) соответствуют процессу, при котором фонар f «расщепляется» на два других фонара f' и f'' . Множители $1/\lambda$ соответствуют вероятности перехода обращавшейся в нуль при $\omega = 0$, или $\omega' = 0$, или $\omega'' = 0$, N_ω — функция распределения фононов (не путать с N). Вероятность получается из (1.4) обычным образом

$$\frac{(Ms^2)^2 \hbar^3}{NM^3 \omega \omega' \omega'' \lambda^2 \lambda'^2 \lambda''^2} \frac{\delta(\omega - \omega' - \omega'')}{\hbar^2} \{N_\omega (N_{\omega'} + 1) (N_{\omega''} + 1) - \\ - N_{\omega'} N_{\omega''} (N_\omega + 1)\}. \quad (1.5)$$

Здесь записан только один из возможных процессов столкновения второго типа. Так как остальные возможности, если они имеются, дают тот же порядок величины, мы их писать не будем. Полная вероятность перехода получится в результате интегрирования (1.5) по всем волновым векторам фононов f'

$$W^{III} = \int \frac{\hbar s Q_1(OO'OO'')}{M \lambda \lambda' \lambda''} \{N_\omega (N_{\omega'} + 1) (N_{\omega''} + 1) - \\ - N_{\omega'} N_{\omega''} (N_\omega + 1)\} \frac{\delta(\omega - \omega' - \omega'') \Omega \delta f'}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (1.6)$$

¹ У изотропного тела без дисперсии таким процессом может быть только расщепление продольного фонара на два поперечных или на один поперечный и один продольный фононы. Поперечные фононы не могут в таком теле расщепляться [6].

где Ω — объем кристалла, Q_1 — функция углов порядка единицы, $Q_1 = |\mathbf{Q}|^2$.

Подставим сюда вместо N_ω выражение

$$N_\omega = N_{0\omega} + N'_\omega = (e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1)^{-1} + (e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1)^2 e^{\frac{\hbar\omega}{T}} \varphi(f) \frac{1}{T}.$$

Для W^{III} получаем следующее выражение:

$$W^{III} = \int \frac{s \Omega f' f' |f - f'| d f' Q_1 \{\varphi(f) - \varphi(f') - \varphi(f - f')\}}{NM \hbar^6 T (e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1) (e^{\frac{\hbar\omega''}{T}} - 1) (1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}) (2\pi)^3} \times \\ \times \delta[\omega(f) - \omega(f') - \omega(f - f')].$$

Так как сейчас интересуют температуры значительно большие дебаевской, то $e^{\hbar\omega/T}$ можно разложить в ряд

$$W^{III} = \int \frac{Q_1 T^2 s \Omega f' |f - f'| d f' \{\varphi(f) - \varphi(f') - \varphi(f - f')\}}{NM \hbar^7 \omega \omega'' (2\pi)^3} \delta[s_f f - s_{f'} f' - \\ - s_{f''} |f - f'|] = \int \frac{T^2 Q_1 s \Omega f'}{NM n^4 s_f s_{f'} s_{f''} (2\pi)^3} \{\varphi(f) - \varphi(f') - \varphi(f - f')\} \times \\ \times \delta[s_f f - s_{f'} f' - s_{f''} f''], \quad (1.7)$$

где s_f — скорость фонара f и соответственно $s_{f'}$ и $s_{f''}$.

δ -функцию можно уничтожить при интегрировании по углам в фононном импульсном пространстве (под «импульсом» фонара мы понимаем $f = \hbar/\lambda$):

$$\int \delta[s_f f - s_{f'} f' - s_{f''} f''] \sqrt{f^2 + f'^2 - 2ff' \cos \theta} \sin \theta d\theta = \\ = \frac{\sqrt{f^2 + f'^2 - 2ff' \cos \theta_0}}{s_{f''} f'} \cos \theta = (ff')/ff'. \quad (1.8)$$

$\cos \theta_0$ определяется из равенства

$$s_{f''} \sqrt{f^2 + f'^2 - 2ff' \cos \theta_0} = s_f f - s_{f'} f'.$$

Используя (1.8), приводим (1.7) к виду

$$W^{III} \cong \frac{T^2 \Omega s}{\hbar^4 N M s_f s_{f'} s_{f''}} \int f'^2 d f' \{\varphi(f) - \varphi(f') - \varphi(f'')\} \frac{s_f f - s_{f'} f'}{(2\pi)^3 s_{f''}^2 f'} = \\ = \frac{T^2 \Omega s}{\hbar^4 N M s_f s_{f'} s_{f''}^3} \int f' d f' \frac{s_f f - s_{f'} f'}{(2\pi)^3} \{\varphi(f) - \varphi(f') - \varphi(f - f')\}. \quad (1.9)$$

Пределы интегрирования по f' распространяются от 0 до $(s_f/s_{f'}) f \sim f$. Поэтому W^{III} оказывается пропорциональным ω^2 .

Деля (1.9) на число фононов, равное

$$\frac{\varphi(f)}{T(e^{\hbar\omega/T} - 1)(1 - e^{-\hbar\omega/T})} = \frac{\varphi(f)T}{(\hbar\omega)^2},$$

находим время жизни длинноволновых, наиболее быстрых фононов t^{III} , обязанное ангармоничности

$$\frac{1}{t^{III}} \sim \frac{T\Omega(\hbar\omega)^2/2}{NM\hbar^4s^8} - \frac{T\Omega(\hbar\omega)^4}{NM\hbar^4s^3s_f^2}. \quad (1.10)$$

Выразим Ω/N через дебаевскую температуру: $\frac{\Omega}{Ns^3} \sim \left(\frac{\hbar}{\theta}\right)^3$. Подставим это в (1.10): $\frac{1}{t^{III}} \sim \frac{T(\hbar\omega)^4}{Ms^2\hbar\theta^3}$. Соответствующий пробег записывается следующим образом:

$$l^{III} = s_f t^{III} \sim \frac{Ms^2}{T} \left(\frac{\theta}{\hbar\omega}\right)^3 \frac{s}{\omega} = a \frac{Ms^2}{T} \frac{\hbar s}{\hbar\omega a} \left(\frac{\theta}{\hbar\omega}\right)^3 (T \gg \theta; \theta \gg \hbar\omega) \sim a \frac{Ms^2}{T} \left(\frac{\theta}{\hbar\omega}\right)^4, \quad (1.11)$$

где a — постоянная решетки.

Поглощение длинноволновых фононов, рассмотренное здесь, было исследовано Слонимским [6], который получил пробег, обратно пропорциональный ω^5 , а не ω^4 , как у нас. Разница в его результате по сравнению с (1.11) объясняется тем, что он рассматривал случай $T \ll \hbar\omega$, в то время как у нас имеет место обратное неравенство $\hbar\omega \ll T$.

Длинноволновые колебания, имеющие немаксимальную скорость распространения (например, поперечные колебания в изотропном теле), могут, разумеется, поглощаться в результате столкновений с коротковолновыми фононами [5]. Вероятность поглощения при этом оказывается пропорциональной ω , т. е. соответствующий пробег равен (по порядку величины)

$$l \sim a \frac{Ms^2}{T} \frac{\theta}{\hbar\omega}. \quad (1.12)$$

Из сравнения (1.11) и (1.12) видно, что длинноволновые колебания, не могущие поглощаться коротковолновыми в силу (1.3), обладают значительно большими пробегами, чем остальные типы колебаний. В наших условиях основную роль в теплопроводности должны играть длинные волны с максимальной скоростью распространения.

Пробег (1.11) приводит к бесконечной теплопроводности

$$\kappa \cong \int k \left(\frac{d}{dT} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \right) sa \frac{Ms^2}{T} \frac{\theta^4}{\hbar\omega^4} \frac{\omega^2 d\omega}{8\pi^3 s^3} = kas \frac{\theta^4 \cdot 4\pi}{8\pi^3 \hbar^3 s^3} \int \frac{d\omega}{\omega^2} = \infty,$$

где k — постоянная Больцмана.

Такой результат можно увидеть и несколько иным путем. Кинетическое уравнение, из которого определяется функция $\varphi(f)$, при наличии градиента температуры имеет вид (пусть температура меняется вдоль оси z)

$$\frac{e^{\hbar\omega/T}}{(e^{\hbar\omega/T} - 1)} \frac{\hbar\omega}{T^2} \frac{dT}{dz} s_f \cos \psi \cong \int \frac{T^2 Q_f' d' Q_{1s}}{NMs_f s_f s_{f''}^3 (2\pi)^2 \hbar^4} \{ \varphi(f) - \varphi(f') - \varphi(f-f') \} (s_f - s_{f'} f'/f),$$

где ψ — угол между направлением групповой скорости фона и осью. Учитывая сказанное выше о пределах интегрирования по f и разлагая левую сторону этого уравнения в ряд по степеням $\hbar\omega/T$, легко можно убедиться в том, что функция φ обратно пропорциональна кубу частоты

$$\varphi \sim \frac{1}{\omega^3} \frac{dT}{dz}.$$

Теплопроводность определяется с помощью величины φ соотношением

$$\nabla T \kappa = \int \frac{\varphi(f) \hbar\omega e^{\frac{\hbar\omega}{T}} V_F d\mathbf{f}}{T (e^{\hbar\omega/T} - 1)^2 V_F 8\pi^3 \hbar^3} = T \int \frac{\varphi(f)}{\hbar\omega} \frac{df}{(2\pi\hbar)^2} \frac{V_F}{V_F}.$$

При малых частотах подынтегральная функция ведет себя как $d\omega/\omega^2$:

$$\int \frac{1}{\omega^3} \frac{1}{\omega} \omega^2 d\omega = \int \frac{d\omega}{\omega^3} = \infty,$$

Для получения конечной теплопроводности необходимо обратиться к рассмотрению столкновений с участием 4 фононов.

2. Пробег длинноволновых фононов, обязанний членам 4-го порядка в разложении потенциальной энергии

Потенциальная энергия атомов (молекул, ионов) кристалла с требуемой нами точностью записывается так:

$$U(r_M) = U(r_{0M}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} \rho_i \rho_k + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \rho_i \rho_k \rho_l + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 U}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l \partial x_m} \rho_i \rho_k \rho_l \rho_m, \quad (2.1)$$

где r_M — вектор-радиус атома или молекулы M решетки; r_{0M} — соответствующее положение равновесия; ρ_i — компонента вектора теплового смещения из положения равновесия. Рассматриваемые столкновения могут быть двух типов:

1) до столкновения было два фонона и после столкновения также остаются два. Законы сохранения в этом случае дают

$$\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4 + \mathbf{d}; \quad \omega(\mathbf{f}_1) + \omega(\mathbf{f}_2) = \omega(\mathbf{f}_3) + \omega(\mathbf{f}_4), \quad (2.2)$$

где \mathbf{d} — вектор обратной решетки. Если $\mathbf{d} \neq 0$, мы имеем процесс, аналогичный процессу переброса, рассмотренному Пайерлсом в случае столкновений с участием трех фононов;

2) до столкновения был один фонон, после столкновения образовалось три фонона и, наоборот, три фонона, сталкиваясь, дают один:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4 + \mathbf{d}, \\ \omega(\mathbf{f}_2) &= \omega(\mathbf{f}_1) + \omega(\mathbf{f}_3) + \omega(\mathbf{f}_4). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Так как число уравнений в (2.2) или (2.3) по-прежнему равно 4, как и в случае, рассмотренном в § 1, а число независимых переменных за счет введения еще одного фонона возросло на 3, столкновения (2.2), (2.3) оказываются всегда возможными и в том случае, когда один из фононов стремится к нулю. Рассматриваемая нами возмущающая энергия равна

$$\sum_{M_1 M_2 M_3} \frac{\partial^4 U}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l \partial x_m} (\rho_i^{M_1} - \rho_k^{M_2}) (\rho_k^{M_1} - \rho_l^{M_2}) (\rho_l^{M_1} - \rho_m^{M_3}) (\rho_m^{M_1} - \rho_m^{M_2}). \quad (2.4)$$

Индекс M_i отличает различные атомы (молекулы, ионы) решетки

Матричный элемент этого возмущения для столкновения 1-го типа по порядку величины может быть записан следующим образом:

$$N \left| \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right| a^4 \frac{\hbar^2}{M^2 N^2 (\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4)^{1/2} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \sqrt{N_{\omega_1} N_{\omega_2} (N_{\omega_3} + 1) (N_{\omega_4} + 1)}. \quad (2.5)$$

(2.5) строго справедливо только для длинных волн, для которых длина волны значительно больше постоянной решетки. По порядку величины мы можем, однако, пользоваться (2.5) и при $\lambda \sim a$ (a — постоянная решетки). Коэффициент $\left| \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right|$ имеет порядок величины U_0/a^4 , где U_0 — энергия порядка тепловой энергии при температурах, которым соответствуют тепловые колебания, равные расстоянию между соседними узлами решетки. Пользуясь приближенным равенством (в среднем) потенциальной и кинетической энергии, имеем

$$U_0 \sim Ma^2 \bar{\omega}^2 \sim Ma^2 \theta^2 \hbar^{-2} \sim Ms^2. \quad (2.6)$$

Окончательно матричный элемент (2.5) равен

$$\frac{Ms^2 \hbar^2 B(O_1 O_2 O_3 O_4)}{NM^2 (\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4)^{1/2} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}, \quad (2.7)$$

где $B(O_1 O_2 O_3 O_4)$ — функция углов, которая порядка единицы. O_1 — телесный угол первого фонона в импульсном пространстве и т. п. Записываем соответствующий stoss-оператор:

$$\begin{aligned} (\dot{N}_{\omega_1})_{\text{stoss}} &= \sum_{2,3,4} \frac{(Ms^2)^2 \hbar^2 A(O_1 O_2 O_3 O_4)}{(NM^2)^2 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \lambda_1^{2\lambda_2^2} \lambda_2^{2\lambda_3^2} \lambda_3^{2\lambda_4^2}} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \times \\ &\times \{N_{\omega_3} N_{\omega_4} (1 + N_{\omega_1}) (1 + N_{\omega_2}) - N_{\omega_1} N_{\omega_2} (N_{\omega_3} + 1) (N_{\omega_4} + 1)\} + \\ &+ \sum_{2,3,4} \frac{s^4 \hbar^2 A(O_1 O_2 O_3 O_4)}{N^2 M^2 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \lambda_1^{2\lambda_2^2} \lambda_2^{2\lambda_3^2} \lambda_3^{2\lambda_4^2}} \{(N_{\omega_1} + 1) N_{\omega_2} N_{\omega_3} N_{\omega_4} - (N_{\omega_2} + \\ &+ 1) (N_{\omega_3} + 1) (N_{\omega_4} + 1) N_{\omega_1}\} \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) + \\ &+ \sum_{2,3,4} \frac{s^4 \hbar^2 A(O_4 O_2 O_3 O_1)}{N^2 M^2 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \lambda_1^{2\lambda_2^2} \lambda_2^{2\lambda_3^2} \lambda_3^{2\lambda_4^2}} \{(N_{\omega_1} + 1) (N_{\omega_2} + 1) (N_{\omega_3} + 1) \times \\ &\times N_{\omega_4} - N_{\omega_1} N_{\omega_2} N_{\omega_3} (N_{\omega_4} + 1)\} \delta(\omega_4 - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь A — функция углов порядка единицы. Конкретный вид функции A зависит от кристаллической структуры решетки.

Суммы в (2.8) распространяются по всем компонентам волновых векторов 2, 3 и 4 фононов. Поставим вместо N_{ω} выражение

$$N = N_0 + N' = \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1} + \frac{\Phi e^{\hbar\omega/T}}{T(e^{\hbar\omega/T} - 1)^2}.$$

Формула (2.8) записывается с помощью этой подстановки следующим образом:

$$\begin{aligned} (\dot{N}_{\omega_1})_{\text{stoss}} &= \sum_{2,3,4} \frac{s^4 \hbar^2 A(O_1 O_2 O_3 O_4) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)}{N^2 M^2 s_1 s_2 s_3 s_4 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \{ \varphi_3 + \varphi_4 - \\ &- \varphi_1 - \varphi_2 \} \frac{1}{(e^{\hbar\omega_3/T} - 1)(e^{\hbar\omega_4/T} - 1)(1 - e^{-\hbar\omega_1/T})(1 - e^{-\hbar\omega_2/T})T} + \\ &+ \sum_{2,3,4} \frac{s^4 \hbar^2 A(O_1 O_2 O_3 O_4) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4)}{N^2 M^2 s_1 s_2 s_3 s_4 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 (e^{\hbar\omega_2/T} - 1)(e^{\hbar\omega_3/T} - 1)(e^{\hbar\omega_4/T} - 1)(1 - e^{-\hbar\omega_1/T})} + \\ &+ \sum_{2,3,4} \frac{s^4 \hbar^2 A(O_4 O_2 O_3 O_1) \delta(\omega_4 - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) (\varphi_4 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3)}{N^2 M^2 s_1 s_2 s_3 s_4 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 (e^{\hbar\omega_1/T} - 1)(e^{\hbar\omega_2/T} - 1)(e^{\hbar\omega_3/T} - 1)(1 - e^{-\hbar\omega_4/T})}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Нас интересует случай, когда частота ω_1 мала. Тогда вторую сумму в (2.9) можно не писать, так как пределы суммирования по величине импульсов фононов 2, 3 и 4 в ней малы (примерно от нуля до f_1). С другой стороны, в первой и третьей суммах суммирование можно распространить до максимальных величин импульса, отвечающих, очевидно, граничной дебаевской частоте. Так как область малых $f_2 f_3 f_4$ не играет существенной роли в (2.9), вторая сумма мала по сравнению с первой и третьей. Разлагаем $e^{\hbar\omega/T}$

в ряд:

$$\begin{aligned}
 (\dot{N}_{\omega_1})_{stoss} &= \sum_{2,3,4} \frac{s^4 \hbar^2 A (O_1 O_2 O_3 O_4) T^3 \delta (\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) (\varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_1 - \varphi_2)}{N^2 M^2 s_1 s_2 s_3 s_4 \hbar^4 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} + \\
 &+ \sum_{2,3,4} \frac{\hbar^2 s^4 A (O_4 O_2 O_3 O_1) T^3 \delta (\omega_1 - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) (\varphi_4 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3)}{N^2 M^2 s_1 s_2 s_3 s_4 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} = \\
 &= \sum_{2,3,4} \frac{s^4 A (O_1 O_2 O_3 O_4) T^3 \delta (\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) (\varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_1 - \varphi_2)}{N^2 M^2 s_1^2 s_2^2 s_3^2 s_4^2 \hbar^2} + \\
 &+ \sum_{2,3,4} \frac{s^4 A (O_4 O_2 O_3 O_1) T^3 \delta (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) (\varphi_4 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3)}{N^2 M^2 s_1^2 s_2^2 s_3^2 s_4^2 \hbar^2}. \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

Переходим теперь от суммы к интегралам по $d\mathbf{f}_2$ и $d\mathbf{f}_3$:

$$\begin{aligned}
 (\dot{N}_{\omega_1})_{stoss} &= \frac{\Omega^2 A (O_1 O_2 O_3 O_4) d\mathbf{f}_2 d\mathbf{f}_3 (\varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_1 - \varphi_2)}{(NM s_1 s_2 s_3 s_4 \hbar)^2 (2\pi\hbar)^6} s^4 T^3 \delta [\omega(\mathbf{f}_1) + \omega(\mathbf{f}_2) - \\
 &- \omega(\mathbf{f}_3) - \omega(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3)] + \int \frac{A (O_4 O_2 O_3 O_1) \Omega^2 s^4 T^3}{(NM s_1 s_2 s_3 s_4 \hbar)^2} (\varphi_4 - \varphi_1 - \\
 &- \varphi_2 - \varphi_3) \delta [\omega(\mathbf{f}_1) + \omega(\mathbf{f}_2) + \omega(\mathbf{f}_3) - \omega(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3)] \frac{d\mathbf{f}_2 d\mathbf{f}_3}{(2\pi\hbar)^6}. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Как будет видно из дальнейшего, φ_2 , φ_3 и φ_4 малы по сравнению с φ_1 . Поэтому мы их писать не будем. Под знаком δ -функции можно малую частоту ω не писать и разложить также величины $\omega(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3)$, $\omega(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3)$ в ряд по степеням f_1 , ограничиваясь нулевым членом в этом разложении:

$$\begin{aligned}
 -(\dot{N}_{\omega_1})_{stoss} &= \int \frac{A (O_1 O_2 O_3 O_4) s^4 T^3 \varphi_1 d\mathbf{f}_2 d\mathbf{f}_3 \Omega^2}{(NM s_1 s_2 s_3 s_4 \hbar)^2 (2\pi\hbar)^6} \delta [\omega(\mathbf{f}_2) - \omega(\mathbf{f}_3) - \omega(\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3)] + \\
 &+ \int \frac{A (O_4 O_2 O_3 O_1) s^4 T^3 \varphi_1 d\mathbf{f}_2 d\mathbf{f}_3 \Omega^2}{(NM s_1 s_2 s_3 s_4 \hbar)^2 (2\pi\hbar)^6} \delta [\omega(\mathbf{f}_2) + \omega(\mathbf{f}_3) - \omega(\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3)]. \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Функция $A(O_1 O_2 O_3 O_4)$ симметрично зависит от своих аргументов. Поэтому оба интеграла в (2.12) примерно равны друг другу

$$(\dot{N}_{\omega_1})_{stoss} \approx - \int \frac{A (O_1 O_2 O_3 O_4) s^4 T^3 \varphi_1 d\mathbf{f}_2 d\mathbf{f}_3 \Omega^2}{(NM s_1 s_2 s_3 s_4 \hbar)^2 (2\pi\hbar)^6} \delta [\omega(\mathbf{f}_2) - \omega(\mathbf{f}_3) - \omega(\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3)]. \quad (2.13)$$

Здесь интегрируется по всем возможным значениям f_2 и f_3 . Очевидно, что главную роль при этом играют большие импульсы фотонов порядка \hbar/a .

$$\begin{aligned}
 (\dot{N}_{\omega_1})_{stoss} &\approx -\varphi_1 \frac{s^4 T^3 \Omega^2}{(NM s^4 \hbar^4)^2} \left(\frac{\hbar}{a}\right)^6 \frac{\hbar}{\theta} = -\frac{T^3 \Omega^2 \varphi_1}{(NM s^2 a^3)^2 \hbar \theta} = \\
 &= -\left(\frac{T}{Ms^2}\right)^2 \left(\frac{\Omega}{Na^3}\right)^2 \frac{T}{\hbar} \frac{\varphi_1}{\theta}. \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

Используем приближенное равенство

$$\frac{\Omega}{N} \sim a^3, \quad (\dot{N}_{\omega_1})_{stoss} \sim -\frac{\varphi_1}{\theta} \frac{T}{\hbar} \left(\frac{T}{Ms^2}\right)^2. \quad (2.15)$$

Деля (2.15) на

$$\varphi_1 (e^{\hbar\omega_1/T} - 1)^2 e^{\hbar\omega_1/T} \frac{1}{T} = \varphi_1 \frac{T}{(\hbar\omega_1)^2},$$

находим время свободного пробега τ^{IV}

$$\frac{1}{\tau^{IV}} \sim \omega_1 \frac{\hbar\omega_1}{\theta} \left(\frac{T}{Ms^2}\right)^2. \quad (2.16)$$

Соответствующий пробег имеет порядок величины

$$l_f^{IV} = s_f \tau^{IV} \sim a \left(\frac{\theta}{\hbar\omega_1}\right)^2 \left(\frac{Ms^2}{T}\right)^2. \quad (2.17)$$

Докажем теперь, что φ_2 , φ_3 и φ_4 в (2.11) малы по сравнению с φ_1 . Для этого напишем уравнение стационарности при наличии градиента температуры, из которого определяется функция φ

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{\hbar\omega_1}{e^{\frac{\hbar\omega_1}{T}} - 1} \frac{\hbar\omega_1}{T^2} \frac{dT}{dz}}{\frac{\hbar\omega_1}{e^{\frac{\hbar\omega_1}{T}} - 1} \frac{\hbar\omega_1}{T^2}} s_1 \cos \psi &= \left\{ \int \frac{A (O_1 O_2 O_3 O_4) T^3 s^4 d\mathbf{f}_2 d\mathbf{f}_3 \Omega^2}{(NM s_1 s_2 s_3 s_4 \hbar)^2 (2\pi\hbar)^6} (\varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_1 - \right. \\
 &\left. - \varphi_2) \delta [\omega(\mathbf{f}_1) + \omega(\mathbf{f}_2) - \omega(\mathbf{f}_3) - \omega(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3)] + \right. \\
 &\left. A (O_1 O_2 O_3 O_4) T^3 s^4 \Omega^2 d\mathbf{f}_2 d\mathbf{f}_3 (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) \delta [\omega(\mathbf{f}_1) - \right. \\
 &\left. - \omega(\mathbf{f}_2) - \omega(\mathbf{f}_3) - \omega(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3)] \right\} + \\
 &+ \int \frac{A (O_4 O_2 O_3 O_1) T^3 s^4 \Omega^2 d\mathbf{f}_2 d\mathbf{f}_3}{(NM s_1 s_2 s_3 s_4 \hbar)^2 (2\pi\hbar)^6} (\varphi_4 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \delta [\omega(\mathbf{f}_1) + \omega(\mathbf{f}_2) + \\
 &+ \omega(\mathbf{f}_3) - \omega(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3)] + \int \frac{T^2 \Omega d\mathbf{f}' Q_1}{Ns_f s_{f'} s_{f''} M \hbar^5} \times \\
 &\times \left(s_f - \frac{s_{f'} f'}{f} \right) \{ \varphi(\mathbf{f}) - \varphi(\mathbf{f}') - \varphi(\mathbf{f} - \mathbf{f}') \} \delta [\omega(\mathbf{f}) - \omega(\mathbf{f}') - \omega(\mathbf{f} - \mathbf{f}')]. \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, представляет собой $stoss$ -оператор, обязанный столкновениям с участием четырех фононов. Последний интеграл в (2.18) отвечает за ангармоничность (1.7). Как мы уже видели, при стремлении ω_1 к нулю первый $stoss$ -оператор стремится к конечному пределу (2.14), а второй пропорционален ω_1^2 (1.9). Левая сторона (2.18) обратно пропорциональна ω_1 ($\hbar\omega \ll T$). Отсюда можно заключить, что φ убывает с возрастанием частоты, по крайней мере как $\frac{1}{\omega}$. Так как в (2.11) основную

роль в интегралах играют большие частоты, функции φ_2 , φ_3 , φ_4 оказываются малыми по сравнению с φ_1 .

Пробеги (1.11) и (2.17) сравниваются при частоте ω_0 порядка

$$\frac{Ms^2}{T} = \left(\frac{\theta}{\hbar\omega_0} \right)^2; \\ \hbar\omega_0 = \theta \sqrt{\frac{T}{Ms^2}}. \quad (2.19)$$

Очевидно, что в теплопроводности главную роль будут играть частоты порядка ω_0 . При пользовании выражением для κ

$$\kappa \approx \int c_l l_s s_i \frac{df}{(2\pi\hbar)^3}$$

можно для l , подставить (1.11) и интегрировать до частоты ω_0 (2.19), так как при меньших частотах пробег возрастает значительно медленнее (2.17) и соответствующая область интегрирования не играет роли. Таким образом, мы получаем

$$\kappa \approx \int_{\omega_0} k \left(\frac{d}{dT} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \right) a \frac{Ms^2}{T} \frac{\theta^4}{(\hbar\omega)^4} s \frac{\omega^2 d\omega}{\hbar^4 s^3} = ksa \frac{Ms^2}{T} \frac{\theta^4}{\hbar^4 s^3} \int_{\omega_0} \frac{d\omega}{\omega^2} = \\ = ksa \frac{Ms^2}{T} \frac{\theta}{\hbar\omega_0} \left(\frac{\theta}{\hbar s} \right)^3 \sim ksa \left(\frac{Ms^2}{T} \right)^{3/2} \left(\frac{\theta}{\hbar s} \right)^3,$$

где k — постоянная Больцмана.

Используя равенство $\theta \sim \hbar sa^{-1}$, находим

$$\kappa \approx knsa \left(\frac{Ms^2}{T} \right)^{3/2}, \quad (T \gg \theta), \quad (2.20)$$

где n — число элементарных ячеек в 1 см^3 . Таким образом, мы видим, что в наших условиях κ оказывается обратно пропорциональной температуре в степени $3/2$. Кроме того, в нашем случае величина κ оказывается в $\sqrt{Ms^2/T}$ раз больше, чем в случае, когда $\kappa \sim 1/T$. В приближении ангармоничности пробег (средний) равен aMs^2/T см. (1.12), откуда $\kappa \sim a \frac{Ms^2}{T} nk$. Из сравнения с (2.20) следует наше утверждение о величине κ .

Следует отметить, что кроме тел, для которых справедлив закон $\kappa \sim 1/T$, и тел, для которых мы имеем соотношение (2.20), может встретиться промежуточный случай, именно: для той части углов, когда условие (1.3) может быть выполнено, фононы дают $\kappa \sim 1/T$, для остальных — $\kappa \sim \frac{1}{T^{3/2}}$. При комнатной температуре обе части теплопроводности случайно могут оказаться одинакового порядка величины. Резюмируя, можно сказать, что κ при $T \gg \theta$ не должна следовать универсальному закону, справедливому для всех без исключения диэлектриков.

Обсуждение экспериментальных данных будет проведено в статье, посвященной рассмотрению влияния примесей на теплопроводность, которую предполагается опубликовать в ближайшее время.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность проф. Л. Ландау за интересные дискуссии и ценные указания.

Физический институт
Академии наук СССР

Получено 6 ноября 1940 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Debye. Vorträge über die kinetische Theorie etc. Teubner, 1914, 42.
2. R. Peierls. Ann. d. Phys., 5, 1929, 3, 1055.
3. L. Ornstein, F. Zernicke. Proc. Amst. Acad., 1925, 19, 1295.
4. W. Pauli. Verh. d. deutsch. Phys. Ges., 3, 1925, 6, 10.
5. L. Landau, G. Rumer. Phys. Zs. Sowjet., 1937, 11, 18.
6. Г. Слонимский. ЖЭТФ, 1937, 7, 1457.

О ПОГЛОЩЕНИИ ЗВУКА В ДИЭЛЕКТРИКАХ*

Показывается, что поглощение звука в диэлектриках определяется ангармоничностью только в том случае, если выполнено условие (1). Нет основания полагать, что это условие выполнено у всех (или даже у большинства) диэлектриков. В связи с этим зависимость поглощения звука от температуры не должна иметь универсального характера для всех диэлектриков.

Получена зависимость поглощения звука от температуры в кристаллах, для которых условие (1) не имеет места.

Вопрос о поглощении звука диэлектриками был недавно подвергнут рассмотрению Ахиезером [1]. Полученный им результат не учитывает того обстоятельства, что для пробега длинноволновых фононов весьма существенную роль играют дисперсия и анизотропия скорости тепловых колебаний. В изотропном теле без дисперсии такие длинные волны, которым соответствует максимальная скорость звука, имеют пробег обратно пропорциональный ω^4 (ω — частота) (см. статью «О теплопроводности диэлектриков при температурах больше дебаевской» [2]).

Это сильное возрастание пробега с уменьшением частоты влечет за собой бесконечную теплопроводность, если не рассматривать столкновений с участием четырех фононов. Аналогичная ситуация встречается во всех телах, у которых условие

$$s_{\max}(\vartheta, \varphi) f = f V_F \quad (1)$$

не может быть выполнено при любом значении углов ϑ, φ . Здесь $s_{\max}(\vartheta, \varphi)$ — максимальная скорость распространения звука в направлении, характеризуемом углами ϑ, φ ; f — импульс фонона ($f = \hbar/\lambda$, λ — длина волны, деленная на 2π); V_F — групповая скорость каких-либо коротковолновых фононов.

Аналогично теплопроводности, поглощение звука в телах, в которых условие (1) не может быть тождественно по отношению к ϑ, φ выполнено, также существенно определяется столкновениями с участием четырех фононов. Одна ангармоничность оказывается недостаточной для того, чтобы установить соответствующее распределение фононов.

* ЖЭТФ, 1941, 11, 455; J. Phys. USSR, 1941, 4, 529.

Мы не рассматриваем здесь эффекты, обязанные примесям, искажениям решетки, отражениям упругих волн от граней поликристаллов и т. п. Таким образом, наши рассуждения относятся к идеальному бесконечному монокристаллу.

1. Температуры, высокие по сравнению с дебаевской

Как и в [1], мы будем рассматривать звук как внешний фактор, изменяющий функцию распределения фононов. Такое изменение вызывается зависимостью частоты фононов от звукового поля. Именно: имеет место соотношение

$$\omega_f = \omega_f^0 (1 + \lambda_{ik} u_{ik}), \quad (1.1)$$

где ω_f^0 — частота фононов с импульсом f в отсутствие звукового поля, u_{ik} — симметричный тензор деформации, обязанный звуку, λ_{ik} — тензор второго ранга, определяемый кристаллической симметрией. Мы здесь и в дальнейшем будем стараться придерживаться обозначений, принятых в [1]¹.

Изменение функций распределения по действием звукового поля равно

$$\frac{e^{\hbar\omega/T}}{(e^{\hbar\omega/T} - 1)^2} \frac{\hbar\omega}{T} \left(\lambda_{ik} u_{ik} - \frac{\dot{T}}{T} \right). \quad (1.2)$$

Здесь вместо ω^0 написано ω . Точка обозначает дифференцирование по времени. Все температуры (T, θ) измеряются в энергетических единицах. Как показано в [1], величина \dot{T}/T равна $u_{ik} \bar{\lambda}_{ik}$, где $\bar{\lambda}_{ik}$ — есть некоторым образом усредненный по направлениям импульса f тензор λ_{ik} . Поэтому можно вместо $\lambda_{ik} u_{ik} — \dot{T}/T$ писать условно $\lambda_{ik} u_{ik}$, учитывая только существование соотношения

$$\sum_{ij} \frac{(\hbar\omega_i)^2}{T(e^{\hbar\omega_i/T} - 1)(1 - e^{-\hbar\omega_i/T})} \left\{ \lambda_{ik} u_{ik} - \frac{\dot{T}}{T} \right\} = 0,$$

следующего из сохранения энергии кристалла при столкновениях фононов друг с другом. j отличает различные состояния поляризации фононов.

Рассмотрим положение, создающееся в теле, для которого условие (1) не может быть выполнено в том смысле, о котором шла речь в введении. Длинноволновые фононы, которым отвечает максимальная скорость звука, не могут поглощаться в таком теле коротковолновыми фононами. Пробег таких волн, если ограни-

¹ За всеми подробностями (в частности, относительно свойств тензора λ_{ik}) мы отсылаем к [1].

чиваться ангармоничностью, определяется их столкновениями с фононами малых же частот [2].

Полный stoss-оператор записывается в виде

$$(N_1)_{\text{stoss}} = \sum_{2,3} A_{+1-2-3} \omega_1 \omega_2 \omega_3 \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \{(N_1 + 1) N_2 N_3 - N_1 (N_2 + 1) (N_3 + 1)\} + \sum_{2,3} A_{+1-2-3} \omega_1 \omega_2 \omega_3 \delta(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3) \{(N_1 + 1) N_2 (1 + N_3) - N_1 N_3 (N_2 + 1)\}. \quad (1.3)$$

Суммирование распространяется по всем возможным состояниям (включая и поляризацию) фононов 2,3. $A_{\pm 1 \pm 2 \pm 3}$ — функция углов и частот; в случае малых частот A от частоты не зависит; N_i — функция распределения фононов. А по порядку величины равна

$$(Ms^2)^2 \left(\frac{\hbar}{MN} \right)^3 \frac{N^2}{\hbar^2 s^6} = \frac{\hbar}{MN s^2}, \quad (1.4)$$

[см. 2, формула (1.5)]. Функция N определяется из кинетического уравнения

$$(\dot{N}_1)_{\text{stoss}} + \frac{e^{\hbar\omega/T} \hbar\omega_1}{(e^{\hbar\omega/T} - 1)^2 T} \lambda_{ik} \dot{u}_{ik} = 0. \quad (1.5)$$

Для решения уравнения (1.4) делаем подстановку

$$N = \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1} + \frac{\Phi}{(e^{\hbar\omega/T} - 1)(1 - e^{-\hbar\omega/T}) T},$$

которая приводит к уравнению ¹

$$\sum_{2,3} \frac{A_{+1-2-3} (\Phi_2 + \Phi_3 - \Phi_1) \omega_1 \omega_2 \omega_3 \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)}{T(e^{\hbar\omega_2/T} - 1)(e^{\hbar\omega_3/T} - 1)(1 - e^{-\hbar\omega_1/T})} = \frac{\hbar\omega_1 e^{\hbar\omega_1/T} \lambda_{ik} \dot{u}_{ik}}{(e^{\hbar\omega_1/T} - 1)^2 T}. \quad (1.6)$$

В наших условиях можно произвести разложение $e^{\hbar\omega/T}$ в ряд:

$$\sum_{2,3} \frac{T A_{+1-2-3}}{\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \omega_1 \omega_2 \omega_3 (\Phi_2 + \Phi_3 - \Phi_1) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) = \lambda_{ik} \dot{u}_{ik} / \hbar\omega_1, \\ \frac{T}{\hbar^3} \sum_{2,3} A_{+1-2-3} (\Phi_2 + \Phi_3 - \Phi_1) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) = \lambda_{ik} \dot{u}_{ik} / \hbar\omega_1. \quad (1.7)$$

Из (1.7) можно видеть, что при малых частотах функция возрастает обратно пропорционально кубу частоты. Для того чтобы доказать это, перейдем от суммы к интегралу

$$\frac{T}{\hbar^2} \int A_{+1-2-3} (\Phi_2 + \Phi_3 - \Phi_1) \delta(s_1 f_1 - s_2 f_2 - s_3 f_3) \frac{\Omega df_1}{(2\pi\hbar)^3} = \lambda_{ik} \dot{u}_{ik} / \hbar\omega_1, \quad (1.8)$$

¹ Здесь написан член, происходящий только из одной суммы (1.3). Остальные члены имеют тот же порядок величины, поэтому мы их не пишем.

где Ω — объем кристалла, s_i — скорость звука, соответствующая фонону i . Здесь при преобразовании аргумента, стоящего под знаком δ -функции, используется соотношение $\hbar\omega_i = s_i f_i$, (здесь суммирования по i нет!). Мы можем это делать, так как интересуемся длинными волнами.

Мы уже знаем, что все импульсы фононов f_1, f_2, f_3 одинакового порядка величины. Поэтому, если ввести в качестве переменных компоненты вектора f_2 , деленные на величину вектора f_1 , то уравнение (1.8) примет вид

$$\frac{T}{(2\pi)^3 \hbar^5} \int A_{+1-2-3} \{\Phi(f_1 n_2) + \Phi(f_1 n_3) - \Phi(f_1 n_1)\} \delta(s_1 n_1 - s_2 n_2 - s_3 n_3) f_1^2 \times dn_2 \Omega = \lambda_{jk} \dot{u}_{ik} / \hbar\omega_1, (n = f_2/f_1; n_3 = f_3/f_1, n_1 = 1), \quad (1.9)$$

где играют роль значения n_1, n_2, n_3 порядка единицы. Это дает возможность использовать приближенное равенство

$$\frac{\Omega T \Phi(f_1) \overline{A_{+1-2-3} f_1^2}}{(2\pi)^3 \hbar^5 s} \sim \lambda_{ik} \dot{u}_{ik} / \hbar\omega.$$

Здесь $\overline{A_{+1-2-3}}$ некоторым образом усредненное по углам значение величины A_{+1-2-3} . Окончательно для Φ [пользуясь (1.5)], получаем выражение

$$\Phi \cong \frac{\Gamma(\vartheta, \varphi) \lambda_{ik} \dot{u}_{ik} \hbar^5 s^3 N M s^2}{T(\hbar\omega)^3 \Omega \hbar} = \lambda_{ik} \dot{u}_{ik} \frac{M s^5 N \hbar^4}{T(\hbar\omega)^3 \Omega} \Gamma(\vartheta, \varphi),$$

где Γ — функция углов ϑ, φ ; по порядку величины она равна единице. Введем сюда дебаевскую температуру

$$N s^3 \hbar^3 \Omega^{-1} \sim \theta^3, \\ \Phi \sim \frac{\Gamma \lambda_{ik} \dot{u}_{ik} \hbar}{T} M s^2 \left(\frac{\theta}{\hbar\omega} \right)^3, \\ (\hbar\omega \ll \theta; T \gg \theta). \quad (1.10)$$

Такая зависимость Φ от частоты приводит к тому, что диссипативная функция $(T\dot{\sigma})$ обращается в бесконечность.

Поглощение звука мы получаем, рассматривая возрастание энтропии фононов диэлектрика при наличии звукового поля [1]. $T\dot{\sigma}$ (σ энтропия) — есть, очевидно, поглощенная в единицу времени звуковая энергия.

Энтропия фононов равна [3]

$$\sigma = \sum_{f_j} \{(N_{f_j} + 1) \ln(N_{f_j} + 1) - N_{f_j} \ln N_{f_j}\}. \quad (1.11)$$

Скорость изменения энтропии записывается следующим образом:

$$\dot{\sigma} = \sum_{f_j} \left(\ln \frac{N_{f_j} + 1}{N_{f_j}} \right) \dot{N}_{f_j}. \quad (1.12)$$

Подставляя сюда вместо \dot{N} (1.3), находим после небольших преобразований

$$\dot{\sigma} = \sum_{1, 2, 3} A_{+1-2-3} \omega_1 \omega_2 \omega_3 \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \times \quad (1.13)$$

$$\times \{(N_1 + 1) N_2 N_3 - (N_2 + 1)(N_3 + 1) N_1\} \ln \frac{(N_1 + 1) N_2 N_3}{N_1(N_2 + 1)(N_3 + 1)}.$$

Как и в (1.6), мы пишем только один из нескольких членов, одинаковых по порядку величины. В соответствии с H -теоремой $\dot{\sigma} > 0$. При подстановке в (1.13) вместо N , $N_0 + N'$ мы ограничимся членами, квадратичными в добавке к планковской функции распределения

$$\dot{\sigma} = \sum_{1, 2, 3} \frac{A_{+1-2-3} (\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3)^2 \omega_1 \omega_2 \omega_3}{(e^{\hbar\omega_1/T} - 1)(e^{\hbar\omega_2/T} - 1)(e^{\hbar\omega_3/T} - 1)(1 - e^{-\hbar\omega_1/T}) T^2} \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3). \quad (1.14)$$

В нашем случае высоких температур (1.14) переходит в следующее выражение

$$T\dot{\sigma} = \sum_{2, 3} A_{+1-2-3} (\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3)^2 T^2 \frac{\delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)}{\hbar^3}. \quad (1.15)$$

Перейдем от суммы к интегралу

$$T\dot{\sigma} = \sum_{2, 3} T^2 A_{+1-2-3} (\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3)^2 \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \frac{d\mathbf{f}_3 d\mathbf{f}_2 \Omega^2}{(2\pi\hbar)^6 \hbar^3}. \quad (1.15')$$

Подставим сюда (1.10)

$$\begin{aligned} T\dot{\sigma} \cong & (\overline{\lambda_{ik} u_{ik}})^2 \hbar^2 T^{-2} \hbar^{-3} (Ms^2)^2 \theta^6 T^2 (2\pi\hbar)^{-6} \Omega^2 \int \int d\mathbf{f}_2 d\mathbf{f}_3 \times \\ & \times \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \left\{ \frac{\Gamma_1}{(\hbar\omega_1)^3} - \frac{\Gamma_2}{(\hbar\omega_2)^3} - \frac{\Gamma_3}{(\hbar\omega_3)^3} \right\}^2. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Черта над λ_{ik} означает усреднение по углам. Мы видим, что при малых частотах интеграл расходится как $1/\omega$. Если в качестве нижнего предела интегрирования по ω_i выбрать некоторую частоту ω_0 , то выражение для $T\dot{\sigma}$ оказывается пропорциональным $1/\omega_0$.

$$T\dot{\sigma} \sim \frac{\Omega^2 (\overline{\lambda_{ik} u_{ik}})^2 \theta^6 (Ms^2)^2 \hbar^6 \bar{A}_{+1-2-3}}{\hbar^4 \omega_0 \hbar^6 s^6 \hbar^3} = \frac{(\overline{\lambda_{ik} u_{ik}})^2 \theta \Omega^2 \bar{A}(Ms^2)^2}{\hbar^7 \omega_0 s^6},$$

где \bar{A} — некоторым образом усредненное по углам значение A .

Подставляем (1.5) в (1.6)

$$T\dot{\sigma} \sim \frac{(\overline{\lambda_{ik} u_{ik}})^2 \theta^6 \Omega^2 (Ms^2)^2}{\hbar^7 \omega_0 s^6} \frac{\hbar}{MN s^2} = \frac{Ms^2}{\hbar \omega_0} \frac{\Omega}{N} \frac{\theta^6}{\hbar^5 s^6} (\overline{\lambda_{ik} u_{ik}})^2. \quad (1.17)$$

Если ограничиваться ангармоничностью, $\omega_0 = 0$, диссипативная функция обращается в бесконечность¹. Для получения конечного поглощения звука в идеальном монокристалле рассматриваемого нами типа, как и в случае теплопроводности, обратимся к рассмотрению столкновения с участием четырех фононов. При учете этих столкновений мы получаем для определения функции Φ вместо (1.4) более сложное уравнение

$$(\dot{N}_1)_{\text{stoss}}^{\text{III}} + (\dot{N}_1)_{\text{stoss}}^{\text{IV}} + \frac{\lambda_{ik} \dot{u}_{ik} e^{\hbar\omega_1/T}}{(e^{\hbar\omega_1/T} - 1)^2} \frac{\hbar\omega}{T} = 0. \quad (1.18)$$

Здесь $(\dot{N}_1)_{\text{stoss}}^{\text{III}}$ — stoss-оператор (1.3), обязанный ангармоничности, а $(\dot{N}_1)_{\text{stoss}}^{\text{IV}}$ — stoss-оператор, отвечающий за столкновение с участием четырех фононов. \dot{N}_1^{IV} имеет вид ([2], формула (2.9))

$$(\dot{N}_1)_{\text{stoss}}^{\text{IV}} = \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} & = \sum_{2, 3, 4} \frac{\hbar^2 s^4 A (O_1 O_2 O_3 O_4) \delta(\omega_2 + \omega_1 - \omega_3 - \omega_4) \{\Phi_3 + \Phi_4 - \Phi_1 - \Phi_2\}}{N^2 M^2 s_1 s_2 s_3 s_4 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 (e^{\hbar\omega_2/T} - 1)(e^{\hbar\omega_4/T} - 1)(e^{-\hbar\omega_1/T} - 1)(e^{-\hbar\omega_3/T} - 1)} + \\ & + \sum_{2, 3, 4} \frac{\hbar^2 s^4 A (O_4 O_2 O_3 O_4) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)}{s_1 s_2 s_3 s_4 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 T (e^{\hbar\omega_1/T} - 1)(e^{\hbar\omega_3/T} - 1) T} \frac{\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 - \Phi_4}{(e^{\hbar\omega_4/T} - 1)(1 - e^{-\hbar\omega_4/T})} + \\ & + \sum_{2, 3, 4} \frac{\hbar^2 s^4 A (O_4 O_3 O_2 O_1) \delta(\omega_4 - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3)}{T s_1 s_2 s_3 s_4 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 (e^{\hbar\omega_1/T} - 1)(e^{\hbar\omega_3/T} - 1)} \frac{\Phi_4 - \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3}{(e^{\hbar\omega_4/T} - 1)(1 - e^{-\hbar\omega_4/T})}, \end{aligned}$$

где O_i — телесный угол фонара i (θ_i , ϕ_i).

Вторая сумма в (1.19) мала по сравнению с остальными, если ω_1 мало. Мы ее писать не будем. Разлагаем $e^{\hbar\omega/T}$ в ряд по степеням $\hbar\omega/T$

$$\begin{aligned} (\dot{N}_1)_{\text{stoss}}^{\text{IV}} = & \sum_{2, 3, 4} \frac{s^4 T^3 A (O_1 O_2 O_3 O_4)}{N^2 M^2 (\hbar s_1 s_2 s_3 s_4)^2} \delta[\omega(\mathbf{f}_1) + \omega(\mathbf{f}_2) - \omega(\mathbf{f}_3) - \\ & - \omega(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3)] [\Phi_3 + \Phi_4 - \Phi_1 - \Phi_2] + \\ & + \sum_{2, 3, 4} \frac{s^4 T^3 A (O_4 O_3 O_2 O_1)}{N^2 M^2 (\hbar s_1 s_2 s_3 s_4)^2} \delta[\omega(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3) - \omega(\mathbf{f}_1) - \omega(\mathbf{f}_2) - \omega(\mathbf{f}_3)] \times \\ & \times [\Phi_4 - \Phi_3 - \Phi_2 - \Phi_1]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

При малых $\omega_1 (\dot{N}_1)_{\text{stoss}}^{\text{III}}$ оказывается пропорциональным ω_1^2 (1.9), в то время как $(\dot{N}_1)_{\text{stoss}}^{\text{IV}}$ стремится к конечному пределу, когда ω

¹ В кристалле конечной величины в качестве ω_0 надо было бы выбрать s/L (L — линейные размеры) или ту частоту, начиная с которой ω меньше, чем $1/\tau$ [6] (τ — время жизни фононов с $\hbar\omega \sim \theta$), если $1/\tau > s/L$. Эти величины, однако, всегда значительно меньше, чем ω_0 из (1.22).

стремится к нулю

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (\dot{N}_1)_{\text{stoss}}^{\text{IV}} = \sum_{2, 3, 4} \frac{s^4 T^3 A (O_1 O_2 O_3 O_4)}{N^2 M^2 (\hbar s_1 s_2 s_3 s_4)^2} \delta [\omega(f_2) - \omega(f_3) - \omega(f_2 - f_3)] \times \\ \times \{ \Phi_3 + \Phi_4 - \Phi_1 - \Phi_2 \} + \sum_{2, 3, 4} \frac{s^4 T^3 A (O_4 O_2 O_3 O_1)}{N^2 M^2 (\hbar s_1 s_2 s_3 s_4)^2} \delta [\omega(f_2 + f_3) - \omega(f_3) - \omega(f_2)] \{ \Phi_4 - \Phi_3 - \Phi_2 - \Phi_1 \}. \quad (1.21)$$

Частоты, при которых сравниваются оба stoss-оператора, совпадают, очевидно, с частотами, при которых сравниваются соответствующие пробеги фононов ([2], формула (2.19)). Таким образом, ниже частоты ω_0

$$\hbar \omega_0 \sim \theta \sqrt{\frac{T}{Ms^2}} \quad (1.22)$$

кинетическое уравнение (1.18) может быть заменено на более простое уравнение

$$(\dot{N}_1)_{\text{stoss}}^{\text{IV}} + \lambda_{ik} \dot{u}_{ik} T (\hbar \omega_1)^{-1} = 0. \quad (1.23)$$

Из (1.21) и (1.23) мы заключаем, что при $\omega \ll \omega_0$ функция Φ возрастает с уменьшением частоты значительно медленнее, чем при $\omega \gg \omega_0$; именно Φ в этой области обратно пропорционально ω .

$$\Phi \sim 1/\omega, \quad (\omega \ll \omega_0). \quad (1.24)$$

Из (1.15) и (1.24) можно заключить, что область частот, меньших ω_0 , не существенна для диссипативной функции, и мы можем поэтому получить правильный порядок величины диссипативной функции, если вместо ω_0 в (1.17) подставим (1.23). Таким образом, в наших условиях (как и в случае теплопроводности) главную роль в эффекте играют частоты порядка тех частот, при которых пробег, обязанный ангармоничности, сравнивается с пробегом, обязанным столкновениям с участием четырех фононов.

Получаемое таким образом выражение для диссипативной функции имеет вид

$$T \dot{\sigma} = \frac{\Omega}{N} \Omega \frac{Ms^2}{\theta} \sqrt{\frac{Ms^2}{T}} \left(\frac{\theta}{\hbar s} \right)^6 \hbar \overline{(\lambda_{ik} \dot{u}_{ik})^2}.$$

Для упрощения этого выражения используем соотношения $\theta \sim \hbar s/a$ (a — постоянная решетки), $a^3 N \sim \Omega$

$$T \dot{\sigma} \sim \frac{\Omega}{a^3} \frac{Ms^2}{\theta} \sqrt{\frac{Ms^2}{T}} \overline{(\lambda_{ik} \dot{u}_{ik})^2} \hbar.$$

Вместо $1/a^3$ мы можем ввести n — число элементарных ячеек в единице объема (оно по порядку величины, очевидно, равно числу молекул атомов в 1 см^3)

$$T \dot{\sigma} \sim \Omega n \hbar \overline{(\lambda_{ik} \dot{u}_{ik})^2} \frac{Ms^2}{\theta} \sqrt{\frac{Ms^2}{T}}. \quad (1.25)$$

В отличие от результата, полученного в [1], в нашем случае поглощение звука при $T \gg \theta$ оказывается обратно пропорциональным корню из температуры. Следует также отметить, что в нашем случае величина поглощения оказывается в $\sqrt{\frac{Ms^2}{T}}$ раз больше, чем в случае, рассмотренном в [1]. Именно $T \dot{\sigma}$, согласно [1], при $T \gg \theta$ равна ([1], формула (1.6))

$$\frac{Ms^2}{\theta} \overline{(\lambda_{ik} \dot{u}_{ik})^2} \hbar n \Omega. \quad (1.26)$$

Так как теплопроводность κ рассматриваемого нами класса диэлектриков также в $\sqrt{Ms^2/T}$ раз больше величины κ , получаемой в том случае, когда условие (1) тождественно выполняется, отношение затухания звука, обязанного теплопроводности, к рассмотренному нами затуханию оказывается таким же, как и соответствующее отношение в [1].

Согласно [1], оба затухания при $T \gg \theta$ по порядку величины одинаковы. Следовательно, то же самое будет иметь место и в нашем случае.

2. Температуры, малые по сравнению с дебаевской

В рассматриваемых теперь кристаллах необходимо учитывать вероятность столкновения с участием четырех фононов и вероятность столкновения с участием трех фононов, причем все три фона имеют одинаковый порядок величины.

Из (1.9) следует, что последняя вероятность пропорциональна T

$$\frac{T^2 f^2 \Omega}{\hbar^5 (2\pi)^3} \int A_{+1-2-3} \{ \Phi(f, n_2) + \Phi(f, n_3) - \Phi(f, n_1) \} \times \\ \times \delta(s_1 - s_2 n_2 - s_3 n_3) d\mathbf{n}_2.$$

Разделив этот stoss-оператор на $\Phi T / (\hbar \omega_1)^2$, получаем интересующую вероятность, используя (1.4)

$$\omega \left(\frac{\hbar \omega}{\theta} \right)^3 \frac{T}{Ms^2}. \quad (2.1)$$

Отметим, что (2.1) имеет тот же вид, что и при высоких температурах ([2], формула (1.10)).

Этот результат естествен, так как мы рассматриваем частоты, у которых $\hbar \omega \ll T$.

Определим теперь вероятность столкновений с участием четырех фононов при $T \ll \theta$ в том случае, когда частота одного из фо-

ионов стремится к нулю. Для этого произведем в stoss-операторе (1.19) разложение в ряд по степеням $\hbar\omega_1/T$:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} (\dot{N}_{\omega_1})_{\text{stoss}}^{\text{IV}} &= \\ &= \sum_{2, 3, 4} \frac{\hbar^2 s^4 A (O_1 O_2 O_3 O_4) \delta [\omega(f_2) - \omega(f_3) - \omega(f_2 - f_3)]}{N^2 M^2 s_1 s_2 s_3 s_4 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \hbar \omega_1 (e^{h\omega_3/T} - 1) (e^{h\omega_4/T} - 1) (1 - e^{-h\omega_2/T})} \times \\ &\times (\Phi_3 + \Phi_4 - \Phi_1 - \Phi_2) + \\ &+ \sum_{2, 3, 4} \frac{\hbar^2 s^4 A (O_4 O_2 O_3 O_1) \delta [\omega(f_2) - \omega(f_3) - \omega(f_2 - f_3)]}{N^2 M^2 s_1 s_2 s_3 s_4 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \hbar \omega_1 (e^{h\omega_2/T} - 1) (e^{h\omega_3/T} - 1) (1 - e^{-h\omega_4/T})} \times \\ &\times (\Phi_4 - \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3) = \\ &= \sum_{2, 3, 4} \frac{\hbar s^4 A \delta [\omega(f_2) - \omega(f_3) - \omega(f_3 - f_3)] (\Phi_3 + \Phi_4 - \Phi_1 - \Phi_2)}{N^2 M^2 s_1^2 s_2 s_3 s_4 (e^{h\omega_1/T} - 1) (e^{h\omega_3/T} - 1) (1 - e^{-h\omega_2/T}) \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} + \\ &+ \sum_{2, 3, 4} \frac{\hbar s^4 A (\Phi_4 - \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3)}{N^2 M^2 s_1^2 s_2 s_3 s_4 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \delta [\omega(f_2) + \omega(f_3) - \omega(f_2 + f_3)] \times \\ &\times \frac{1}{(e^{h\omega_2/T} - 1) (e^{h\omega_3/T} - 1) (1 - e^{-h\omega_4/T})}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Мы здесь не писали второй суммы, входящей в (1.19), так как она обращается в нуль вместе с ω_1 .

Перейдем от суммы к интегралу

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} (\dot{N}_{\omega_1})_{\text{stoss}}^{\text{IV}} &= \\ &= \iint \frac{\hbar df_2 df_3 A (O_1 O_2 O_3 O_4) \delta [\omega(f_2) + \omega(f_3) - \omega(f_2 + f_3)] (\Phi_4 + \Phi_3 - \Phi_1 - \Phi_2) \Omega^2}{N^2 M^2 s_1^2 s_2 s_3 s_4 \lambda_2 \lambda_3 (e^{h\omega_3/T} - 1) (e^{(h\omega_2 - h\omega_3)/T} - 1) (1 - e^{-h\omega_2/T}) \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 (2\pi\hbar)^6} + \\ &+ \iint \frac{\hbar df_2 df_3 A (O_4 O_3 O_1 O_2) \delta [\omega(f_2) + \omega(f_3) - \omega(f_2 + f_3)] (\Phi_4 - \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3) \Omega^2}{N^2 M^2 s_1^2 s_2 s_3 s_4 \lambda_4 \lambda_2 \lambda_3 (e^{h\omega_2/T} - 1) (e^{h\omega_3/T} - 1) (1 - e^{-h(\omega_2 + \omega_3)/T}) (2\pi\hbar)^6}. \end{aligned}$$

Вводим безразмерные переменные:

$$\frac{h\omega_2}{T} = \eta_2, \quad \frac{h\omega_1}{T} = \eta_3,$$

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} (\dot{N}_{\omega_1})_{\text{stoss}}^{\text{IV}} &= \\ &= \frac{\hbar \Omega^2}{(2\pi\hbar)^6 N^2 M^2 s_1^2 s_2 s_3 s_4} \times \iint \frac{\eta_2^2 d\eta_2 \eta_3^2 d\eta_3 dO_2 dO_3 T^6 (\Phi_4 + \Phi_3 - \Phi_1 - \Phi_2)}{(e^{\eta_3} - 1) (e^{\eta_2 - \eta_3} - 1) (1 - e^{-\eta_2})} \times \\ &\times \frac{T^3 \eta_2 (\eta_2 - \eta_3) \hbar}{\hbar^3 s_2 s_3 s_4 T} \delta \left[\frac{\hbar\omega_2}{T} - \frac{\hbar\omega_3}{T} - \frac{\hbar\omega_4}{T} \right] - \\ &- \frac{\hbar \Omega^2}{(2\pi\hbar)^6 N^2 M^2 s_1^2 s_2^2 s_3^2 s_4^2} \iint \frac{\eta_2^2 d\eta_2 \eta_3^2 d\eta_3 dO_2 dO_1 T^6 T^3}{(e^{\eta_2} - 1) (e^{\eta_3} - 1) (1 - e^{-\eta_2 - \eta_3})} \times \\ &\times \frac{\eta_2 \eta_3 (\eta_2 + \eta_3) \hbar}{\hbar^3 T} (\Phi_4 - \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3) \delta \left[\frac{\hbar\omega}{T} - \frac{\hbar\omega_3}{T} - \frac{\hbar\omega_4}{T} \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

где dO_2, dO_3 — элементы телесных углов второго и третьего фононов. Так как пределы интегрирования по η можно распространить до бесконечности, то (2.3) оказывается пропорциональным T^8 ; деля полученное выражение на

$$\frac{\Phi_1 T}{(e^{h\omega_1/T} - 1)^2 T} = \frac{\Phi_1 T}{(\hbar\omega_1)^2},$$

находим искомую вероятность

$$W^{\text{IV}} \sim \left(\frac{T}{\theta} \right)^6 \frac{T \hbar \omega^2}{(Ms^2)^2} \quad (T \ll \theta). \quad (2.4)$$

Выражения (2.1) и (2.4) равны друг другу при $\omega = \omega^0$, где

$$\hbar \omega^0 \sim \frac{T^3}{\theta \sqrt{\theta M s^2}}. \quad (2.5)$$

В соответствии с § 1 очевидно, что главную роль в поглощении звука будут играть частоты (2.3). Выражение для диссипативной функции мы получим, подставив (2.5) в (1.17),

$$T \dot{\sigma} \sim \frac{Ms^2}{T} \left(\frac{\theta}{T} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{Ms^2}{T}} \frac{(\lambda_{ik} \dot{u}_{ik})^2}{(\lambda_{ik} \dot{u}_{ik})^2} \hbar n \Omega, \quad (T \ll \theta). \quad (2.6)$$

Поглощение звука идет обратно пропорционально T^3 , т. е. возрастает быстрее с понижением температуры, чем в случае, разобранном ранее [4].

3. Проверка критерия применимости понятия фононов для малых частот

Для использования понятия фонона в применении к длинным волнам необходимо, чтобы самые маленькие частоты, фигурирующие у нас, удовлетворяли условию [4] $\hbar\omega > \hbar/\tau$, где τ — время жизни тех фононов, с которыми взаимодействуют фононы ω . При низких температурах ($T \ll \theta$) наименьшие частоты имеют величину (2.5)

$$\hbar \omega \sim T \frac{T^2}{\theta \sqrt{\theta M s}}.$$

Время τ оказывается равным (2.1)

$$\tau \sim \frac{Ms^2}{T} \left(\frac{\theta}{T} \right)^3 \frac{\hbar}{T}.$$

Требуемый критерий хорошо выполняется

$$\omega\tau \sim \frac{\theta \sqrt{\theta M s^2}}{T^2} \gg 1.$$

О ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДИЭЛЕКТРИКОВ *

Когда температуры велики по сравнению с дебаевской, существенны частоты $\frac{\theta}{\hbar} \sqrt{\frac{T}{Ms^2}}$. Величина \hbar/τ равна $\theta T (Ms^2)^{-1}$. Отсюда следует, что $\omega \sim \sqrt{\frac{Ms^2}{T}}$.

Это значительно больше единицы при комнатных температурах.

В заключение выражаю искреннюю благодарность проф. Л. Ландау за интересные дискуссии и ценные указания. Благодарю также Ф. С. Юткевича за указания при просмотре рукописи.

Физический институт
Академии наук СССР

Получено 7 декабря 1940 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Ахизер. ЖЭТФ, 1938, 8, 1318.
2. И. Померанчук. ЖЭТФ, 1941, 11, 246 (Собр. трудов, № 8).
3. W. Pauli. Probleme der modernen Physik, 1928, стр. 31.
4. L. Landau, S. Rumer. Phys. Zs. Sowjet., 1937, 11, 18.

Как хорошо известно, Пайерлс и Дебай написали, что если $T \gg \theta$ (T — температура, θ — температура Дебая), то теплопроводность диэлектриков изменяется обратно пропорционально температуре. Однако это оказывается справедливым только для диэлектриков, для которых выполняется определенный закон дисперсии скорости звука и определенный закон зависимости скорости звука от направления. Для всех других диэлектриков при $T \gg \theta$ изменяется обратно пропорционально $T^{3/2}$. Это следует из рассмотрения длины свободного пробега продольных упругих волн.

Пайерлс [1] и Дебай [2] нашли зависимость теплопроводности диэлектриков от температуры T для случаев, когда T — много больше температуры Дебая θ . Для выяснения этого вопроса рассмотрим ситуацию, которая имеет место в теле, характеризующемся отсутствием дисперсии звука и изотропной скоростью звука.

Как известно [3], коэффициент поглощения поперечного звука (т. е. поперечных фонон) пропорционален ω , где ω — циркулярная частота. Легко видеть, что при $T \gg \theta$ длина свободного пробега фонона имеет вид

$$l \approx \alpha (Ms^2/kT) (k\theta/\hbar\omega), \quad (T \gg \theta). \quad (1)$$

Здесь M — масса элементарной ячейки, k — постоянная Больцмана, s — скорость звука, α — постоянная решетки. Коэффициент поглощения продольного звука зависит от возможности поглощения длинноволнового продольного фонона коротковолновыми фононами. Из законов сохранения следует, что

$$\mathbf{f} + \mathbf{F} = \mathbf{F}', \quad \omega(\mathbf{f}) + \omega(\mathbf{F}) = \omega(\mathbf{f} + \mathbf{F}). \quad (2)$$

Здесь \mathbf{f} — волновой вектор длинноволнового продольного фонона, \mathbf{F} — волновой вектор дебаевского коротковолнового фонона. Получаем

$$\omega(\mathbf{f}) = \mathbf{f} \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{F}}, \quad s_{\text{long}} f = \mathbf{f} \mathbf{V}_F, \quad (3)$$

* Phys. Rev., 1941, 60, 820. Перевод М. С. Маринова

зде s_{long} — скорость продольного звука, V_F — групповая скорость дебаевского фона.

Если для рассматриваемого тела $s_{\text{long}} \geq V_F$, то процесс (2) невозможен. Для тел, обладающих таким законом дисперсии и анизотропной скоростью звука, поглощение длинноволнового продольного фона возможна, только если он расщепляется на пару поперечных фонон или на один продольный и один поперечный фонон. Коеффициент поглощения оказывается пропорциональным ω^4 (в отличие от ω^5 , как было получено Слонимским [4]). Порядок величины длины свободного пробега l^{III} можно оценить по следующей формуле

$$l^{\text{III}} \approx \alpha (Ms^2/kT) (k\theta/\hbar\omega)^4. \quad (4)$$

Следует также учесть поглощение продольных фонон в столкновениях с участием четырех фонон. Соответствующая длина свободного пробега имеет вид

$$l^{\text{IV}} \approx \alpha (Ms^2/kT)^2 (k\theta/\hbar\omega)^2. \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) дают одинаковые значения при частоте ω_0 , при которой

$$\hbar\omega_0 = k\theta (kT/Ms^2)^{1/2}, \quad (T \gg \theta). \quad (6)$$

Очевидно, что в этих условиях тепловая энергия передается малыми продольными фононами, так как они имеют очень большие длины свободного пробега.

Теплопроводность κ равна

$$\kappa \approx \int c_\omega l_\omega V_F \frac{\omega^2 d\omega dO}{(2\pi s)^3}, \quad dO = \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (7)$$

Здесь c_ω — теплоемкость данного фона. Так как существенны только низкие частоты, то можно положить c_ω равным k . Подставляя формулу (4) в (7) и интегрируя до ω_0 (этот предел находится из формулы (6)), получаем

$$\begin{aligned} \kappa &= \alpha ks \frac{Ms^2}{kT} \left(\frac{k\theta}{\hbar s} \right)^3 \frac{k\theta}{\hbar\omega_0} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} = \alpha ks \left(\frac{Ms^2}{kT} \right)^{1/2} \left(\frac{k\theta}{\hbar s} \right)^3 \frac{1}{2\pi^2} = \\ &= \alpha ks \left(\frac{Ms^2}{kT} \right)^{1/2} \frac{1}{2\pi^2 \alpha^3} \left(\frac{k\theta \alpha}{\hbar s} \right)^3. \end{aligned}$$

Обозначим α^{-3} через n , величина того же порядка, что число атомов (или молекул) в кубическом сантиметре, и используем соотношение

$$k\theta \sim (\hbar s/\alpha) (2\pi^2)^{1/2}.$$

Тогда

$$\kappa \sim nks \alpha (Ms^2/kT)^{1/2}, \quad (T \gg \theta).$$

Таким образом, для тел, для которых $s_{\text{max}} \geq V_F$, где s_{max} — максимальная скорость колебаний, теплопроводность при высоких температурах ведет себя как $T^{-1/2}$, в отличие от результатов Пайерлса [1] и Дебая [2].

Если $s_{\text{max}} < V_F$, то разница в поглощении «продольного» и «поперечного» звука исчезает, и результат Пайерлса и Дебая остается справедливым.

При низких температурах ($T \ll \theta$), согласно детальным вычислениям, только примеси, отражения от границ для маленьких кристаллов и тройные столкновения фононов существенны для определения κ . В отличие от случая, рассмотренного Пайерлсом [5], здесь конечное значение теплопроводности не может быть получено, если рассматривать только рассеяния фонона на атомах примеси и тройные столкновения фононов, так как для обоих эффектов длина свободного пробега меняется как ω^4 . Конечную величину теплопроводности можно получить, если учитывать отражение от границ для малых кристаллов. В результате κ оказывается обратно пропорциональной $L^{1/4}$, где L — линейный размер кристалла. Поэтому при низких температурах теплопроводность, как найдено в эксперименте, зависит (хотя и не сильно) от формы кристалла. Это справедливо, даже если длина свободного пробега фонона с частотой порядка kT/\hbar много меньше размеров кристалла. Если температура падает и становится меньше температуры Дебая, теплопроводность сначала растет пропорционально $T^{3/4}$, но в конце концов перестает зависеть от температуры при низких температурах, когда волны с частотой $\omega = kT/\hbar$ имеют длину свободного пробега того же порядка, что и размеры кристалла. Дальнейшее уменьшение температуры приводит, как известно, к изменению κ пропорционально T^3 [6, 7].

Температурный интервал, в котором κ совсем не меняется, особенно велик для алмаза из-за высокого значения его температуры Дебая. Этот результат объясняет экспериментальные данные о теплопроводности алмаза [8, 9], согласно которым κ не обнаруживает заметной зависимости от температуры в интервале¹ от 24° до 34°.

Физический институт
Академии наук СССР

Получено 25 сентября 1941 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Peierls. Ann. d. Phys., 1929, 3, 1055.
2. P. Debye. Vorträge über die Kinetische Theorie, s. 43 (Teubner, 1914).
3. L. Landau, G. Rumer. Phys. Zs. Sowjet., 1937, 11, 18.
4. Я. Слонимский. ЖЭТФ, 1937, 7, 1457.
5. R. Peierls. Ann. d. Phys., 1929, 3, 1097.
6. W. J. de Haas, T. Biermasz. Physica, 1938, 5, 619.
7. H. G. B. Casimir. Physica, 1938, 5, 495.
8. Eucken. Phys. Zeits., 1941, 12, 1055.
9. W. J. de Haas, T. Biermasz. Physica, 1938, 5, 47.

¹ Детальные расчеты были опубликованы в Journal of Physics USSR, 1941, 4, 259 (Собр. трудов, № 8). Там же опубликованы расчеты, относящиеся к области низких энергий.

О ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДИЭЛЕКТРИКОВ ПРИ ТЕМПЕРАТУРАХ, МЕНЬШИХ ДЕБАЕВСКОЙ *

Рассматривается зависимость теплопроводности диэлектриков от температуры и концентрации примесей при низких температурах. Диэлектрики при этих условиях обладают истинной, не зависящей от размеров тела теплопроводностью только в узкой области сверхмалых концентраций примесей. При больших концентрациях примесей теплопроводность оказывается про-

⁴порциональной \sqrt{L} (L — линейные размеры кристалла). Установлено существование области температур, в пределах которой теплопроводность не зависит от температуры. Это объясняет аномальное поведение теплопроводности алмаза.

Введение

Теория теплопроводности диэлектриков при низких температурах рассматривалась Дебаем [1], Пайерлсом [2] и Казимиром [3]. При этом рассмотрении не учитывалось, что, как правило, кубическая ангармоничность недостаточна для установления конечной теплопроводности диэлектриков [4, 5]. Только в диэлектриках с некоторым вполне определенным законом дисперсии звука кубическая ангармоничность обеспечивает конечную теплопроводность. У всех прочих диэлектриков при $T \gg \theta$ (T — температура, θ — дебаевская температура) необходимо привлекать в рассмотрение ангармоничность следующего порядка (4-го порядка) для того, чтобы получить правильное выражение для теплопроводности κ . Такая ситуация имеет место благодаря мощному возрастанию свободного пробега длинных упругих волн при уменьшении их частоты. Благодаря этому интеграл, определяющий κ

$$\kappa \approx \int l_\omega c_\omega V_\omega \frac{\omega^2 d\omega dO}{s_\omega^2 V_\omega (2\pi)^3}, \quad (1)$$

расходится при малых частотах, если для l_ω подставить выражение (1.6), следующее из рассмотрения одной кубической ангармоничности. Здесь ω — круговая частота, l_ω — свободный пробег, c_ω — теплоемкость колебания, V_ω — групповая скорость, s_ω — фазовая скорость, dO — элемент телесного угла.

* ЖЭТФ, 1942, 12, 245; J. Phys. USSR, 1942, 6, 237.

Если при высоких температурах κ определяется ангармоничностью 3-го и 4-го порядков, то при низких температурах из-за малой вероятности процессов переброса [2] становится существенным рассеяние упругих волн примесями¹. Как указал Пайерлс, примеси сами по себе не могут дать конечную теплопроводность, так как обязанный им пробег фононов обратно пропорционален ω^4 , т. е. имеет ту же зависимость от частоты, что и (1.6). Пайерлс получил конечную теплопроводность, комбинируя действие примесей и кубической ангармоничности. Однако этот результат Пайерлса будет иметь место только для избранных диэлектриков, для которых (при $T \gg \theta$) κ определяется кубической ангармоничностью [4]). Для всех прочих диэлектриков совместное действие примесей и кубической ангармоничности недостаточно для получения конечного значения κ . Очевидно, что при малых частотах становятся существенными добавочные источники поглощения и рассеяния тех упругих волн, которым отвечает наибольшая скорость звука [4]². Такими источниками при низких температурах могут быть следующие:

- 1) ангармоничность 4-го порядка (столкновения с участием 4 фононов);
- 2) неупругое рассеяние на примесях;
- 3) отражение от стенок кристалла;
- 4) рассеяние, связанное с двойниками и упругими напряжениями решетки.

Как будет показано далее, эффекты 1) и 2) имеют очень малую вероятность и, как правило, не могут играть существенной роли. Роль эффектов, перечисленных в 4), с трудом может быть оценена. Сначала мы рассмотрим теплопроводность кристаллов без двойников и упругих напряжений, а затем (§ 4) произведем анализ положения в кристаллах с двойниками и упругими напряжениями.

Полученные нами результаты, в частности, объясняют независимость теплопроводности алмаза от температуры — факт, который находится в противоречии с теорией Пайерлса — Дебая.

Из рассмотрения теплопроводности диэлектриков следует, что при $T \gg \theta$ теплопроводность диэлектриков не является истинной

¹ Здесь и в дальнейшем под примесями мы будем понимать не только химические примеси, но и всякие микроскопические отклонения решетки от идеальной структуры, например, отсутствие в каком-либо месте атома и т. д. Под концентрацией примесей ϵ мы будем принимать отношение числа узлов, испорченных или занятых химическими примесями, к полному числу узлов. Заметим, что если элементы, входящие в состав решетки, имеют несколько изотопов, то упругие волны будут испытывать рассеяние, вызываемое не одинаковостью масс изотопов. Легко показать, что такое рассеяние пропорционально квадрату разности масс изотопов. Соответственно наличие изотопов приводит к некоторому вкладу в ϵ . В кристаллах с изотопами мы имеем, таким образом, некоторый естественный нижний предел для концентрации физических и химических примесей ϵ .

² Напомним здесь, что пробег из-за кубической ангармоничности пропорционален $1/\omega^4$ только у длинных волн такой поляризации, которой отвечает максимальная скорость звука в данном направлении.

теплопроводностью, а слабо зависит от размеров кристалла¹ ($\kappa \sim \sqrt[4]{L}$, L — линейные размеры). Эта зависимость κ от L имеет место при температурах, значительно больших, чем те, при которых $\kappa \sim LT^3$ (Казимир) [3]. Даже тогда, когда пробег волн с частотами порядка T/h значительно меньше L , κ зависит от размеров тела ($\kappa \sim \sqrt[4]{L}$).

Заметим, что при $T \approx \theta$ теплопроводность хороших кристаллов диэлектриков и теплопроводность металлов должны быть одинакового порядка величины (см. конец § 3). Экспериментальные данные согласуются с этим выводом теории (см. § 3).

В дальнейшем мы рассмотрим зависимость теплопроводности от концентрации примесей и от температуры для основной массы диэлектриков, для которых при $T > \theta$ существенны столкновения с участием четырех фононов [4, 5].

§ 1. Пробег длинных упругих волн при низких температурах

Для определения пробега упругих волн необходимо знать вероятности рассеяния этих волн примесями (упругого и неупругого) и вероятности столкновений с участием трех и четырех фононов из-за ангармоничности. Мы ограничиваемся при этом кристаллами без двойников и внутренних напряжений.

Вероятность упругого рассеяния примесями пропорциональна ω^4 , если длина волны значительно больше, чем размеры рассеивающего центра. Учитывая, что при концентрации атомов примеси порядка единицы пробег волн, имеющих длину порядка постоянной решетки, также должен быть порядка постоянной решетки, получаем без труда выражение:

$$l_{el} \approx a \left(\frac{\lambda}{a} \right)^4 \frac{1}{\varepsilon} = a \left(\frac{\lambda}{hs} \frac{hs}{a} \right)^4 \frac{1}{\varepsilon} \approx a \left(\frac{\theta}{\hbar\omega} \right)^4 \frac{1}{\varepsilon}, \quad (1.1)$$

где l_{el} — пробег, обвязанный упругому рассеянию примесями, a — постоянная решетки, λ — длина волны, ε — относительная концентрация атомов примеси. Все температуры измеряются в энергетических единицах. Как будет показано в дальнейшем (3.2), в (1.1) должен стоять малый коэффициент порядка 10^{-2} , если под ε понимать концентрацию химических примесей в кристаллах типа, употреблявшегося Де Хаасом и Бирмасом:

Поэтому более точным является выражение

$$l_{el} = \frac{a}{100\varepsilon} \left(\frac{\theta}{\hbar\omega} \right)^4. \quad (1.1')$$

Исключая случай сверхмалого содержания физических и химических примесей [см. (2.6) и (2.7)].

При малых частотах вероятность упругого рассеяния становится очень малой. Более вероятным процессом может (в принципе) стать неупругое рассеяние примесями. Переходим к рассмотрению этого процесса. Неупругое рассеяние фонона на примеси можно представить как столкновение трех фононов, происходящее в месте, где находится примесь. Очевидно, что при таком столкновении закон сохранения импульса фононов не будет иметь места (изменение импульса принимает на себя атом или молекула примеси). Взаимодействие между фононами и примесью нельзя рассматривать как малое возмущение и поэтому нельзя описывать это взаимодействие методами теории возмущений. Правильную картину явления мы получим, представляя себе неупругое рассеяние на примеси как столкновение трех фононов в месте, где показатель преломления испытывает хаотическое изменение. Это хаотическое изменение локализовано в области порядка размеров примеси, т. е. порядка атомных (молекулярных) размеров². В качестве энергии возмущения можно, очевидно, взять теперь энергию взаимодействия фононов в области, занятой атомом примеси. Матричный элемент этой энергии, соответствующий столкновению фонона 1 с фононом 2 и образованию фонона 3, по порядку величины записывается следующим образом:

$$V_3 \frac{\hbar^{3/2} \sqrt{n_1 n_2 (n_3 + 1)}}{2^{3/2} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (M^3 N^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3)^{1/2}}, \quad (1.2)$$

где n — функция распределения фононов, λ — длина волны деленная на 2π . Множители $1/\lambda$ соответствуют тому, что существенным является относительное смещение соседних узлов решетки. V_3 — энергия порядка атомных энергий, M — масса элементарной ячейки, N — число элементарных ячеек в кристалле. Возводя (1.2) в квадрат обычным путем, находим вероятность столкновения²

$$\int \varepsilon N \frac{\hbar |V_3|^2 [n_1 n_2 (n_3 + 1) - n_3 (n_1 + 1) (n_2 + 1)] \Omega^3 \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)}{8N^3 M^3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 s^3 (2\pi)^6 s^3} \times \omega_2^2 \omega_2^2 dO_2 dO_3 d\omega_2 d\omega_3, \quad (1.3)$$

где δ — дираковская δ -функция, Ω — объем кристалла, dO_i — элемент телесного угла в импульсном пространстве фонона i , s — скорость звука. Нас интересует случай, когда одна из частот (ω_1) очень мала. При этом под знаком δ -функции можно ω_1 не

¹ Или размеров порядка постоянной решетки.

² Так как мы интересуемся только порядком величины, то мы здесь рассматриваем один из нескольких возможных типов столкновений. Остальные имеют тот же порядок величины. Аналогичное обстоятельство имеет место и для (1.8).

писать. Выражение, стоящее в квадратных скобках, преобразовываем с помощью подстановки:

$$n = \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1} + \frac{e^{\hbar\omega/T}\varphi}{(e^{\hbar\omega/T} - 1)^2 T}.$$

Это дает¹

$$\begin{aligned} n_1 n_2 (n_3 + 1) - n_3 (n_1 + 1)(n_2 + 1) &= \\ &= \frac{\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3}{T(e^{\hbar\omega_1/T} - 1)(e^{\hbar\omega_2/T} - 1)(1 - e^{-\hbar\omega_3/T})}. \end{aligned}$$

Интеграл (1.3) записывается теперь следующим образом:

$$\frac{\varepsilon\Omega^2}{N^2 M^3 s^{10}} \int \frac{|V_3|^2 \omega_2^2 \omega_3^2 d\omega_3 dO_3 \delta(\omega_2 - \omega_3)}{(e^{\hbar\omega_2/T} - 1)(1 - e^{-\hbar\omega_3/T}) \lambda_2^2 256\pi^5} (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3).$$

Вероятность, отнесенную к одному фонону, получаем отсюда делением² на $\varphi_1 T / (\hbar\omega_1)^2$

$$\frac{\varepsilon\Omega^2 |V_3|^2 T^6 (\hbar\omega_1)^2}{N^2 M^3 s^{12} \hbar^7 16\pi^3} 6! \quad (1.4)$$

Для упрощения (1.4) используем соотношения

$$\frac{\Omega}{6\pi^2 N s^3 \hbar^3} = \frac{1}{\theta^3}; \quad V_3 \sim Ms^2 \sim 1eV.$$

(справедливость второго соотношения легко проверить путем подстановки чисел:

$$M \sim 4 \cdot 10^{-23} g, s \sim 2 \cdot 10^6 \frac{cm}{sek}.$$

Вместо (1.4) мы имеем

$$6! \frac{9\pi e (\hbar\omega_1)^2 T^6}{4Ms^2 \theta^6 \hbar} = 1620\pi e \omega_1 \frac{\hbar\omega_1}{Ms^2} \left(\frac{T}{\theta}\right)^6.$$

соответствующий пробег l_{in} оказывается равным

$$l_{in} = \frac{s}{\omega_1} \frac{Ms^2}{\hbar\omega_1} \frac{\theta^6}{1620\pi e T^6} = a \frac{Ms^2 \theta^7 T^{-6}}{1620\pi (6\pi^2)^{1/3} e (\hbar\omega_1)^2}. \quad (1.5)$$

Как и следовало ожидать, $l_{el} \ll l_{in}$ при $\hbar\omega \sim T$

$$\left(\frac{l_{el}}{l_{in}}\right)_{\hbar\omega=T} = \frac{T^4}{Ms^2 \theta^3} \ll 1.$$

Но при очень малых частотах ω_i , равных

$$\hbar\omega_i = \sqrt{16\pi (6\pi^2)^{1/3}} \frac{T^3}{\theta \sqrt{\theta M s^2}},$$

¹ $\varphi_1 = \varphi(\omega_1, O_1)$ и т. п.

² $\varphi_1 > \varphi_2, \varphi_3$, так как пробег l растет при уменьшении частоты ($\varphi \sim l$).

оба пробега сравниваются. Частота $\omega_i < \frac{T}{18}$ при $T < \frac{\theta}{5}$ ($\theta \sim \frac{1}{100} Ms^2$). Очевидно, что неупругое рассеяние примесями является существенным только для частот меньших, чем ω_i или порядка ω_i . Из выражения (1.5) можно сразу заключить, что неупругое рассеяние примесями не может играть существенной роли. В самом деле, при $\varepsilon \sim 10^{-3}$ (одна десятая процента примесей) и

$$T = \frac{\theta}{s} = \frac{Ms^2}{500},$$

мы получаем для $\omega = \omega_i$ пробег l_{in} порядка 10 см. Даже учитывая, что точность наших подсчетов невелика, можно исключить из рассмотрения неупругое рассеяние примесями, так как этот эффект дает пробег больший, чем размеры кристаллов, обычно употребляющихся экспериментаторами¹.

Как уже указывалось, наличие изотопов приводит к рассеянию упругих волн. Легко видеть, что энергией возмущения будет разность между кинетической энергией, отнесенной к средней по изотопам массе, и истинной массой изотопа. Отсюда мы получаем вероятность рассеяния, пропорциональную квадрату разности масс изотопов.

Пробег, обязанный изотопам, записывается так:

$$\frac{\theta^4 a M^2}{\hbar^4 \omega^4 \left[\sum C_i M_i^2 - (\sum C_i M_i)^2 \right]},$$

где M — масса элементарной ячейки, C_i — концентрация изотопа i (см. по этому поводу [17], формула (3.17)], M_i — масса изотопа i . Для каменной соли мы получаем большой пробег, не имеющий значения.

Перейдем теперь к рассмотрению вероятности столкновения с участием трех и четырех фононов (ангармоничность). Как было показано в [4], длинные волны, отвечающие наибольшей скорости звука в данном направлении, не могут поглощаться короткими волнами. Такая возможность появляется только в телах со специальным законом дисперсии звука. Оставляя в стороне такие избранные кристаллы, мы должны для получения пробега фонона, обязанного кубической ангармоничности, рассмотреть вероятность столкновения с участием трех фононов, при котором все фононы имеют малую частоту одинакового порядка величины $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \omega_3 \ll T/\hbar$. Очевидно, что для рассматриваемых нами частот температура всегда является «высокой». Поэтому интересующий нас пробег при $T \ll \theta$ и при $T \gg \theta$ имеет одинаковый вид

¹ Отметим, что при $T = \theta/5$ наша асимптотическая формула, годная при $T \ll \theta$, имеет смысл только по порядку величины. Нас он только и интересует.

и записывается следующим образом (см. [4]; формула (1.11); [5], формула (4); см. также [8], формула (2.1))

$$l_{\text{long}}^{\text{III}} \approx \frac{a}{100} \frac{Ms^2}{T} \left(\frac{\theta}{\hbar\omega} \right)^4, \quad (1.6)$$

в дальнейшем (§ 3) мы увидим, что в этом выражении стоит коэффициент порядка 10^{-2} (3.3):

$$l_{\text{long}}^{\text{III}} = \frac{a}{100} \frac{Ms^2}{T} \left(\frac{\theta}{\hbar\omega} \right)^4. \quad (1.6')$$

Отметим, что этот и другие пробеги, определяющиеся ангармоничностью (1.7), (1.8), соответствуют столкновениям, при которых сохраняется квазимпульс фононов. Несохранение квазимпульса обеспечивается примесями, столкновениями со стенками кристалла и тому подобными процессами.

Пробег (1.6') относится к колебаниям определенной поляризации той, которая имеет наибольшую скорость распространения (в изотропном теле без дисперсии этим колебаниям соответствуют продольные колебания). Остальные типы колебания могут иметь пробег значительно меньший (они могут поглощаться короткими волнами). Согласно Ландау и Румеру [6], такие колебания (например, поперечные колебания в изотропном теле) обладают пробегом, равным:

$$l_{tr}^{\text{III}} \approx \frac{a}{100} \frac{Ms^2}{T} \left(\frac{\theta}{T} \right)^3 \frac{\theta}{\hbar\omega}, \quad (\hbar\omega \ll T \ll \theta). \quad (1.7)$$

Обратимся теперь к вероятности столкновения четырех фононов при низких температурах. Согласно [4], формула (2.9)¹, интересующая нас вероятность записывается следующим образом ($\omega_1 \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} & \int \frac{\Omega^2 |v|^2 \hbar^2 [n_1 n_2 (n_3 + 1) (n_4 + 1) - (n_1 + 1) (n_2 + 1) n_3 n_4]}{16 N^2 M^4 s^4 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 s^6 (2\pi)^5} \times \\ & \times \delta [\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4] \omega_2^2 d\omega_2 \omega_3^2 dO_2 dO_3 = \\ & = \frac{1}{16} \int \frac{|v|^2 \hbar^2 (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) \delta [\omega_2 - \omega_3 - \omega_4] \omega_2^2 d\omega_2 \omega_3^2 d\omega_3 dO_2 dO_3 \Omega^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}{T (e^{\hbar\omega_1/T} - 1) (e^{\hbar\omega_2/T} - 1) N^2 M^4 s^{10} (1 - e^{-\hbar\omega_3/T}) (1 - e^{-\hbar\omega_4/T}) (2\pi)^5} \approx \\ & \approx \int \frac{|v|^2 \hbar \varphi_1 \Omega^2 \omega_2^2 d\omega_2 \omega_3^2 d\omega_3 dO_2 dO_3 \delta [\omega_2 - \omega_3 - \omega_4]}{2^9 N^2 M^4 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 2^5 \pi^5 (e^{\hbar\omega_2/T} - 1) (1 - e^{-\hbar\omega_3/T}) (1 - e^{-\hbar\omega_4/T}) N^2 M^4 s^4 \pi^5} \approx \\ & \approx \frac{|v|^2 T^8 \Omega^2 \varphi_1 10}{N^2 M^4 s^{14} \hbar^7 \pi^3} = \frac{(6\pi^2)^2 |v|^2 T^8 \varphi_1}{\theta^6 (Ms^2)^4 \hbar} \frac{10}{\pi^3} \approx \frac{360}{\pi^4} \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2 \left(\frac{T}{\theta} \right)^6 \frac{\varphi_1}{\hbar}. \end{aligned}$$

¹ См. также [9], формулы (2.2), (2.3) и (2.4).

Вероятность, отнесенная к одному фонону, равна

$$360\pi \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2 \left(\frac{T}{\theta} \right)^5 \frac{\hbar\omega_1}{\theta} \omega_1.$$

Соответствующий пробег имеет вид

$$l^{\text{IV}} = \frac{a \left(\frac{Ms^2}{T} \right)^2 \frac{\theta^5}{T^5}}{360\pi (6\pi^2)^{1/4}} \frac{\theta^2}{\hbar^2 \omega^3}. \quad (1.8)$$

Формулы (1.8) и (1.6) сравниваются при $\hbar\omega = \frac{T^3}{\sqrt{Ms^2 \theta^3}}$

т. е. при той же примерно частоте, при которой сравнивались пробеги (1.1) и (1.5). Эта частота, как уже отмечалось, меньше T , по крайней мере, в 18 раз (при $T < \frac{1}{5} \theta$). Подставляя $\frac{Ms^2}{\theta} = 100$, $\theta = 5T$, $\hbar\omega = \frac{T^3 \sqrt{3.6\pi(6\pi^2)^{1/4}}}{\theta^{3/2} \sqrt{Ms^2}}$, $a = 2 \cdot 10 \text{ см}$, находим l^{IV} по порядку величины равным 400 см. Такой большой пробег, как и в случае (1.5), лишает ангармоничность 4-го порядка какого-либо значения для теплопроводности при $T \ll \theta$.

Кроме ангармоничности четвертого порядка, только что рассмотренной нами, следует оценить вероятность столкновения 4 фононов за счет эффектов второго порядка, обязанных кубической ангармоничности. Подробный расчет показывает, что такие эффекты при низких температурах ($T \ll \theta$) несущественны. Соответствующие вычисления при $T \ll \theta$ и $T \gg \theta$ проведены в последующих работах.

Таким образом, в кристаллах без двойников и упругих напряжений микроскопического характера пробег фононов при низких температурах определяется выражениями (1.1), (1.6) и (1.7). К ним необходимо добавить рассеяние (отражение) от стенок кристалла (или поликристаллов). Очевидно, что отражение от стенок приводит к постоянному, не зависящему от частоты пробегу порядка размеров кристалла¹.

§ 2. Зависимость теплопроводности от температуры концентрации примесей и размеров тела при $T \gg \epsilon Ms^2$

При столкновениях, приводящих к (1.6) и (1.7), импульс сохраняется. Существенным для теплопроводности является пробег, на котором происходит изменение импульса. Изменение импульса имеет место при столкновениях с примесями (1.1) или со стенками. Чаще всего сталкиваются с примесями волны с $\hbar\omega \approx T$. При $\epsilon Ms^2 \ll T$ волны, у которых $\hbar\omega \ll T$, взаимодействуют с при-

¹ Если один из размеров кристалла будет значительно меньше других, то пробег будет определяться наименьшим размером.

месями не непосредственно, а через посредство столкновений с волнами, имеющими частоты порядка T/\hbar .

В случае волн, имеющих пробег (1.7), косвенное взаимодействие с примесями осуществляется либо на длине $a \frac{Ms^2}{100T} \left(\frac{\theta}{T}\right)^3 \frac{\theta}{\hbar\omega}$, либо на длине $\frac{a}{100\varepsilon} \frac{\theta^4}{T^4}$, в зависимости от того, какая из этих длин длиннее (напомним, что $\frac{a}{100\varepsilon} \frac{\theta^4}{T^4}$ есть пробег по отношению к примесям волн с $\hbar\omega = T$). Очевидно, что оба эти пробега меньше, чем пробег $\frac{a}{100\varepsilon} \frac{\theta^4}{\hbar^4\omega^4}$, обязанный «прямому» рассеянию волны примесями.

В случае волны, имеющей пробег (1.6), «косвенное» взаимодействие осуществляется в три этапа: 1) сначала волна с пробегом (1.6) и частотой $\omega \ll T/\hbar$ сталкивается с волной, имеющей пробег (1.7) и ту же примерно частоту ω_1 . Такое столкновение происходит на длине $\frac{a}{100} \frac{Ms^2}{T} \frac{\theta^4}{\hbar^4\omega^4}$. 2) Волна с частотой $\omega_1 \ll T/\hbar$ и с пробегом (1.7) поглощается короткой волной. Это происходит на длине (1.7) $\frac{a}{100} \frac{Ms^2}{T} \frac{\theta^3}{T^3} \frac{\theta}{\hbar\omega}$. 3) Волны с частотами порядка T/\hbar сталкиваются с примесями. Как уже говорилось, последнее столкновение имеет место на длине $\frac{a}{100\varepsilon} \frac{\theta^4}{T^4}$. Сравнивая длины

$\frac{a}{100} \frac{Ms^2}{T} \frac{\theta^4}{\hbar^4\omega^4}$, $\frac{a}{100} \frac{Ms^2}{T} \frac{\theta^3}{T^3} \frac{\theta}{\hbar\omega}$ и $\frac{a}{100\varepsilon} \frac{\theta^4}{T^4}$, можно заключить, что при частотах, больших, чем $T \sqrt{\frac{\varepsilon Ms^2}{T}} \frac{1}{\hbar}$, косвенное взаимодействие с примесями (или, иначе говоря, передача импульса примесям) происходит на длине $\frac{a}{100\varepsilon} \frac{\theta^4}{T^4}$. При частотах, меньших, чем $\frac{T}{\hbar} \left(\frac{\varepsilon Ms^2}{T}\right)^{1/4}$, «косвенное» взаимодействие осуществляется на длине $\frac{a}{100} \frac{Ms^2}{T} \left(\frac{\theta}{\hbar\omega}\right)^4$ (эта длина оказывается наибольшей). Длина, на которой осуществляется прямое столкновение с примесями, равна $\frac{a}{100\varepsilon} \left(\frac{\theta}{\hbar\omega}\right)^4$, что больше, чем указанные только что пробеги по отношению к косвенному взаимодействию.

Из полученного результата мы можем сразу же найти выражение для теплопроводности при $T \ll \varepsilon Ms^2$. Для этого необходимо подставить в выражение (1) вместо l_ω для частот, больших чем $\frac{T}{\hbar} \left(\frac{\varepsilon Ms^2}{T}\right)^{1/4}$, величину $\frac{a}{100\varepsilon} \frac{\theta^4}{T^4}$, а для меньших частот величину $\frac{a}{100} \frac{Ms^2}{T} \frac{\theta^4}{\hbar^4\omega^4}$. При очень малых частотах последний пробег сравнивается с размерами кристалла L . Начиная с этих частот, пробег постоянен и равен L . Частота, при которой пробег (1.6) достигает

размеров тела, равна $\left(\frac{a}{100L} \frac{Ms^2}{T}\right)^{1/4} \frac{\theta}{\hbar}$. В соответствии с (1) находим κ^1

$$\begin{aligned} \kappa \approx & \frac{a}{100\varepsilon} \left(\frac{\theta}{T}\right)^4 ks \int_{T/\hbar}^{\hbar} \frac{\omega^2 d\omega \hbar^2 \omega^3 e^{\hbar\omega/T}}{2\pi^2 s^3 T^2 (e^{\hbar\omega/T} - 1)^2} + \\ & + \frac{ks a M s^2 \theta^4}{100 T 2\pi^2 s^3} \int_{T/\hbar}^{T'/\hbar} \frac{\omega^2 d\omega (\hbar\omega)^2 e^{\hbar\omega/T}}{\hbar^4 \omega^4 (e^{\hbar\omega/T} - 1)^2 T^2} \approx \frac{a}{100\varepsilon} \left(\frac{\theta}{T}\right)^4 \frac{ks}{2\pi^2 s^3 \hbar^3} + \\ & + \frac{Ms^2 \theta^3 sak}{100 \cdot 2\pi^2 s^3 \hbar^3} \left(\frac{100LT}{aMs^2}\right)^{1/4} = \frac{3anks\theta}{100\varepsilon T} + \frac{3nksa (Ms^2)^{3/4}}{(100)^{3/4} T^{3/4}} \left(\frac{L}{a}\right)^{1/4}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $T' = \left(\frac{\varepsilon Ms^2}{T}\right)^{1/4} T$; n — число элементарных ячеек в 1 см³ (n порядка числа молекул в 1 см³), k — постоянная Больцмана. Выражение (2.1) справедливо только до тех пор, пока пробег $a\theta^4/100\varepsilon T^4$ меньше размеров тела, т. е.

$$T > \theta \left(\frac{a}{100L\varepsilon}\right)^{1/4} = \frac{\theta}{Ms^2} \left(\frac{a}{100L\varepsilon}\right)^{1/4} Ms^2 = T_1 = \varepsilon_0 Ms^2 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{1/4}. \quad (2.2)$$

При меньших температурах пробег фононов равен L , и мы имеем соотношение [3] $\kappa \sim LT^3$ (рис. 1).

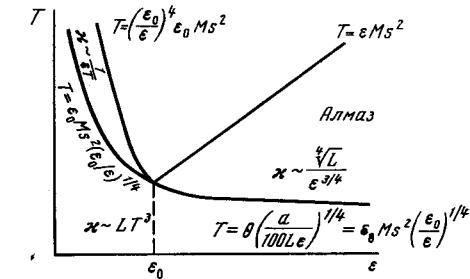


Рис. 1. Зависимость κ от ε , L и T при $T \ll \theta$

Мы вывели выражение (2.1) в предположении, что $T \gg \varepsilon Ms^2$. Для того чтобы (2.1) имело место вплоть до $T = \varepsilon Ms^2$, необходимо, чтобы концентрация примесей удовлетворяла неравенствам

$$\begin{aligned} T_2 = \varepsilon Ms^2 &> \theta \left(\frac{a}{100L\varepsilon}\right)^{1/4}, \quad \varepsilon^{1/4} > \frac{\theta}{Ms^2} \left(\frac{a}{100L}\right)^{1/4} = \varepsilon_0^{5/4}, \\ \varepsilon &> \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \left(\frac{\theta}{Ms^2}\right)^{1/5} \left(\frac{a}{100L}\right)^{1/4}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

¹ В первом интеграле (2.1) верхний предел поставлен равным T/\hbar . При $\omega \gg T/\hbar$ l_ω убывает пропорционально $1/\omega^4$ (1.1). Поэтому частоты, большие, чем T/\hbar , дают примерно такой же вклад, что и $\omega < T/\hbar$.

Если $\varepsilon > \varepsilon_0$, то (2.1) упрощается, так как первым членом можно пренебречь по сравнению со вторым. Их отношение равно

$$\frac{\theta}{T\varepsilon} \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^{1/4} \left(\frac{a}{100L} \right)^{1/4} < \frac{\theta}{Ms^2\varepsilon^{1/4}} \left(\frac{a}{100L} \right)^{1/4} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{1/4} < 1.$$

Таким образом, при $\varepsilon > \varepsilon_0$, $T > \varepsilon Ms^2$ мы получаем следующее выражение для κ :

$$\kappa = \frac{3nksa}{100} \left(\frac{Ms^2}{T} \right)^{1/4} \left(\frac{100L}{a} \right)^{1/4},$$

$$\varepsilon > \varepsilon_0 = \left(\frac{\theta}{Ms^2} \right)^{1/4} \left(\frac{a}{100L} \right)^{1/4}; \quad T \gg \varepsilon Ms^2. \quad (2.4)$$

Подставляя сюда $\theta/R = 287^\circ \text{ К}$ [14], $Ms^2/k = 5,4 \cdot 10^{40}$ [14], $a = 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$, $L = 1 \text{ см}$, находим¹

$$\varepsilon_0 = 2 \cdot 10^{-4}. \quad (2.5)$$

Критическая концентрация ε_0 играет существенную роль при рассмотрении теплопроводности диэлектриков при низких температурах.

При этой концентрации температура, при которой сравниваются пробеги (1.1) и (1.6), совпадает с температурой, при которой оба пробега достигают размеров тела.

Согласно (2.4), теплопроводность обратно пропорциональна $T^{1/4}$ (а не T , как у Пайерлса [2] и Дебая [1] и, кроме того, зависит от размеров тела L). κ пропорциональна $\sqrt[4]{L}$. Заметим, что такая зависимость имеет место тогда, когда пробег основной массы волн с $\omega = T/\hbar$ оказывается значительно меньшим, чем L . В самом деле, согласно предыдущему, пробег фононов с энергией T равен

$$\frac{a}{100\varepsilon} \frac{\theta^4}{T^4} < \frac{1}{2} 100a \frac{\theta^4}{T^4} < 6 \cdot 10^{-3} \text{ см } \left(T > \frac{\theta}{8} \right).$$

Хотя этот пробег оказывается меньше, чем размеры тела, в 100 раз ($L \sim 1 \text{ см}$), κ все же зависит от размеров тела (не следует смешивать эту зависимость от L с той зависимостью, которая рассмотрена Казимиром [3] и которая наступает при значительно меньших температурах, именно тех температурах, при которых все волны имеют свободный пробег, достигающий размеров тела). Установленная только что зависимость от размеров образца обязана быстрому возрастанию пробега при уменьшении частоты упругих волн, распространяющихся с максимальной скоростью. В опытах Эйкена [9, 10] и Де Хааса и Бирмаса [11, 12, 13] ε находится на грани, допускаемой неравенством (2.4). Поэтому в их условиях следует ожидать зависимости κ от L более слабой,

¹ Данные применительно к каменной соли.

чем пропорциональность $\sqrt[4]{L}$. Так как даже пропорциональность $\sqrt[4]{L}$ является слабой зависимостью от размеров, то в указанных опытах зависимость теплопроводности от размеров с трудом могла быть обнаружена. Представлялась бы крайне интересной экспериментальная проверка соотношений $\kappa \sim \frac{L^{1/4}}{T^{1/4}}$, на образцах, удовлетворяющих условиям (2.4) и с широко изменяющимися размерами (по крайней мере в 5–10 раз). Следует отметить, что κ , согласно (2.4), не зависит от концентрации примесей, хотя они играют существенную роль в механизме установления стационарного состояния.

Если ε меньше, чем ε_0 , вместо (2.4) мы получаем следующие результаты:

- 1) при $\sqrt[4]{T} > \frac{\theta}{(Ms^2)^{1/4}} \left(\frac{a}{100L} \right)^{1/4} \frac{1}{\varepsilon}$, κ по-прежнему определяется формулой (2.4);
 - 2) при $\sqrt[4]{T} < \frac{\theta}{\varepsilon (Ms^2)^{1/4}} \left(\frac{a}{100L} \right)^{1/4}$ имеет место соотношение [1, 2]
- $$\kappa \approx \frac{3nksa\theta}{100\varepsilon T}. \quad (2.6)$$

Это выражение для κ справедливо до таких температур, при которых пробег $\frac{a}{100\varepsilon} \frac{\theta^4}{T^4}$ оказывается порядка размеров тела. Начиная с этих температур, κ пропорционально LT^3 .

Условия применимости (2.6) могут быть записаны так:

$$T_3 \gg T \gg T_1, \quad (2.7)$$

где

$$T_3 = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^4 \varepsilon_0 Ms^2.$$

Условия применимости (2.4)

$$T \gg \varepsilon Ms^2, \quad T \gg T_3 \quad (2.8)$$

(см. рис. 1).

Мы видим, что при низких температурах диэлектрики обладают «истинной», не зависящей от размеров, теплопроводностью (определенной концентрацией примесей) только в случае сверхмалого содержания «примесей»¹ (значительно меньше сотой доли процента).

Резюмируем теперь положение, создающееся при $T \gg T_2$:

- 1) При $\varepsilon > \varepsilon_0$ (2.3) $\kappa \sim \frac{\sqrt[4]{L}}{T^{1/4}}$ (2.4) и не зависит от концентрации примесей;

¹ Еще раз напомним здесь, что речь идет не только о химических примесях, но и о всяких дефектах решетки, присутствии изотопа и т. п.

2) При $\epsilon \ll \epsilon_0$, $T_3 \gg T \gg T_1$ результат Пайерлса и Дебая $\kappa \sim \frac{1}{eT}$ (см. (2.6)).

3) При $\epsilon \ll \epsilon_0$, $T \gg T_3$ тот же результат, что и при $\epsilon \gg \epsilon_0$ $\kappa \sim \frac{\sqrt{L}}{T^{3/4}}$ (см. (2.4)).

§ 3. Случай, когда $T \ll T_2$. Теплопроводность алмаза

Перейдем теперь к рассмотрению теплопроводности при $T \ll \epsilon M^2$. Из формул (1.1) и (1.6) следует, что при в с е х в этих условиях пробег определяется прямым рассеянием примесями. Отношение (1.1) к (1.6), равное $T/\epsilon M^2$, значительно меньше единицы. Подставляя в (1) вместо l_ω (1.1) и интегрируя до частоты ω_0 , при которой пробег (1.1) оказывается равным размерам тела L ,

$$\hbar\omega_0 = \theta \left(\frac{a}{100Le} \right)^{1/4},$$

получаем следующее выражение для κ :

$$\kappa \approx \frac{aks\theta^3}{100 \cdot 2\pi^2 e \hbar^3 s^3} \left(\frac{100Le}{a} \right)^{1/4} = \frac{3nksa}{100e^{3/4}} \left(\frac{100L}{a} \right)^{1/4}. \quad (3.1)$$

Согласно этой формуле, теплопроводность зависит от размеров тела так же, как и (2.4), т. е. κ пропорционально $L^{1/4}$. Теплопроводность обратно пропорциональна концентрации примесей (как в случае Дебая и Пайерлса (2.6)), а обратно пропорциональна концентрации примесей в степени $3/4$. Наконец, самый важный вывод — полученное выражение для теплопроводности не зависит от температуры. Мы приходим, таким образом, к заключению, что при низких температурах должна существовать область температур, в пределах которой теплопроводность не зависит от температуры. Этот вывод находит свое экспериментальное подтверждение в давно установленном факте, что теплопроводность алмаза не меняется с температурой при ее изменении от 24° К до 343° К [10, 12]. Следует отметить, что у алмаза ширина области температур, в которой κ не зависит от T , особенно велика из-за большой дебаевской температуры алмаза [14] ($\theta = 2230^\circ$).

Установим нижний предел для температур, при которых (3.1) имеет место. Очевидно, что (3.1) перестает быть справедливым при таких температурах, при которых фононы с энергией T имеют пробег, равный L .

Начиная с этих температур κ пропорционально LT^3 (Казimir [3]). Прежде чем приравнивать (1.1) размерам тела L для определения нижней границы применимости (3.1), докажем, что в фор-

мулах (1.1) и (1.6) должен стоять численный фактор порядка 1/100, если под ϵ понимать концентрацию химических примесей в кристаллах, которые употреблялись Де-Хаасом и Бирмасом. Что касается (1.1), то такой вывод следует из рассмотрения экспериментальных данных, согласно которым у каменной соли, сильвина и кварца зависимость $\kappa \sim LT^3$ наблюдается при температурах не выше 5° К [11, 12, 13]. Подставляя в (1.1) следующие данные¹:

Каменная соль	$\theta = 290^\circ$ [14],	$\epsilon = 10^{-4}$,	$a = 2,8 \cdot 10^{-8}$ см,
Сильвин	$\theta = 290^\circ$ [14],	$\epsilon = 3 \cdot 10^{-4}$ [11],	$a = 3,2 \cdot 10^{-8}$ см,
Кварц	$\theta = 170^\circ$ [14],	$\epsilon = 4 \cdot 10^{-3}$ (?) [13],	$a = 3,5 \cdot 10^{-8}$ см,

мы при 10° К получим пробег порядка $0,1—1$ см² только в том случае, если численный множитель в (1.1) не больше одной сотой. Таким образом, уточненный пробег l_{el} можно записать так:

$$l_{el} = \frac{a}{100e} \left(\frac{\theta}{\hbar\omega} \right)^4. \quad (3.2)$$

Для определения коэффициента в формуле (1.6) необходимо установить коэффициент в соотношении $V_3 = M^2$, которым мы пользовались при выводе (1.6). V_3 есть совокупность коэффициентов, стоящих при кубе относительного смещения атомов в разложении потенциальной энергии U в ряд по степеням относительных смещений (см., например, [4], формула (2.1)). Величина V_3 связана с коэффициентом теплового расширения. Рассмотрим ради простоты модель изотропного твердого тела. Как известно, коэффициент теплового расширения $\frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_P$ (P — давление) равен

$$\alpha = \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_\Phi = - \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\Omega \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial P} \right)_T = \beta \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\Omega.$$

У твердого тела свободная энергия F при низких температурах записывается так:

$$\begin{aligned} F &= NTf \left(\frac{T}{\theta} \right), \\ P &= - \left(\frac{\partial F}{\partial \Omega} \right)_T = N \frac{T^2}{\theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial \Omega} f', \\ \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\Omega &= \frac{\partial \theta}{\partial \Omega} N \left(\frac{2Tf'}{\theta^2} + \frac{f''T^2}{\theta^3} \right). \end{aligned}$$

¹ Таковы линейные размеры образцов, употребляющихся Эйкеном [9, 10] и Де-Хаасом и Бирмасом [11—13].

² Здесь мы отождествляем ϵ с концентрацией химических примесей, данные о которых имеются в [11 и 13].

Выражение в фигурных скобках связано с теплоемкостью c_Ω

$$c_\Omega = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_\Omega = -N \left(\frac{2f'T}{\theta} + \frac{f''T^2}{\theta^2} \right) = c_0 \Omega,$$

где c_0 — теплоемкость единицы объема..

$$\alpha = -\beta c_0 \frac{\partial \ln \theta}{\partial \ln \Omega}.$$

Подставляем сюда выражение для θ ¹

$$\theta = (6\pi^2)^{1/3} \frac{\hbar s}{\Omega^{1/3}} N^{1/3} = (6\pi^2)^{1/3} \frac{\hbar N^{1/3}}{\Omega^{1/3}} \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}},$$

где ρ — плотность ($\text{г}/\text{см}^3$).

Разложим теперь P в ряд по степеням $\rho - \rho_0$

$$\begin{aligned} P &= P_0 + \bar{s}^2 (\rho - \rho_0) + A(\rho - \rho_0)^2, \\ \frac{\partial \ln \theta}{\partial \ln \Omega} &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \left[1 + \frac{A(\rho - \rho_0)}{\bar{s}^2} \right]}{\partial \ln \Omega} = \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{A}{\bar{s}^2} \frac{\partial(\rho - \rho_0)}{\partial \ln \Omega} = -\frac{A\rho_0}{\bar{s}^2} - \frac{1}{3}, \\ \left(\rho - \rho_0 = \rho_0 \frac{\Omega_0 - \Omega}{\Omega_0} \right), \\ \alpha &= \beta c_0 \left(\frac{1}{3} + \frac{A\rho_0}{\bar{s}^2} \right). \end{aligned}$$

С помощью A найдем выражение для F

$$F = \text{const} - \frac{\bar{s}^2}{2\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 \Omega_0 - \frac{A(\rho - \rho_0)^3}{3\rho_0^2}.$$

Относя на одну молекулу, получаем

$$V_3 = \frac{A\rho_0^2 \Omega_0}{3N} = \frac{AM\rho_0}{3} \cdot \frac{V_3}{Ms^2} = \frac{A\rho_0}{3\beta c_0} = \frac{\alpha}{3\beta c_0} - \frac{1}{9} = \frac{\gamma}{3} - \frac{1}{9}.$$

Значения γ берем из

$$\left| \frac{V_3}{Ms^2} \right|_{\text{алмаз}} = 0,25, \quad \left| \frac{V_3}{Ms^2} \right|_{\text{кварц}} = 0,2, \quad \left| \frac{V_3}{Ms^2} \right|_{\text{NaCl}} = 0,40, \quad \left| \frac{V_3}{Ms^2} \right|_{\text{KCl}} = 0,40.$$

Зная V_3 , можно определить коэффициент в (1.6).

Пусть f будет импульс «продольного» фона, пробег которого мы определяем. Такой фонон может либо расщепиться на два «поперечных» фона

$$s_e f = s_\tau [f' + |f - f'|],$$

¹ s — есть s среднее по углам.

либо расщепиться на один «продольный» и один «поперечный» фонон:

$$s_e f = s_e f' + s_\tau |f - f'|.$$

Обычным образом находим вероятность перехода с помощью коэффициентов ангармоничности P' , Q' , R' (см. [6], стр. 20; см. также [7]). Положив $P' = Q' = R' = \frac{1}{3} Ms^2$, получаем¹

$$l_{\text{long}}^{\text{III}} = \frac{a}{50} \frac{Ms^2}{T} \left(\frac{\theta}{\hbar\omega} \right)^4.$$

Таким образом, коэффициент в III порядка $\frac{1}{100}$.

Воспользовавшись (3.2), находим, что при температурах

$$T_1 = \left(\frac{a}{100L\varepsilon} \right)^{1/4} \theta = \frac{\theta}{Ms^2} \left(\frac{a}{100L} \right)^{1/4} \frac{Ms^2}{\varepsilon^{1/4}} = \varepsilon_0 Ms^2 \sqrt[4]{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}}$$

пробег (1.1) достигает размеров тела для частот порядка T/\hbar . Отсюда пределы применимости формулы (3.1) можно записать в следующем виде:

$$\theta \left(\frac{a}{100L\varepsilon} \right)^{1/4} \ll T \ll \varepsilon Ms^2. \quad (3.3)$$

Вместо S вводим сюда дебаевскую температуру

$$\theta \left(\frac{a}{100L\varepsilon} \right)^{1/4} \ll T \ll \varepsilon M \frac{\theta^2 a^2}{\hbar^2 (6\pi^2)^{1/3}}. \quad (3.4)$$

Чем больше дебаевская температура, тем шире область температур, в пределах которой теплопроводность не зависит от температуры. Если $\theta \sim 200-300^\circ$, интервал температур (3.4) при $\varepsilon \sim \sim 10^{-4}$ оказывается несуществующим

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{100L\varepsilon} \right)^{1/4} \theta &= \left(\frac{2,8 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^2} \right)^{1/4} 290 = 10^\circ; \\ \frac{\varepsilon M \theta^2 a^2}{\hbar^2 (6\pi^2)^{1/3}} &= \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-22}}{16 \cdot 10^{-54}} \times 8 \cdot 10^{-16} \cdot 16 \cdot 10^{-28} = 16 \cdot 10^{-16} = 11^\circ. \end{aligned}$$

Интересующий нас интервал имеет место в этих условиях только при больших концентрациях, порядка $2 \cdot 10^{-3}$ (доли процента). Если же $\theta = 2230^\circ$, как у алмаза, интервал температур, допускаемых (3.3), оказывается довольно большим ($\varepsilon = 4 \cdot 10^{-4}$, несколько большая величина ε обязана тому, что речь идет о естественных кристаллах)

$$54^\circ < T < 380^\circ$$

¹ В окончательном результате мы положили $s_{\text{long}} = \sqrt{3} s_{\text{trans}}$ (это не отражается на порядке величины s_{long}).

(в одной элементарной ячейке алмаза содержится два атома углерода).

Заметим, что ϵ_0 у алмаза значительно меньше, чем 10^{-4} (скоро 10⁻⁵).

Мы приходим к заключению, что у диэлектриков типа каменной соли или кварца при $\epsilon \leq 10^{-4}$ не должно существовать температурного интервала, в пределах которого κ не зависит от T . У диэлектриков типа алмаза (с высокой дебаевской температурой) такой интервал должен существовать и быть довольно большим. Этот вывод полностью подтверждается экспериментом.

При температурах, меньших, чем $\left(\frac{a}{100L\epsilon}\right)^{1/4} \theta$, все фононы имеют пробег порядка размеров тела и осуществляется ситуация, рассмотренная Казимиром [3], т. е. $\kappa \sim LT^3$.

Мы можем теперь резюмировать общую картину зависимости L от ϵ и при низких температурах (ϵ_0 см. (2.4))

$$A) T \ll T_1.$$

Теплопроводность пропорциональна кубу температуры и размерам тела: $\kappa \sim LT^3$.

$$B) \epsilon Ms^2 \gg T \gg T_1, \quad (\epsilon \gg \epsilon_0).$$

Теплопроводность не зависит от температуры; она зависит от размеров тела и обратно пропорциональна концентрации примесей в степени $3/4$ (3.1):

$$\kappa \sim \frac{4\sqrt[4]{L}}{\epsilon^{3/4}}, \quad \text{случай алмаза.}$$

$$C) T \gg T_3, \quad (\epsilon \ll \epsilon_0), \\ T \gg T_2, \quad (\epsilon \gg \epsilon_0),$$

где $T_2 = \epsilon_0 Ms^2$.

$$\text{Теплопроводность пропорциональна } \frac{4\sqrt[4]{L}}{T^{3/4}}.$$

По-видимому, в этой области находятся кристаллы NaCl и KCl, исследованные в [11—13].

D) Случай, разобранный в [1] и [2], $T_3 \gg T \gg T_1$. Имеет место истинная теплопроводность, обратно пропорциональная концентрации примесей и температуре: $\kappa \sim \frac{1}{\epsilon T}$. Общий характер зависимости κ от L и ϵ представлен на рис. 1.

Любопытно отметить, как ведет себя κ при заданной температуре при изменении концентрации примесей ϵ . Здесь могут быть два случая:

первый случай

$$T < T_2 = \left(\frac{\theta}{Ms^2}\right)^{1/4} \left(\frac{a}{100L}\right)^{1/4} Ms^2 \approx 1^\circ.$$

При увеличении ϵ от нуля до $\epsilon_0 \left(\frac{\theta}{Ms^2}\right)^4$ κ не зависит от ϵ , а затем κ убывает обратно пропорционально $\epsilon^{3/4}$ (3.1) (рис. 2):

второй случай

$$T > T_2 = \left(\frac{\theta}{Ms^2}\right)^{1/4} \left(\frac{a}{100L}\right)^{1/4} Ms^2 \approx 1^\circ.$$

κ не зависит от ϵ при $0 < \epsilon \ll \epsilon_0 \left(\frac{\theta}{Ms^2}\right)^4$. Далее, при

$$\epsilon_0 \left(\frac{\theta}{Ms^2}\right)^4 \ll \epsilon \ll \epsilon_0 \left(\frac{\theta}{Ms^2}\right)^{1/4}$$

теплопроводность обратно пропорциональна ϵ (2.6). Когда ϵ лежит в пределах

$$\epsilon_0 \left(\frac{\theta}{Ms^2}\right)^{1/4} \ll \epsilon \ll \frac{T}{Ms^2},$$

теплопроводность не меняется при изменении ϵ (2.4). Наконец, при $\epsilon \gg \frac{T}{Ms^2}$, κ в соответствии с (3.1) обратно пропорционально $\epsilon^{3/4}$ (рис. 3).

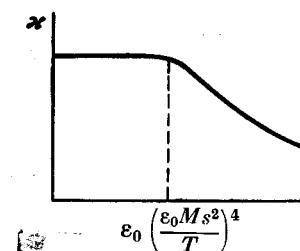


Рис. 2. Зависимость κ от ϵ при $\epsilon < \epsilon_0 Ms^2$

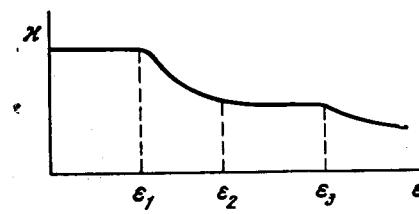


Рис. 3. Зависимость κ от ϵ при $T > \epsilon_0 Ms^2$, $\epsilon_1 = \epsilon_0 (\epsilon_0 Ms^2 / T)^{1/4}$, $\epsilon_2 = \epsilon_0 (\epsilon_0 Ms^2 / T)^{1/4}$, $\epsilon_3 = T / Ms^2$

Отметим зависимость κ от T при заданной концентрации примесей:

$$1) \epsilon \ll \epsilon_0.$$

Когда $T \ll T_1$ теплопроводность пропорциональна T^3 . При $\epsilon Ms^2 \gg T \gg \epsilon Ms^2 \left(\frac{\theta}{\epsilon}\right)^{1/4}$ она не зависит от T . $\kappa \sim L^{3/4} \epsilon^{-3/4}$.

При $T \gg \epsilon Ms^2$ теплопроводность (рис. 4) обратно пропорциональна $T^{3/4}$ (2.4);

$$2) \epsilon \gg \epsilon_0.$$

Теплопроводность κ пропорциональна LT^3 при $T \ll T_1$.

В интервале температур $T_1 \ll T \ll T_3$ κ обратно пропорциональна T (2.6).

При $T \gg T_3$ теплопроводность (рис. 5) обратно пропорциональна $T^{1/4}$ (2.4).

В заключение этого параграфа укажем на то, что при $T \sim 0$ теплопроводность хороших кристаллов диэлектриков и теплопроводность металлов должны быть по порядку величины равными. Теплопроводность диэлектриков при $T \sim 0$ имеет вид

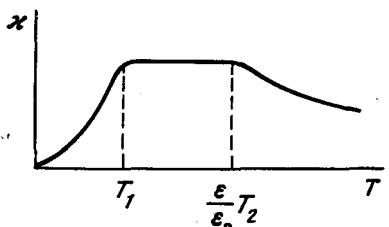


Рис. 4. Зависимость κ от T при $\epsilon \geq \epsilon_0$

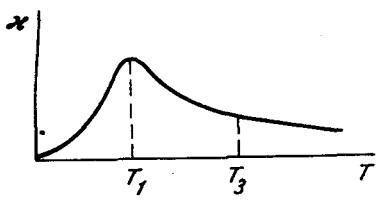


Рис. 5. Зависимость κ от T при $\epsilon \leq \epsilon_0$

$\kappa_a \sim nka^2 \frac{Ms^2}{\hbar} \left(\frac{Ms^2}{\theta} \right)^{1/4}$. Подробный вывод этого соотношения будет приведен в последующих работах. У металлов теплоемкость равна $nk \frac{T}{Ms^2}$ (Ms^2 порядка температуры вырождения), пробег электронов $a \frac{Ms^2}{T}$ и их скорость $a \frac{Ms^2}{\hbar} \cdot \kappa$ металлов, таким образом, имеет вид ($T > \sim 0$): $\kappa = nka^2 \frac{Ms^2}{\hbar}$. Учитывая, что $\frac{Ms^2}{\theta} \sim 10^2$, мы видим, что $\kappa_m \sim \kappa_a$. Экспериментальные данные указывают на то, что в среднем κ_m всего лишь в несколько раз больше, чем κ_a .

§ 4. Замечания о влиянии двойникования кристаллов на теплопроводность диэлектриков при низких температурах

Как известно, реальные кристаллы часто показывают явление двойникования, т. е. разбиваются на отдельные области, либо сдвинутые друг относительно друга, либо по-иному ориентированные друг относительно друга. Поверхность, отделяющая один двойник от другого (одну область от другой), является источником рассеяния фононов и может приводить к тепловому сопротивлению. Рассеяние фононов от такой поверхности может быть двоякого типа — правильное отражение и преломление на границе и диффузное рассеяние, обязанное «шероховатости» границы. Шероховатость границы связана с химическими примесями и физическими дефектами поверхности (например, отсутствие

в том или ином узле атома и т. п.). Можно думать, что толщина поверхности порядка постоянной решетки, т. е. значительно меньше, чем длина волны фононов, возбужденных при низких температурах. В этих условиях интенсивность диффузного рассеяния поверхностью должна идти обратно пропорционально квадрату длины волны [16]¹. Если расстояние от одной поверхности до другой порядка L_0 , то пробег фононов по отношению к диффузному рассеянию может быть записан так:

$$l_d \sim L_0 \left(\frac{\hbar \omega}{\theta} \right)^2 \frac{1}{\eta}, \quad (4.1)$$

где η — коэффициент, характеризующий испорченность поверхности.

Пробег по отношению к регулярному отражению и преломлению можно записать так:

$$l_r = L_0 \frac{1}{(\Delta v)^2}, \quad (4.2)$$

где Δv — разность показателей преломления упругих волн у двух двойников (возникающая, например, из-за их различной ориентации). Если угол ϑ , на который один двойник ориентирован по отношению к другому, мал, то $\Delta v \sim \vartheta$, и мы имеем

$$l_r \sim L_0 \frac{1}{\vartheta^2}. \quad (4.3)$$

Для того чтобы двойникование было существенно, необходимо, чтобы l_d или l_r были сравнимы или меньше, чем пробеги (1.1) и (1.6). Заметим, что поскольку l_r при малых частотах стремится к постоянному пределу, не зависящему от длины волны, наличие заметного регулярного рассеяния должно оказаться так же, как и отражение от стенок кристалла, только величина L (линейные размеры кристалла) заменяется на l_r .

Рассмотрим экспериментальные данные относительно L_0 и ϑ . У некоторых образцов каменной соли L_0 , по-видимому, порядка 10^{-2} см, угол $\vartheta \sim 1/50$ (1°). Отсюда $l_r \sim 25$ см. Ясно, что регулярное рассеяние в этих условиях не играет роли. Что касается l_d , то из опытов нельзя сделать надежных заключений о величине η . Даже если η порядка единицы², мы получаем l_d равным $10^{-2} \left(\frac{\hbar \omega}{\theta} \right)^2$ см.

Отношение этого пробега к (1.1) и (1.6) соответственно равно $a = 2.8 \cdot 10^{-8}$:

$$\frac{l_d}{l_{el}} = \frac{100\epsilon}{a \cdot 100} \left(\frac{\hbar \omega}{\theta} \right)^2 = \frac{\epsilon \cdot 10^8}{3} \left(\frac{\hbar \omega}{\theta} \right)^2,$$

$$\frac{l_d}{l_{III}} = \frac{100T}{100Ms^2a} \left(\frac{\hbar \omega}{\theta} \right)^2 = \frac{10^8 T}{3Ms^2} \left(\frac{\hbar \omega}{T} \right)^2.$$

¹ Я весьма обязан проф. М. Леонтовичу за указание мне этой статьи.

² Что представляется довольно вероятным.

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ДИЭЛЕКТРИКОВ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ *

Подставляя сюда

$$\epsilon \approx 10^{-4}, \quad T \geq 5^\circ \sim 10^{-4} M s^2, \quad \hbar \omega \sim T, \quad \theta \approx \frac{M s^2}{100},$$

можно заключить, что в каменной соли, вплоть до температур в несколько градусов, l_d не играет роли. Так как ниже этих температур пробег определяется стенками кристалла, то при $L_0 = 10^{-2} \text{ см}$ и $\vartheta = 1/50$ двойникование не существенно для теплопроводности.

В реальных кристаллах, кроме двойников, могут быть упругие напряжения макроскопического размера. Можно считать, что поскольку размеры напряжений велики по сравнению с длиной волн фононов, такие макроскопические напряжения не будут заметно рассеивать упругие волны.

В заключение я хотел бы поблагодарить проф. Л. Ландау за важные указания и интерес к работе.

Физический институт
Академии наук СССР

Получено
3 февраля 1942 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Debye. Vortrage über die Kinetische Theorie u.s.w., S. 43. Teubner, 1914.
2. R. Peterls. Ann. d. Phys., 1929, 3, 1055.
3. H. B. G. Casimir. Physica, 1938, 5, 495.
4. I. Pomeranchuk. J. Phys. USSR, 1941, 4, 259. (Собр. трудов, № 8).
5. I. Pomeranchuk. Phys. Rev., 1941, 60, 820. (Собр. трудов, № 10).
6. L. Landau, G. Rumer. Phys. Zs. Sowjet., 1937, 11, 18.
7. Г. Слонимский. ЖЭТФ, 1937, 7, 1457.
8. I. Pomeranchuk. J. Phys. USSR, 1941, 4, 529 (Собр. трудов, № 9).
9. A. Eucken. Ann. d. Phys., 4 Folge, 1911, 34, 185.
10. A. Eucken. Phys. Zs., 1911, 12, 1005.
11. W. J. De Haas, T. Biermasz. Physica, 1937, 4, 752.
12. W. J. De Haas, T. Biermasz. Physica, 1938, 5, 47.
13. W. J. De Haas, T. Biermasz. Physica, 1938, 5, 320.
14. A. Eucken. Energie und Warmehinhalt.—Hdb. Exp. Phys., 1929, 8/1, 242.
15. E. Gruneisen. Hdb. d. Phys., 1926, B 10, 28, 31, 32.
16. L. Mandelstam. Ann. d. Phys., 4 Folge, 1913, B 41, 609.
17. I. Pomeranchuk. Phys. Zs. Sowjet., 1938, 13, 65 (Собр. трудов, № 25).

Рассматривается влияние на теплопроводность столкновений четырех фононов, обязанных кубической ангармоничности. Соответствующая вероятность столкновения получается во втором приближении теории возмущений. Предельный закон для зависимости теплопроводности κ диэлектриков от температуры при высоких температурах ($T \gg \theta$) имеет вид $\kappa \sim T^{-3/4}$.

Производится сравнение выводов теории с экспериментом. Констатировано согласие между теорией и экспериментом.

Как было указано автором [1—3], при вычислении теплопроводности диэлектриков необходимо учитывать столкновения четырех фононов. Без таких столкновений теплопроводность диэлектриков оказывается бесконечной¹. Столкновения с участием четырех фононов могут происходить за счет членов четвертого порядка в разложении потенциальной энергии V в ряд по степеням смещений U атомов из положений равновесия

$$V = V_0 + \frac{1}{2} \sum_{ikjm} (U_i^j - U_k^j)(U_i^m - U_k^m) A_{ik}^{jm} + \\ + \frac{1}{6} \sum_{jmnik} (U_i^j - U_k^j)(U_i^m - U_k^m)(U_i^n - U_k^n) B_{ik}^{jmjn} + \\ + \frac{1}{24} \sum_{jmnl ik} (U_i^j - U_k^j)(U_i^m - U_k^m)(U_i^n - U_k^n)(U_i^l - U_k^l) C_{ik}^{jmnl}. \quad (1)$$

Индексы i и k означают различные атомы решетки. Индексы j , m , n , l означают координатные оси, на которые проектируются смещения UR . Вероятность столкновений, обязанных членам четвертого порядка в (1), была вычислена в [1—3] с помощью методов теории возмущений. При этом интересующая нас вероятность получалась в первом приближении теории возмущений. Легко видеть, что кубические члены в (1) также приводят к столкновениям четырех фононов. Но при этом вероятность такого четвертного столкновения получается теперь не в первом приближении теории возмущений, а во втором приближении. Целью настоящей заметки является вычисление вероятности четвертных столкновений фононов, обязанных кубическим членам в (1), и получение на

* ЖЭТФ, 1942, 12, 419; J. Phys. USSR, 1943, 7, 197.

¹ За всеми подробностями мы отсылаем к [1 и 2].

этой основе уточненного по отношению в [1—3] выражения для теплопроводности диэлектриков при температурах, больших, чем дебаевская ($T \gg \theta$).

Как было выяснено в [1—3], для теплопроводности существенное значение имеет свободный пробег длинных волн такой поляризации, которая имеет максимальную скорость звука (например, продольных волн в изотропном теле). Поэтому мы сперва получим выражение для пробега интересующих нас длинных волн с учетом вероятности столкновения четырех фононов, получающейся из-за кубических членов в (1).

Матричный элемент кубической ангармоничности, соответствующий, например, поглощению фона 1 и испусканию двух фононов 2 и 3, имеет вид (см. [1], формула (1.4), а также [3], формула (1.2))

$$V_3 = Ms^2 \sqrt{\frac{\lambda^3 n_1 (n_2 + 1) (n_3 + 1)}{8M^3 \omega_1 \lambda_1^2 \omega_2 \lambda_2^2 \omega_3 \lambda_3^2}}, \quad (2)$$

где M — масса элементарной ячейки, ω — круговая частота, λ — длина волны фона, деленная на 2π , s — скорость звука, N — число элементарных ячеек в кристалле, n — функция распределения фононов.

В дальнейшем мы будем считать, что частота ω_1 мала и соответствует максимальной скорости звука в данном направлении.

Очевидно, что четверное столкновение за счет кубической ангармоничности может иметь место только во втором приближении теории возмущений, так как в (2) участвуют только три фона. Четверные столкновения могут быть двух типов: два каких-либо фона превращаются в два другие фонона, или один фонон превращается в три других фонона. Так как оба типа четверных столкновений имеют одинаковую по порядку величины вероятность, то мы ограничимся рассмотрением только первого типа.

Амплитуда вероятности перехода из состояния I в состояние II во втором приближении имеет известный вид

$$\sum_t \frac{V_{tI} V_{tII}}{(E_I - E_t)}. \quad (3)$$

Здесь E_I — энергия состояния I, E_t — энергия промежуточного состояния.

В начальном состоянии мы имеем два фона с импульсами f_1 и f_2 . В конечном состоянии вместо этих двух фононов образуются два другие фонона с квазимпульсами f_3 и f_4 . Промежуточные состояния могут быть следующие:

1) при соударении фононов 1 и 2 они исчезают и образуется фонон с квазимпульсом $f_1 + f_2 = f_3 + f_4$, который в последующем этапе расщепляется на фононы 3 и 4;

¹ Ради краткости мы не упоминаем здесь о процессах переброса Пайерлса, так как при $T \gg \theta$ они не изменяют положения.

2) имеющиеся благодаря тепловому движению фононы $f_1 + f_2$ сперва расщепляются на два фонона 3 и 4, а затем фононы 1 и 2 превращаются в фононы $f_1 + f_2$.

Очевидно, что вторая последовательность переходов отличается от первой только перестановкой первого и второго этапов.

Учитывая только что сказанное, записываем (3) в следующем виде ($\omega(f)$ означает частоту фона с квазимпульсом f)

$$\begin{aligned} & \frac{(Ms^2)^2 \hbar^2}{8\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 N M^3} \sqrt{\omega(f_1) \omega(f_2) \omega^2(f_1 + f_2) \omega(f_3) \omega(f_4)} \times \\ & \times \left\{ \frac{\sqrt{n_1 n_2 (n_5 + 1)^2 (n_3 + 1) (n_4 + 1)}}{\omega(f_1) + \omega(f_2) - \omega(f_1 + f_2)} + \frac{\sqrt{n_5 (n_3 + 1) (n_4 + 1) n_1 n_2 n_5}}{\omega(f_1 + f_2) - \omega(f_3) - \omega(f_4)} \right\} = \\ & = \frac{s \hbar^2}{8NM} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_3 + 1) (n_4 + 1)}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5^2}} \cdot \frac{1}{\omega(f_1) + \omega(f_2) - \omega(f_1 + f_2)}, \\ & \lambda_5 = \frac{1}{|f_1 + f_2|}, \quad n_5 = n(f_1 + f_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим здесь, что фонон 1 по условию имеет такую поляризацию, которая делает невозможным его поглощение дебаевским фононом, т. е. невозможно равенство

$$\omega(f_1) + \omega(f_2) = \omega(f_1 + f_2), \quad f_1 \ll f_2.$$

Возведим теперь модуль (4) в квадрат и интегрируем по всем возможным фононам 2 и 3, учитывая обратные переходы,

$$\begin{aligned} W = & \frac{2\pi\hbar^4 s^2}{8^2 M^2 N^2} \int \frac{[n_1 n_2 (n_3 + 1) (n_4 + 1) - n_4 n_1 (n_1 + 1) (n_2 + 1)]}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5^2 [\omega(f_1) + \omega(f_2) - \omega(f_1 + f_2)]^2 \hbar^2} \times \\ & \times d\mathbf{f}_2 d\mathbf{f}_3 \Omega^2 \delta \left[\omega(f_1) + \omega(f_2) - \omega(f_3) - \omega(f_1 + f_2 - f_3) \right] \times \frac{1}{64\pi^6}, \end{aligned} \quad (5)$$

где Ω — объем системы, W — вероятность перехода в единицу времени, δ — дираковская δ -функция.

Вместо n_1 подставляем сюда $n_{01} + n$, где n_{01} — планковское значение функции распределения. Вместо n_2 , n_3 и n_4 подставляем, как обычно, их равновесные значения; законность такой подстановки следует из того, что пробег фононов, во всяком случае, не падает при уменьшении частоты, а в интервале (5) играют роль большие частоты ω_2 , ω_3 , ω_4 , в то время как частота ω_1 мала¹

$$\begin{aligned} W = & \left(\frac{\Omega}{N} \right)^2 n_1 \frac{\hbar^2 s^2}{2^{11} \pi^5 M^2} \times \\ & \times \int \frac{\frac{\hbar\omega_3}{T} + \frac{\hbar\omega_4}{T} - \frac{\hbar\omega_2}{T}}{(e^{-\frac{\hbar\omega_3}{T}} + e^{-\frac{\hbar\omega_4}{T}} - e^{-\frac{\hbar\omega_2}{T}}) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) d\mathbf{f}_2 d\mathbf{f}_3}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \omega [\omega(f_1) - f_1 V_2]^2 (e^{-\frac{\hbar\omega_2}{T}} - 1) (e^{-\frac{\hbar\omega_3}{T}} - 1) (e^{-\frac{\hbar\omega_4}{T}} - 1)}, \end{aligned} \quad (5')$$

где V_2 — групповая скорость фона 2. Разлагаем здесь $e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}$

¹ Температуры измеряются в энергетических единицах.

$$W = \left(\frac{\Omega}{N}\right)^2 n'_1 \frac{T^2 s^2}{2^{11} \pi^5 M^2} \int \frac{d\mathbf{f}_2 d\mathbf{f}_3 (\omega_3 + \omega_4 - \omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5^2 \omega_2 \omega_3 \omega_4 (\omega_1 - \mathbf{f}_1 \mathbf{V}_2)^2} \approx \\ \approx \left(\frac{\Omega}{N}\right)^2 n'_1 \frac{T^2}{2^{11} M^2 s^2 \pi^5} \int \frac{d\mathbf{f}_2 d\mathbf{f}_3}{\lambda_1 \lambda_5^2} \omega_1 \frac{1}{(\omega_1 - \mathbf{f}_1 \mathbf{V}_2)^2} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4). \quad (6)$$

В дальнейшем ω_1 можно пренебречь под знаком δ -функции.

Знак приближенного равенства в (6) появляется из-за наличия дисперсии звука (например, $\omega_2 \lambda_2$ не равно s , так как \mathbf{f}_2 велико. Но по порядку величины такое равенство имеет место).

Используем равенства

$$\begin{aligned} & (\omega_1 - \mathbf{f}_1 \mathbf{V}_2)^2 \approx \omega_1^2, \\ W = & \left(\frac{\Omega}{N}\right)^2 \frac{T^2 n'_1}{M^2 s^2 2^{11} \pi^5} \int \frac{d\mathbf{f}_2 d\mathbf{f}_3 \delta[\omega_2 - \omega_3 - \omega_4]}{|\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2|^2} = \\ & = \frac{a^6 T^2}{2^{11} M^2 s^2} n'_1 \int \frac{\mathbf{f}_2^2 d\mathbf{f}_2 d\mathbf{f}_3}{\pi^6} \delta(\omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \sim \frac{(6\pi^2)^{1/3} a^6 T^2 n'_1}{3 \cdot 2^7 \pi^3 M^2 s^3 a^7} = \\ & = \left(\frac{T}{Ms^2}\right)^2 \frac{s}{a} n'_1 \frac{3^{7/3} (2\pi^2)^{1/3}}{3\pi^3 2^7} = \left(\frac{T}{Ms^2}\right)^2 \frac{s}{a} n'_1 \frac{3^{4/3} \pi^{5/3}}{2^{14/3}} \approx \frac{T^2}{(Ms^2)^2} n'_1 \frac{s}{a}, \end{aligned}$$

где a — постоянная решетки.

Производим переход от W к свободному пробегу

$$l = a \left(\frac{Ms^2}{T}\right)^2 = a \left(\frac{Ms^2}{T}\right)^2 \quad (T \gg \theta, \hbar\omega \ll \theta), \quad (7)$$

где θ — дебаевская температура.

Мы находим, что пробег, обязанный столкновениям четырех фононов, полученный за счет кубических членов в (1), не зависит от частоты. Он меньше, чем пробег ([1], формулы (2) и (5)), в $(\frac{\hbar\omega}{\theta})^2$ раз, следовательно, истинный пробег определяется выражением (7). Большая величина вероятности W , которая привела к (7), объясняется малостью разности энергетических уровней ($E_1 - E_t$), фигурирующей в (3).

Пробег (7) оказывается равным пробегу ([1], формула (1.11); [3], формула (4)), обязанныму столкновениям трех фононов, при частоте

$$\omega_0 \approx \frac{\theta}{2\hbar} \left(\frac{T}{Ms^2}\right)^{5/4}.$$

Очевидно, что главную роль в теплопроводности играют частоты порядка ω_0 .

Отсюда, в соответствии с [1—3], обычным образом находим для теплопроводности κ при $T \gg \theta$ следующее выражение:

$$\kappa \approx \frac{1}{3} nksa \left(\frac{Ms^2}{T}\right)^{5/4}, \quad (8)$$

где k — постоянная Больцмана, $n = 1/a^3$.

Здесь, при написании численного фактора, учитывалось, что существенный вклад в теплопроводность вносят фононы только одной какой-нибудь поляризации.

Таким образом, предельный закон для зависимости κ от T при $T \gg \theta$ имеет вид $\kappa \sim T^{-5/4}$, а не $\kappa \sim T^{-3/2}$.

Экспериментальные данные Эйкена¹, по-видимому, подтверждают закон (8), если мы учтем, что в интервале температур, исследованных Эйкеном, теплоемкость рассматриваемых им диэлектриков не была постоянной, а росла с температурой. Поэтому Эйкен вместо (8) должен был получить скорее закон $\kappa \sim \frac{1}{T}$, который был бы непонятен, если бы уже при постоянной теплоемкости мы имели бы соотношение $\kappa \sim \frac{1}{T}$ в соответствии с результатами Дебая и Пайерлса.

Из формулы (8) следует, что при $T = \theta$ теплопроводность хороших кристаллов диэлектриков должна быть всего лишь в 5—10 раз меньше, чем теплопроводность металлов при $T = \theta$. Упоминание о хороших кристаллах необходимо для того, чтобы не играли роль отражения упругих волн от граней поликристаллов и т. п. Если учесть, что $\frac{Ms^2}{\theta} \approx 300$, то по порядку величины при $T = \theta$, κ_d (теплопроводность диэлектриков) записывается согласно (8), так:

$$\kappa_d = 2nksa \frac{Ms^2}{\theta} \sim nka^2 \frac{Ms^2}{\hbar}. \quad (9)$$

Теплопроводность металлов κ_m получается обычным образом из теплоемкости электронов:

$$\frac{3\pi^2}{s} nk \frac{T}{T_0},$$

где T_0 — температура вырождения, их скорости

$$2(3\pi^2)^{-1/3} a \frac{T_0}{\hbar} \approx a \frac{Ms^2}{\hbar} (3\pi^2)^{1/3} \frac{2}{(3\pi^2)^{1/3}}$$

и свободного пробега, который при $T \gg \theta$ имеет вид (см., например, [6])

$$a = \frac{Ms^2}{T},$$

$$\kappa_m = \frac{2(3\pi^2)^{2/3}}{5} nk \frac{T}{Ms^2} a \frac{Ms^2}{\hbar} = nka^2 \frac{Ms^2 2}{\hbar} \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5} = 6nka^2 \frac{Ms^2}{\hbar}. \quad (10)$$

Если учесть еще теплопроводность решетки металлов, которая по порядку величины равна (9)¹, то мы приходим к выводу, что теплопроводность металлов при $T = \theta$ должна всего лишь в несколько раз превышать теплопроводность диэлектриков при $T = \theta$. Экспериментальные данные согласуются с этим выводом

¹ См. там же [5].

теории. Для иллюстрации приводим здесь данные о теплопроводности при $T = \theta$ у 19 металлов [9]:

Al	0,5	Fe	0,16	Ni	0,14	Sn	0,15
Cd	0,22	Pb	0,11	Pd	0,17	Ta	0,13
Cu	1,00	Mg	0,38	Pt	0,17	W	0,47(0,35)
Au	0,70	Mn	0,15	Rh	0,21	Zn	0,27
Ir	0,14	Mo	0,35	Ag	1,0		

Среднее значение $\chi_m (T = \theta)$ равно 0,33.

Сравнивая теплопроводностью хороших кристаллов диэлектриков, исследованных Эйкеном [4]:

NaCl	0,02
KCl	0,02
Кварц (параллельно оси)	0,05

находим согласие с выводом теории.

В заключение заметим, что при $T \ll \theta$ из (5') легко получается следующее выражение для пробега, обязанного столкновением четырех фононов из-за кубических членов в (1):

$$l = 10^{-3} a \left(\frac{Ms^2}{T} \right)^2 \left(\frac{\theta}{T} \right)^6 \quad (\theta \gg T). \quad (11)$$

Подробный анализ ситуации при низких температурах [2] показывает, что аналогично пробегу, обязанному четырехкратным столкновениям, возникающим из-за членов 4-го порядка в (1), пробег при низких температурах не играет роли, вследствие своей большой величины.

Мне доставляет удовольствие в заключение выразить здесь искреннюю благодарность проф. Л. Ландау за интерес к работе.

Физический институт
Академии наук СССР

Получено 22 мая 1942 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Pomeranchuk. J. Phys. USSR, 1941, 4, 259 (Собр. трудов, № 8).
2. I. Pomeranchuk. J. Phys. USSR, 1942, 6, 237 (Собр. трудов, № 11).
3. I. Pomeranchuk. Phys. Rev., 1941, 60, 820 (Собр. трудов, № 10).
4. A. Eucken. Ann. Phys., 4 folge, 1911, 34, 185.
5. Г. С. Ландсберг, А. А. Шубин. ЖЭТФ, 1940, 10, 247, 2.
6. A. Sommerfeld, H. Bethe. Hdb. d. Phys., 1933, 24/11, 2 Auflage, 522.
7. A. Sommerfeld, H. Bethe. Hdb. d. Phys., 1933, 24/11, 547.
8. I. Pomeranchuk. J. Phys. USSR, 1941, 4, 529 (Собр. трудов, № 9).
9. Handbook of Chemistry and Physics, twentieth edition, 1929, 1935 (Chemical Rubber Publishing Co.).

¹ При $T = \theta$ свободный пробег фононов в металлах и в диэлектриках имеет одинаковый порядок величины (см. по этому поводу [7], формулы (42), (18), а также [8]).

ЗАВИСИМОСТЬ ПОГЛОЩЕНИЯ ЗВУКА В ДИЭЛЕКТРИКЕ ОТ ЧАСТОТЫ И ТЕМПЕРАТУРЫ *

Определено влияние четырехфононных столкновений, идущих за счет процессов второго порядка теории возмущений, на поглощение звука. Найдена зависимость поглощения звука от частоты и температуры как в диапазоне частот, где звук есть звуковое поле, так и в диапазоне частот, где по отношению к одним фононам звук есть звуковое поле, а по отношению к другим фононам звук есть фонон.

Отмечено наличие дисперсии звука при $\hbar\omega_0 \gg \theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2$. При $\theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2 \ll \hbar\omega_0 \ll \theta \frac{T}{Ms^2}$ поглощении звука пропорционально частоте в степени $7/4$. Температурная зависимость поглощения звука определена для случая температур, значительно больших дебаевской ($\theta \ll T$).

Как было показано автором [1], поглощение звука в основной группе диэлектриков определяется изменением энтропии тепловых колебаний [2] такой частоты, на которой длина свободного пробега фононов за счет кубической ангармоничности оказывается равной той же длине за счет ангармоничности четвертого порядка (т. е. за счет столкновений, в которых принимают участие четыре фонана)¹. Тепловые колебания, о которых выше шла речь, отвечают той поляризации, которая соответствует максимальной скорости звука, распространяющегося в произвольном направлении (подробнее см. [1, 3, 4]). При вычислении длины свободного пробега за счет четырехфононных столкновений в работе [1] принимались во внимание лишь процессы первого порядка по теории возмущений. Как было показано в [4], процессы второго порядка, связанные с кубичной ангармоничностью и приводящие к четырехфононному рассеянию, дают большую вероятность такого рассеяния, нежели процессы первого порядка². Учитывая про-

* J. Phys. USSR, 1943, 7, 266. Перевод Б. Я. Зельдовича.

¹ Сходная ситуация имеет место и для теплопроводности диэлектриков при $T \gg \theta$ (здесь T — температура, θ — температура Дебая).

² В связи с тем, что второе приближение теории возмущений дает больший результат, чем первое, могут возникнуть сомнения по поводу сходимости решения, используемого в теории возмущений. Нетрудно показать, однако, что третье и последующие приближения дают значительно меньший результат, чем второе, и что начиная со второго приближения ряд сходится.

цессы во втором приближении, мы получим следующее выражение для частоты, на которой длины пробега за счет тройных и четверных столкновений становятся равными [4]:

$$\frac{\theta}{\hbar} \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^{1/4}, \quad (T \gg \theta) \quad (1)$$

(температуру выражаем в энергетических единицах) в отличие от выражения $\frac{\theta}{\hbar} \sqrt{\frac{T}{Ms^2}}$, использованного в [1]. В соответствии с (1) ([1], формула (1.17)) мы примем выражение для плотности диссипативной функции [3], определяющей поглощение

$$T\dot{\sigma} = \frac{Ms^2}{\theta} \left(\frac{Ms^2}{T} \right)^{1/4} n \hbar \overline{(\lambda_{ik} U_{ik})^2}, \quad (T \gg \theta). \quad (2)$$

Здесь и ниже используются те же обозначения, что и в [1] (M — масса элементарной ячейки, s — скорость звука, n — число молекул в cm^3 , U_{ik} — тензор звуковой деформации, λ_{ik} — материальный тензор, определяющий изменение частоты тепловых волн в звуковом поле [2] U_{ik} ; точка сверху означает дифференцирование по времени; черта над $\overline{(\lambda_{ik} U_{ik})^2}$ означает усреднение по всем направлениям). Установим теперь пределы применимости формулы (2). Она, очевидно, применима до тех пор, пока возрастающая частота внешнего звука ω_0 , умноженная на \hbar , не сравняется с неопределенностью энергии [5] Δe тех фононов, которые играют основную роль в поглощении. Δe связано с длиной свободного пробега обычным соотношением

$$\Delta e \approx \frac{\hbar s}{l}. \quad (3)$$

Частоте (1) отвечает длина свободного пробега, равная [3, 4]

$$l \sim a \left(\frac{Ms^2}{T} \right)^2 \quad (4)$$

(a — постоянная решетки).

Следовательно,

$$\Delta e \sim \frac{\hbar s}{a} \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2 \sim \theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2. \quad (5)$$

Таким образом, уравнение (2) применимо до частот ω_0 порядка

$$\omega_0^{\max} \approx \frac{\theta}{\hbar} \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2 \approx 10^{13} \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2 \text{ сек}^{-1}. \quad (6)$$

При комнатной температуре ω_0^{\max} равно 10^9 сек^{-1} ($M = 80 \cdot 10^{-24} \Gamma$, $s = 2,5 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$, $Ms^2 = 5 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$, $T = 4,2 \cdot 10^{-14} \text{ эрг}$. Здесь мы положили молекулярный вес равным 50).

Следует заметить, что хотя применение формулы (2) ни в коей мере не ограничено малыми частотами, в случае малых частот ос-

новная роль в поглощении звука принадлежит не внутреннему трению, рассмотренному здесь, а поглощению энергии звука вследствие ее ухода через точки закрепления колеблющейся системы; в случае поликристаллической структуры колеблющегося тела основная роль в поглощении звука принадлежит процессу экстинкции за счет теплопроводности [6]. Явление, выраженное формулой (2), можно наблюдать лишь в случае достаточно высоких частот; при этом предельная частота, начиная с которой главная роль в поглощении принадлежит выражению (2), зависит от способа и характера закрепления колеблющейся системы и от степени поликристалличности, принятой в рассматриваемой модели. Поэтому этот нижний предел для уравнения (2) не может иметь универсального вида. Таким образом, для частот, меньших $\frac{\theta}{\hbar} \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2$, где $T \gg \theta$, поглощение звука в диэлектриках пропорционально квадрату частоты звука (множитель $(\lambda_{ik} U_{ik})^2$!) и обратно пропорционально корню четвертой степени из температуры. (В [2] поглощение не зависело при этих условиях от температуры.) Длина свободного пробега звука l_0 (на которой энергия бегущей волны затухает в e раз), отвечающая уравнению (2), оказывается равной

$$l_0 = a \left(\frac{\theta}{\hbar \omega_0} \right)^2 \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^{1/4}, \quad [\hbar \omega_0 \ll \theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2]. \quad (7)$$

Например, если частота звука 10^8 сек^{-1} , то при комнатной температуре l_0 равно 10^2 см . Коэффициент поглощения $1/l_0 = 10^{-2} \text{ см}^{-1}$. На пределе применимости уравнения (6) l_0 равно 1 см .

Когда частота звука больше, чем $\Delta e/\hbar$ [5], то звук уже нельзя рассматривать как медленно меняющееся звуковое поле [5]. В случае очень высоких частот звука (умноженных на \hbar), пре-восходящих неопределенность энергии тепловых фононов с энергией порядка θ , звуковое колебание очевидно следует рассматривать как фонон [5]. (Отметим, что $\hbar s/l$ возрастает с ростом частоты тепловых фононов [3, 4]). При этом для l_0 получаются различные выражения в зависимости от того, квазипродольны или квазипоперечны рассматриваемые колебания [4]. В первом случае имеем

$$l_0^{\text{прод}} = a \frac{Ms^2}{T} \left(\frac{\theta}{\hbar \omega_0} \right)^4, \quad \theta \gg \hbar \omega_0 \gg \theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^{1/4} \quad (8)$$

(см. [3], формула (4.11)),

$$l_0^{\text{прод}} = a \left(\frac{Ms^2}{T} \right)^2, \quad \theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^{1/4} \gg \hbar \omega_0 \gg \theta \frac{T}{Ms^2} \quad (9)$$

(см. [4], формула (7)).

Следует отметить, что область применимости формулы (8) не слишком велика. Длина свободного пробега квазипоперечного

фонона была рассчитана Ландау и Румером [5]

$$f_0^{\text{попереч}} = a \frac{Ms^2}{T} \frac{\theta}{\hbar\omega_0}, \quad \theta \gg \hbar\omega_0 \gg \theta \frac{T}{Ms^2}. \quad (10)$$

Квазипоперечный звук поглощается значительно сильнее, чем квазипротодольный. Лишь граничные частоты ($\hbar\omega_0 \approx \theta$) имеют тот же коэффициент поглощения, по порядку величины не зависящий от типа поляризации.

В случае $\theta \frac{T}{Ms^2} \gg \hbar\omega_0 \gg \theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2$ звуковое колебание по отношению к одной части фононов является фононом, в то время как по отношению к другой части тепловых колебаний оно является звуком, т. е. медленно меняющимся во времени и в пространстве внешним полем. В этих условиях звук будет фононом по отношению к тем фононам, для которых $\hbar s/l$ меньше, чем $\hbar\omega_0$. По отношению к тепловым колебаниям, для которых $\hbar s/l$ больше, чем $\hbar\omega_0$, звук будет звуковым полем¹.

Использованный в [1] и [2] метод расчета поглощения может быть применен и в случае рассматриваемых здесь частот, однако теперь функция распределения фононов должна определяться не из кинетического уравнения, использованного в [1], формула (1.5) или в [2], а из кинетического уравнения, в котором сохранены члены $\frac{\partial f}{\partial t} + V\nabla f$ (здесь f — функция распределения, V — групповая скорость фона на)².

Как обычно, будем искать f в виде $f_0 + f_1$, где f_0 — планковское распределение и $f_1 \ll f_0$. Частота, уже возмущенная звуком, будет служить аргументом f_0 , т. е. [2]

$$f_0 = \frac{1}{e^{\hbar\omega(1+\lambda_{ik}U_{ik})/T} - 1} = \frac{T}{\hbar\omega(1 + \lambda_{ik}U_{ik})}.$$

Используя соотношения, следующие из канонических уравнений (\mathbf{F} есть волновой вектор):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + V\nabla f_0 + \dot{\mathbf{F}}\nabla_{\mathbf{F}}f_0 &= \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + V\nabla\omega + \mathbf{F}\nabla_{\mathbf{F}}\omega \right) = \\ &= \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} - V\dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}V \right) = \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial t}, \end{aligned}$$

и учитывая сохранение возмущенной частоты в случае столкновений, мы получим для f_1 уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + V\nabla f_1 + \dot{\mathbf{F}}\nabla_{\mathbf{F}}f_1 - \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{\text{столкн}} &= - \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \\ &= - \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \omega \lambda_{ik} U_{ik}. \end{aligned} \quad (11)$$

¹ На это обстоятельство обратил мое внимание Ф. С. Юдкевич.

² Обоснование такого подхода будет дано после формулы (18).

Здесь $\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{\text{столкн}}$ отвечает изменению функции распределения за счет столкновений между фононами

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{\text{столкн}} \sim \frac{f_1 s}{l}, \quad (12)$$

l следует взять из уравнений (8), (9) и (10).

Решение уравнений (11) при

$$U_{ik} = U_{ik}^0 e^{i(\mathbf{F}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t)}$$

имеет вид (как обычно, введение комплексных выражений означает, что следует взять вещественную часть полученных решений)¹

$$f_1 = \frac{-i \frac{T}{\hbar\omega} \lambda_{ik} \omega_0 U_{ik}}{-i\omega_0 + iV\mathbf{F}_0 - \frac{s}{l}} = \frac{\frac{T}{\hbar\omega} \lambda_{ik} U_{ik}}{i(V\mathbf{F}_0 - \omega_0) - \frac{s}{l}}. \quad (13)$$

Если ω_0 ($V\mathbf{F}_0 \sim \omega_0$) значительно меньше, чем $\frac{s}{l}$, то $f_1 = -\frac{l}{s} \frac{T}{\hbar\omega} \lambda_{ik} U_{ik}$, и мы получаем поглощение, определяемое уравнением (2). В общем же случае мы получаем решение (13), с помощью которого диссипативная функция $T\dot{\sigma}$ выражается обычным способом (см. [1], формула (1.12)):

$$T\dot{\sigma} = T \sum_{\omega j} \left(\ln \frac{f_0 + f_1 + 1}{f_0 + f_1} \right) (f_0 + f_1) = -T \sum_{\omega j} \frac{f_1(f_0 + f_1)}{f_0(f_0 + 1)}. \quad (14)$$

Здесь σ — энтропия, индекс j отмечает поляризацию фононов.

Поскольку $\dot{\sigma}$ положительно после суммирования по всем частотам и поляризациям фононов, в уравнении (14) остается лишь следующий член:

$$T\dot{\sigma} = T \sum_{\omega j} \frac{1}{f_0(f_0 + 1)} \left(\frac{T}{\hbar\omega} \right)^2 \frac{s}{l} (\lambda_{ik} U_{ik})^2 \frac{1}{(V\mathbf{F}_0 - \omega_0)^2 + \frac{s^2}{l^2}}. \quad (15)$$

Так как квазипротодольные колебания имеют значительно меньшую величину s/l , чем квазипоперечные (сравни уравнения (8) и (9) с уравнением (10)), то в уравнении (15) основная роль принадлежит квазипротодольным колебаниям, и в этом случае

$$\frac{s^2}{l^2} = \frac{s^2}{a^2} \frac{(\hbar\omega)^8}{\theta^8} \frac{T^2}{M^2 s^4}$$

при $\hbar\omega \gg \theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^{1/4}$ и $l = \text{const}$ при $\hbar\omega \ll \theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^{1/4}$.

¹ Членами $\dot{\mathbf{F}}\nabla_{\mathbf{F}}f_1 = -\nabla\omega\nabla_{\mathbf{F}}f_1 = -\omega\lambda_{ik}\nabla U_{ik}f_1$ можно пренебречь ввиду малости U_{ik} .

Если

$$\frac{s^3}{a^2} \frac{(\hbar\omega)^8}{\theta^8} \frac{T^2}{M^2 s^2} \gg \omega_0^2, \quad (\omega_0 \sim FV_0),$$

то функция под знаком суммы в уравнении (15) зависит от ω как const/ω^4 .

В противоположном случае в результате интегрирования по углам мы получаем либо не зависящую от ω константу (случай, когда возможен резонансный (квазипоперечный) звук), либо значение, пропорциональное ω^4 (квазипротодольный звук, для которого, согласно условию, резонанс невозможен [1, 3]).

Таким образом, ясно, что важны те квазипротодольные частоты ω' , для которых число столкновений $s l$ в единицу времени равно частоте звука ω_0 :

$$\frac{s}{a} \left(\frac{\hbar\omega'}{\theta} \right)^4 \frac{T}{Ms^2} = \omega_0, \\ \hbar\omega' = \theta \left(\frac{a\omega_0}{s} \right)^{1/4} \theta \left(\frac{Ms^2}{T} \right)^{1/4} \approx \theta \left(\frac{\hbar\omega_0}{\theta} \right)^{1/4} \cdot \left(\frac{Ms^2}{T} \right)^{1/4}; \quad (16)$$

поскольку $\theta \frac{T}{Ms^2} \gg \hbar\omega_0 \gg \theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2$, то $\hbar\omega' \gg \theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^{1/4}$.

Учитывая уравнение (16), получим окончательное выражение для $T\delta$

$$T\delta = \frac{Ms^2}{\theta} n \hbar \left(\frac{Ms^2}{T} \right)^{1/4} \overline{(\lambda_{ik} U_{ik})^2} \left[\frac{\theta}{\hbar\omega_0} \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2 \right]^{1/4}, \\ \theta \frac{T}{Ms^2} \gg \hbar\omega_0 \gg \theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2. \quad (17)$$

Соответствующая длина свободного пробега

$$l = a \left(\frac{\theta}{\hbar\omega_0} \right)^{1/4} \left(\frac{Ms^2}{T} \right)^{1/4}, \\ \theta \frac{T}{Ms^2} \gg \hbar\omega_0 \gg \theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2. \quad (18)$$

Таким образом, в рассмотренном диапазоне частот поглощение как квазипротодольных, так и квазипоперечных волн пропорционально частоте в степени $7/4$. Поглощение звука различных поляризаций отличается, конечно, коэффициентом, величина которого порядка единицы. Существенное различие в поглощении квазипротодольного и квазипоперечного звука начинается на частотах, больших, чем $\theta \frac{T}{Ms^2}$ (см. (8), (9) и (10)).

Из вывода уравнения (17) следует, что в поглощении звука в диапазоне $\theta \frac{T}{Ms^2} \gg \hbar\omega_0 \gg \theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2$ основную роль играют фононы, у которых квантовая неопределенность $\Delta\varepsilon$ (3) порядка $\hbar\omega_0$.

Для таких фононов рассмотрение звука в виде внешнего звукового поля по порядку величины правильно. Это делает законным применение использованного здесь метода, в котором звук вводится в качестве внешнего поля, даже и в случае, когда $\hbar\omega_0$ меньше, чем $\Delta\varepsilon$. Оказывается, что фононы, имеющие $\Delta\varepsilon > \hbar\omega_0$, не играют какой-либо роли в поглощении звука в рассмотренном здесь диапазоне частот.

Заметим также, что если ω_0 соответствует квазипоперечному звуку, то при любом направлении распространения квазипоперечного звука может выполняться следующее равенство [4, 5]:

$$V_{\text{прод}} F_0 - \omega_0 = 0. \quad (19)$$

Соответствующая область значений ω не играет основной роли в уравнении (15), поскольку, как уже было показано, существенные частоты, на которых $\frac{s^2}{l^2} \approx (VF_0 - \omega_0)^2$, независимо от направления движения фона ω ¹. Квазипротодольные фононы, удовлетворяющие уравнению (19), играют основную роль в поглощении квазипоперечного звука лишь при

$$\hbar\omega_0 \gg \theta \frac{T}{Ms^2}.$$

Очевидно, что при $\hbar\omega_0 \ll \theta \frac{T}{Ms^2}$ резонансные члены (19) дают выражение для $T\delta$ того же порядка величины, что и уравнение (17).

Окончательно получаем следующие выражения для длины свободного пробега звука (т. е. длины, на которой энергия бегущей звуковой волны уменьшается в e раз):

Квазипротодольный звук
по формуле (7)

$$\hbar\omega_0 \ll \theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2, \quad l \approx a \left(\frac{\theta}{\hbar\omega_0} \right) \left(\frac{T}{Ms^2} \right);$$

по формулам (18)

$$\theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2 \ll \hbar\omega_0 \ll \theta \frac{T}{Ms^2},$$

$$l \approx a \left(\frac{\theta}{\hbar\omega_0} \right)^{1/4} \left(\frac{Ms^2}{T} \right)^{1/4};$$

¹ Резонанс в уравнении (15) может иметь место при любом направлении движения фона ω , в отличие от случая $\hbar\omega_0 \gg \theta \frac{T}{Ms^2}$, когда резонанс возможен лишь в избранном направлении [5].

К ТЕОРИИ ПОГЛОЩЕНИЯ
ИНФРАКРАСНЫХ ЛУЧЕЙ В КРИСТАЛЛАХ,
ОБЛАДАЮЩИХ ЦЕНТРОМ СИММЕТРИИ *

по формулам (9)

$$\theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right) \ll \hbar\omega_0 \ll \theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^{1/4},$$

$$l \approx a \left(\frac{Ms^2}{T} \right)^2;$$

по формулам (8)

$$\theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^{1/4} \ll \hbar\omega_0 \ll \theta, \quad l \approx a \left(\frac{\theta}{\hbar\omega_0} \right)^4 \frac{Ms^2}{T}.$$

Квазипоперечный звук

по формулам (7)

$$\hbar\omega_0 \ll \theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2, \quad l \approx a \left(\frac{\theta}{\hbar\omega_0} \right)^2 \left(\frac{T}{Ms^2} \right);$$

по формулам (18)

$$\theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2 \ll \hbar\omega_0 \ll \theta \frac{T}{Ms^2},$$

$$l \approx a \left(\frac{\theta}{\hbar\omega_0} \right)^{1/4} \left(\frac{Ms^2}{T} \right)^{1/4};$$

по формулам (10)

$$\theta \frac{T}{Ms^2} \ll \hbar\omega_0 \ll \theta, \quad l \approx a \frac{Ms^2}{T} \frac{\theta}{\hbar\omega_0}.$$

Все приведенные здесь формулы относятся к температурам, значительно большим дебаевской ($\theta \ll T$).

Очевидно, что при $\hbar\omega_0 \gg \theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2$ должна быть дисперсия звука, поскольку при таких частотах важны релаксационные явления — период звукового колебания порядка времени релаксации l/s тех фононов, которые играют главную роль в поглощении. (Известно, что это условие имеет общий вид для любых релаксационных явлений). Дисперсию звука при $\hbar\omega_0 \gg \theta \left(\frac{T}{Ms^2} \right)^2$ также можно рассматривать с помощью полученной нами функции распределения f_1 [см. формулу (13)].

В заключение я хочу поблагодарить проф. Л. Ландау за ценные советы и интересные обсуждения в процессе выполнения настоящей работы.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Получено
11 января 1943 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Померанчук. ЖЭТФ, 1941, 11, 455. (Собр. трудов, № 9).
2. А. Ахиезер. J. Phys. USSR, 1939, 1, 277.
3. И. Померанчук. ЖЭТФ, 1941, 11, 246. (Собр. трудов, № 8).
4. И. Померанчук. J. Phys. USSR, 1943, 7, 197. (Собр. трудов, № 12).
5. L. Landau, E. Rumer. Phys. Zs. Sowiet., 1937, 11, 18.
6. C. Zener. Phys. Rev., 1938, 53, 582.

Показывается, что в кристаллах, имеющих центр симметрии, поглощение инфракрасных лучей невозможно, если рассматривать простую ангармоническую связь между вынужденным колебанием, возбужденным электромагнитным полем и остальными колебательными степенями свободы кристалла. В отличие от теории Паули, ширина линий поглощения инфракрасных лучей определяется не кубической ангармоничностью, а ангармоничностью четвертого порядка. Благодаря этому при высоких температурах инфракрасная ширина поглощения должна быть пропорциональной квадрату температуры.

Для определения коэффициентов поглощения инфракрасных лучей в кристаллах и их отражения от кристаллов (поглощение и отражение остаточных лучей) необходимо учитывать взаимодействие между вынужденным колебанием кристалла, возбужденным электрическим полем световой волны, и всеми остальными тепловыми колебаниями кристалла. Наличие такого взаимодействия приводит к затуханию возбужденного инфракрасными лучами колебания, а следовательно, приводит к появлению конечной ширины линии поглощения. Ширина инфракрасных линий была вычислена Паули [1] на основании предположения о существовании простой ангармонической связи между вынужденным колебанием, возбужденным светом, и остальными колебательными степенями свободы кристалла. Энергия взаимодействия колебаний в приближении простой ангармоничности, как известно, имеет вид

$$W = \frac{1}{6} \sum_{iklm} A_{ikl}^{nm} (U_i^{on} - U_i^{om}) (U_k^{on} - U_k^{om}) (U_l^{on} - U_l^{om}), \quad (1)$$

где U_i^{on} — проекция на ось i смещения атома (молекулы) n из положения равновесия; A_{ikl}^{nn} — постоянные. В (1) вместо одной из разностей $U_i^{on} - U_i^{om}$ можно подставить разность вынужденных смещений, вызванных электрическим полем, а вместо двух других разностей $U_i^{on} - U_i^{om}$ разность тепловых смещений.

Пользуясь выражением типа (1), Паули [1], а затем развивавшие его работу Борн и Блекман [2] получают выражение для ширины линий поглощения в инфракрасной области и для зависи-

* ЖЭТФ, 1943, 13, 428; J. Phys. USSR, 1943, 7, 262.

мости показателя преломления от частоты. При этом в работе Паули и остальных работах волновой вектор инфракрасных лучей считался равным нулю, а поляризуемость¹ ионов не зависела от тепловых колебаний. Однако легко показать, что в кристаллах, обладающих центром симметрии², энергия взаимодействия типа (1) обращается в нуль тождественно, если не учитывать эффектов, связанных с волновым вектором электромагнитной волны, или влияния тепловых колебаний на поляризуемость. Энергия взаимодействия между вынужденным колебанием, возбужденным инфракрасными лучами, и остальными колебаниями кристалла, не учитывающая волнового вектора и влияния тепловых колебаний на поляризуемость, не равна нулю только в пьезо- или пиро-электрических кристаллах. В кристаллах, имеющих центр симметрии, обращается тождественно в нуль не только энергия взаимодействия типа (1) (кубическая ангармоничность), но и энергия взаимодействия в любом более высоком приближении, если считать, что поляризуемость ионов решетки не зависит от тепловых колебаний решетки (влияние ангармоничности на поляризуемость) и не учитывать волнового вектора электромагнитной волны. Так как эффекты волнового вектора малы по сравнению с эффектом влияния тепловых колебаний на поляризуемость, мы в дальнейшем будем иногда говорить только о последнем эффекте.

Только учитывая влияние³ тепловых колебаний на поляризуемость, можно получить не равное нулю выражение для энергий взаимодействия между вынужденным колебанием, возбужденным инфракрасными лучами, и остальными колебательными степенями свободы кристалла. Легко видеть, что влияние тепловых колебаний на поляризуемость может появиться только при рассмотрении ангармоничности не ниже четвертого порядка, т. е. членов в потенциальной энергии кристалла, пропорциональных четвертой степени смещений атомов решетки из положения равновесия [а не третьей степени, как в (1)]. Очевидно, что температурная зависимость ширины инфракрасных полос и другие характеристики инфракрасного поглощения должны иметь другой вид в кристаллах с центром симметрии, чем полученные из (1).

Для доказательства наших утверждений рассмотрим в общем виде выражение для потенциальной энергии колебаний кристалла, имеющего центр симметрии, при наличии электрического поля. После общего доказательства равенства нулю (1) мы ради наглядности докажем это же и для частного случая линейной цепочки

¹ Под выражением поляризуемость здесь и ниже понимается отношение эффективного заряда иона к его квазиупругому коэффициенту, т. е. коэффициент пропорциональности между амплитудой вынужденного колебания и напряжением поля.

² К таким принадлежат многие из кристаллов, исследованных экспериментально (например, NaCl, KCl).

³ На роль зависимости поляризуемости от тепловых колебаний указал мне проф. Ландау.

атомов, взаимодействующих только со своими соседями, так как в этом случае соотношения особенно просты. В дальнейшем мы пренебрежем волновым вектором электрического поля и пренебрежем влиянием на поляризуемость тепловых колебаний кристалла. Благодаря последнему пренебрежению отклонение атома (молекулы) кристалла из положения равновесия может быть записано так:

$$U_{i+}^{on} = \alpha_{ik}^+ E_k + U_i^n; \quad U_{i'-}^{on'} = \alpha_{i'k}^- E_k + U_{i'}^{n'}. \quad (2)$$

Здесь U_+^{on} — отклонение положительного иона n , $U_-^{on'}$ — отклонение отрицательного иона n' ; n и n' означает тройку чисел, определяющих номер элементарной ячейки, к которой принадлежит рассматриваемый ион.

Ради простоты мы рассмотрим кристалл, в котором имеются только два сорта ионов, хотя обобщение на случай произвольного числа ионов очевидно. α_{ik}^\pm — тензоры поляризуемости, которые по условию мы считаем не зависящими от тепловых колебаний, представленных в (2) членами U_i^n и $U_{i'}^{n'}$; E_k — проекция электрического поля на ось k . Так как мы пренебрежем волновым вектором инфракрасной волны, то $\alpha_{ik}^\pm E_k$ не зависят от координат (от n).

Разложим теперь потенциальную энергию колебаний W в ряд по степеням разностей отклонений атомов из положений равновесия, причем это разложение мы не будем обрывать, т. е. разложим W в точный ряд Тейлора. Символически это разложение записывается так¹:

$$W = W_0 + \sum_{nmN} A^{nmN} (U^{on} - U^{om})^N. \quad (3)$$

Нас интересует член в (3), пропорциональный электрическому полю. Он получится, очевидно, за счет тех членов в (3), в которые входит разность смещений положительного и отрицательного ионов.

$$\begin{aligned} (U^{on} - U^{om})^N &= (\alpha^+ E - \alpha^- E + U^n - U^m)^N \rightarrow \\ &\rightarrow N (\alpha^+ - \alpha^-) E (U^n - U^m)^{N-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

если U^{on} соответствует положительному, а U^{om} — отрицательному иону. Таким образом, интересующая нас часть в (3) может быть записана так:

$$V = \sum_{nmN} N A^{nmN} (\alpha^+ - \alpha^-) E (U^n - U^m)^{N-1}. \quad (5)$$

¹ A^{nmN} — постоянные, зависящие от взаимного расстояния элементарных ячеек n и m и углов между линией, их соединяющей, и кристаллографическими осями.

Так как кристалл по условию обладает центром симметрии, то вместо (5) мы можем написать выражение, в котором положительные и отрицательные ионы заменены местами:

$$V = \sum_{nmN} NA^{nmN} (\alpha^- - \alpha^+) E (U^n - U^m)^{N-1}. \quad (6)$$

Но (6) равно (5) с обратным знаком. Отсюда следует, что $V = 0$. Докажем теперь для наглядности то же утверждение для простейшего примера линейной цепочки атомов, в которой взаимодействуют только соседи. Соседние атомы в такой цепочке имеют противоположный заряд. Энергия взаимодействия в такой цепочке имеет вид

$$W = \sum_{nN} A_N (U^{on} - U^{on+1})^N, \quad (7)$$

где A_N — постоянные. Снова подставляем вместо U^{on} и U^{on+1} выражения типа (2)

$$U^{on} = \alpha_n E + U_n, \quad U^{on+1} = \alpha_{n+1} E + U_{n+1}.$$

Выписываем член, пропорциональный полю,

$$\begin{aligned} V &= E \sum_{nN} N A_N (\alpha_n - \alpha_{n+1}) (U_n - U_{n+1})^{N-1} = \\ &= E \sum_{nN} N A_N (\alpha_n - \alpha_{n+1}) \{(U_n - U_{n+1})^{N-1} - (U_{n+1} - U_{n+2})^{N-1}\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Очевидно, что $(\alpha_n - \alpha_{n+1})$ не зависит от n , поэтому мы выносим ее из-под знака суммирования по n

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = -(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}).$$

Так как эффекты, возникающие на краях цепочки, ничтожны, то сумму

$$\sum_n (U_{n+1} - U_{n+2})^{N-1}$$

можно заменить на

$$\sum_n (U_n - U_{n+1})^{N-1},$$

что дает $V = 0$, т. е. член, пропорциональный электрическому полю, в энергии взаимодействия колебаний тождественно обращается в нуль. Легко видеть, что в нашем выводе [и в общем случае (5), (6), и в случае линейной цепочки (8)] существенную роль играла независимость разностей поляризуемости двух ионов от места, занимаемого этой парой в решетке [независимость $|\alpha_n - \alpha_{n-1}|$ от n в (8), или зависимость $\alpha^- - \alpha^+$ только от разности

n и n' в (5)]. Если поляризуемость ионов одного знака зависит от положения иона в решетке, энергия возмущения вынужденного колебания тепловыми колебаниями не исчезает. Требуемая зависимость поляризуемости от положения иона в решетке может быть получена в идеальном кристалле, свободном от химических или физических примесей, либо за счет эффектов, связанных с волновым вектором инфракрасных лучей, либо за счет эффектов, связанных с воздействием тепловых колебаний на поляризуемость. Воздействие тепловых колебаний на поляризуемость приводит к замене α_n на

$$\alpha_{n,n_n} + \sum_{n'} B_{n-n'} (U_n - U_{n'}), \quad (9)$$

где $B_{n-n'}$ — постоянные, они имеют порядок величины, равный a/n ; a — постоянная решетки. Такой порядок величины получается, если учесть, что изменение поляризуемости α должно быть порядка самой поляризуемости, когда расстояние между ионами меняется на величину, сравнимую с a . В то время как эффекты волнового вектора порядка квадрата отношения¹ постоянной решетки к длине волны инфракрасных лучей, т. е. $\sim 10^{-6}$, эффекты, связанные с воздействием тепловых колебаний на поляризуемость, порядка квадрата отношения амплитуды тепловых колебаний к постоянной решетки, т. е. $\sim T/T_0$ (T — температура, T_0 — атомная температура $\sim 10^4$ °К), если $T \gg \theta$, θ — дебаевская температура; при комнатной температуре $\frac{T}{T_0} \sim \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$.

Отсюда видно, что эффекты волнового вектора малы по сравнению с эффектами, обусловленными влиянию тепловых колебаний на поляризуемость.

Если подставить (9) в (1), то получается выражение для энергии V , пропорциональное кубу тепловых смещений из положения равновесия и электрическому вектору инфракрасной волны

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \sum_{iklmn} A_{ikl}^{nm} (U_i^n - U_i^m) (U_l^n - U_l^m) \left[\sum_{n_1} B_{nn_1}^{k\tau\rho} E_\tau (U_{\rho}^n - U_{\rho}^{n_1}) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n_2} B_{mn_2}^{k\tau\rho} E_\tau (U_{\rho}^m - U_{\rho}^{n_2}) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Равенство (10) имеет вид формально такой же, как если бы эффект поглощения инфракрасных лучей происходил от ангармоничности четвертого порядка². Как известно, эффекты куби-

¹ Вероятность поглощения пропорциональна квадрату матричного элемента возмущающей энергии.

² То, что в кристаллах, имеющих центр симметрии, в приближении кубической ангармоничности исчезает связь между электрическим полем и тепловыми колебаниями, т. е. исчезает выражение

$$A_{ikl}^{nm} (\alpha_{ir}^n - \alpha_{ir}^m) E_r (U_k^n - U_k^m) (U_l^n - U_l^m), \quad (11)$$

О ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СОЛЕЙ,
ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В МЕТОДЕ
МАГНИТНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ*

Совместно с А. Ахисевором

ческой ангармоничности дают ширину инфракрасных линий, пропорциональную температуре T [1, 2]. Очевидно, что в соответствии с (10) ширина инфракрасных линий должна быть пропорциональной квадрату температуры, а не первой ее степени. Так как этот закон должен иметь место при $T \gg \theta$, существующие экспериментальные данные [3] (11), по-видимому, не могут быть использованы для надежного сравнения с теорией, так как в большинстве случаев экспериментальные данные относятся к температурам, близким к дебаевской температуре или более низким. Представляется крайне желательным экспериментальное исследование поглощения инфракрасных лучей в кристаллах, обладающих центром симметрии, при температурах, по крайней мере в несколько раз превышающих дебаевскую.

В заключение я хочу выразить искреннюю благодарность проф. Л. Ландау за важные указания и интерес к работе.

Физический институт им. П. Н. Лебедева Получено 6 августа 1943 г.
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Pauli. Verh. d. D. Phys. Ges. (3), 1925, 6, 10.
2. M. Born, M. Blackman. Zs. f. Phys., 1933, 82, 551.
3. К. Шефер, Ф. Матосси. Инфракрасные спектры. ОНТИ, 1935, стр. 309—315.

Показано, что теплопроводность солей с магнитным взаимодействием между ионами, используемых в методе магнитного охлаждения в области температур $T < \frac{W}{k} \sim 0,02^\circ$, определяется не колебаниями решетки, а энергетическим спектром системы спинов. На эту часть теплопроводности влияет магнитное поле и она становится пренебрежимо малой при достаточно сильных полях. В этом случае остается лишь фоновая теплопроводность.

В работе [1] мы рассмотрели явление релаксации в солях, используемых в методе магнитного охлаждения, при определенных предположениях о характере энергетического спектра системы спинов. Наличие такого энергетического спектра приводит к дополнительной теплопроводности, так как элементарные возбуждения спиновой системы — экситоны, как мы будем называть их в дальнейшем — участвуют в распространении тепла.

Статья И. Померанчука [2] посвящена детальному изучению парамагнитных диэлектриков с обменным взаимодействием между атомами, теплопроводность которых заметно зависит от существования энергетического спектра парамагнитных ионов. В настоящей статье мы определим температурную зависимость теплопроводности солей, используемых в методе магнитного охлаждения, как при наличии магнитного поля, так и без него. Хотя в рассматриваемых солях главную роль играет магнитное, а не обменное взаимодействие между ионами, в отсутствие поля это не приводит к различному поведению теплопроводности как функции температуры, по сравнению с диэлектриком с обменным взаимодействием, если предположить, что элементарные возбуждения подчиняются одной и той же статистике. В дальнейшем, так же как и в [1, 2], предполагается, что возбуждения подчиняются статистике Ферми — Дирака.

Введение достаточно сильного магнитного поля в случае диэлектрика с магнитным взаимодействием превращает непрерывный спектр энергий системы спинов в дискретный. Как следствие этого, теплоемкость системы спинов, а следовательно, и тепло-

* J. Phys. USSR, 1944, 8, 216. Перевод А. М. Переломова.

легко понять, если учесть требование инвариантности потенциальной энергии тепловых колебаний при замене E на $-E$ (центр симметрии). Если бы (11) не было равно нулю, то, будучи квадратичным в $U^n - U^m$ (подобно потенциальной энергии гармонических колебаний), оно приводило бы к линейной зависимости скорости звука от E , что в кристаллах, обладающих центром симметрии, не может быть.

проводность содержит множитель $e^{-2\mu_0 H/kT}$, т. е. экспоненциально падает с понижением температуры.

Таким образом, теплопроводность рассматриваемых солей в области низких температур зависит от поля и с увеличением его падает.

Предположим, сначала, что поле отсутствует. Тогда теплопроводность соли κ равна сумме двух частей: фононной проводимости κ_f , которая возникает из-за колебаний решетки, и экситонной проводимости κ_m , которая связана с существованием вышеупомянутого спектра энергий. Порядок величины фононной и экситонной теплопроводности может быть определен по хорошо известным формулам:

$$\kappa_f \sim l_f s c_f, \quad \kappa_m \sim l_m v c_m, \quad (1)$$

где l_f и l_m — средние длины свободного пробега фононов и экситонов соответственно, s и v — соответствующие скорости, а c_f и c_m — теплоемкости решетки и спиновой системы.

Последние равны

$$c_f \sim kn \left(\frac{T}{\theta} \right)^3, \quad c_m \sim kn \frac{T}{\mu}, \quad (2)$$

где n — число атомов в 1 см^3 , θ — температура Дебая, а μ — температура вырождения экситонов, имеющая тот же порядок величины, что и энергия магнитного взаимодействия W между соседними ионами, т. е. приближенно $0,02^\circ \text{ К}$.

Средние длины свободного пробега l_f и l_m определяются различными возможными процессами взаимодействия фононов и экситонов и могут быть представлены в следующем виде:

$$\frac{1}{l_f} = \frac{1}{l_{ff}} + \frac{1}{l_{fm}} + \frac{1}{l_{fr}} + \frac{1}{l_{fw}}, \quad \frac{1}{l_m} = \frac{1}{l_{mm}} + \frac{1}{l_{mf}} + \frac{1}{l_{mr}}. \quad (3)$$

Здесь l_{ff} — средняя длина свободного пробега фононов, связанная с их взаимодействием друг с другом; l_{mm} имеет тот же смысл для экситонов, l_{fm} — средняя длина свободного пробега фононов, обусловленная их взаимодействием с экситонами, l_{mf} имеет аналогичный смысл для экситонов, l_{fr} и l_{mr} — средние длины свободного пробега фононов и экситонов, соответственно обусловленные присутствием примесей и, наконец, l_{fw} — средняя длина свободного пробега фононов, связанная с конечными размерами тела. В области сверхнизких температур ($< \mu$), которыми мы интересуемся, можно пренебречь l_{ff} и l_{fr} , так как $l_{ff} \sim e^{\frac{6}{2T}}$, $l_{fr} \sim T^{-4}$.

Средняя длина свободного пробега фононов определяется в зависимости от условий или величиной l_{fm} или $-l_{fw}$. Последняя величина по порядку равна размерам образца L . Для того чтобы вычислить l_{fm} , мы дадим выражения для вероятностей простейших процессов, описывающих взаимодействие экситонов с решеткой.

Как было показано в [1], такими процессами являются: столкновение двух экситонов с поглощением (излучением) фона и рассеяние фона экситоном. Вероятности этих процессов соответственно равны (см. [1] формулы (5), (7))

$$W^e = \frac{2\pi}{\hbar N^3} \frac{U^2 W^2}{\hbar M s^2} \delta(\varepsilon_{p_1}^0 + \varepsilon_{p_2}^0 - \varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_2} + \hbar\omega),$$

$$W^s = \frac{2\pi\hbar}{N^2} \left(\frac{U}{M s^2} \right)^2 \omega_0 \omega \delta(\varepsilon_{p_0} + \hbar\omega_0 - \varepsilon_p - \hbar\omega). \quad (4)$$

Здесь N означает полное число атомов в кристалле, M — масса атома, s — скорость звука, U — энергия расщепления ионного уровня электрическим полем решетки, ε_p — энергия экситона с импульсом p , $\hbar\omega$ — энергия фона с частотой ω ¹.

После интегрирования W^e по всем состояниям экситонов с импульсами p_1^0 , p_2^0 , p_1 и замены $\hbar\omega$ средним значением kT мы получим среднюю вероятность поглощения (излучения) фона W_{fm}^e . При интегрировании удобно ввести в качестве переменных энергии экситонов и углы в их импульсных пространствах. Якобиан преобразования $\sim \frac{1}{W^{as}}$ (a — постоянная решетки), область интегрирования по отношению к энергии каждого экситона $\sim kT$, так что интегрирование дает kT для каждого дифференциала энергии. δ -Функция исчезает при интегрировании по одному из углов (например, по углу между p_1 и $p_1^0 + p_2^0 + f$), а подынтегральное выражение приобретает множитель $\sim 1/W$. Мы получаем

$$W_{fm}^e \sim \frac{U^2 W^2}{\hbar M s^2} \int \frac{1}{\hbar\omega} \frac{d\varepsilon_{p_1}^0 d\varepsilon_{p_2}^0 d\varepsilon_{p_1}}{W^3 W} \sim \frac{1}{\hbar} \left(\frac{U}{W} \right)^2 \frac{(kT)^3}{M s^2}. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что средняя вероятность рассеяния фона экситоном W_{fm}^s много меньше, чем W_{fm}^e . Фактически

$$W_{fm}^s = \int W^s d\tau_{p_0} d\tau_p \sim \hbar \left(\frac{U}{M s^2} \right)^2 \int \frac{\omega_0 \omega a f d\varepsilon_{p_0} d\varepsilon_p}{k\theta W^2} \sim$$

$$\sim \frac{k\theta}{\hbar} \left(\frac{U}{W} \right)^2 \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \left(\frac{kT}{M s^2} \right)^2, \quad (6)$$

где θ — температура Дебая; δ -функция исчезает при интегрировании по углу между p и $p_0 + f$. Из сравнения (5) и (6) следует, что $W_{fm}^s < W_{fm}^e$.

¹ Следует заметить, что излучение фона может происходить в первом приближении теории возмущений также из-за изменения энергии взаимодействия экситонов за счет теплового движения. Однако вероятность таких процессов оказывается меньше W^e .

Средняя длина свободного пробега, соответствующая W_{fm}^e , равна

$$l_{fm} \sim \frac{s}{W_{fm}^e} \sim a \left(\frac{W}{U} \right)^2 \frac{\theta}{T} \frac{Ms^2}{kT}. \quad (7)$$

При достаточно низких температурах средняя длина свободного пробега фононов определяется не их взаимодействием с экситонами, а размерами образца L . Фононная теплопроводность будет иметь вид

$$\kappa_f \sim kn \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 sL. \quad (8)$$

Средняя длина свободного пробега экситонов определяется главным образом взаимодействием между ними и присутствием примесей. Что касается последнего фактора, то l_{mr} по порядку величины равна $l_{mr} \sim \frac{a}{\varepsilon}$, где ε — относительная концентрация примесей, l_{mm} — обратно пропорциональна T^2 и имеет порядок величины $l_{mm} \sim a \left(\frac{W}{kT} \right)^2$.

Средняя длина свободного пробега экситонов из-за их взаимодействия с решеткой l_{mf} обратно пропорциональна T^3 и таким образом много больше, чем l_{mm} .

Действительно,

$$W_{mf}^e = \int W^e d\tau_{p_1} d\tau_{p_2} d\tau_{p_3} \sim \frac{1}{\hbar} \frac{U^2 W^2}{Ms^2} \int \frac{af}{\hbar \omega k \theta} \frac{d\epsilon_p d\epsilon_{p_1} d\epsilon_{p_2}^0}{W^3} \sim \\ \sim \frac{1}{\hbar} \frac{U^2}{W} \frac{kT}{Ms^2} \left(\frac{T}{\theta} \right)^2.$$

Так как скорость экситонов $V \sim \frac{a}{\hbar} W$, то

$$l_{mf} \sim \frac{V}{W_{mf}^e} \sim a \left(\frac{W}{U} \right)^2 \frac{Ms^2}{kT} \left(\frac{\theta}{T} \right)^2. \quad (9)$$

Для температур $kT < \sqrt{\varepsilon} W$ средняя длина свободного пробега экситонов l_m приближенно равна l_{mr} . С помощью (2) мы получаем следующее выражение для экситонной теплопроводности:

$$\kappa_m \sim kn \frac{a^2}{\varepsilon \hbar} kT, \quad (kT < \sqrt{\varepsilon} W). \quad (10)$$

Если $\sqrt{\varepsilon} W < kT < W$, то $l_m \sim l_{mm}$, и экситонная теплопроводность будет иметь вид

$$\kappa_m \sim n \frac{a^2 W^2}{kT}, \quad (\sqrt{\varepsilon} W < kT < W). \quad (11)$$

Таким образом, видно, что экситонная теплопроводность при температурах $kT < \sqrt{\varepsilon} W$ уменьшается с уменьшением T , тогда

как в области температур $\sqrt{\varepsilon} W < kT < W$ она уменьшается с увеличением T . При $T \sim \sqrt{\varepsilon} W$ теплопроводность достигает максимального значения.

Сравним экситонную и фононную теплопроводности, которые определяются формулами (11) и (8)

$$\frac{\kappa_m}{\kappa_f} \sim \frac{a^2}{sL} \left(\frac{\theta}{T} \right)^3 \frac{W^2}{\hbar k T} \sim \frac{a}{L} \frac{W^2}{k T k \theta} \left(\frac{\theta}{T} \right)^3. \quad (12)$$

Для $kT \sim W \sim 0,02^\circ$ мы получим, предполагая, что $L \sim 1 \text{ см}$, $\frac{\kappa_m}{\kappa_f} \sim 1$; при более низких температурах экситонная теплопроводность становится больше фононной теплопроводности.

Предыдущее рассмотрение относилось к случаю отсутствия магнитного поля. Если приложить достаточно сильное поле $\mu_0 H \gg \gg W$, то вырождение состояния отдельного иона полностью снимается и, следовательно, непрерывный спектр превращается в дискретный. Теплопроводность c_m в этом случае равна

$$c_m \sim kn \left(\frac{\mu_0 H}{kT} \right)^2 e^{-2\mu_0 H/kT}.$$

Экситонная теплопроводность при $kT \ll \mu_0 H$ таким образом пренебрежимо мала. Так как фононная теплопроводность не зависит от поля, то в области температур $kT \lesssim W$ включение поля должно привести к уменьшению, а его выключение к увеличению теплопроводности. Заметим, что можно прийти к подобному заключению и относительно поглощения звука, которое также зависит от поля.

В заключение мы хотели поблагодарить здесь проф. Л. Ландау за интерес к этой работе.

Физико-технический институт
Академии наук УССР

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Получено
22 декабря 1943 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Akhieser, I. Pomeranchuk. J. Phys. USSR, 1944, 8, 206. (Собр. трудов, № 16).
2. I. Pomeranchuk. J. Phys. USSR, 1941, 4, 356. (Собр. трудов, № 7).

О ТЕПЛОВОМ РАВНОВЕСИИ МЕЖДУ СПИНАМИ И РЕШЕТКОЙ*

Совместно с А. Ахиезером

Предполагается, что система спинов и решетка находятся порознь в состоянии теплового равновесия. Исходя из определенных представлений об энергетическом спектре спиновой системы, определяется количество тепла Q , переходящее в единицу времени от решетки к спинам как функция температур решетки T_l и спинов T_s . Q имеет вид $\text{const} \cdot T_s^6 q(T_s/T_l)$. Функция $q(x)$ при $x \ll 1$ обратно пропорциональна x^6 , при $x \sim 1$ — пропорциональна $1 - x$. Время, по истечении которого температуры будут отличаться на 1%, при начальной температуре спинов 10^{-4} °К (начальная температура решетки $\gg 10^{-4}$ °К) не превышает 1 сек.

Вопрос об установлении теплового равновесия между спинами и решеткой имеет существенное значение для теории и практических приложений магнитного метода охлаждения, так как после снятия магнитного поля низкая температура устанавливается в спиновой системе (системе магнитных моментов ионов решетки), и лишь спустя некоторое время происходит охлаждение решетки.

В первых расчетах Гайтлера и Теллера [1] время установления равновесия между спинами и решеткой получалось чрезвычайно большим. Из этого вывода можно было прийти к заключению о невозможности практического использования магнитного метода охлаждения для получения сверхнизких температур. На ошибочность этого заключения указал Казимир [2], который получил приемлемое время, предполагая, что количество тепла Q , передаваемое от решетки к спинам в единицу времени, равно $\kappa(T_l - T_s)$, где T_l и T_s — температуры решетки и спинов, и κ — коэффициент, играющий роль коэффициента теплопроводности. В работе Казимира не определялась, однако, зависимость κ от температур T_l и T_s . Кроме того, совершенно ясно, что Q будет пропорционально $T_l - T_s$ только при малых разностях температур, на первой же стадии выравнивания температур различие между T_l и T_s может быть значительным. Целью настоящей статьи является определение Q как функции T_l и T_s и вычисление на основе этого времени установления равновесия между спинами и решеткой.

§ 1. Энергетический спектр спиновой системы

Энергетический спектр спиновой системы обязан своим существованием, во-первых, взаимодействию между спинами и внутрикристаллическим электрическим полем и, во-вторых, магнитному и обменному взаимодействию между магнитными моментами отдельных ионов решетки. Состояние изолированного иона обычно является вырожденным. Благодаря взаимодействию магнитного момента с электрическим полем решетки это вырождение либо понижается, либо вовсе снимается. Согласно фундаментальной теореме Крамерса, вырождение снимается полностью только при четном числе электронов. Если число электронов в ионе нечетное, то остается по крайней мере двукратное вырождение, которое может быть снято магнитным взаимодействием между ионами.

Однако этим роль магнитного и обменного взаимодействия между ионами не ограничивается. Благодаря этому взаимодействию из каждого уровня изолированного иона создается энергетическая полоса, содержащая N густо расположенных уровней (N — число ионов в кристалле). Ширина полосы по порядку величины равна энергии взаимодействия между двумя соседними магнитными моментами W и составляет около 0,02° К [1]. Подобно тому, как в блоховской модели ферромагнетика один ориентированный влево спин в совокупности правых спинов приводит к образованию спиновой волны, так и в рассматриваемой нами системе возбужденный ионный уровень не локализуется в определенном месте решетки.

Мы можем рассматривать всякое не слишком сильно возбужденное состояние спиновой системы как совокупность элементарных возбуждений, с которыми связаны распространяющиеся в кристалле волны. Каждое элементарное возбуждение характеризуется, подобно фонону и электрону в решетке, некоторым вектором квазимпульса p , определяющим энергию элементарного возбуждения ε_p . Для краткости будем в дальнейшем называть наши элементарные возбуждения экситонами¹.

Чрезвычайно существенным является вопрос о статистике экситонов. Легко видеть, что этот вопрос возникает только в случае нечетного числа электронов, входящих в состав иона. Действительно, при четном числе электронов энергия возбуждения может быть представлена в виде $U + \varepsilon_p$, где U — энергия расщепления ионного уровня, обусловленная взаимодействием между спином и электрическим полем решетки. По порядку величины U равно 0,06° К [1]. Эта величина больше, чем ширина полосы. При температурах, малых по сравнению с U , которые и представляют наибольший интерес, различие между статистикой

* Это название впервые было предложено проф. Я. И. Френкелем.

ми, очевидно, исчезает, так что мы можем считать, что возбуждения в этом случае подчиняются статистике Больцмана. Для практических приложений наибольший интерес представляет, однако, случай нечетного числа электронов: в применяемых солях ион Gd^{3+} имеет 7 электронов, ион V^{3+} — 3 электрона, ион Fe^{3+} — 5 электронов.

Мы будем предполагать, что экситоны подчиняются статистике Ферми — Дирака с температурой вырождения, по порядку величины равной энергии взаимодействия между соседними магнитными моментами W . Основанием для такого предположения является тот факт, что при приближении к абсолютному нулю парамагнитная восприимчивость стремится к конечному пределу. Этот факт можно трактовать как паулиевский парамагнетизм, непосредственно вытекающий из статистики Ферми — Дирака [4].

Для экспериментального подтверждения нашего предположения требуется точное знание энтропии как функции температуры при сверхнизких температурах. Если предположение о статистике верно, то энтропия должна быть линейной функцией температуры, по порядку величины равной $k \frac{T}{\mu} N$, где μ — граничная энергия фермиевского распределения. (Энтропией, обусловленной колебаниями решетки и пропорциональной T^3 , можно пренебречь.) К сожалению, мы не располагаем в настоящее время интересующими нас экспериментальными данными. Заметим, что возможен также случай, когда энергетический спектр спиновой системы имеет характер спектра электронов в полупроводнике, т. е. энергия экситона отличается на конечную величину от наименьшего уровня системы. Этот случай требует специального рассмотрения.

§ 2. Взаимодействие между экситоном и решеткой

Прежде всего заметим, что взаимодействие между колебаниями решетки и экситонами не может осуществляться в результате процессов первого порядка, т. е. поглощения и испусканияphonов экситонами. Действительно, обозначая импульсы экситона и фонона до столкновения через p и f и импульс экситона после столкновения через p' , имеем в случае поглощения фонона

$$\varepsilon_{p'} = \varepsilon_p + \hbar\omega, \quad p' = p + f,$$

где ε_p — энергия экситона с импульсом p и $\hbar\omega$ — энергия фонона с импульсом f . При низких температурах возбуждены фононы с малыми f , импульс же экситона в силу фермиевской статистики порядка \hbar/a (a — постоянная решетки).

Поэтому можно разложить $\varepsilon_{p'}$ в ряд по степеням f . В результате получим

$$fV = fs,$$

где $V = \partial\varepsilon_p/\partial p$ — скорость экситона и s — скорость звука. По порядку величины V можно определить из соотношения $V \frac{h}{a} \sim W$, где W — энергия взаимодействия между соседними магнитными моментами. Считая $W \sim 0,02^\circ K$, $a \sim 4 \cdot 10^{-8} cm$, получим $V \sim \sim 200 \text{ см/сек}$, тогда как $s \sim 10^5 \text{ см/сек}$.

Таким образом, мы должны рассмотреть процессы более высоких порядков. Простейшими из возможных являются следующие процессы второго порядка: столкновение двух экситонов с поглощением (испусканием) одного фонана и рассеяние фонана экситоном. Для определения вероятности этих процессов рассмотрим энергию взаимодействия между экситоном и колебаниями решетки. Мы получим ее, разложив энергию экситона в ряд по степеням тензора деформаций, соответствующего тепловым колебаниям решетки. Ограничивааясь линейными и квадратичными членами, можно представить энергию взаимодействия в виде

$$U_{fl} = U_{fl}^{(1)} + U_{fl}^{(2)}, \\ U_{fl}^{(1)} = \sum_i \frac{U'}{\lambda_i} \xi_i, \quad U_{fl}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{U''}{\lambda_i \lambda_k} \xi_i \xi_k, \quad (1)$$

где ξ_i — амплитуда колебания решетки, которому соответствует длина волны $2\pi\lambda^1$. U и U'' по порядку величины равны U либо W , если расщепление ионного уровня, обусловленное взаимодействием магнитного момента иона с электрическим полем решетки, отсутствует (ср. Гайтлер и Теллер [1] и Валлер [3]).

Для дальнейшего необходимы матричные элементы U_{fl} . Матричный элемент $U_{fl}^{(1)}$, соответствующий переходу экситона из состояния с импульсом p в состояние с импульсом p' с одновременным поглощением фонона с импульсом f , равен

$$(p | U_{fl}^{(1)} | p') = \frac{U_p^{(1)}}{\lambda} \sqrt{\frac{h}{M\omega N}} \sqrt{N_f}, \quad (2)$$

где M — масса атома, N — общее число атомов в кристалле, равное Ωa^3 (Ω — объем кристалла); N_f — число фононов с частотой ω . Матричный элемент $U_{fl}^{(2)}$, отвечающий переходу экситона из состояния с импульсом p в состояние с импульсом p' , при котором поглощается фонон с импульсом f_0 и испускается фонон с импульсом f , равен

$$(p_0 | U_{fl}^{(2)} | p) = \frac{U_p^{(2)}}{\lambda_0 \lambda} \frac{\hbar}{MN} \sqrt{\frac{N_{f_0}(N_f + 1)}{\omega_0 \omega}}. \quad (3)$$

Перейдем теперь к вычислению вероятностей интересующих нас процессов. Определим прежде всего вероятность столкнове-

¹ Здесь и в дальнейшем $2\pi\lambda$ обозначает длину волны.

ния двух экситонов с импульсами p_1^0 и p_2^0 , в результате которого поглощается фонон с импульсом f и экситоны приобретают импульсы p_1 , p_2 . Очевидно, при этом

$$p_1^0 + p_2^0 + f = p_1 + p_2,$$

$$\epsilon_{p_1}^0 + \epsilon_{p_2}^0 + \hbar\omega = \epsilon_{p_1} + \epsilon_{p_2}.$$

Амплитуда вероятности этого процесса равна

$$\left(\frac{U'_{p_1^0, p_2^0} W_{p_1, p_2}^{p_1^0, p_2^0}}{\epsilon_{p_1}^0 + \hbar\omega - \epsilon_{p_1+f}^0} + \frac{U'_{p_2^0, p_1^0} W_{p_1, p_2}^{p_2^0, p_1^0}}{\epsilon_{p_2}^0 + \hbar\omega - \epsilon_{p_2+f}^0} + \frac{W_{p_1-f, p_2}^{p_1^0, p_2^0} U_{p_1}^{p_1-f}}{\epsilon_{p_1}^0 + \epsilon_{p_2}^0 - \epsilon_{p_2} - \epsilon_{p_1-f}^0} + \right. \\ \left. + \frac{W_{p_1, p_2-f}^{p_1^0, p_2^0} U_{p_2}^{p_2-f}}{\epsilon_{p_1}^0 + \epsilon_{p_2}^0 - \epsilon_{p_1} - \epsilon_{p_2-f}^0} \right) \cdot \sqrt{\frac{\hbar N_f}{M\omega N} \frac{a^3}{\lambda\Omega}}. \quad (4)$$

Здесь W_{p_1, p_2} обозначает матричный элемент энергии взаимодействия экситонов друг с другом, соответствующий переходу экситонов из состояний с импульсами p_1 и p_2 в состояния с импульсами p_1' , p_2' . Четыре слагаемых в (4) отвечают четырем возможным промежуточным состояниям. Первое слагаемое соответствует тому случаю, когда сначала поглощается фонон первым экситоном, а затем меняются импульсы экситонов. В третьем слагаемом, напротив, сначала изменяются импульсы экситонов, а затем поглощается фонон первым экситоном. Во втором и четвертом слагаемых первый и второй экситоны меняются ролями. Множитель a^3/Ω появляется из-за того, что взаимодействие между магнитными моментами ионов практически ограничивается только соседними ионами.

Так как при низких температурах возбуждены фононы с малыми частотами, то мы можем разложить матричные элементы U_p^p , $W_{p_1, p_2}^{p_1, p_2}$ и энергию экситона ϵ_{p+f} в ряд по степеням f . Ограничивааясь нулевыми членами разложения и используя закон сохранения энергии, представим (4) в виде

$$\frac{a^3}{\Omega} \sqrt{\frac{\hbar N_f}{M\omega N} \frac{1}{\lambda\hbar\omega}} (U'_{p_1^0} W_{p_1, p_2}^{p_1^0, p_2^0} + U'_{p_2^0} W_{p_1, p_2}^{p_2^0, p_1^0} - \\ - U'_{p_1} W_{p_1, p_2}^{p_1^0, p_2^0} - U'_{p_2} W_{p_1, p_2}^{p_2^0, p_1^0}). \quad (4')$$

Выражение в скобках не обращается в нуль и по порядку величины равно UW либо W^2 (см. выше). Так как нас интересует только порядок величин, то в дальнейшем мы будем повсюду вместо выражения в скобках писать просто UW . Вероятность рассматриваемого процесса с учетом принципа Паули для экситонов может быть записана в виде

$$\frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{a^3}{\Omega} \right)^3 \frac{(UW)^2}{\hbar\omega M s^2} n_{p_1} n_{p_2} (1 - n_{p_1}) (1 - n_{p_2}) N_f \times \\ \times \delta(\epsilon_{p_1}^0 + \epsilon_{p_2}^0 + \hbar\omega - \epsilon_{p_1} - \epsilon_{p_2}). \quad (5)$$

Здесь n_p обозначает число экситонов в состоянии с импульсом p . Ради простоты мы выписали числа экситонов только для первого из четырех слагаемых (4).

Определим теперь вероятность рассеяния фона на экситоном. Этот процесс состоит в столкновении фона на с импульсом f и экситона с импульсом p^0 ; в результате экситон приобретает импульс p и появляется фонон с импульсом f , причем $p_0 + f_0 = p + f$, $\epsilon_{p_0} + \hbar\omega_0 = \epsilon_p + \hbar\omega$. Амплитуда вероятности рассматриваемого процесса определяется как линейным, так и квадратичным относительно ξ членом в разложении U_{f1} . На основании формул (2), (3) она может быть представлена в виде

$$a_s = (p_0 | U_{f1}^{(2)} | p) + \left(\frac{U'_{p_0+f_0} U'_{p_0+f_0}}{\epsilon_{p_0} + \hbar\omega_0 - \epsilon_{p_0+f_0}} + \frac{U'_{p_0-f_0} U'_{p_0-f_0}}{\epsilon_{p_0} - \epsilon_{p_0-f_0} - \hbar\omega} \right) \times \\ \times \sqrt{\frac{\hbar^2}{M^2 N^2 \omega_0 \omega} \frac{N_f (N_f + 1)}{\lambda\lambda_0}}. \quad (6)$$

Приведя оба члена, стоящие в скобках в (6), к одному знаменателю и разложив затем матричные элементы и энергию экситонов в ряд по степеням f , получим (ср. [4], формула (4.8))

$$a_s = (p_0 | U_{f1}^{(2)} | p) + \frac{(U'_{p_0})^2}{\hbar\omega_0 \hbar\omega} \left\{ -f_i f_k \frac{\partial^2 \epsilon_{p_0}}{\partial p_i^0 \partial p_k^0} + \right. \\ \left. + O\left(\frac{\hbar\omega_0 f}{p_0}\right) \right\} \sqrt{\frac{\hbar^2 N_f (N_f + 1)}{M^2 N^2 s^2 v v_0}}.$$

Здесь O означает порядок величины. $O\left(\frac{\hbar\omega_0 f}{p_0}\right)$ происходит от линейного члена в разложении матричных элементов; при этом производная $\partial U / \partial p_0$ по порядку величины считается равной U/p_0 . Более высокие степени в разложении, очевидно, не существенны.

Далее, в (6) подразумевается суммирование по i и k . $\frac{\partial^2 \epsilon_{p_0}}{\partial p_i^0 \partial p_k^0}$ — tensor обратных масс экситона, по порядку величины равный $W(a/\hbar)^2$. Легко видеть, что второй из двух членов, входящих в квадратную скобку (6), по порядку величины в s/V раз больше первого. Мы можем поэтому не рассматривать $f_i f_k \frac{\partial^2 \epsilon_{p_0}}{\partial p_i^0 \partial p_k^0}$. Сравним

теперь $O\left(\frac{\hbar\omega_0}{p_0}\right)\frac{(U'_{p_0})^2}{\hbar\omega_0\hbar\omega}$ и $(p_0|U_{fl}^{(2)}|p)$. Отношение абсолютных значений этих величин равно

$$\frac{\left(\frac{U'_{p_0}}{p_0}\right)^2 \frac{1}{ps}}{|U'_{p_0}|} \sim \frac{U}{ps} \sim \frac{U_a}{\hbar s} \sim 10^{-4}.$$

Таким образом, a_s определяется матричным элементом $(p_0|U_{fl}^{(2)}|p)$. Вероятность рассеяния фонона экситоном равна

$$W_s = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{\hbar}{MN} U\right)^2 \frac{1}{\lambda^2 \lambda_0^2 \omega \omega_0} n_{p_0} N_{f_0} (1 - n_p) (1 + N_f) \times \\ \times \delta(\epsilon_{p_0} + \hbar\omega_0 - \epsilon_p - \hbar\omega), \quad (7)$$

причем здесь, так же как и в (5), учтен принцип Паули для экситонов. U'_{p_0} заменено на U , что верно, конечно, только по порядку величины.

§ 3. Энергия, передаваемая решеткой спинам

Перейдем к вычислению энергии, передаваемой в единицу времени решеткой спиновой системе. Рассмотрим прежде всего энергию, переходящую благодаря столкновениям двух экситонов, которые приводят к поглощению или испусканию фонона. Мы получим эту энергию (обозначим ее через Q_1), просуммировав вероятность столкновения (5), предварительно умноженную на $\hbar\omega$, по всем возможным состояниям экситонов и фонона с импульсами p_1^0, p_2^0, p_1, f и учитывая обратные переходы, при которых испускается фонон

$$Q_1 = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{a^6 \Omega}{Ms^2} (UW)^2 \int [N_f n_{p_1^0} n_{p_2^0} (1 - n_{p_1}) (1 - n_{p_2}) - \\ - (1 + N_f) n_{p_1} n_{p_2} (1 - n_{p_1^0}) (1 - n_{p_2^0})] \delta(\epsilon_{p_1^0} - \epsilon_{p_2^0} + \\ + \hbar\omega - \epsilon_{p_1} - \epsilon_{p_2}) d\tau_{p_1^0} d\tau_{p_2^0} d\tau_{p_1} d\tau_f. \quad (8)$$

Здесь, так же как и в выражении (5), для простоты учитывается только первое из четырех возможных промежуточных состояний, входящих в формулу (4). Далее мы вынесли за знак интеграла $(UW)^2$. Это соответствует замене матричных элементов, зависящих от энергии экситонов, их значениями в точке $\epsilon = \mu$, усредненными по углам. $d\tau_p$ обозначает $\frac{1}{\hbar^3} dp_x dp_y dp_z$, такой же смысл имеет $d\tau_f$.

Напишем теперь выражение для энергии, передаваемой решеткой спинам, обусловленной рассеянием фононов экситонами.

Обозначая эту энергию через Q_2 , имеем на основании (7)

$$Q_2 = \frac{2\pi\hbar}{M^2 s^4} U^2 a^6 \Omega \int (\hbar\omega_0 - \hbar\omega) \omega \omega_0 [n_{p_0} (1 - n_p) N_{f_0} (N_f + 1) - \\ - (1 - n_{p_0}) n_p N_f (N_{f_0} + 1)] \delta(\epsilon_{p_0} + \hbar\omega_0 - \epsilon_p - \hbar\omega) d\tau_{p_0} d\tau_p d\tau_{f_0}. \quad (9)$$

Полная энергия, передаваемая в единицу времени, равна $Q = Q_1 + Q_2$.

Будем считать, что экситоны и фононы находятся порознь в тепловом равновесии. Соответствующие им температуры обозначим через T_s и T_l . Таким образом, мы полагаем функции распределения n_p и N_f равными

$$n_p = \frac{1}{e^{\epsilon_p - \mu/kT_s} + 1}, \quad N_f = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT_l} - 1}.$$

Подставив эти распределения в формулы (8) и (9) и используя закон сохранения энергии, получим

$$Q_1 = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{(UW)^2}{Ms^2} a^6 \Omega \times \quad (8')$$

$$\times \int \frac{\frac{\hbar\omega}{kT_l} - \frac{\hbar\omega}{kT_s} e^{\frac{\epsilon_{p_1} + \epsilon_{p_2} - 2\mu}{kT_s}} \delta(\epsilon_{p_1} + \epsilon_{p_2} - \epsilon_{p_1^0} - \epsilon_{p_2^0} - \hbar\omega) d\tau_{p_1^0} d\tau_{p_2^0} d\tau_{p_1} d\tau_f}{(1 - e^{\frac{\hbar\omega}{kT_l} - \frac{\hbar\omega}{kT_s}}) e^{\frac{\epsilon_{p_1} + \epsilon_{p_2} - 2\mu}{kT_s}} (e^{\frac{\hbar\omega}{kT_l} - 1} (e^{\frac{\epsilon_{p_1} - \mu}{kT_s}} + 1) (e^{\frac{\epsilon_{p_2} - \mu}{kT_s}} + 1) (e^{\frac{\epsilon_{p_1} - \mu}{kT_s}} + 1) (e^{\frac{\epsilon_{p_2} - \mu}{kT_s}} + 1)};$$

$$Q_2 = \frac{2\pi\hbar}{M^2 s^4} U^2 a^6 \Omega \times \\ \times \int (\epsilon_p - \epsilon_{p_0}) \frac{\frac{\epsilon_{p_1} - \mu}{kT_s} \frac{\hbar\omega}{kT_l} - e^{\frac{\epsilon_{p_1} - \mu}{kT_s}} e^{\frac{\hbar\omega_0}{kT_l}}) \omega \omega_0 \delta(\epsilon_{p_0} + \hbar\omega_0 - \epsilon_p - \hbar\omega) d\tau_{p_0} d\tau_p d\tau_{f_0} \quad (9')$$

Перейдем к новым переменным интегрирования — энергиям экситонов $\epsilon_{p_1}, \epsilon_{p_2^0}, \epsilon_{p_1}$ и углам в их импульсных пространствах. Учитывая фермиевский характер функции распределения экситонов, мы возьмем якобиан перехода от переменных импульсов к энергии и углам на границе фермиевского распределения. По порядку величины этот якобиан равен

$$\Delta_p \approx \left(\frac{p^3}{\hbar^3 \omega} \right)_{\epsilon=\mu} \approx \frac{1}{a^2 \mu}.$$

δ -Функции могут быть уничтожены интегрированием по одному из углов. При этом интеграл (8') получит множителем величину

порядка $\frac{1}{\mu}$, а $(9')$ $\frac{\hbar\omega}{(k\theta)^2}$ (θ — температура Дебая). Интегрирование по остальным углам мы заменяем умножением на 4π для каждого дифференциала. Это соответствует вынесению за знак интеграла U — усредненных значений матричных элементов U_{ρ}^p .

В формуле $(8')$ введем в качестве переменных интегрирования безразмерные величины

$$\rho = \frac{\hbar\omega}{kT_s}, \quad \xi = \frac{e_{p_1}^0 - \mu}{kT_s}, \quad \eta = \frac{e_{p_2}^0 - \mu}{kT_s}, \quad \zeta = \frac{e_{p_1} - \mu}{kT_s};$$

тогда Q_1 представится в виде

$$Q_1 = \frac{16\pi}{\hbar^4 s^3} \frac{(UM)^2}{Ms^2} \frac{(kT_s)^6}{\mu^4} \Omega \int \frac{(e^\rho - e^{\frac{T_s}{T_l}\rho}) e^\eta e^\xi \rho^2 d\rho d\xi d\eta d\zeta}{(e^{\frac{T_s}{T_l}\rho} - 1)(e^\xi + 1)(e^\eta + 1)(e^\zeta + 1)(e^{\xi+\eta+\rho-\zeta} + 1)} \quad (10)$$

причем интегрирование по ξ , η , ζ совершается в пределах $(-\infty, +\infty)$, а по ρ $(0, +\infty)$.

Перепишем теперь выражение для Q_2 , введя безразмерные переменные интегрирования

$$x_0 = \frac{e_{p_0} - \mu}{kT_s}, \quad x = \frac{e_{p_1} - \mu}{kT_s}, \quad z_0 = \frac{\hbar\omega_0}{kT_s},$$

$$Q_2 = \frac{4U^2}{(Ms^2)^2} \frac{(kT_s)^8 \Omega}{\mu^2 s^3 \hbar^4 (k\theta)^2} \times \\ \times \int (x - x_0) z_0^3 (x_0 - x - z_0) \frac{[e^{x_0} e^{\alpha(x_0 - x + z_0)} - e^{x_0} e^{\alpha z_0}] dx_0 dx dz_0}{(e^{x_0} + 1)(e^x + 1)(e^{\alpha z_0} - 1)(e^{\alpha(x_0 - x + z_0)} - 1)} \quad (11)$$

(здесь $\alpha = T/T_l$). Пределы интегрирования по z_0 $(0, \infty)$ и по x_0 и x $(-\infty, +\infty)$. Преобразуем несколько (11) , введя вместо x_0 , x , z_0 новые переменные $az_0 = \xi$, $\alpha(x - x_0) = \eta$, $e^{x_0} = y$. Интегрирование по y производится немедленно; в результате получаем

$$Q_2 = \frac{4U^2 (kT_l)^8 \Omega}{(Ms^2)^2 \mu^2 s^3 \hbar^4 (k\theta)^2} \int \frac{(\xi - \eta)^2 \xi^3 \eta^2 e^{\xi \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \eta} - 1}{(e^{\eta\alpha} - 1)(e^\xi - 1)(e^{\xi - \eta} - 1)} d\xi d\eta, \quad (11')$$

причем интегрирование по ξ совершается в пределах $(0, \infty)$ и по η в пределах $(-\infty, +\infty)$.

Обозначим интегралы, входящие в (10) и (11) , соответственно через $q_1\left(\frac{T_s}{T_l}\right)$ и $q_2\left(\frac{T_s}{T_l}\right)$. Тогда

$$Q_1 = 16\pi \left(\frac{UM}{\mu^2} \right)^2 \left(\frac{T_s}{\theta} \right)^3 \frac{(kT_s)^3}{Ms^2 \hbar} q_1\left(\frac{T_s}{T_l}\right) N, \quad (12)$$

$$Q_2 = 4 \left(\frac{U}{W} \right)^2 \left(\frac{T_l}{\theta} \right)^5 \frac{(kT_l)^4}{\hbar (Ms^2)^2} q_2\left(\frac{T_s}{T_l}\right) N. \quad (13)$$

Вычисление интегралов приводится в дополнении. Здесь мы приведем приближенные формулы, определяющие $q_1(x)$ и $q_2(x)$ при малых и больших значениях аргумента:

$$\begin{aligned} \text{при } x \ll 1 \quad q_1(x) &\cong \frac{20}{x^6}, \quad q_2(x) \cong 2 \cdot 6! \\ \text{при } x \lesssim 1 \quad q_1(x) &\cong 280(1-x), \quad q_2(x) \cong 96(1-x). \end{aligned} \quad (14)$$

Сравнение Q_1 и Q_2 при $x \ll 1$ дает

$$\frac{Q_2}{Q_1} \cong 10 \frac{kT_l}{Ms^2} \left(\frac{T_l}{\theta} \right)^2.$$

Если $T_l \cong 0,1^\circ$, $\theta \cong 100^\circ$, то $\frac{Q_2}{Q_1} \cong 10^{-10}$. При $x \cong 1$ $\frac{Q_2}{Q_1} \cong 0,1 \frac{kT}{Ms^2} \times \left(\frac{T}{\theta} \right)^2$. Таким образом, можно вовсе не учитывать Q_2 .

§ 4. Время релаксации

Перейдем к определению времени выравнивания температур решетки и спинов. Обозначая теплоемкости решетки и спинов соответственно через C_l и C_s , имеем

$$T_l = -\frac{Q}{C_l}, \quad T_s = \frac{Q}{C_s}. \quad (15)$$

Легко видеть, что температуру спинов можно считать постоянной. Действительно, в силу закона сохранения энергии

$$\frac{3\pi^4}{5} kT_l \left(\frac{T_l}{\theta} \right)^3 + \frac{\pi^2}{4} kT_s \frac{T_s}{T_0} = \text{const.}$$

десь θ — температура Дебая, T_0 — температура вырождения экситонов. В области температур $T_s \gg 5 \sqrt{\frac{T_0 T_l^4}{\theta^3}}$ температура спинов практически постоянна. Если считать $T_l = 0,1$, $\theta = 300^\circ$, $T_0 = 2 \cdot 10^{-2}$, то мы получим $T_s \gg 10^{-6}$. При начальной температуре спинов 10^{-4} отношение теплоемкости спинов и решетки составляет около 10^6 .

Подставив в (15) вместо Q выражение для Q_1 и считая T_s постоянным, получим

$$\frac{d}{dt} \frac{T_l}{T_s} = -\frac{20}{3\pi^2} \left(\frac{UW}{\mu^2} \right)^2 \frac{(kT_s)^3}{\hbar Ms^2} \left(\frac{T_s}{T_l} \right)^3 q_1\left(\frac{T_s}{T_l}\right).$$

Обозначая T_s/T_l через x , имеем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tau_0} x^5 q_1(x), \quad \tau_0 = \frac{3\pi^3}{20} \left(\frac{\mu^2}{UW} \right) \frac{\hbar Ms^2}{(kT_s)^2}. \quad (16)$$

$$\text{Отсюда } t = \tau_0 \int_0^x \frac{dx}{x^5 q_1(x)}.$$

Нижний предел положен здесь равным нулю, так как начальная температура решетки значительно больше температуры спинов. При $x \approx 1$ интеграл логарифмически расходится. Поэтому удобно представить его в следующем виде:

$$t = t_0 + \tau_0 \int_1^x \left\{ \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{(1-x)f'(1)} \right\} dx + \tau \ln \frac{1}{1-x}. \quad (17)$$

Здесь $f(x) = x^5 q_1(x)$, $\tau = -\frac{1}{f'(1)} \tau_0 \approx \frac{\tau_0}{280}$, t_0 определяется интегралом

$$\begin{aligned} t_0 &= \tau_0 \int_0^1 \left[\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{(1-x)f'(1)} \right] dx \approx \frac{\tau_0}{2} \left(\frac{1}{f(0)} + \frac{1}{f'(1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{f''(1)}{|f'(1)|^2} \right) \approx 0,001 \tau_0. \end{aligned}$$

Интеграл, входящий в (17), при $x \approx 1$ равен приближенно

$$-\frac{f''(1)}{2|f'(1)|^2}(1-x) \approx \frac{1}{50}(1-x).$$

Для значений x , близких к единице, мы можем пренебречь этим интегралом по сравнению с логарифмическим членом. Поэтому

$$t = 0,01 \tau_0 + \frac{\tau_0}{280} \ln \frac{1}{1-x}. \quad (18)$$

Оценим величину τ_0 . Считая $\mu \sim W \sim 0,02^\circ$, $M \sim 10^{-22}$ г, $s \sim 3 \cdot 10^5$ см/сек, $\theta \sim 300^\circ$, $T_s \sim 10^{-4}$, получим $\tau_0 \sim 20$ сек. Время, по истечении которого разность $1-x$ становится равной 0,01, составляет около 1 сек.

В заключение мы хотим выразить благодарность проф. Л. Ландау за интерес к работе и важные указания.

Приложение

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ

1. Функция $q_1(x)$

Введем обозначение

$$I(\rho) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\xi+\rho+\eta} d\xi d\eta d\zeta}{(e^{\xi}+1)(e^{\eta}+1)(e^{\zeta}+1)(e^{\xi+\eta+\rho-\zeta}+1)}, \quad (1)$$

тогда

$$q_1(x) = \int_0^{\infty} I(\rho) \frac{1 - e^{-(1-x)\rho}}{e^{x\rho} - 1} \rho^2 d\rho. \quad (2)$$

В (1) легко выполнить интегрирование по ζ . Введя далее вместо ξ и η новые переменные $\xi = \xi + \eta + \rho$, получим

$$I(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda-\rho) e^{\lambda} d\lambda}{(e^{\lambda}-1)(e^{\lambda-\rho}-1)} = \int_0^{\infty} \{P(x) \ln^2 x + \rho P(x) \ln x\} dx,$$

где

$$P(x) = \frac{1}{(x-1)(x-e^{-\rho})}. \quad (3)$$

Способ вычисления интегралов типа

$$\int_0^{\infty} P(x) \ln^s x dx, \quad (4)$$

где $P(x)$ — рациональная функция x , достаточно быстро убывающая на бесконечности, и s — целое число, состоит в следующем. Рассмотрим интеграл $\int_{\Gamma} P(z) \ln^{s+1} z dz$ по замкнутому контуру, охватывающему начало координат,

в котором вещественная положительная полуось проходится дважды в противоположных направлениях.

По теореме Коши

$$\int_{\Gamma} P(z) \ln^{s+1} z dz = 2\pi i \sum \text{Res } P(z) \ln^{s+1} z.$$

С другой стороны, так как $\ln z$ при обходе точки $z = 0$ получает приращение, равное $2\pi i$, то

$$\int_{\Gamma} P(z) \ln^{s+1} z dz = \int_0^{\infty} P(x) \ln^{s+1} x dx - \int_0^{\infty} P(x) (\ln x + 2\pi i)^{s+1} dx + \int_R^{\infty},$$

где \int_R^{∞} — интеграл по окружности большого радиуса R , который по условию стремится к нулю, если $R \rightarrow \infty$. Итак,

$$\begin{aligned} 2\pi i(s+1) \int_0^{\infty} P(x) \ln^s x dx &= -2\pi i \sum \text{Res } P(z) \ln^{s+1} z + \\ &+ (2\pi i)^2 \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2} \int_0^{\infty} P(x) \ln^{s-1} x dx + \\ &+ (2\pi i)^3 \frac{s(s-1)(s-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \int_0^{\infty} P(x) \ln^{s-2} x dx + \dots \end{aligned}$$

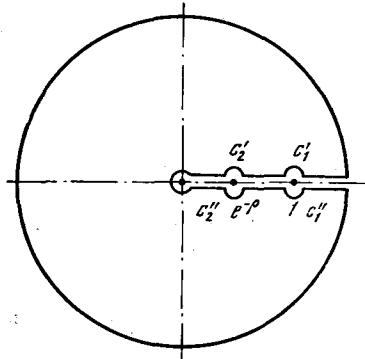
Таким образом, мы можем последовательно вычислять интегралы типа (4) с $s = 0, 1, 2, \dots$

В интересующем нас случае функция $P(x)$ имеет полюсы на вещественной оси; интегралы типа (4) порознь не существуют. Поэтому в качестве контура интегрирования берется контур, указанный на рисунке.

Учитывая, что на участках контура c'_1 и c''_2 $\ln z$ отличается на $2\pi i$ от значений $\ln z$ на участках c'_1 , c''_2 , получим следующую формулу для $I(\rho)$:

$$I(\rho) = \frac{1}{6\pi i} \oint_{c_1+c_2} P(z) \ln^3 z dz + \left(\frac{\pi i}{3} - \frac{\rho}{2} \right) \oint_{c_1+c_2} P(z) \ln z dz + \left(\frac{\rho}{4\pi i} - \frac{1}{2} \right) \oint_{c_1+c_2} P(z) \ln^2 z dz,$$

где \oint представляет собой сумму интегралов по контурам, охватывающим c_1+c_2 .



соответственно точки $z=1$ и $z=e^{-\rho}$. В результате простых вычислений получим

$$I(\rho) = \frac{1}{6} \frac{\rho^3 + 4\pi^2 \rho}{1 - e^{-\rho}}. \quad (5)$$

Заметим, что $I(0) = \frac{2}{3}\pi^2$. Если $\rho \rightarrow \infty$, то $I(\rho) \cong \frac{\rho^3}{6}$.

Переходим к вычислению $q_1(x)$. Так как $I(\rho)$ может быть представлено в виде простого ряда по степеням $e^{-\rho}$, то дело сводится к вычислению интеграла типа

$$K_n^s(x) = \int_0^\infty \frac{e^\rho - e^{x\rho}}{e^{x\rho} - 1} e^{-n\rho} \rho^s d\rho = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^{(s)}}{d\rho^{(s)}} \int_0^\infty e^{(x-n)\rho} \frac{e^\rho - e^{x\rho}}{e^{x\rho} - 1} d\rho.$$

Последний интеграл с заменой $y = e^{-x\rho}$ приводится к виду [5]

$$\frac{1}{x} \int_0^1 \frac{1-y^b}{1-y} y^{a-1} dy = \frac{1}{x} \{ \psi(a+b) - \psi(a) \},$$

где

$$a = 1 + \frac{n-1-b}{x}, \quad b = \frac{1-x}{x}, \quad \psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z).$$

Таким образом,

$$K_n^s(x) = \frac{(-1)^s}{x^{s+1}} \left\{ \psi^{(s)} \left(\frac{n}{x} \right) - \psi^{(s)} \left(1 + \frac{n-1}{x} \right) \right\}.$$

Для $q_1(x)$ получаем следующее выражение:

$$q_1(x) = -\frac{1}{6} x^{-6} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \psi^{(5)} \left(\frac{n}{x} \right) - \psi^{(5)} \left(1 + \frac{n-1}{x} \right) \right\} - \frac{2}{3} \pi^2 x^{-4} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \psi^{(3)} \left(\frac{n}{x} \right) - \psi^{(3)} \left(1 + \frac{n-1}{x} \right) \right\}. \quad (6)$$

Для $x \ll 1$

$$q_1(x) \cong \frac{1}{6} x^{-6} \psi^{(5)}(1) \cong \frac{20}{x^6};$$

при $x \cong 1$

$$q_1(x) \cong 280(1-x).$$

2. Функция $q_2(x)$ определяется интегралом

$$q_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_0^{\infty} \frac{(\xi - \eta)^2 \xi^3 \eta^2 e^{\xi} (e^{(x-1)\eta} - 1)}{(e^{x\eta} - 1)(e^{\xi} - 1)(e^{\xi-\eta} - 1)} d\xi, \quad x = \frac{T_l}{T_s}. \quad (7)$$

Ограничимся определением $q_2(x)$ при $x \gg 1$ и $x \cong 1$. Легко видеть, что

$$q_2(\infty) = \int_0^{\infty} d\eta \int_0^{\infty} \frac{(\xi - \eta)^2 \xi^3 \eta^2 e^{\xi-\eta} d\xi}{(e^{\xi} - 1)(e^{\xi-\eta} - 1)} + \int_0^{\infty} d\eta \int_1^{\infty} \frac{(\xi + \eta)^2 \xi^3 \eta^2 e^{\xi} d\xi}{(e^{\xi} - 1)(e^{\xi-\eta} - 1)}.$$

В первом интеграле разбиваем интервал интегрирования по η на два интервала $(0, \xi)$ и (ξ, ∞) . Во втором вместо η вводим $u = \xi + \eta$

$$\begin{aligned} q_2(\infty) &= \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\xi} \frac{u^2 \xi^3 (u - \xi)^2 e^u}{(e^{\xi} - 1)(e^u - 1)} du - \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \frac{u^2 \xi^3 (u + \xi)^2}{(e^{\xi} - 1)(e^u - 1)} du + \\ &+ \int_0^{\infty} d\xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{u^2 (u - \xi)^2 \xi^3 e^{\xi}}{(e^{\xi} - 1)(e^u - 1)} du = \int_0^{\infty} \frac{\xi^3 d\xi}{e^{\xi} - 1} \int_0^{\xi} u^2 (u - \xi)^2 du + \\ &+ \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\xi} \frac{u^2 \xi^3 (u - \xi)^2}{(e^{\xi} - 1)(e^u - 1)} du - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2 \xi^3 (\xi + u)^2}{(e^{\xi} - 1)(e^u - 1)} d\xi du + \\ &+ \int_0^{\infty} d\xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{u^2 (u - \xi)^2 \xi^3}{(e^{\xi} - 1)(e^u - 1)} du + \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \frac{u^2 (u - \xi)^2 \xi^3}{e^u - 1} du = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\xi^3 d\xi}{e^{\xi} - 1} \int_0^{\xi} u^2 (u - \xi)^2 du + \int_0^{\infty} \frac{u^2 du}{e^u - 1} \int_0^{\infty} u^2 (u - \xi)^2 \xi^3 d\xi - \\ &- 4 \int_0^{\infty} \frac{\xi^4 d\xi}{e^{\xi} - 1} \int_0^{\infty} \frac{u^3 du}{e^u - 1} \sim 2.6! \end{aligned} \quad (8)$$

При $x \cong 1$ $q_2(x) = (1 - x)I$, где

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\xi + \eta)^{2\zeta} \eta^{\beta} e^{\xi - \eta} d\xi d\eta}{(e^\xi - 1)(e^\eta - 1)(e^{\xi - \eta} - 1)} \cong 96. \quad (9)$$

Физико-технический институт
Академии наук УССР

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Получено
14 января 1944 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Heitler, E. Teller. Proc. Roy. Soc., 1926, 155, 629.
2. Casimir. Physica, 1939, 6, 156.
3. Waller. Zs. f. Phys., 1932, 79, 370.
4. И. Померанчук. ЖЭТФ, 1941, 11, 226. (Собр. трудов, № 7).
5. Уиттекер, Ватсон. Курс современного анализа, ГТТИ, 1934, ч. II, стр. 39.

О ПАРАМАГНИТНОЙ ДИСПЕРСИИ *

Совместно с А. И. Ахиезером

1. Парамагнитные диэлектрики могут обладать своеобразным магнитным энергетическим спектром, обязанным своим происхождением обменному взаимодействию электронов и взаимодействию магнитных моментов между собой и с электрическим полем решетки [1, 2]. Магнитным возбужденным уровням соответствуют отклонения от распределения магнитных моментов атомов решетки, характерного для основного состояния. Эти отклонения не локализуются в определенном месте решетки, а распространяются в кристалле в виде волн, которые мы будем называть магнонами [2]. Магноны характеризуются квази-импульсом p , энергией $\epsilon(p)$, магнитным моментом μ и спином s . Для малых возбуждений число магнонов невелико по сравнению с числом атомов, и энергия возбуждения кристалла может быть представлена в виде суммы энергий отдельных магнонов.

Если знать статистику, которой подчиняются элементарные возбуждения — магноны, то можно найти магнитный момент кристалла как функцию внешнего магнитного поля и температуры. Естественно предполагать [2], что магноны подчиняются статистике Ферми — Дирака. При этом находит простое объяснение тот факт, что парамагнитная восприимчивость многих парамагнитных диэлектриков в области низких температур перестает зависеть от температуры [3]. Можно думать, что мы имеем здесь дело с пауловским парамагнетизмом, непосредственно связанным со статистикой Ферми — Дирака. Заметим кстати, что теплоемкость таких парамагнетиков в области низких температур должна быть пропорциональна температуре.

2. Если парамагнитный диэлектрик с магнитным спектром находится в магнитном поле $H(t) = H_0 + H_1 e^{i\omega t}$, причем переменная составляющая H_1 параллельна постоянной составляющей H_0 и много меньше последней, то при выполнении условий $\mu H_0 \ll \ll T \ll \epsilon_0$ магнитный момент единицы объема диэлектрика может быть представлен в виде

$$M = \left\{ H_0 + H_1 \frac{e^{i\omega t}}{1 + i\omega/\omega_0} \right\} \frac{\mu^3}{\epsilon_0 a^3},$$

* ДАН СССР, 1952, 87, 917. (Представлено академиком Л. Д. Ландау 11 октября 1952 г.)

где T — температура (выраженная в энергетических единицах); ε_0 — граничная энергия (фермиевского распределения магнонов); a — по порядку величины постоянная решетки и ω_0 — средняя вероятность изменения ориентации спинов магнонов в единицу времени.

Оценим величину ω_0 . Изменение ориентации спинов магнонов может происходить благодаря магнитному взаимодействию магнонов с электрическим полем решетки и с полем излучения. В области низких температур наиболее важную роль играет магнитное взаимодействие. Вероятность изменения ориентации спинов магнонов с импульсами p_1, p_2 , обязанного этому взаимодействию, равна

$$w_m = \frac{2\pi}{\hbar} \int |U|^2 n_1 n_2 (1 - n'_1)(1 - n'_2) \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) \frac{\Omega^2 dp_1 dp_2}{(2\pi\hbar)^6},$$

где U — матричный элемент перехода, равный по порядку величины $U \sim \mu^3/\Omega$; Ω — нормировочный объем и n — фермиевская функция распределения магнонов (множители $1 - n$ служат для учета принципа Паули).

Считая импульс магнона по порядку величины равным \hbar/a и магнитный момент $\sim e\hbar/2mc$, получим по порядку величины

$$w_m \sim \frac{\varepsilon_0}{\hbar} \left(\frac{\hbar}{2mc} \right)^4 \left(\frac{e^2}{a\varepsilon_0} \right)^2 \left(\frac{T^2}{\varepsilon_0} \right)^2 \sim \frac{\mu^4 m^8}{\hbar^7} T^2.$$

Если считать $\varepsilon_0 \sim 30^\circ \text{K}$, $a \sim 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ см}$, то

$$w_m \approx 10^7 \left(\frac{T}{\varepsilon_0} \right)^2 \text{ сек}^{-1}.$$

Заметим, что при $T \ll \varepsilon_0$ w_m не зависит от концентрации магнонов.

Вероятность процессов взаимодействия магнонов с электрическим полем решетки, приводящих к изменению ориентации спинов магнонов, в частности процессов испускания и поглощения одного фона, пропорциональна T^6 и гораздо меньше w_m .

Вероятность взаимодействия магнона с излучением может быть оценена по формуле

$$w_y \approx \frac{|\ddot{\mu}|^2}{\hbar\omega^3} \sim \frac{e^3}{\hbar c} \omega \left(\frac{\hbar\omega}{mc^2} \right)^2.$$

Считая $\hbar\omega \sim \varepsilon_0$, найдем, что $w_y \ll w_m$, если $T > 10^{-7} \varepsilon_0$, и что вероятности становятся по порядку величины одинаковыми при $T \sim 10^{-7} \varepsilon_0$.

Таким образом, основную роль играет магнитное взаимодействие, и величина ω_0 , определяющая парамагнитную дисперсию, по порядку величины совпадает с w_m

$$\omega_0 \sim \frac{\mu^4 m^8}{\hbar^7} T^2.$$

В заключение мы хотели бы отметить важность экспериментального изучения парамагнетизма диэлектриков при низких температурах. Вместе с данными о теплоемкости таких диэлектриков данные о парамагнитной восприимчивости и ее дисперсии могли бы быть использованы для проверки основных предположений о характере энергетического спектра парамагнетиков.

Академия наук СССР

Получено 30 сентября 1952 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Van Vleck. The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities, 1932.
2. И. Померанчук. ЖЭТФ, 1941, 11, 226. (Собр. трудов, № 7).
3. B. Cabrera. Rep. Inst. Phys. Solvay, 1932, 6, 183.

III

БОЗЕ- И ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

18

О РАССЕЯНИИ НЕЙТРОНОВ С ЭНЕРГИЕЙ НЕСКОЛЬКО ГРАДУСОВ В ЖИДКОМ ГЕЛИИ II*

Совместно с А. Ахиезером

Рассматривается рассеяние медленных нейтронов в гелии II. Принято, что спектр энергии гелия II имеет вид, даваемый теорией Ландау. Доказывается, что при температурах ниже, чем температура точки перехода, рассеяние ничтожно мало.

Гелий II представляет собой, как известно, единственный пример квантовой жидкости. Характерные особенности его энергетического спектра выяснены Л. Ландау в работе [1] о сверхтекучести гелия II. А. Алиханов поставил вопрос, как влияют особенности этого спектра на рассеяние нейтронов в гелии II. Ясно, что связь ядер гелия II может играть существенную роль только при рассеянии нейтронов, энергия которых не превосходит дебаевской температуры гелия II, равной $15,5^\circ\text{K}$ ¹. При больших энергиях нейтронов рассеяние не будет отличаться от рассеяния свободными ядрами.

Вычислить вероятность рассеяния удается только для нейтронов, скорость которых меньше скорости звука в гелии II, что соответствует энергиям, меньшим, чем $3,5^\circ\text{K}$. (В этом случае энергия взаимодействия нейтрона с гелием имеет весьма простой вид — она пропорциональна плотности гелия.) В промежуточной области энергий, между $3,5$ и $15,5^\circ\text{K}$, вычисления наталкиваются на большие затруднения. Как видно из дальнейшего, длина свободного пробега нейтронов в первой из указанных об-

* ЖЭТФ, 1946, 16, 394; J. Phys. USSR, 1945, 9, 461.

¹ Это значение дебаевской температуры гелия II вычислено А. Мигдалом (устное сообщение).

ластей энергии столь велика, что гелий II должен быть «прозрачным» для таких нейтронов.

1. Мы будем пользоваться методом теории возмущений, считающей энергию взаимодействия нейтронов с ядром гелия δ -функцией от расстояния между ними. Общая энергия взаимодействия нейтрона в гелии равна $V = \sum_i A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)$, где \mathbf{r} и \mathbf{R}_i — радиусы-векторы нейтрона и i -го ядра гелия II, A — постоянная, связанная с сечением упругого рассеяния нейтрона свободным ядром гелия σ_0 соотношением

$$\sigma_0 = \frac{A^2}{\pi^4} \left(\frac{m M_{\text{He}}}{m + M_{\text{He}}} \right)^2,$$

где m — масса нейтрона, M_{He} — масса ядра гелия.

Рассмотрим тот случай, когда длина волны нейтрона λ значительно превосходит среднее расстояние между ядрами гелия a . В этих условиях суммирование в выражении для V может быть заменено интегрированием

$$V = \frac{A}{M_{\text{He}}} \int \rho(\mathbf{R}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) d\tau_R = \frac{A}{M_{\text{He}}} \rho(\mathbf{r}),$$

где $\rho(\mathbf{R})$ — плотность гелия в точке \mathbf{R} . Последняя формула справедлива, если

$$v = \frac{\hbar}{m} \left(\frac{\rho}{M_{\text{He}}} \right)^{1/2},$$

где v — скорость нейтрона. Для гелия это требование эквивалентно условию $v \ll s$, где s — скорость звука в гелии II ($s \sim 240 \text{ м/сек}$). Энергия нейтрона E при этом меньше $3,5^\circ\text{K}$.

2. Энергетический спектр гелия, согласно теории Л. Д. Ландау, складывается из фононной и ротонной частей. Рассмотрим прежде всего взаимодействия нейтрона с фононным спектром.

Представив плотность гелия $\rho(\mathbf{r})$ и скорость его $v(\mathbf{r})$ в виде

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 + \frac{1}{\Omega^{1/2}} \sum_f \left(\rho_f e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{f} \cdot \mathbf{r}} + \rho_f^* e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{f} \cdot \mathbf{r}} \right),$$

$$v(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Omega^{1/2}} \sum_f \left(v_f e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{f} \cdot \mathbf{r}} + v_f^* e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{f} \cdot \mathbf{r}} \right),$$

где ρ_0 — плотность в отсутствие фононов, \mathbf{f} — импульс фонона частоты $\varphi_f = sf/\hbar$ и Ω — объем, занимаемый гелием, легко найдем, пользуясь установленными [1] соотношениями коммутации

между ρ и v , следующие соотношения между компонентами Фурье ρ_f , ρ_f^* , v_f

$$\rho_f \rho_f^* - \rho_f^* \rho_f = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{s} f, \quad v_f = \frac{s}{\rho_0} \frac{f}{f} \rho_f,$$

справедливые в отсутствие ротонов ($\text{rot } v = 0$). Если считать, что гамильтониан единицы объема гелия имеет вид $\frac{1}{2} v \rho v + \rho \epsilon(\rho)$ (ϵ — энергия единицы массы), то с точностью до кубических в ρ , членов общий гамильтониан гелия будет

$$H_0 = \frac{s^2}{\rho_0} \sum_f (\rho_f \rho_f^* + \rho_f^* \rho_f) = \sum_f \left(n_f + \frac{1}{2} \right) h \omega_f,$$

где n_f — число фононов с импульсом f . Отличные от нуля матричные элементы компонент Фурье ρ_f и ρ_f^* равны:

$$(\rho_f) n_f, n_f + 1 = \sqrt{\frac{\rho_0 f}{2s}} \sqrt{n_f + 1} e^{-i\omega_f t},$$

$$(\rho_f^*) n_f, n_f - 1 = \sqrt{\frac{\rho_0 f}{2s}} \sqrt{n_f} e^{-i\omega_f t}.$$

Пользуясь этими формулами, легко написать матричные элементы энергии возмущения нейтрона, отвечающие эмиссии и поглощению одного фона на f и переходу нейтрона из состояния с импульсом p_0 в состояние с импульсом p :

$$V_{p, n_f+1}^{p_0 n_f} = \frac{1}{Q''} \frac{A}{M_{\text{He}}} \sqrt{\frac{\rho_0 f}{2s}} (n_f + 1) e^{\frac{1}{\hbar} (\epsilon - \epsilon' - sf) t}, \quad f = p_0 - p$$

(матричный элемент поглощения фонана имеет аналогичный вид).

Мы видим, что матричные элементы энергии возмущения нейтрона, отвечающие неизменному числу фононов, равны нулю. Это значит, что, учитывая взаимодействие нейтрона только с фононным спектром, мы не получим обычного упругого рассеяния нейтрона (при $v < s$).

При $v < s$ невозможен процесс испускания фонана нейтроном; поглощение возможно, но энергия фонана должна превосходить, как легко видеть, $2ms^2 \left(1 - \frac{v}{s}\right) \approx 14^\circ$. Отсюда следует, что интересующее нас рассеяние нейтронов есть эффект второго приближения теории возмущений. Вероятность, содержащая $V_{p, n+1}^{p_0 n}$ во второй степени и пропорциональная квадрату ядерного сечения σ_0 , крайне мала. Поэтому необходимо ввести в рассмотрение ангармоничность в гелии II.

Достаточно ограничиться при этом членами, содержащими ρ_f и v_f в третьей степени. Эти члены содержатся как в потенциальной

энергии $\rho \epsilon(\rho)$, так и в кинетической энергии $\frac{1}{2} v \rho v$. Нас будет интересовать порядок величины, поэтому мы рассмотрим ангармоничность только в потенциальной энергии, имеющую вид

$$\Delta H = \frac{1}{6} \left(\frac{d}{d\rho} \frac{s^2}{\rho} \right) \sum_{f_1, f_2, f_3} \rho_{f_1}^* \rho_{f_2} \rho_{f_3}.$$

Задача состоит в определении вероятности перехода нейтрона из состояния с импульсом p_0 в состояние с импульсом $p = p_0 - f_3$, при котором поглощается фонон f_1 и испускается фонон f_2 . Возможны два промежуточных состояния I и II: I $\equiv O \rightarrow p_0, n_1, n_2, n_3$; II $\equiv p_0, n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 - 1$; F $\equiv p_0 - f_3, n_1 - 1, n_2 + 1, n_3$.

Матричный элемент перехода равен

$$V_{OF} = \frac{B}{Q} f_3 \sqrt{f_1 f_2} \sqrt{n_1(n_2 + 1)} \frac{1}{\epsilon_0 - \epsilon - s/f_3},$$

где $B \approx \frac{p^3}{4s^2} \frac{A}{M_{\text{He}}} \frac{d}{d\rho} \frac{s^2}{\rho}$. Замечая, что знаменатель в V_{OF} равен приближенно $-sf_3$, представим вероятность рассеяния в виде

$$dw = \frac{B^2}{(2\pi)^4 \hbar^7 s^3} \int_{f_{\min}}^{\infty} \frac{1}{e^{sf/kT} - 1} \left(1 + \frac{1}{e^{(\delta + sf)kT} - 1} \right) \left(\frac{\delta}{s} + f \right)^2 f^2 df \frac{p^2 d\rho dO}{q},$$

где dO — элемент телесного угла p , $\delta = \epsilon_0 - \epsilon$, $q = p_0 - p$, $f_{\min} = \frac{1}{2} \left(q - \frac{\delta}{s} \right) \sim \frac{1}{2} q$. Легко видеть, что можно пренебречь δ

$$\delta = \frac{(f - f_3)^2}{2m} + (v_1 f_1 - f_2) \sim \frac{(kT^2)}{2ms^2} + \frac{v}{s} kT \ll kT.$$

Вероятность dw приобретает вид

$$dw = \frac{1}{2} \frac{B^2}{(4\pi)^4 \hbar^7 s^3} p^2 q^2 F \left(\frac{sq}{2kT} \right) dp dO,$$

где

$$F(a) = \int_1^{\infty} x^4 \frac{e^{ax}}{(e^{ax} - 1)^2} dx.$$

При $a \gg 1$ $F(a) \sim (1/a)e^a$, при $a \ll 1$ $F(a) \sim 24a^{-5}$. Отсюда видно, что наиболее важную роль играют q , для которых $q \lesssim kT/s$, что соответствует углам рассеяния

$$\theta \lesssim \frac{kT}{sp_0} = \sqrt{\frac{T}{14} \frac{kT}{\epsilon_0}} \ll 1.$$

Интегрируя по углам $(dO = 2\pi \frac{pdj}{pp_0})$ и конечному импульсу нейтрона, найдем полную вероятность рассеяния нейтрона фононами

$$w_f = 180 \frac{B}{(\pi s)^3} \left(\frac{kT}{sh} \right)^7.$$

Соответствующая длина свободного пробега нейтрона равна приближенно

$$l_f \approx 3l_0 \left(\frac{ms^2}{kT} \right) \frac{v}{s} n \left(\frac{\hbar}{ms} \right)^3,$$

где n — число ядер гелия в см^3 , $l_0 n = 1/\sigma_0$ (коэффициент 3 приближенно учитывает также ангармоничность, обусловленную кинетической энергией; интересуясь порядком величины, мы не учтываем зависимость s от p).

При $T = 1^\circ$ получаем

$$l/l_0 = 10^6 (v/s) (l_0 \sim 10 \text{ см}, n \sim 2,3 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}).$$

3. Рассмотрим теперь взаимодействие нейтрона с ротонным спектром. Нам необходимо определить изменение плотности гелия в месте нахождения нейтрона, обусловленное наличием ротонов.

Энергия возмущения нейтрона пропорциональна, как было показано выше, этому изменению. Предположим сперва для простоты, что в гелии имеется только один ротон. Как показано [1], энергия ротона равна

$$\epsilon_r = \frac{p_r^2}{2\mu} + \Delta_r,$$

где Δ — величина энергетического зазора между наименьшими значениями уровней ротонного и фотонного спектров, μ — масса ротона и p_r — его импульс; $\Delta \sim 8-9^\circ \text{К}$, $\mu \sim 7-8 M_{\text{He}}$ [см. работу [1], формула (3.8)]. При малых p_r энергия ротона сводится к Δ ; эта величина зависит от давления P , причем производная $d\Delta/dP$ определяет, очевидно, разность между значениями объема гелия в отсутствие ротона и после его возникновения. Иными словами, возникновение ротона приводит к изменению объема, приходящегося на гелий, и соответственно к изменению плотности гелия на величину $\rho_0 \frac{\partial \Delta}{\partial P} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_r)$, где \mathbf{R}_r — радиус-вектор ротона. Таким образом, энергию взаимодействия нейтрона с ротоном следует брать в виде

$$V_r = \frac{A}{M_{\text{He}}} \rho_0 \frac{\partial \Delta}{\partial p} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_r).$$

Легко видеть, что испускание ротонов нейтроном невозможно. Мы имеем дело, следовательно, с рассеянием нейтрона ротоном таким

же, как рассеяние нейтрона свободным ядром. Полная вероятность такого рассеяния равна

$$\omega_r = \frac{m^2 v}{\pi \hbar^4} \left(\frac{A}{M_{\text{He}}} \rho_0 \frac{\partial \Delta}{\partial P} \right)^2 \frac{1}{\Omega}.$$

Общее число ротонов N_r равно

$$N_r = \left(\frac{\mu kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\Delta/kT} \Omega.$$

Длина свободного пробега нейтрона, обусловленного взаимодействием с ротонным спектром, будет

$$l_r = l_0 \left(\frac{5}{4} \frac{M_{\text{He}}}{\rho_0 \frac{\partial \Delta}{\partial P}} \right) \left(\frac{2\pi \hbar^2}{\mu kT} \right)^{3/2} e^{\Delta/kT}.$$

Для оценки величины положим $\rho_0 \frac{\partial \Delta}{\partial P} \sim \frac{\Delta}{s^2}$, тогда $l_r/l_0 \sim s T^{-3/2} e^{\Delta/kT}$.

При $T = 1^\circ$ получаем $l_r/l_0 \sim 1,5 \cdot 10^4$, при $T = 2^\circ$ имеем $l_r/l_0 \sim 3 \cdot 10^2$.

Таким образом, при $T \geq 1^\circ$ длина пробега l_r меньше l_f . Однако обе длины столь велики, что гелий, как указывалось выше, «прозрачен» для рассматриваемых нейтронов.

*Физико-технический институт
Академии наук Укранийской ССР
Академия наук СССР*

Получено 28 февраля 1945 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Landau. J. Phys. USSR, 1941, 5, 71.

•

О ДВИЖЕНИИ ПОСТОРОННИХ ЧАСТИЦ В ГЕЛИИ II*

Совместно с Л. Д. Ландау

В последнее время было высказано предположение, что имеющийся в гелии в небольшом количестве ($10^{-6} - 10^{-7}$) изотоп гелия с массой 3 не участвует в сверхтекучем движении гелия II [1].

Цель настоящей заметки показать, что любые посторонние атомы или молекулы (включая изотопы гелия He^3 и He^6 , а также и электроны, попавшие извне в массу гелия II), когда их концентрация мала, не могут участвовать в сверхтекучем движении.

Рассмотрим для доказательства энергетический спектр гелия II, содержащего малое количество посторонних атомов. При этом можно не учитывать взаимодействия посторонних атомов друг с другом и рассматривать только их взаимодействие с атомами основного изотопа гелия. Получаемый таким образом энергетический спектр содержит в себе, кроме фононного и ротонного спектра чистого гелия II [2, 3], дополнительные энергетические уровни, обязанные наличию посторонних атомов. Каждый такой атом не может находиться в определенном месте жидкого гелия II, а должен будет, подобно электронам в металлах, двигаться через весь гелий II (существование локальных уровней в кристаллах связано с квазиклассичностью кристаллической решетки, которая не имеет места в гелии II).

Движению каждого постороннего атома через гелий сопоставляется определенный вектор импульса, от которого непрерывным образом зависит энергия. Мы получаем непрерывный энергетический спектр, характеризуемый для каждого сорта посторонних атомов определенной зависимостью энергии от импульса. Эта зависимость может быть различна для различных сортов атомов.

Наинизшему энергетическому состоянию может соответствовать либо импульс P , равный нулю, либо имеющий некоторое конечное значение P_0 . Разлагая энергию в ряд по степеням $P - P_0$, вблизи минимума энергии получаем

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{(P - P_0)^2}{2\mu}. \quad (1)$$

Здесь μ — эффективная масса, как правило равная по порядку величины массе постороннего атома, исключая электрон, для которого эффективная масса может быть значительно больше электронной.

Если $P_0 = 0$, то вместо (1) мы имеем $\epsilon = \epsilon_0 + P^2/2\mu$.

При малых P разложение энергии в ряд по степеням импульса начинается с квадратичного члена, а не с линейного, как в случае фононов.

Как известно, наличие линейного члена в случае фононов вызвано специальными причинами, не имеющими места при рассматриваемых сейчас условиях.

В силу законов сохранения импульса и энергии, возбуждение фононов посторонним атомом с энергией (1) становится невозможным, как только скорость атома $(P - P_0)/\mu$ оказывается меньшей, чем скорость звука. Что касается возбуждения ротонов, то оно требует энергии, большей чем $\Delta = 9,6^\circ \text{K}$ [3]. Когда скорость атома меньше определенной скорости, зависящей от приведенной массы, возбуждение ротонов невозможно. В случае He^3 эта критическая скорость оказывается порядка скорости звука. Таким образом, практически все посторонние атомы, двигающиеся со скоростью меньше некоторой критической скорости, не могут передавать свою энергию сверхтекучей части гелия II. Пробег таких атомов определяется их столкновениями с фононами и ротонами.

При не очень низких температурах вероятность столкновения с фононами меньше, чем с ротонами, так как ротонное сечение — порядка атомных сечений, а фононное сечение мало ввиду большой длины волн фононов, имеющихся в гелии II (рассеяние фононов примесями пропорционально четвертой степени частоты). Благодаря столкновениям с фононами и ротонами атомы примеси будут двигаться вместе с нормальной частью гелия II и не смогут участвовать в сверхтекучем движении. Таким образом, в нормальную часть гелия II, кроме массы, связанной с ротонами и фононами, будет входить также дополнительная масса, обязанная посторонним атомам. Величина этой массы, содержащейся в 1 см^3 , равна $n P_0^2 / 3kT$ (n — число атомов примеси, заключенных в 1 см^3). Если $P_0 = 0$, то дополнительная масса равна $n\mu$.

Так как He^3 должен двигаться с нормальной частью гелия II, то при сверхтекучем вытекании гелия He^3 должен будет оставаться в исходном сосуде. Именно такой результат был получен недавно Доунтом и др. [4], которые смогли уменьшить концентрацию He^3 в вытекающей сверхтекучим образом массе He II в 50 раз. При этом неучастие He^3 в сверхтекучем движении Доунт и др. пытаются связать с вопросом о свойстве сверхтекучести чистого He^3 . Однако, согласно вышеизложенным теоретическим соображениям, вопрос о том, сверхтекуч или не сверхтекуч чистый He^3 , не имеет

* ДАН СССР, 1948, 59, 669.

**ВЛИЯНИЕ ПРИМЕСЕЙ
НА ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
И СКОРОСТЬ ВТОРОГО ЗВУКА В ГЕЛИИ II ***

никакого отношения к его неучастию в сверхтекучем движении Не II. Любые посторонние атомы, содержащиеся в Не II, не будут участвовать в сверхтекучем движении Не II. В частности, это относится и к Не⁶, хотя сам по себе Не⁶, возможно, обладает свойством сверхтекучести.

Академия наук СССР

Получено 12 декабря 1947 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. J. Frank. Phys. Rev., 1946, 70, 561.
2. Л. Ландау. ЖЭТФ, 1941, 11, 592.
3. L. Landau. J. of Phys., 1947, 11, 91.
4. J. G. Daunt et al. Phys. Rev., 1947, 72, 502.

Примеси, содержащиеся в гелии II, входят в его нормальную часть. Так как нормальная часть гелия II, обязанная фононам и ротонам, быстро падает с понижением температуры, а вклад примесей в нормальную часть с понижением температуры не уменьшается (или даже растет), то малые содержания примесей вызывают большие изменения термодинамических свойств гелия II, а также скорости второго звука.

В § 1 определяются условия применимости классической статистики к описанию поведения примесей. В § 2 вычислен вклад примесей в нормальную плотность, энтропию и теплоемкость. В § 3 установлена система гидродинамических уравнений, описывающих слабые растворы и учитывающих осмотическое давление примесей. В § 4 найдено выражение для скорости второго звука u_2 в присутствии примесей. Показано падение u_2 до очень малых значений при $T \rightarrow 0$, в отличие от чистого гелия II, в котором $u_2 \rightarrow c_1/\sqrt{3}$, когда $T \rightarrow 0$. В § 5 определено u_2 в том случае, когда примесный газ полностью вырожден (квантовый раствор).

Как было указано в [1], растворенные в гелии II любые посторонние частицы (в том числе атомы Не³ и Не⁶) не участвуют в сверхтекучем движении и входят в нормальную часть гелия II. Таким образом, нормальная плотность ρ_n в случае слабых растворов имеет вид: $\rho_n = \rho_{n0} + \rho_{ni}$, где ρ_{n0} — нормальная плотность, связанная с тепловыми возбуждениями чистого гелия II (фононы и ротоны) [2, 3], ρ_{ni} — нормальная плотность, обязанная примесям. Простое сложение ρ_{n0} и ρ_{ni} может иметь место только в слабых растворах посторонних веществ. В дальнейшем мы будем все время считать концентрацию примесей ε малой по сравнению с единицей. Так как ρ_{n0} быстро падает с понижением температуры [2], а ρ_{ni} либо стремится к постоянному пределу (9а), либо даже растет с понижением температуры (9б), то при достаточно низких температурах ρ_{ni} становится сравнимым с ρ_{n0} . Начиная примерно с этих температур, все термодинамические функции гелия II (энергия, теплоемкость, энтропия, нормальная плотность и т. д.) будут определяться примесями и показывать зависимость от температуры, отличную от той, которая существует в чистом гелии II. Так как

* ЖЭТФ, 1949, 19, 42.

ρ_{n0} мало при низких температурах, то даже малые количества примесей оказывают аномально большое влияние на ρ_n . Те же примерно условия имеют место при рассмотрении изменений теплоемкости и энтропии, производимых примесями. В дальнейшем мы рассмотрим влияние примесей на свойства гелия II, основываясь на теории гелия II, развитой Ландау [2, 3]. Мы будем также считать, что с понижением температуры примеси не выпадают из раствора.

§ 1. Условия, при которых примеси можно описывать с помощью классической статистики

Частицы примеси распределяются по уровням своего индивидуального трансляционного движения [1] в соответствии с распределением Максвелла — Больцмана до таких низких температур, при которых существенны либо явления квантового вырождения «примесного газа», либо взаимодействие частиц примеси друг с другом. Отклонение от классической статистики наступает при температурах, которые сильно зависят от характера энергетического спектра частиц примеси. Этот спектр определяется зависимостью энергии частицы примеси E от ее импульса p [1]. Логически возможны два случая: либо минимуму энергии соответствует импульс, равный нулю, либо не равный нулю. Вблизи минимума энергии мы имеем

$$E = E_0 + p^2/2\mu, \quad (1a)$$

$$E = E_0 - (p - p_0)^2/2\mu, \quad (1b)$$

где μ — эффективная масса.

В первом случае квантовое вырождение наступает при температурах, определяющихся из обычных соотношений. Если спин примесей s полуцелый, то температура вырождения T_0 равна

$$T_0 = \frac{\hbar^2 n_0^{2/3} \varepsilon^{1/3}}{k\mu} \left(\frac{3\pi^2}{V^2 (2s+1)} \right)^{1/3}. \quad (2a)$$

В случае примесей с целым спином [4]

$$T_0 = \frac{\hbar^2 n_0^{2/3} \varepsilon^{1/3}}{k\mu} \frac{3^{2/3} \pi}{2(2s+1)^{1/3}}, \quad (3a)$$

где $n_0 = \rho/m$ — число атомов чистого гелия в 1 см^3 , m — масса атома He^4 .

Сравним (2a) и (3a) с температурами, при которых играет роль взаимодействие атомов примеси друг с другом. Энергия взаимодействия атомов примеси порядка $U\varepsilon$, где U — характеристическая энергия, зависящая от рода примесей. Если примесями являются изотопы He^3 или He^4 , или атомы благородных газов, слабо взаимодействующих друг с другом, то U — порядка нескольких градусов. В этих условиях вырождение начинается раньше, чем взаимо-

действие: $kT_0/U\varepsilon \sim \varepsilon^{-1/3} \gg 1$. Если $\varepsilon < 10^{-2}$, то $T_0 < 0,2^\circ$. В дальнейшем мы будем всюду, за исключением § 5, считать, что $T \gg T_0$ и соответственно пользоваться классической статистикой.

Рассмотрим теперь условия применимости классической статистики в том случае, когда минимуму энергии отвечает $p_0 \neq 0$. Если спин частиц примеси полуцелый, то температура вырождения определяется из уравнений, описывающих полностью вырожденный ферми-дираковский газ с $p_0 \neq 0$:

$$\begin{aligned} kT_0 &= (\Delta p)^2/2\mu, \quad (2s+1) p_0^2 \Delta p / 2\pi^2 \hbar^3 = n_0 \varepsilon, \\ kT_0 &= 2\pi^4 (\hbar^6 n_0^2 / p_0^6) (p_0^2 / \mu) \varepsilon^2 / (2s+1)^2. \end{aligned} \quad (26)$$

В отличие от (2a) температура вырождения при $p_0 \neq 0$ оказывается пропорциональной ε^2 , а не $\varepsilon^{1/3}$. Так как энергия взаимодействия примесей пропорциональна ε , то пределы применимости классической статистики определяются взаимодействием примесей. Пользование классической статистикой при $p_0 \neq 0$ и полуцелом спине законно вплоть до температур порядка $U\varepsilon/k$. Полагая

$$U/k \sim 1 \div 10^\circ \quad (4)$$

(случай He^3 и He^4), получаем $T_0 \gg (1 \div 10)\varepsilon$. Если $\varepsilon < 10^{-2}$, T_0 должно быть больше $0,1^\circ$.

Если спин целый, то переход к распределению Бозе — Эйнштейна осуществляется при температурах того же порядка, что и (2b). Следует отметить, что при $p_0 \neq 0$ бозе-эйнштейновская конденсация не имеет места. Для доказательства этого рассмотрим общее соотношение, связывающее химический потенциал ζ , температуру и число частиц в 1 см^3 :

$$\frac{2s+1}{2\pi^2 \hbar^3} \int \frac{p^2 dp}{\exp [(E - \zeta)/kT] - 1} = n_0 \varepsilon.$$

Подставляя сюда (1b), вводя $akT = -\zeta + E_0 > 0$ и вынося $p^2 \approx p_0^2$ из-под знака интеграла, получаем

$$\frac{2s+1}{2\pi^2 \hbar^3} p_0^2 \int \frac{dp}{\exp [\alpha + (p - p_0)^2/2\mu kT] - 1} = n_0 \varepsilon.$$

Вводим переменную $x = (p - p_0)/\sqrt{2\mu kT}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{\alpha+x^2}-1} = \varepsilon \frac{2\pi^2}{2s+1} \frac{\hbar^3 n_0}{p_0^3} \sqrt{\frac{p_0^2}{2\mu kT}}. \quad (5)$$

Правая сторона в (5) порядка $10\varepsilon (p_0^2/2\mu kT)^{1/2}$, так как $p_0^3 \sim \hbar^3 n_0$. Если $10\varepsilon (p_0^2/2\mu kT)^{1/2} \ll 1$, то $\alpha \gg 1$ и осуществляется переход

к классической статистике. Вырождение осуществляется при $\alpha \leq 1$, т. е. при $T \sim T_0$, где

$$kT_0 \sim 2e^2\pi^4\hbar^6n_0^2/p_0^4\mu(2s+1)^2. \quad (36)$$

Как и следовало ожидать, (3а) и (3б) одинакового порядка.

Рассмотрим сильно вырожденный газ с $p_0 \neq 0$ и целым спином. В этом случае правая сторона в (5) велика по сравнению с единицей. Поэтому $\alpha \ll 1$ и значения x , играющие главную роль в интеграле левой стороны (5), малы по сравнению с единицей. Тогда этот интеграл сводится к интегралу от $1/(a+x^2)$, и мы получим

$$\alpha = (2s+1)^2 p_0^4 \mu kT / 2\pi^2 \hbar^6 n_0^2 e^2 \sim \mu kT / p_0^2 e^2. \quad (6)$$

При любой, сколько угодно малой, но конечной температуре существует α , определяемое (6), и не происходит конденсации в импульсном пространстве. На самом деле, однако, так же как и в случае полуцелого спина, классическая статистика перестает быть применимой при температурах порядка $U\varepsilon/k$ (те же условия, что и в случае полуцелого спина).

Резюмируя этот параграф, можно утверждать, что при $\varepsilon \leq 10^{-2}$ и $T > 0,2^\circ$ можно описывать примеси с помощью классической статистики.

§ 2. Термодинамические функции в классической области

1. Нормальная плотность

Вклад примесей в нормальную плотность определяется интегралом [2]

$$V\rho_{ni} = - \int p (\partial f / \partial E)(FV) dp. \quad (7)$$

Если $p_0 = 0$, то

$$f = n_0 \varepsilon (2\pi\mu kT)^{-3/2} e^{-p^2/2\mu kT}. \quad (8)$$

Подстановка (8) в (7) дает

$$\rho_{ni} = n_0 \varepsilon \mu = \rho \varepsilon \mu / m. \quad (9a)$$

Таким образом, при $p_0 = 0$ ρ_{ni} стремится при $T = 0$ к постоянному пределу, пропорциональному ε . При $p_0 \neq 0$ f равно

$$f = \frac{n_0 \varepsilon \exp[-(p-p_0)^2/2\mu kT]}{4\pi p_0^2 \sqrt{2\pi\mu kT}}. \quad (10)$$

Аналогично разобранному ранее случаю ротонов в чистом гелии II [3] получаем

$$\rho_{ni} = (p_0^2/3kT) n_0 \varepsilon \quad (p_0^2 \gg \mu kT). \quad (9b)$$

Случай $p_0 \neq 0$ замечателен возрастанием ρ_{ni} с уменьшением температуры. Это возрастание прекращается при $T \sim U\varepsilon/k$. Предельное значение ρ_{ni} , достигаемое при этой температуре, равно

$$\rho_{ni} = (p_0^2/3U) n_0 \sim n_0 m = \rho. \quad (11)$$

Поразительно, что ρ_{ni} достигает при температуре $U\varepsilon/k$ значения, не зависящего от ε и равного по порядку величины полной плотности гелия II. Чем меньше концентрация примесей, тем при меньшей температуре ρ_{ni} оказывается порядка ρ . Сильное возрастание ρ_{ni} при $T \rightarrow U\varepsilon/k$ объясняется тем, что состояния, близкие к p_0 , имея импульс, обладают малой скоростью, стремящейся к нулю, когда $p \rightarrow p_0$. Следовательно, p/v , являющееся мерилом эффективной массы, стремится к бесконечности, когда $p \rightarrow p_0$. А так как при $T \rightarrow 0$ примеси располагаются на уровнях, приближающихся к p_0 , то ρ_{ni} увеличивается. При $T \sim U\varepsilon/k$ взаимодействие между примесями с $p \neq 0$ оказывается настолько большим [5], что весь спектр перестраивается, и вместо индивидуальных движений отдельных растворенных частиц возникают коллективные движения всех взаимодействующих частиц.

Таблица 1

Температуры, при которых $\rho_{ni} = \rho_{no}$

ε		T°	ε		T°
$p_0 = 0$	$p_0 = p_{0r}$		$p_0 = 0$	$p_0 = p_{0r}$	
$1,51 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-9}$	0,2	$1,36 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-4}$	1,1
$2,5 \cdot 10^{-6}$	10^{-8}	0,4	$2,72 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$	1,2
$2,5 \cdot 10^{-5}$	10^{-6}	0,6	$4,87 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-3}$	1,3
$1,4 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-8}$	0,7	$7,8 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-3}$	1,4
$6,65 \cdot 10^{-4}$	$3,3 \cdot 10^{-5}$	0,8		$1,1 \cdot 10^{-2}$	1,5
$2,22 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	0,9		$1,7 \cdot 10^{-2}$	1,6
	$6 \cdot 10^{-8}$	1		$2,5 \cdot 10^{-2}$	1,7

Полная нормальная плотность в присутствии примесей может быть теперь записана следующим образом ((1), (9а), (9б) в [2, 3]):

$$\rho_{no} = \frac{2\pi^2 k^4 T^4}{45\hbar^3 c^5} + \frac{2\sqrt{\mu_r p_{0r}^4}}{3(2\pi)^{3/2} \sqrt{kT\hbar^3}} e^{-\Delta_r/kT},$$

$$\rho_n = \rho_{no} + \rho \varepsilon \mu / m \quad (p_0 = 0), \quad (12a)$$

$$\rho_n = \rho_{no} + (\rho/m)(p_0^2/3kT)\varepsilon; \quad (12b)$$

μ_r , p_{0r} , Δ_r — постоянные, характеризующие ротоны в чистом гелии II, c — скорость звука. При достаточно низких температурах

добавочная нормальная плотность, происходящая от примесей, оказывается значительно большей, чем ρ_{n0} .

В табл. 1 приведены температуры, при которых ρ_{ni} равно ρ_{n0} , если считать μ порядка массы He^4 (случай He^3 или He^6) и $p_0 = p_{0r} = 2,1 \cdot 10^{-19}$.

Если температуры, при которых ρ_{ni} и ρ_{n0} оказываются равными, лежат ниже $0,6^\circ$, то, рассматривая только фононную часть ρ_{n0} , получаем следующее выражение для температуры, при которой ρ_{ni} равно ρ_{n0} (при $T < 0,6^\circ$ вклад ротонов в ρ_{n0} не существует):

$$T = (45n_0\mu\hbar^3c^5/2\pi^2k^4)^{1/4}\varepsilon^{1/4} \quad (p_0 = 0), \quad (13a)$$

$$T = (45n_0p_0^2\hbar^3c^5/6\pi^2k^5)^{1/5}\varepsilon^{1/5} \quad (p_0 \neq 0). \quad (13b)$$

Если температуры, при которых ρ_{ni} и ρ_{n0} сравниваются, лежат выше $0,6^\circ$, то, пренебрегая фононной частью ρ_{n0} , находим вместо (13a) и (13b) (выше $0,6^\circ$ ρ_{n0} определяется ротонами):

$$\frac{\Delta_r}{kT} = \ln \left\{ \frac{2p_{0r}^4\sqrt{\mu_r}}{3(2\pi)^{3/2}\hbar^3n_0\varepsilon\mu} \right\} \quad (p_0 = 0), \quad (14a)$$

$$\frac{\Delta_r}{kT} = \ln \frac{2p_{0r}^4\sqrt{kT\mu_r}}{(2\pi)^{3/2}\hbar^3n_0\varepsilon p_0^2} \quad (p_0 \neq 0). \quad (14b)$$

Подставляя сюда значение ротонных постоянных [3]

$$\Delta_r/k = 9,6^\circ, \mu_r = 0,77m, p_{0r}/\hbar = 2 \cdot 10^8$$

и полагая $p_0 = p_{0r}$, $\mu = \mu_r$, приводим соотношения (14a), (14b) к следующему виду:

$$T = 9,6/(4,8 - \ln \varepsilon - 1/2 \ln T) \quad (p_0 = 0), \quad (15a)$$

$$T = 9,6/(1,8 + 1/2 \ln T - \ln \varepsilon) \quad (p_0 \neq 0) \quad (15b)$$

(T в градусах).

Из табл. 1 и формул (13a), (13b), (15a), (15b) видно, что при одинаковом значении ε ρ_{ni} больше в том случае, когда $p_0 \neq 0$. Температура, при которой ρ_{ni} равно ρ_{n0} , слабо зависит от ε . При $\varepsilon > 2,5 \cdot 10^{-5}$ ($p_0 = 0$) фононная часть ρ_{n0} никогда не играет роли. В этом случае при температурах, больших чем (15a), $\rho_n = \rho_{ni}$. Если $p_0 \neq 0$, то фононная часть ρ_{n0} перестает играть какую бы то ни было роль при еще меньших значениях ε .

2. Энтропия

Используя формулы для энтропии и свободной энергии слабых растворов [6] и идеального одноатомного газа [7], получаем при $p_0 = 0$ следующее выражение для энтропии 1 г гелия, содержа-

щего примеси:

$$S = S_0 + \frac{R\varepsilon}{4} \left\{ \ln \left[\left(\frac{\mu kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{(2s+1)v_0}{\varepsilon} \right] + \frac{5}{2} \right\}, \quad (16a)$$

где S_0 — энтропия чистого гелия; v_0 — объем, приходящийся на 1 атом гелия, R — газовая постоянная. Полагая μ равным массе He^4 , приводим (16a) к виду

$$S = S_0 + (R\varepsilon/4) \ln (1,5T^{3/2}/\varepsilon). \quad (17a)$$

В табл. 2 приведены температуры, при которых $S - S_0$ равно S_0 для различных значений ε .

В случае, когда $p_0 \neq 0$, для определения S выпишем сначала свободную энергию [3]

$$F = F_0 + \frac{\varepsilon E_0}{m} - \frac{\varepsilon kT}{m} \left[\ln \left(\frac{(2s+1)v_0 p_0^2}{\hbar^3 \varepsilon} \right) \sqrt{\frac{\mu kT}{2\pi^3}} + 1 \right],$$

$$S = S_0 + \frac{\varepsilon R}{4} \left[\ln \left(\frac{(2s+1)v_0 p_0^2}{\hbar^3 \varepsilon} \right) \sqrt{\frac{\mu kT}{2\pi^3}} + \frac{3}{2} \right], \quad (16b)$$

$$S_0 = \frac{2(k\mu_r)^{1/2}p_0^2\Delta_r}{\rho \sqrt{T\hbar^3}} \left(1 + \frac{3kT}{\Delta_r} \right) e^{-\Delta_r/kT} + \frac{2\pi^2 k^4 T^3}{45\hbar^3 c^3 \rho}.$$

Полагая здесь p_0 и μ равными их значению для ротонов и $s = 1/2$, имеем

$$S = S_0 + (\varepsilon R/4) \ln (30 \sqrt{T}/\varepsilon). \quad (17b)$$

Таблица 2

Температуры, при которых $S - S_0 = S_0$

ε	T°		ε	T°	
	$p_0 = 0$	$p_0 = p_{0r}$		$p_0 = 0$	$p_0 = p_{0r}$
10^{-4}	$5 \cdot 10^{-5}$	$0,6$	$7 \cdot 10^{-3}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$	$1,3$
$1,8 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-5}$	$0,7$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$8,4 \cdot 10^{-3}$	$1,4$
$3 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$0,8$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1,5$
$5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$0,9$	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1,6$
10^{-3}	$6,5 \cdot 10^{-4}$	$1,0$	$4,5 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$1,7$
$2 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1,1$	$6,5 \cdot 10^{-2}$	$3,7 \cdot 10^{-2}$	$1,8$
$4 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$1,2$			

Из табл. 2 и (17a), (17b) следует, что влияние примесей на энтропию гелия начинает сказываться при температурах, больших, чем те температуры, при которых примеси заметно меняют нормальную плотность [табл. 1, (15a), (15b)]. С понижением температуры сперва сказывается действие примесей на энтропию, и толь-

ко более низких температурах примеси оказывают действие на ρ_n . Влияние примесей на энтропию больше в том случае, когда $p_0 \neq 0$ и по порядку величины равно p_0 для ротонов. Однако разница между действием двух родов примесей на энтропию меньше, чем в их действии на ρ_n , где также более сильное влияние оказалось в случае $p_0 \neq 0$. Если $\epsilon > 10^{-3}$, то при $T < 1^\circ$ энтропия гелия определяется почти полностью примесями.

3. Теплоемкость

Теплоемкость 1 г гелия, содержащего примеси с $p_0 = 0$, имеет вид

$$C = C_0 + 3 R \epsilon / 8; \quad (18a)$$

C_0 — теплоемкость чистого гелия.

Если $p_0 \neq 0$, то

$$C = C_0 + R \epsilon / 8. \quad (18b)$$

Влияние примесей на теплоемкость оказывается более слабым, чем на энтропию или на нормальную плотность.

§ 3. Система гидродинамических уравнений гелия II, содержащего примеси

Уравнения движения гелия в присутствии примесей несколько отличаются от уравнений для чистого гелия. Эти отличия связаны с сохранением при движении количества растворенных частиц и с возникновением осмотического давления примесей (экспериментально осмотическое давление было обнаружено Даунтом и др. [8]).

Сохранение количества растворенных частиц, учитывая, что примеси входят в нормальную часть гелия II, приводит к уравнению

$$\partial(\rho\epsilon)/\partial t + \operatorname{div} \rho\epsilon v_n = 0, \quad (19)$$

где v_n — скорость нормальной части гелия II. Соотношения [2]

$$\begin{aligned} j &= \rho_s v_s + \rho_n v_n, & \rho &= \rho_s + \rho_n, \\ \partial\rho/\partial t + \operatorname{div} j &= 0, & \partial j_i/\partial t &= -\partial P_{ik}/\partial x_k, \end{aligned} \quad (20)$$

$$P_{ik} = P\delta_{ik} + \rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho_s v_{si} v_{sk}$$

сохраняются и при наличии примесей (обозначения те же, что и в [2]; P — давление).

Изменяется уравнение движения сверхтекучей части гелия II, в котором должно быть учтено осмотическое давление примесей. Как указано в [2], $\partial v_s / \partial t$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = -\operatorname{grad} \left[\Phi + \frac{v_s^2}{2} - \frac{\rho_n}{2\rho} (v_n - v_s)^2 \right].$$

Здесь Φ — термодинамический потенциал единицы массы. Введя вместо Φ химический потенциал ζ : $\Phi = \zeta/m$ и пользуясь выражением для ζ растворителя в слабых растворах: $\zeta = \zeta_0 - \epsilon kT$, получаем

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = -\operatorname{grad} \left[\Phi_0 + \frac{v_s^2}{2} - \frac{\rho_n}{2\rho} (v_n - v_s)^2 - \frac{\epsilon kT}{m} \right]. \quad (21)$$

Последний член в (21) ответствен за осмотическое давление. Уравнения (19), (20) и (21) составляют полную систему гидродинамических уравнений гелия II, содержащего примеси.

Из (21) в состоянии равновесия, когда $v_s = v_n = 0$, находим

$$\Phi_0 - \epsilon kT/m = \text{const}, \quad -S_0 dT + V dP - (k/m) \Delta(\epsilon T) = 0.$$

Если P постоянно, то

$$-S_0 \Delta T = (k/m) \Delta(\epsilon T). \quad (22)$$

При малых ϵ достаточно ничтожных изменений температуры, для того чтобы вызвать большие неоднородности в распределении концентрации. Если $\epsilon = 10^{-6}$ (концентрация He^3 в обычном гелии), то $\Delta\epsilon = \epsilon$ при температуре в 1.8° , когда $\Delta T = 10^{-5}^\circ$. Поэтому, если в гелии II где-нибудь имеется место, охлажденное на $10^{-4} - 10^{-5}^\circ$, то при $T \sim 1 - 2^\circ$ в этом месте собираются все примеси, содержащиеся в концентрации порядка 10^{-6} .

§ 4. Второй звук в гелии II, содержащем примеси

Так как скорость второго звука u_2 в чистом гелии, равная [2] $(S^2 T \rho_s / C \rho_n)^{1/2}$, определяется такими величинами, которые сильно меняются под действием примесей (S, ρ_n, C), то можно ожидать, что в слабых растворах скорость второго звука будет сильно отличаться от ее значения в чистом гелии, если рассматривать достаточно низкие температуры. Было бы, однако, неправильно пользоваться в присутствии примесей выражением для u_2^2 в виде $TS^2 \rho_s / C \rho_n$, так как примеси меняют систему гидродинамических уравнений (§ 3). Поэтому для нахождения u_2 мы рассмотрим линеаризованную систему уравнений, получающуюся из (19), (20) и (21) отбрасыванием всех малых величин второго порядка. При этом, как обычно, считаются малыми скорости v_s и v_n и отклонения всех величин от их равновесных значений:

$$\begin{aligned} S &= S_0 + S', & \rho &= \rho_0 + \rho', & T &= T_0 + T', & P &= P_0 + P', \\ \epsilon &= \epsilon_0 + \epsilon'. \end{aligned} \quad (23)$$

Равновесные значения снабжаются индексом нуль. Но в тех случаях, когда это не будет вызывать недоразумений, мы будем опускать этот индекс.

Линеаризованная система уравнений, определяющая распространение первого и второго звука, имеет вид:

$$\partial \rho'_s / \partial t + \partial \rho'_n / \partial t + \rho_{s0} \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \rho_{s0} \operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0, \quad (24)$$

$$\rho_0 \partial S' / \partial t + S_0 \partial \rho' / \partial t + S_0 \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0, \quad (25)$$

$$\rho_0 \partial \epsilon' / \partial t + \epsilon_0 \partial \rho' / \partial t + \rho_0 \epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0, \quad (26)$$

$$\rho_{s0} \partial \mathbf{v}_n / \partial t + \rho_{s0} \partial \mathbf{v}_s / \partial t = -\nabla P', \quad (27)$$

$$\partial \mathbf{v}_s / \partial t = -\nabla \Phi_0 - (k/m)(\epsilon_0 \nabla T' + T_0 \nabla \epsilon'). \quad (28)$$

Из (24) и (25) получаем

$$\partial^2 \rho / \partial t^2 = \Delta P. \quad (29)$$

Для градиента Φ имеем:

$$d\Phi_0 = -S_0 dT + \rho^{-1} dp, \quad \nabla \Phi' = -S_0 \nabla T' + \rho^{-1} \nabla P'.$$

Подставляем $\nabla P'$ из этого соотношения в (27)

$$\rho_{s0} \partial \mathbf{v}_n / \partial t + \rho_{s0} \partial \mathbf{v}_s / \partial t = -\rho_0 S_0 \nabla T' + \rho_0 \nabla \Phi'; \quad (30)$$

используем (28):

$$\begin{aligned} \rho_{s0} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) &= -\rho S_0 \nabla T - \frac{k\rho}{m} (T \nabla \epsilon + \epsilon \nabla T), \\ \operatorname{div} (\dot{\mathbf{v}}_n - \dot{\mathbf{v}}_s) &= -(\rho/\rho_n) S_0 \Delta T - (k\rho/m\rho_n)(T \Delta \epsilon + \epsilon \Delta T). \end{aligned} \quad (31)$$

Из (24) и (25) получаем:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_0 &= -\dot{\rho} S_0 - S_0 \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_n = -\rho_s S_0 \operatorname{div} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s), \\ \operatorname{div} (\dot{\mathbf{v}}_n - \dot{\mathbf{v}}_s) &= -\ddot{\rho}/S_0 \rho_s. \end{aligned} \quad (32)$$

(31) и (32) дают

$$\dot{S} = (\rho_s/\rho_n) S S_0 \Delta T + (S k \rho_s/m \rho_n) (\epsilon \Delta T + T \Delta \epsilon). \quad (33)$$

Соотношения (25) и (26) устанавливают связь между ϵ' и S' :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}_n &= -\dot{\epsilon}'/\epsilon - \dot{\rho}'/\rho = -\dot{S}'/S - \dot{\rho}'/\rho, \\ \dot{\epsilon}'/\epsilon &= \dot{S}'/S, \quad \epsilon' = (\epsilon_0/S_0) S'. \end{aligned} \quad (34)$$

Преобразовываем (33) с помощью (34)

$$\ddot{S} = (\rho_s/\rho_n) S (S_0 + k\epsilon/m) \Delta T + (\rho_s/\rho_n) (k\epsilon T/m) \Delta \epsilon. \quad (35)$$

Выражаем теперь S' через T' , P' и ϵ' , используя (34),

$$\begin{aligned} S' &= \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P\epsilon} T' + \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_{T\epsilon} P' + \left(\frac{\partial S}{\partial \epsilon} \right)_{PT} \epsilon' = \\ &= \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P\epsilon} T' + \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_{T\epsilon} P' + \left(\frac{\partial S}{\partial \epsilon} \right)_{PT} \frac{\epsilon_0}{S} S', \\ S' &= \left[1 - \frac{\epsilon}{S} \left(\frac{\partial S}{\partial \epsilon} \right)_{PT} \right]^{-1} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P\epsilon} T' + \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_{T\epsilon} P' \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Исключаем S' из (29) и (35)

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial T} \ddot{T} + \frac{\partial S}{\partial P} \ddot{P} &= \frac{\rho_s}{\rho_n} S \left(S_0 + \frac{k\epsilon}{m} \right) \left(1 - \frac{\epsilon}{S} \frac{\partial S}{\partial \epsilon} \right) \Delta T + \\ &+ \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{k\epsilon T}{m} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial S}{\partial P} \Delta P \right), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} \ddot{T} + \frac{\partial \rho}{\partial P} \ddot{P} + \frac{\partial \rho}{\partial \epsilon} \frac{\epsilon (\ddot{T} \partial S / \partial T + \ddot{P} \partial S / \partial P)}{S - \epsilon \partial S / \partial \epsilon} = \Delta P. \quad (38)$$

Пользуясь (16а) и (16б), преобразовываем (37) и (38) к следующему виду:

$$\frac{\partial S}{\partial T} \ddot{T} + \frac{\partial S}{\partial P} \ddot{P} = \frac{\rho_s}{\rho_n} \left[\left(S_0 + \frac{k\epsilon}{m} \right)^2 + \frac{kT\epsilon}{m} \frac{\partial S}{\partial T} \right] + \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{k\epsilon T}{m} \frac{\partial S}{\partial P} \Delta P, \quad (39)$$

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial \rho}{\partial \epsilon} \frac{\partial S}{\partial T} \frac{\epsilon_0}{S_0 + k\epsilon/m} \right] \ddot{T} + \left[\frac{\partial \rho}{\partial P} + \frac{\partial \rho}{\partial \epsilon} \frac{\partial S}{\partial P} \frac{\epsilon}{S_0 + k\epsilon/m} \right] \ddot{P} = \Delta P. \quad (40)$$

Полагая

$$T' = A e^{iq(x-ut)}, \quad P' = B e^{iq(x-ut)}, \quad (41)$$

получаем квадратное уравнение для u^2 , корни которого дают скорости первого и второго звука. Получаем таким образом выражение довольно громоздко. Однако уравнения могут быть сильно упрощены, если мы пренебрежем изменением плотности и давления при распространении второго звука и изменением температуры при распространении первого звука.

Заметим, что те же пренебрежения делаются и при рассмотрении распространения звука в чистом гелии II. Легко можно показать законность этих пренебрежений. Рассмотрим второй звук. В коэффициенте при \ddot{P} в (40) первый член больше второго. Их отношение на основании (16б), (16а) равно ($(\partial \rho / \partial \epsilon)|_{PT} = |\rho_1| \sim \rho$)

$$\left| \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{T\epsilon} \frac{S_0 + k\epsilon/m}{\rho_1 \epsilon (\partial S / \partial P)_{T\epsilon}} \right| \sim \left| \frac{S_0 + k\epsilon/m}{\epsilon P (\partial S / \partial P)_{T\epsilon}} \right| \sim \frac{S_0 + k\epsilon/m}{\epsilon S} \sim \frac{1}{\epsilon} \gg 1.$$

Поэтому (40), (41) дают

$$\frac{B}{A} = \left[\frac{q^2}{\omega^2} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{T\epsilon} \right]^{-1} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P\epsilon} + \rho_1 \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P\epsilon} \frac{\epsilon}{S_0 + k\epsilon/m} \right].$$

Подставляя это в (39), определяем отношение γ отбрасываемого справа члена к оставляемому ($T\partial S / \partial T = C$):

$$\gamma = \frac{\frac{k\epsilon T}{m} \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_{T\epsilon}}{\frac{q^2/\omega^2 - (\partial \rho / \partial P)_{T\epsilon}}{(S_0 + k\epsilon/m)^2 + kTeC/m}} \frac{\frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial S}{\partial T} \frac{\epsilon \rho_1}{S_0 + k\epsilon/m}}{(S_0 + k\epsilon/m)^2 + kTeC/m}, \quad (42)$$

$(q^2 / \omega^2 - \partial \rho / \partial P)$ — порядка или больше u_1^{-2} , где u_1 — скорость «обычного» звука (u_2 — порядка или меньше u_1):

$$u_1^2 \partial S / \partial P \sim S / \rho,$$

$$\gamma \lesssim \frac{k\epsilon T}{m} \frac{S}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial T} + \rho_1 \frac{C\epsilon}{T(S_0 + k\epsilon/m)} \right] \left[\left(S_0 + \frac{k\epsilon}{m} \right)^2 + \frac{k\epsilon C}{m} \right]^{-1}.$$

Если ϵ настолько мало, что $(d\rho / dT)_{P\epsilon}$ больше, чем

$$\rho_1 \epsilon C / T (S_0 + k\epsilon/m),$$

то

$$\gamma < \frac{(S k\epsilon/m)(T/\rho)}{[(S_0 + k\epsilon/m)^2 + C\epsilon k/m]} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P\epsilon}.$$

Учитывая, что при низких температурах $|(T/\rho) \partial \rho / \partial T| \ll 1$ (при $T \rightarrow 0$ тепловое расширение стремится к нулю) имеем

$$\gamma < S \frac{k\epsilon}{m} \left[\left(S_0 + \frac{k\epsilon}{m} \right)^2 + Ck \frac{\epsilon}{m} \right]^{-1} \sim \frac{k\epsilon}{mS} \ll 1.$$

Если же, наоборот, $\partial \rho / \partial T$ мало, то [(16a), (166)]

$$\gamma \sim \frac{k\epsilon^2 SC}{m(S_0 + k\epsilon/m)} \left[\left(S_0 + \frac{k\epsilon}{m} \right)^2 + \frac{k\epsilon C}{m} \right]^{-1} \sim \epsilon \ll 1.$$

Аналогичным образом можно доказать законность пренебрежения членом в (39), содержащим $\partial^2 P / \partial t^2$ и изменением температуры при распространении первого звука. Таким образом, мы приходим к двум раздельным уравнениям:

$$\ddot{T} = (T\rho_s/C\rho_n) [(S_0 + k\epsilon/m)^2 + k\epsilon C/m], \quad (43)$$

$$(\partial \rho / \partial P) \ddot{P} = \Delta P. \quad (44)$$

Отсюда получаем скорости первого и второго звука:

$$u_1^2 = \partial P / \partial \rho; \quad (45)$$

$$u_2^2 = (T\rho_s/C\rho_n) [(S_0 + k\epsilon/m)^2 + k\epsilon C/m]. \quad (46)$$

Так же как и в чистом гелии, u_1 имеет обычный вид. Не существует аномально большого влияния ϵ на u_1 . u_2 в присутствии примесей определяется формулой (46), из которой видно, что уже очень малое ϵ вызывают большие изменения u_2 . Действие примесей оказывается, кроме членов, содержащих $k\epsilon / m$, еще и в p_n (12a) и (126) и в C (18a), (186). В качестве примера, иллюстрирующего действие малых ϵ на u_2 , приводим табл. 3. Приведенные в ней цифры относятся к случаю $p_0 = 0$.

Таблица 3

T°	1,6	1,4	1,2	1,0	0,8	ϵ
$u_2 \cdot 10^{-3}$	2,39	2,12	1,88	1,96	3,20	0
$u_2 \cdot 10^{-3}$	2,39	2,13	1,90	2,06	3,46	10^{-4}
$u_2 \cdot 10^{-3}$	2,43	2,22	2,14	2,70	4,32	10^{-3}
$u_2 \cdot 10^{-3}$	2,82	2,92	3,42	4,47	5,09	10^{-2}

При $T > 1,1^\circ$ и $\epsilon \leq 10^{-3}$ разница между двумя случаями $p_0 = 0$ и $p_0 \neq 0$ незначительна. Сравнивая u_2 в чистом гелии II и в слабых растворах, видно, что с понижением температуры от λ -точки u_2 в слабых растворах сначала оказывается больше, чем в чистом гелии (еще не оказывается действие $\rho_n - \rho_{n0}$). Однако при дальнейшем понижении температуры под влиянием ρ_{ni} в слабых растворах u_2 оказывается меньше, чем в чистом гелии.

Когда температуры таковы, что $\rho_{ni} \gg \rho_{n0}$, u_2 быстро падает с понижением температуры. Рассмотрим подробнее этот предельный случай. Пусть $k\epsilon / m \gg S_0$. Тогда все термодинамические функции определяются примесями; (46) дает в этих условиях:

$$u_2^2 = (\epsilon k T \rho / m \rho_n) [1 + k\epsilon / m C]. \quad (47)$$

Мы здесь отождествили ρ_s и ρ .

Если $p_0 = 0$, то согласно (12a), (18a) имеем

$$C = 3k\epsilon / 2m, \quad \rho_n = (\mu/m) \rho \epsilon, \quad u_2 = \sqrt{5kT / 3\mu}. \quad (48)$$

Полученный результат имеет простой физический смысл. Когда ρ_n обязано примесям, второй звук распространяется только по примесям. Его скорость совпадает со скоростью звука в примесном одноатомном газе. Если $p_0 = 0$, скорость звука в примесном газе имеет обычный вид, так как связь E и p обычная. Именно это и выражается формулой (48).

Пусть $p_0 \neq 0$; (12b), (18b) и (47) дают

$$u_2^2 = 3kT / p_0. \quad (49)$$

Эта формула непосредственно следует из общего соотношения, определяющего скорость звука в примесном газе:

$$u^2 = (C_p / C_v) (\partial P / \partial \rho)_T. \quad (50)$$

Подставляя сюда [см. выражение для свободной энергии перед (16б)]

$$P = \rho kT / m, \quad m = p_0^2 / 3kT \quad (51)$$

и используя для определения C_p / C_v термодинамические соотношения: $dS = 0$, $dE + PdV = 0$, в соответствии с (18б), получаем:

$$dE = 1/2 RdT, \quad 1/2 dT + (T/V) dV = 0, \quad TV^2 = \text{const}, \quad PV^3 = \text{const}.$$

Отсюда

$$\gamma = C_p / C_v = 3. \quad (52)$$

Подставляя (51) и (52) в (50), получаем (49).

Общая картина u_2 как функции T дана на рис. 1. u_{20} относится к чистому гелию. В то время как в чистом гелии u_2 стремится к конечному пределу, равному $u_1/\sqrt{3}$, когда T стремится к нулю, в

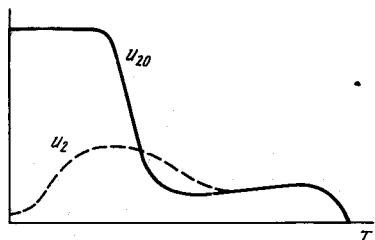


Рис. 1

слабых растворах в гелии u_2 падает с понижением температуры пропорционально \sqrt{T} (48) или T (49).

Падение u_2 продолжается до тех пор, пока не начнет сказываться квантовое вырождение ($p_0 = 0$) либо взаимодействие частиц примеси друг с другом ($p_0 \neq 0$).

§ 5. Влияние вырождения на u_2 при $p_0=0$

Имея в виду слабые растворы He^3 , мы определим скорость второго звука для полностью вырожденного ферми-дираковского газа, считая $p_0 = 0$. Термодинамический потенциал такого квантового раствора имеет вид:

$$\Phi = \Phi_0 + nE_0 + \frac{3}{2}\xi_0 n^{5/3} N^{-1/3},$$

$$\xi_0 = \frac{(6\pi^2)^{2/3}}{3(2s+1)^{2/3}} \frac{\hbar^2}{\mu} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{2/3}, \quad s = n/N. \quad (53)$$

Химический потенциал растворителя

$$\zeta = \xi_0 - \varepsilon^{2/3} \xi_0.$$

Вместо (21) и (28) получаем:

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = -\nabla \left[\Phi_0 + \frac{v_s^2}{2} - \frac{\rho_n}{2\rho} (v_n - v_s)^2 - \xi_0 \frac{\varepsilon^{5/3}}{m} \right], \quad (54)$$

$$\partial v_s / \partial t = -\nabla [\Phi_0 - (\xi_0/m) \varepsilon^{5/3}]. \quad (55)$$

Поступая аналогично процедуре, изложенной в § 4, приходим к уравнению

$$\ddot{T} = \frac{\rho_s}{\rho_n} \left[\frac{TS_0}{C} \left(S - \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{5\xi_0}{3m} \varepsilon^{5/3} \right] \Delta T. \quad (56)$$

Так как температуры настолько низки, что примесный газ может считаться полностью вырожденным (2а), первый член в квадратных скобках в (56) мал по сравнению со вторым. Отсюда находим

$$u_2 = (5\rho_s \xi_0 \varepsilon^{5/3} / 3\rho_n m)^{1/2}.$$

Подставляя сюда вместо ρ_n его выражение, находим

$$u_2 = (5\xi_0 \varepsilon^{5/3} / 3\mu)^{1/2}. \quad (57)$$

Это есть скорость звука в полностью вырожденном газе Ферми. Таким образом, при абсолютном нуле скорость второго звука в слабом растворе He^3 (если $p_0 = 0$) пропорциональна кубическому корню из концентрации и имеет величину, малую по сравнению со скоростью второго звука в чистом гелии при абсолютном нуле. Остается пока не ясным, что будет происходить с u_2 при $T = 0$, если $p_0 \neq 0$.

В заключение я хочу поблагодарить акад. Л. Д. Ландау и проф. Е. М. Лифшица за ценные указания и интерес к работе. Я выражаю также благодарность Ф. М. Филлер за содействие при проведении численных расчетов.

Академия наук СССР

Получено 9 июля 1948 г.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. Ландау, И. Померанчук. ДАН СССР, 1948, 59, 669. (Собр. трудов, № 19).
- Л. Ландау. ЖЭТФ, 1941, 11, 592.
- Л. Ландау. J. Phys. USSR, 1947, 11, 91.
- Э. Шредингер. Статистическая термодинамика. ГИИЛ, 1948.
- Л. Ландау, И. Халатников. Изв. АН СССР, сер. физ., 1948, 12, 216.
- Л. Ландау, Е. Лифшиц. Статистическая физика. ГТТИ, 1940.
- G. Joos. Lehrb. d. theoretischen Physik, 6. Aufl., 1945, 561.
- J. G. Daunt, R. E. Probst, H. L. Johnston. Phys. Rev., 1948, 73, 638.

К ТЕОРИИ ЖИДКОГО He^3 *

В § 1 определяется зависимость от температуры теплоемкости, вязкости и теплопроводности He^3 . В § 2 выясняется влияние обменных эффектов, вызванных ядерным спином атомов He^3 , на фазовый переход жидкого He^3 в твердое состояние. Термоплота плавления He^3 при низких температурах должна быть отрицательна и равна $-R \ln 2$. Указывается на принципиальную возможность получить температуры порядка $10^{-6} - 10^{-7}$ при адиабатическом затвердевании жидкого He^3 . Выясняются некоторые особенности ядерной магнитной восприимчивости.

1. Теплоемкость, вязкость и теплопроводность жидкого He^3

В последнее время было установлено, что жидкий He^3 в отличие от жидкого He^4 не обладает сверхтекучестью вплоть до температуры в $1,05^\circ\text{K}$ [1]. Этот результат делает вероятным отсутствие сверхтекучести у He^3 при любых температурах. В случае He^4 сверхтекучести способствует статистика Бозе—Эйнштейна [2]. Если же рассматривать достаточно разреженный газ, подчиняющийся статистике Ферми—Дирака, то методами теории возмущений можно выяснить влияние взаимодействия атомов на свойства такого газа. Теория возмущения оказывается применимой при достаточно малых плотностях газа и в случае короткодействующих сил. Такие расчеты не показывают никакой сверхтекучести. В аналогичных условиях бозе-газ обнаруживает в некоторых случаях сверхтекучесть [2]. Таким образом, есть основания считать жидкий He^3 не сверхтекучим. Энергия возбужденных состояний He^3 при малых энергиях возбуждения представляет собой сумму энергий элементарных возбуждений «квази-частиц» [3]. Естественно считать, что эти возбуждения подчиняются статистике Ферми—Дирака, так как при этом такие возбуждения всей системы непрерывным образом переходят в возбужденные состояния в смысле поступательного движения отдельных атомов He^3 , когда происходит переход от жидкости к газу. К такому же рассмотрению возбуждений в жидком He^3 приводят свойства возбуждений проводящих

электронов в металлах. Как известно, электронная теплоемкость металлов и ряд других их свойств соответствуют статистике Ферми—Дирака для возбуждений. (Существование сверхпроводимости связано с какими-то малыми эффектами, не учтываемыми в грубой модели Ферми—Дирака. Малость этих эффектов проявляется в малости температур, при которых возникает сверхпроводимость, по сравнению с «естественными» электронными температурами, имеющими порядок величины температуры вырождения электронов.)

Известен случай [4], когда возбуждения системы взаимодействующих электронов подчиняются статистике Бозе. Этот случай соответствует состояниям, мало отличающимися от «нулевого» состояния, в котором все спины электронов ориентированы в одну сторону. Такое «нулевое» состояние является «особой точкой», и поэтому возбуждения вблизи такого состояния также обладают исключительными свойствами. В случае жидкого He^3 , так же как и в случае неферромагнитных металлов в несверхпроводящем состоянии, наимизшее «нулевое» состояние характеризуется только наимизшой энергией и больше ничем. (В ферромагнитном случае оно характеризуется еще большим магнитным моментом.) Так как длина волн атомов He^3 — порядка расстояния между ними, то взаимодействие между атомами He^3 зависит от взаимной ориентации ядерных спинов (у He^3 ядерный спин равен $1/2$) [5]. Таким образом, в жидком He^3 существенную роль играют обменные эффекты, связанные с обменом двух атомов He^3 . Легко показать, что эти обменные эффекты, по-видимому, приводят к преимущественной антипараллельной ориентации соседних ядерных спинов, так что жидкий He^3 не является ядерным ферромагнетиком, а представляет собой пример ядерного обменного парамагнетика, аналогичного электронному обменному парамагнетику типа твердого кислорода. В самом деле, в случае двух атомов He^3 , имеющих параллельные спины, координатная часть волновой функции должна быть антисимметричной по отношению к перестановке двух атомов. Поэтому она не может включать S -функцию. В этих условиях вероятность малых расстояний между атомами He^3 весьма невелика по сравнению с тем случаем, когда координатная часть волновой функции двух атомов может включать S -функцию, т. е. когда спины антипараллельны. Если учесть быстрое убывание величины отрицательной энергии притяжения двух атомов He^3 с возрастанием расстояний между ними, то мы приходим к выводу, что энергия двух атомов He^3 будет меньше в том случае, когда они могут поближе подойти друг к другу, т. е. в случае антипараллельных ориентаций соседних спинов. При этом рассматриваются хотя и малые расстояния между атомами, но все же большие, чем r_0 , где r_0 — расстояние, при котором наступает интенсивное отталкивание. Это ограничение хорошо выполнено в жидком He^3 , так как среднее расстояние между атомами в несколько раз больше, чем r_0 . Именно поэтому и существует жидкий He^3 , в кото-

* ЖЭТФ, 1950, 20, 919.

ром атомы в среднем притягиваются друг к другу. Таким образом, нет оснований считать жидкий He^3 ядерным ферромагнетиком. Поэтому также можно считать, что вблизи нулевого состояния He^3 статистика возбуждений совпадает со статистикой атомов.

Пользуясь распределением Ферми—Дирака для возбужденных состояний, можно легко вывести ряд заключений о некоторых свойствах жидкого He^3 . Поверхность Ферми в рассматриваемом случае представляет собой сферу радиуса p_0 , где p_0 по порядку величины равно $(3\pi^2)^{1/3} \hbar N^{1/3}$, N — число атомов в 1 см^3 (при этом было учтено, что ядерный спин He^3 равен $1/2$). При температурах, малых по сравнению с температурой вырождения, возбуждения будут иметь импульсы, по величине близкие к p_0 . Разлагая энергию возбуждений ϵ в ряд по степеням $p - p_0$, получаем

$$\epsilon = v |p - p_0|. \quad (1)$$

Так как при температуре T главную роль играют возбуждения, у которых $\epsilon \sim T$, а число таких возбуждений (в 1 см^3) равно $p_0^2 \Delta p / \pi^2 \hbar^3 \sim p_0^2 \epsilon / \hbar^3 v \sim p_0^2 T / \hbar^3 v$, то энергия 1 см^3 He^3 зависит от температуры следующим образом:

$$u = u_0 + 1/2 a T^2, \quad (2)$$

$$a = \gamma p_0^2 / \hbar^3 v, \quad \gamma \sim \pi^{-2}. \quad (3)$$

(1) и (2) справедливы при температурах, достаточно малых по сравнению с температурой вырождения возбуждений T_0 . По порядку величины T_0 равно

$$T_0 \sim p_0^2 / 2m \sim (3\pi^2)^{1/3} \hbar^2 N^{1/3} / 2m \sim 5^\circ.$$

Согласно (2) теплоемкость He^3 оказывается пропорциональной температуре

$$c = aT \quad (T \ll T_0). \quad (4)$$

Этот вывод дает возможность непосредственной экспериментальной проверки фермievского характера энергетического спектра. Легко установить зависимость от температуры некоторых кинетических характеристик He^3 . Для этого определим длину свободного пробега возбуждений. Конечность свободного пробега возбуждений вызвана столкновениями их друг с другом. Количество возбуждений в 1 см^3 по порядку величины равно

$$n \sim p_0^2 \Delta p / \hbar^3 \sim p_0^2 T / \hbar^3 v \sim NT / T_0 \ll N. \quad (5)$$

Так как $n \ll N$, то наиболее вероятными будут парные столкновения. При каждом столкновении двух возбуждений оба состояния, получающиеся после столкновений, должны иметь импульсы, близкие к p_0 . Это уменьшает эффективное сечение такого столкно-

вения, так как вероятность столкновения пропорциональна числу возможных конечных состояний. Число состояний после столкновения равно

$$\frac{d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{k^2 dk d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \Omega = \frac{p_0^2 d\epsilon d\Omega}{(2\pi\hbar)^3 v}, \quad (6)$$

где k — импульс одной из частиц после столкновения, $d\Omega$ — элемент телесного угла, характеризующего направление распространения частицы. При интегрировании по $d\epsilon d\Omega$ возникает множитель, пропорциональный температуре. Таким образом, эффективное сечение σ для столкновения двух возбуждений оказывается порядка

$$\sigma = \sigma_0 \frac{T}{T_0}, \quad (7)$$

где σ_0 имеет порядок величины газо-кинетического сечения (10^{-15} см^2). Комбинируя (5) и (7), находим длину свободного пробега возбуждения l :

$$l \sim \frac{1}{N\sigma_0} \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 \quad (8)$$

— результат, полученный ранее при рассмотрении свободного пробега электронов в металлах, обязанного взаимодействию электронов друг с другом [6,7] (см. также [8]).

Найденная длина свободного пробега дает возможность установить зависимость вязкости жидкого He^3 от температуры, так как все кинетические свойства He^3 могут быть найдены при рассмотрении газа возбуждений со свойствами, описываемыми соотношениями (1)–(8). Так как $\eta = Nmlv$, то, подставляя сюда (8), находим

$$\eta = Nm \frac{1}{N\sigma_0} \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 v = \frac{A}{T^2}. \quad (9)$$

Вязкость жидкого He^3 должна быть обратно пропорциональна квадрату температуры при $T \ll T_0$.

С помощью (8) и (4) получаем теплопроводность жидкого He^3 :

$$\kappa = clv = B/T. \quad (10)$$

Теплопроводность жидкого He^3 должна быть обратно пропорциональной абсолютной температуре при $T \ll T_0$.

Формулы (4), (9) и (10) дают возможность полной экспериментальной проверки излагаемой теории. Следует при этом еще раз отметить, что при выводе (4), (9) и (10) мы не пользовались моделью идеального газа в применении к атомам He^3 .

2. Влияние обменных эффектов в жидком He^3 на фазовый переход жидкого He^3 в твердый He^3

Хотя пока еще твердый He^3 не получен, тем не менее вряд ли могут быть сомнения в том, что под давлением того же порядка, что и в случае He^4 , жидкий He^3 будет затвердевать. Причина, вызывающая затвердевание под большим давлением, заключается в том, что по мере уменьшения объема (под действием приложенного давления) уменьшается отношение амплитуды нулевых колебаний к расстоянию между атомами. Если при малых давлениях (больших объемах) это отношение в случае жидкого He^4 и He^3 оказывается порядка единицы (что препятствует затвердеванию), то с уменьшением объема это отношение становится меньшим, чем единица, и таким образом образование кристаллов становится возможным. Для доказательства только что изложенных соображений¹ сравним амплитуду нулевых колебаний $\sqrt{\hbar/m\omega}$ и расстояние между атомами b . Под ω следует понимать некоторую среднюю частоту, связанную с потенциальной энергией взаимодействия двух атомов следующим образом:

$$m\omega^2 \approx (d^2u/dr^2)_{r=b}.$$

Полагая $u = \alpha/r^n$, где $n \sim 6-8$ [9], получаем

$$\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{1}{b} \sim \left(\frac{\hbar}{m\sqrt{\alpha}} \right)^{1/2} b^{(n-2)/4} \rightarrow 0, \text{ если } b \rightarrow 0,$$

ввиду того, что $n \gg 2$.

Легко показать, что фазовый переход жидккий He^3 — твердый He^3 должен обнаружить некоторые своеобразные особенности, вызванные обменными эффектами атомов He^3 в жидком состоянии. Для разъяснения этих особенностей сравним энтропию S жидкой и твердой фаз у He^3 . В жидком состоянии S стремится к нулю при падении температуры до нуля. Если справедливо распределение Ферми — Дирака для возбуждений, то S должно быть пропорционально T [10]. Следует, однако, отметить, что для дальнейшего не существенно, какой функцией T является S в жидкой фазе. Единственно важным является падение S с понижением T . Важно подчеркнуть, что при этом падает и та часть S , которая вызвана ядерными спинами. При отсутствии обменных эффектов, обязанных ядерному спину, спины ядер могли бы свободно ориентироваться в пространстве вплоть до температур, настолько низких, что уже существенным оказалось бы магнитное взаимодействие ядерных спинов друг с другом. Эти температуры T_m по порядку величины равны

$$T_m \sim \frac{\mu^2}{kb^3} \sim 10^{-7}^\circ, \quad \mu \sim 10^{-23}. \quad (11)$$

¹ Высказанных Л. Д. Ландау.

Таким образом, при отсутствии обменных эффектов при $T \gg T_m$ в S входила бы часть, равная $R \ln 2$ (на один грамматом). Обменные эффекты приводят к появлению корреляции между ориентациями спинов соседних ядер He^3 уже при температурах порядка градусов, т. е. порядка «естественных» гелиевых температур. Этот вывод следует из того, что различие в энергии взаимодействия двух атомов He^3 в случае параллельной и антипараллельной ориентации спинов имеет тот же порядок, что и сама энергия взаимодействия (см. § 1). При этом несущественно, является ли He^3 жидким обменным ядерным параметром или ферромагнетиком. Характер корреляции в этих двух случаях различен, но само существование корреляции должно наступать в каждом из этих случаев при $T \lesssim 1^\circ$. Отсюда следует падение части S , вызванной ядерными спинами, до значений, меньших, чем $R \ln 2$, уже при $T \lesssim 1^\circ$. Так как энтропия, не связанная с ядерным спином, также падает, то уже при $T \lesssim 1^\circ$ вся энтропия жидкого He^3 должна упасть до значений, меньших, чем $R \ln 2$. Сравним теперь эту энтропию с энтропией твердого He^3 . Существование кристаллической решетки, в которой амплитуда нулевых колебаний значительно меньше, чем расстояние между атомами, приводит либо к исчезновению эффектов, связанных с обменом двух атомов, либо к их значительному уменьшению. Поэтому в твердом He^3 ядерные спины должны свободно ориентироваться вплоть до $T \sim T_m$. Следовательно, энтропия твердого He^3 имеет часть, равную $R \ln 2$, если $T \gg 10^{-7}^\circ$. Так как часть S , обязанная колебаниям, пропорциональна T^3 и по порядку величины равна $1/12 \cdot 5\pi^4 R (T/\Theta)^3$, $\Theta \geq 30^\circ$, то вся энтропия твердого He^3 при $T \lesssim 1^\circ$ оказывается постоянной, равной $R \ln 2$. Только при $T \lesssim T_m$ магнитное взаимодействие ядерных спинов в кристалле быстро уменьшает S до нуля при $T \ll T_m$. Примерная зависимость S от T в двух фазах He^3 изображена на рис. 1. Заметим, что $T_1 \sim 1^\circ$. Мы видим, что при температурах T таких, что

$$10^{-7}^\circ \sim T_m \ll T \ll T_1 \sim 1^\circ,$$

энтропия твердого He^3 оказывается большей, чем у жидкой фазы, т. е. осуществляется соотношение, обратное обычному. Поэтому при изотермическом переходе твердого He^3 в жидкую He^3 тепло должно не поглощаться, а выделяться и, наоборот, при изотермическом затвердевании должно поглощаться тепло. Мы имеем здесь отрицательную теплоту плавления Q , величина которой при $T_m \ll$

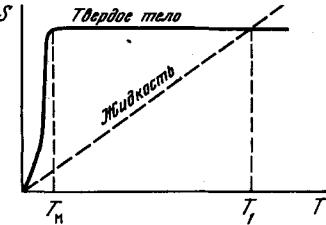


Рис. 1

¹ Θ у жидкого He^4 равна 30° [11], у твердого He^3 Θ должна быть величиной того же порядка.

$\ll T \ll T_1$ равна

$$Q = T(S_{\text{ж}} - S_{\text{т}}) = -RT \ln 2. \quad (12)$$

При этих же температурах получается своеобразная зависимость давления, при котором происходит фазовый переход, от температуры. Согласно соотношению Клаузиуса—Клапейрона

$$dp/dT = (S_{\text{т}} - S_{\text{ж}})/(v_{\text{т}} - v_{\text{ж}})$$

(т — относится к твердой фазе, ж — к жидкой), имеем

$$dp/dT = R \ln 2/(v_{\text{т}} - v_{\text{ж}}) = -R \ln 2/(v_{\text{ж}} - v_{\text{т}}) < 0. \quad (13)$$

При этом считается, что жидкость имеет объем больший, чем у кристалла.

Начиная с некоторых температур порядка градусов $S_{\text{ж}}$ будет больше, чем $S_{\text{т}}$. Поэтому p , как функция T , имеет вид, изображенный на рис. 2. Существование прямолинейного участка с отрицательным наклоном при малых температурах качественно отличает He^3 от He^4 , в котором зависимость p от T имеет совершенно иной характер [12] (рис. 3).

Отметим, что при $T \ll T_m$, $S_{\text{т}}$ стремится к нулю ввиду наступления корреляции между спинами в кристалле. При этом dp/dT стремится к нулю. Если рассматривать адиабатическое затвердевание He^3 , то, как видно из рис. 1, открывается принципиальная возможность получения твердого He^3 при экстремально низких

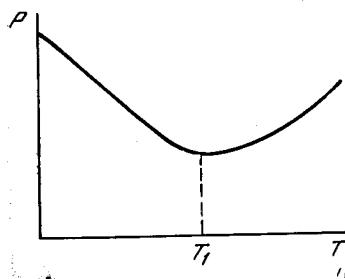


Рис. 2

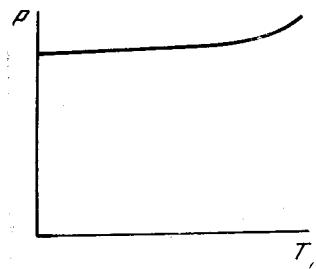


Рис. 3

температурах порядка 10^{-6} — 10^{-7} °К. Для этого необходимо адиабатически сжать жидкий He^3 , имеющий температуру, меньшую T_1 , до давлений, при которых наступает затвердевание.

Условие равенства энтропии в твердом и жидкок состояниях приведет к тому, что температура кристалла получится порядка T_m (переход совершается вдоль пунктирной линии на рис. 1).

Применение термодинамических соотношений к фазовому переходу жидкого He^3 в твердое состояние предполагает, что все соот-

ветствующие времена релаксации малы. Выяснение выполнимости этого предположения требует особого рассмотрения.

Обменные эффекты в жидкок He^3 должны сказаться также на ядерном магнетизме He^3 , так как свободная ориентация спинов ядер прекращается не при $T \sim T_m$, как у почти всех тел (исключая соединения типа орто- или параводорода), а при $T \sim 1^\circ$. Начиная с этих температур ядерный магнитный момент жидкого He^3 во внешнем магнитном поле не должен быть обратно пропорционален температуре [13], а должен зависеть от температуры так же, как зависит от температуры восприимчивость обменных электронных парамагнетиков типа твердого кислорода. В модели жидкого He^3 , рассмотренной в § 1, ядерная магнитная восприимчивость He^3 не должна зависеть от температуры при $T \lesssim 1^\circ$.

В заключение я хотел бы поблагодарить акад. Л. Д. Ландау за важные указания и постоянное внимание к работе. Выражаю также благодарность В. В. Владимировскому за интересную дискуссию по поводу этой работы.

Академия наук СССР

Получено 22 марта 1950 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. D. Osborne, B. Weinstock, C. Abraham. Phys. Rev., 1949, 75, 988.
2. Н. Н. Боголюбов. Изв. АН СССР, сер. физ. 1947, 11, 67.
3. Л. Ландау. J. Phys. USSR, 1941, 5, 71.
4. F. Bloch. Zs. f. Phys., 1930, 61, 206.
5. H. Anderson. Phys. Rev., 1949, 76, 1460.
6. Л. Ландау, И. Померанчук. ЖЭТФ, 1937, 7, 379 (Собр. трудов, № 1).
7. W. G. Barber. Proc. Roy. Soc. A, 1937, 158, 383.
8. S. Tomonaga. Zs. f. Phys., 1938, 110, 573.
9. М. Борн, М. Геннерт-Майер. Теория твердого тела. ОНТИ, 1938.
10. Л. Бриллюэн. Квантовая статистика. ГИТГУ, 1934.
11. В. Кеевом. Гелий. ИИЛ, 1949, стр. 393.
12. В. Кеевом. Гелий. ИИЛ, 1949, стр. 233.
13. F. Bloch. Phys. Rev., 1946, 70, 460.

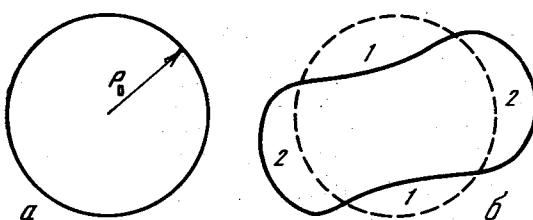
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ФЕРМИЕВСКОЙ ЖИДКОСТИ*

В теории фермиевской жидкости, предложенной Ландау [1—2], энергия системы представляет собой функционал от распределения возбуждений по квантовым состояниям (в частности, по импульсам). При малых отклонениях δn функции распределения возбуждений от равновесного, отвечающего заполнению всех состояний с $p < p_0$ (все обозначения те же, что и в [1]), энергетический функционал E имеет вид

$$E = \sum_{\sigma} \int \epsilon(p) \delta n(p) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} + \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} \iint f(pp') \delta n(p) \delta n(p') \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi\hbar)^6}, \quad (1)$$

где σ — спин возбуждений.

Устойчивость при малых δn будет иметь место, если $E > 0$ при любых δn . В интегралы, входящие в (1), реально входят p , близкие



a — невозмущенное распределение (внутри все состояния заняты),
b — возмущенное распределение; в областях 1 $\delta n = -1$, в областях 2 $\delta n = 1$;
внутри сплошной линии все состояния заняты

к p_0 (температура равна нулю). Поэтому $\epsilon(p) = (de/dp)_{p_0}(p - p_0) = v_0(p - p_0)$. Вариации δn , входящие в (1), связаны с деформациями фермиевской поверхности, и мы найдем критерий устойчивости по отношению к таким деформациям (см. рисунок).

Разложим импульс p , отвечающий сплошной линии рисунка *b*, в ряд по шаровым функциям

$$p = p_0 + \sum_{lm} \Phi_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad Y_{l0}(0) = 1. \quad (2)$$

Первый член в (1) приобретает следующий вид:

$$\frac{2v_0 p_0^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p-p_0} dO \int_0^{p-p_0} (p' - p_0) dp' = \frac{p_0^2 v_0}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{lm} \Phi_{lm}^2 \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}. \quad (3)$$

Потенциальная энергия приводится к выражению

$$2p_0^4/(2\pi\hbar)^6 \iint [p(\theta_1, \varphi_1) - p_0] [p(\theta_2, \varphi_2) - p_0] dO_1 dO_2 f(\theta_{12}), \quad (4)$$

$$\cos \theta_{12} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Разлагаем $f(\theta_{12})$ в ряд по шаровым функциям:

$$f(\theta_{12}) = \sum_l f_l P_l(\cos \theta_{12}) = \sum_l \sum_{m'} Y_{lm'}(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm'}(\theta_2, \varphi_2) \frac{(l-m')!}{(l+m')!} f_l, \quad (5)$$

$$f_l = \frac{2l+1}{4\pi} \int f(\theta) P_l(\cos \theta) dO.$$

Подставляя (5) в (4) и складывая с (3), получаем полный энергетический функционал

$$E = \frac{p_0^2 v_0}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{lm} \Phi_{lm}^2 \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} + \frac{2p_0^4}{(2\pi\hbar)^6} \sum_{lm} \Phi_{lm}^2 \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^2 f_l \frac{(l+m)!}{(l-m)!}. \quad (6)$$

Условия устойчивости пишутся для каждого l, m отдельно:

$$1 + \frac{8\pi}{2l+1} \frac{p_0^2 f_l}{v_0 (2\pi\hbar)^3} > 0, \quad 1 + \frac{2p_0^2}{v_0 (2\pi\hbar)^3} \int f P_l(\cos \theta) dO > 0. \quad (7)$$

При $l = 0$ и 1 эти условия совпадают с условиями (11) и (18) работы [1], где они означали положительность квадрата скорости звука и положительность эффективной массы.

До сих пор мы считали $f(p, p')$ не зависящей от взаимной ориентации спинов возбуждений. Если учесть эту зависимость, то вместо f появится функция

$$f(pp') + (\sigma_1 \sigma_2) g(p_1 p_2). \quad (8)$$

Возмущение фермиевской поверхности будет вместо (2) выражаться формулой

$$p = p_0 + \sum_{lm} \sigma \Phi_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (9)$$

* ЖЭТФ, 1958, 35, 524.

Так как E содержит Sp по σ и σ' , то вместо (6) получаем

$$\begin{aligned} \frac{P_0^2 v_0}{2(2\pi\hbar)^6} \sum_{lm} \Phi_{lm}^2 \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} + \\ + \frac{P_0^4}{2(2\pi\hbar)^6} \sum_{lm} \Phi_{lm}^2 \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^2 \frac{(l+m)!}{(l-m)!} g_l, \end{aligned} \quad (10)$$

где g_l — коэффициенты разложения функции $g(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) = g(\cos \theta_{12})$ (все берется из поверхности Ферми) в ряд по полиномам Лежандра:

$$g(\cos \theta_{12}) = \sum_l g_l P_l(\cos \theta_{12}). \quad (11)$$

Условия устойчивости, следующие из (10), имеют вид

$$1 + \frac{P_0^2}{v_0(2\pi\hbar)^3} \int g(\cos \theta) P_l(\cos \theta) d\Omega > 0. \quad (12)$$

При $l = 0$ это условие означает отсутствие ферромагнетизма и содержится в условии $\chi > 0$ (формула (26) работы [1]).

В заключение выражаю благодарность Л. Д. Ландау за дискуссию по поводу этой заметки.

Академия наук СССР

Получено 7 мая 1958 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 1956, 30, 1062.
2. Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 1957, 32, 59.

К ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ МЕДЛЕННЫХ НЕЙТРОНОВ В ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ *

Совместно с А. И. Ахиеверсом и И. А. Ахиевером

Теоретически исследуется рассеяние медленных нейтронов в ферми-жидкости. Определены сечения прямого рассеяния и рассеяния с возбуждением нулевого и обычного звуков.

1. Целью настоящей работы является теоретическое исследование рассеяния медленных нейтронов в ферми-жидкости. Как известно, в такой системе при достаточно низких температурах могут распространяться специфические звуковые волны — так называемый нулевой знак (Ландау [1], Климонтович и Силин [2]). Эти волны, как мы покажем, можно возбуждать, пропуская через ферми-жидкость медленные нейтроны, скорость которых превосходит скорость нулевого звука.

Поэтому, исследуя рассеяние медленных нейтронов в жидком He^3 , являющемся ферми-жидкостью, можно принципиально проверить существование нулевого звука.

Помимо рассеяния с возбуждением нулевого звука (и обычного звука) возможно также прямое рассеяние нейтронов ядрами ферми-жидкости. При таком рассеянии передача энергии и угол рассеяния не коррелированы, в то время как при рассеянии, связанном с возбуждением коллективных степеней свободы и носящем характер черенковского излучения, угол рассеяния является однозначной функцией переданной энергии.

2. Гамильтониан взаимодействия медленного нейтрана с ядрами ферми-жидкости представляет собой сумму фермиевских псевдопотенциалов:

$$\mathcal{H} = - \frac{2\pi\hbar^2}{m'} \sum_i (a + bsK_i) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (1)$$

где \mathbf{r} , \mathbf{r}_i и s , K_i — радиусы-векторы и спины нейтрана и i -го ядра, m' — приведенная масса нейтрана и ядра, a и b — длины когерентного и некогерентного рассеяний нейтрана свободным ядром ферми-жидкости (величины a и b являются комплексными из-за поглощения нейтронов ядрами). Ферми-жидкостные эффекты наиболее отчетливо проявляются при малых изменениях импульса нейтрана $|\Delta p_n| \ll$

* ЖЭТФ, 1961, 41, 478.

$\ll p_0$, где p_0 — граничный импульс ферми-жидкости. В этих условиях можно заменить в выражении (1) суммирование по i интегрированием по $\rho(\mathbf{r}_i, \alpha_i, t) d\tau_i$, где ρ — плотность ядер ферми-жидкости в точке \mathbf{r}_i с проекцией спина α_i

$$\mathcal{H} = -(2\pi\hbar^2/m') (a + b s K(\mathbf{r})) \rho(\mathbf{r}, \alpha, t). \quad (2)$$

Отклонение плотности ферми-жидкости от равновесного значения ρ_0 равно, очевидно, $\delta\rho = \int \delta n_p d\tau_p$, где $d\tau_p = (2\pi\hbar)^{-3} dp$ (p — импульс квазичастицы ферми-жидкости) и δn_p — отклонение функции распределения квазичастиц от равновесного значения

$$n_p^0 = \left[\exp\left(\frac{\varepsilon_p - \zeta}{T}\right) + 1 \right]^{-1}$$

(ε_p — энергия квазичастицы, ζ — химический потенциал), удовлетворяющее, согласно Ландау [3], уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \delta n_p(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial n_p^0}{\partial p} S p_{k'} \int f \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta n_{p'}(\mathbf{r}, t) d\tau_{p'} = I\{\delta n_p\}. \quad (3)$$

Здесь I — интеграл столкновений, $f = f(p, p') + KK'$, $f(p, p')$ — величина, характеризующая взаимодействие квазичастиц. При абсолютном нуле $\delta n_p = (v + K\mu)\delta(\varepsilon_p - \zeta)$, где v и μ — некоторые функции $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$ и \mathbf{r}, t . Monoхроматические колебания $\delta n_p (\sim e^{i(q\mathbf{r}-\omega t)})$ удовлетворяют уравнениям

$$(\eta_i - \cos \theta) v_{qi}(\mathbf{n}) = \cos \theta \int F(\tilde{\chi}) v_{qi}(\mathbf{n}') dO'/4\pi, \quad (4)$$

$$(\eta'_i - \cos \theta) \mu_{qi}(\mathbf{n}) = \cos \theta \int G(\tilde{\chi}) \mu_{qi}(\mathbf{n}') dO'/4\pi,$$

где θ — угол между \mathbf{q} и $\tilde{\chi}$, $\tilde{\chi}$ — угол между \mathbf{p} и \mathbf{p}' , dO' — элемент телесного угла \mathbf{p}' , $\eta_i = s_i/v_0$, $\eta'_i = s_i/v_0$, $s_i = \omega_i/lq$, $s'_i = \omega'_i/q$ — скорости распространения колебаний величин v и μ (индекс i нумерует сорт колебания), v_0 — граничная фермиевская скорость и величины F и G , пропорциональные $f(p, p')$ и $g(p, p')$, определяют изменение энергии квазичастицы, связанное с изменением функции распределения

$$\delta \varepsilon_p = \int \left(F v' + \frac{1}{4} G \mu' K \right) dO'/4\pi, \\ v' = v(\mathbf{n}', \mathbf{r}, t), \mu' = \mu(\mathbf{n}', \mathbf{r}, t). \quad (5)$$

При достаточно низких температурах, когда поглощение нулевого звука очень мало, рассеяние нейтрона с возбуждением нулевого звука можно рассматривать как испускание нейтроном кванта нулевого звука. Этот процесс описывается гамильтонианом, отличающимся от (2) заменой ρ на изменение плотности ферми-жидкости, обусловленное колебаниями нулевого звука.

Чтобы вычислить вероятность испускания кванта нулевого звука, нужно произвести квантование нулевого звука. С этой целью следует предварительно определить энергию колебаний нулевого звука

$$E = \int d\mathbf{r} S p \int_{p=p_0}^{p_0+\delta p_0} \varepsilon_p d\tau_p + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} S p \int \delta \varepsilon_p \delta n_p d\tau_p, \quad (6)$$

где $\varepsilon_p = v_0(p - p_0)$ и $\delta p_0 = (v + K\mu)/v_0$ — изменение граничного импульса, связанное с колебаниями ферми-поверхности (второе слагаемое в (6) учитывает взаимодействие между квазичастицами). Используя (5), получим

$$E = \frac{p_0^2}{(2\pi\hbar)^3 v_0} \int d\mathbf{r} \left\{ \int \left(v^2 + \frac{1}{4} \mu^2 \right) dO + \iint \left(F v v' + \frac{1}{16} G \mu \mu' \right) \frac{dO dO'}{4\pi} \right\}. \quad (7)$$

Это выражение должно, очевидно, иметь вид

$$E = \sum_{qi} \left(N_{qi} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_i + \sum_{q, i, \lambda} \left(N_{qi\lambda} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega'_i, \quad (8)$$

где N_{qi} ($N_{qi\lambda}$) — число квантов нулевого звука сорта v_i и частоты ω_i (сорта μ_i , частоты ω_i и поляризации $\lambda = 1, 2, 3$). Соотношение (8) будет следовать из (7), если в разложении v и μ на плоские волны

$$v = \frac{(2\pi\hbar)^{3/2}}{p_0} \sum_{q, i} \left(\frac{1}{2} v_0 \hbar \omega_i \right)^{1/2} \{ v_{qi}(n) c_{qi} e^{i(q\mathbf{r}-\omega_i t)} + v_{qi}^*(n) c_{qi}^+ e^{-i(q\mathbf{r}-\omega_i t)} \}, \\ \mu = \frac{(2\pi\hbar)^{3/2}}{p_0} \sum_{q, i, \lambda} \left(2v_0 \hbar \omega'_i \right)^{1/2} \{ \mu_{qi\lambda}(n) c_{qi\lambda} e^{i(q\mathbf{r}-\omega'_i t)} + \mu_{qi\lambda}^*(n) c_{qi\lambda}^+ e^{-i(q\mathbf{r}-\omega'_i t)} \} \quad (9)$$

считать величины $c_{qi}(c_{qi}^+)$, $c_{qi\lambda}(c_{qi\lambda}^+)$ бозевскими операторами поглощения (испускания) соответствующих квантов нулевого звука и подчинить функции $v_{qi}(n)$ и $\mu_{qi\lambda}(n)$ условиям нормировки¹

$$\eta_i \int |v_{qi}(n)|^2 dO / \cos \theta = 1, \quad \eta'_i \int |\mu_{qi\lambda}(n)|^2 dO / \cos \theta = 1. \quad (10)$$

¹ Для получения этих условий следует использовать вытекающие из (4) соотношения:

$$\iint F v_{qi} v'_{qi} dO dO' / 4\pi = \int (\eta_i / \cos \theta - 1) |v_{qi}|^2 dO, \\ \iint G \mu_{qi\lambda} \mu'_{qi\lambda} dO dO' / 4\pi = \int (\eta'_i / \cos \theta - 1) |\mu_{qi\lambda}|^2 dO.$$

Подставляя (9) в (2), получим энергию взаимодействия нейтрана с колебаниями нулевого звука

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(0)} = & -\frac{m^*}{m'} \sqrt{\frac{\hbar v_0}{\pi}} \left\{ a \sum_{\mathbf{q}_i} \sqrt{\hbar \omega_i} (A_i q_i e^{-i(\mathbf{q}\mathbf{r}-\omega_i t)} + \text{к. с.}) + \right. \\ & \left. + 2 [(a + b s K) K]_c \sum_{\mathbf{q}_i \lambda} \sqrt{\hbar \omega_i} (B_{i\lambda} c_{q_i \lambda}^+ e^{-i(\mathbf{q}\mathbf{r}-\omega_i' t)} + \text{к. с.}) \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$A_i = \int v_{q_i}(\mathbf{n}) dO, \quad B_{i\lambda} = \int \mu_{q_i \lambda}(\mathbf{n}) dO, \quad (12)$$

а скобка $[Y]_c$ обозначает когерентную относительно спинов ядер часть Y , не содержащую линейно операторов спина ядер K ($m^* = p_0/v_0$).

Используя выражение для $\mathcal{H}^{(0)}$, легко определить сечения рассеяния нейтрона (отнесенные к одному ядру) с испусканием квантов нулевого звука различных сортов:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\uparrow\uparrow}^{(v_i)} &= \frac{3}{2} (m^*/m')^2 |A_i|^2 |a|^2 (s_i v_0 / v_n^2) (\hbar^3 q^2 dq / p_0^3), \quad d\sigma_{\uparrow\downarrow}^{(v_i)} = 0, \\ d\sigma_{\uparrow\uparrow}^{(\mu_i)} &= \frac{3}{2} \left(\frac{m^*}{m'}\right)^2 |B_{iz}|^2 \frac{|b|^2}{16} \frac{s_i v_0}{v_n^2} \frac{\hbar^3 q^2 dq}{p_0^3}, \\ d\sigma_{\uparrow\downarrow}^{(\mu_i)} &= \frac{3}{2} \left(\frac{m^*}{m'}\right)^2 |B_i|^2 \frac{|b|^2}{16} \frac{s_i v_0}{v_n^2} \frac{\hbar^3 q^2 dq}{p_0^3}, \end{aligned} \quad (13)$$

где v_n — скорость нейтрона, $B_i^+ = B_{ix} + B_{iy}$ (ось z направлена вдоль s), стрелки служат для обозначения параллельной и антипараллельной ориентаций спина нейтрона до и после рассеяния; индексы v_i и μ_i указывают на сорт испущенного кванта нулевого звука.

По всей вероятности [1], одновременное распространение v_i - и μ_i -волн в ферми-жидкости невозможно (по крайней мере, при $F(\chi) = \text{const}$). Мы рассмотрим поэтому далее только возбуждение v_i -волн. При этом должны выполняться законы сохранения

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}'_n + \hbar \mathbf{q}, \quad E_n = E'_n + \hbar q s_i, \quad (14)$$

где \mathbf{p}_n, E_n (\mathbf{p}'_n, E'_n) — импульс и энергия нейтрона до (после) рассеяния.

Из (14), следует, что угол ϑ между \mathbf{p}_n и \mathbf{q} , а также угол рассеяния χ однозначно определяются переданной энергией:

$$\cos \vartheta = \frac{s}{v_n} + \frac{\hbar q}{2p_n}, \quad \cos \chi = \frac{2p_n^2 - 2ms\hbar q - (\hbar q)^2}{2p_n \sqrt{p_n^2 - 2ms\hbar q}}, \quad (15)$$

где $s = s_i$ и m — масса нейтрона. Первое соотношение показывает, что v_n должно быть больше s .

При малых углах рассеяния

$$\cos \vartheta = s/v_n, \quad \chi^2 = (\hbar q/p_n)^2 (1 - s^2/v_n^2), \quad \hbar q \ll p_n. \quad (15)$$

В этом случае кванты нулевого звука испускаются под строго определенным углом к направлению движения нейтрона (так же как при черенковском излучении). Максимальное возможное значение импульса кванта равно $\hbar q_{\max} = 2(p_n - ms)$, а минимальное значение импульса нейтрона после рассеяния равно $p_{n\min} = |p_n - 2ms|$ (нейтроны с минимальной энергией будут двигаться вдоль первоначального направления пучка; все эти соотношения справедливы при $\hbar q_{\max} \ll p_0$).

Легко видеть, что угол рассеяния χ достигает максимума при $\hbar q = (2/3ms) (p_n^2 - m^2 s^2)$. Этот предельный угол равен (при $p_n \approx ms$)

$$\chi_0 = \arccos \left[\frac{(1 + 2\xi_0^2) \sqrt{4 - \xi_0^2}}{3 \sqrt{3\xi_0}} \right] \approx 2 \left(\frac{\xi_0^2 - 1}{3} \right)^{1/2}, \quad \xi_0 = \frac{p_n}{ms}. \quad (16)$$

Вблизи максимального угла рассеяния χ_0 сечение рассеяния ведет себя как

$$d\sigma^{(v_i)} \sim q^2 dq \sim \sin \chi d\chi / \sqrt{\cos \chi - \cos \chi_0}, \quad \chi \approx \chi_0, \quad (17)$$

т. е. обладает интегрируемой особенностью. Этот вывод, однако, так же как и вывод о самом существовании χ_0 , получен в пренебрежении поглощением нулевого звука (см. раздел 4).

При малых углах рассеяния сечение $d\sigma^{(v_i)}$ имеет вид

$$d\sigma^{(v_i)} = \frac{3}{2} \left(\frac{m^*}{m'}\right)^2 |A_i|^2 |a|^2 \frac{s_i p_n}{v_0 p_0} \left(1 - \frac{s_i^2}{v_n^2}\right)^{-1/2} \chi^2 d\chi. \quad (18)$$

Если $\hbar q_{\max} \ll p_0$, то можно найти интегральное сечение испускания кванта нулевого звука

$$\sigma^{(v_i)} = 4 \left(\frac{m^*}{m'}\right)_i^2 |A_i|^2 |a|^2 \frac{s_i v_0}{v_n^2} \left(\frac{p_n - ms_i}{p_0}\right)^3. \quad (19)$$

Величина A_i определяется видом функции $F(\chi)$. Если считать, что $F(\tilde{\chi}) = \text{const}$, то, согласно (10) и (12),

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2\pi(\eta_0^2 - 1)} \left(\eta_0 \ln \frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} - 2 \right) \times \\ &\times \left[2 - (\eta_0^2 - 1) \left(\eta_0 \ln \frac{\eta_0 + 1}{\eta_0 - 1} - 2 \right) \right]^{-1/2}, \quad \eta_0 = \frac{s}{v_0}. \end{aligned} \quad (20)$$

Отметим, что при $F \rightarrow 0$ величина A исчезает.

3. Переидем теперь к вычислению сечения прямого рассеяния нейтрона ядрами ферми-жидкости и учету поглощения нулевого звука в рассеянии, сопровождающемся возбуждением нулевого звука. Для простоты будем предполагать, что энергия квазичастицы не зависит от ориентации ее спина. Сечение когерентного рассеяния нейтрона без изменения ориентации его спина $d\sigma_c$ определяется, согласно (2), компонентой Фурье отклонения плотности ферми-жидкости $\delta\rho(\mathbf{r}, t)$ от равновесного значения ρ_0 , т. е. величиной

$\int \delta\rho(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{q}\mathbf{r}-\omega t)} d\mathbf{r} dt$, где $\hbar\mathbf{q} = \mathbf{p}_n - \mathbf{p}'_n$ и $\hbar\omega = E_n - E'_n$ — изменения импульса и энергии нейтрона:

$$d\sigma_c = 2\pi (|a|^2/v_n\rho_0) (2\pi\hbar/m')^2 \Phi(q, \omega) d\mathbf{p}'_n / (2\pi\hbar)^3, \quad (21)$$

где Φ — коррелятор плотности ядер ферми-жидкости

$$\Phi(q, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{r}_1 e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)} \int dt_1 e^{i\omega(t_1-t_2)} \langle \delta\rho(\mathbf{r}_1, t_1) \delta\rho(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle, \quad (22)$$

а скобки $\langle \dots \rangle$ служат для обозначения усреднения (квантовомеханического и термодинамического)¹. Величину Φ можно, согласно общей теории флуктуаций, вычислить (при $T, \hbar\omega \ll \zeta$) сперва в области температур $T \gg \hbar\omega$, а затем заменить получающийся при этом множитель T на $\hbar\omega (N_\omega + 1)$, где N_ω — планковская функция распределения².

$$\Phi(q, \omega) = \frac{\hbar\omega}{T} (N_\omega + 1) \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{r}_1 e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)} \int dt_1 e^{i\omega(t_1-t_2)} \times \\ \times \overline{\delta\rho(\mathbf{r}_1, t_1) \delta\rho(\mathbf{r}_2, t_2)} \quad (23)$$

(черта означает термодинамическое усреднение).

Для вычисления коррелятора $\Phi(q, \omega)$ с учетом столкновений мы воспользуемся методом, примененным Абрикосовым и Халатниковым [5]. Вводя в кинетическое уравнение (3) случайную силу $y(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ и выбирая интеграл столкновений $I\{v\}$ в простейшем виде, удовлетворяющем требованиям сохранения числа частиц, импульса и энергии,

$$I\{v\} = -\tau^{-1} \left\{ v(\mathbf{n}) - v_0 - \sum_{m=-1}^1 v_m P_1^m(\cos\theta) e^{im\phi} \right\}, \quad (24)$$

где v_l^m — коэффициенты разложения функции $v(\mathbf{n})$ по сферическим функциям, получим следующее выражение для среднего зна-

¹ Общая связь между сечением рассеяния нейтронов и корреляционной функцией плотности ядер была установлена Ван-Ховом [4]. Такой метод был применен Абрикосовым и Халатниковым [5], вычисливши ми коррелятор Φ в пренебрежении столкновениями.

чения произведения случайных сил:

$$\begin{aligned} y(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) y(\mathbf{p}', \mathbf{r}', t') = & \frac{2T}{\tau} \left(\frac{d\tau_p}{d\epsilon_p} \right)_\zeta \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \delta(\epsilon - \zeta) \times \\ & \times \delta(\epsilon' - \zeta) \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2l+1}{1+F_l/(2l+1)} P_l(\cos\tilde{\chi}), \quad (25) \\ (d\tau_p/d\epsilon_p)_\zeta = & m^* \rho_0 / \pi^2 \hbar^3, \end{aligned}$$

где F_l — сферические гармоники функции $F(\tilde{\chi})$. Решая, далее, кинетическое уравнение (3) со случайной силой y , найдем связь между компонентами Фурье функций $\delta\rho$ и y ($\sim e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r}-\omega t)}$). Учитывая только первые две гармоники в разложении F по сферическим функциям, получим

$$\delta\rho = -i \left(\frac{d\tau_p}{d\epsilon_p} \right)_\zeta \frac{1}{qv_0 D} \int y(\mathbf{n}) h(\mathbf{n}) \frac{dO}{4\pi}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} D = & 1 + (A_1 F_0 + i\eta\xi A_0) - g (A_2 F_0 + i\eta\xi A_1), \\ h(\mathbf{n}) = & \frac{1 - g \cos\theta}{\cos\theta - \eta(1+i\xi)}, \quad g = \frac{3i\xi\eta + A_2 F_1}{1 + 3i\xi\eta A_2 + F_1 A_3}, \\ A_n = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x^n dx}{x - \eta(1+i\xi)} \end{aligned}$$

($\eta = \omega/qv_0$, $\xi = 1/\omega$). Отсюда, используя (24) и (25), получим окончательно следующее выражение для Φ :

$$\Phi(q, \omega) = \frac{2\hbar\omega}{\tau(qv_0)^2} \left(\frac{d\tau_p}{d\epsilon_p} \right)_\zeta (N_\omega + 1) \frac{1}{|D|^2} \left\{ \int |h(\mathbf{n})|^2 \frac{dO}{4\pi} - \left| \int h(\mathbf{n}) \frac{dO}{4\pi} \right|^2 - 3 \left| \int h(\mathbf{n}) \cos\theta \frac{dO}{4\pi} \right|^2 \right\}. \quad (27)$$

Если выполняется условие $|\omega/\tau| \gg 1$ ($\tau \sim T^{-2}$), то функция $\Phi(q, \omega)$ имеет полюса при значениях ω , близких к вещественным, $\omega = \eta_0 v_0 q - i\gamma_0$ ($\eta_0 v_0$ — скорость нулевого звука, γ_0 — коэффициент его затухания; выражение для γ_0 найдено в [6]). Выделив полюса функции $\Phi(q, \omega)$, представим ее в виде

$$\Phi(q, \omega) = \Phi_0(q, \omega) + \Phi_d(q, \omega), \quad (28)$$

где функция Φ_0 связана с полюсами Φ , а Φ_d не содержит полюсных особенностей. Предполагая для простоты, что $F = \text{const}$, получим

$$\begin{aligned} \Phi_0(q, \omega) = & \frac{\hbar\omega}{\pi} \left(\frac{d\tau_p}{d\epsilon_p} \right)_\zeta (N_\omega + 1) \frac{\eta_0^2 - 1}{F_0(1 - \eta_0^2 + F_0)} \times \\ & \times \left\{ \frac{\gamma_0}{(\omega - \eta_0 v_0 q)^2 + \gamma_0^2} + \frac{\gamma_0}{(\omega + \eta_0 v_0 q)^2 + \gamma_0^2} \right\}. \quad (29) \end{aligned}$$

Величина Φ_d является гладкой функцией ω . Поэтому при вы-

числении Φ_d можно не учитывать столкновений квазичастиц. Если $F = \text{const}$, то¹

$$\Phi_d(q, \omega) = \frac{\hbar\omega}{2qv_0} \left(\frac{d\tau_p}{de_p} \right) \zeta (N_\omega + 1) R_0 \left(\frac{\omega}{qv_0} \right) \theta \left(1 - \left| \frac{\omega}{qv_0} \right| \right), \quad (30)$$

$$R_0 \left(\frac{\omega}{qv_0} \right) = \left\{ (1 + F_0 \omega)^2 + \left(\frac{\pi}{2} \frac{\omega}{qv_0} F_0 \right)^2 \right\}^{-1},$$

$$w = 1 - \frac{\omega}{2qv_0} \ln \left| \frac{qv_0 + \omega}{qv_0 - \omega} \right|, \quad \theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Выделению из коррелятора Φ полюсных особенностей соответствует разделение сечения когерентного рассеяния нейтрона на два слагаемых:

$$d\sigma_c = d\sigma^{(0)} + d\sigma_c^{(d)}, \quad (31)$$

где

$$d\sigma^{(0)} = \frac{2\pi |a|^2}{v_n \eta_0} \left(\frac{2\pi\hbar}{m'} \right)^2 \Phi_0(q, \omega) \frac{dp'_n}{(2\pi\hbar)^3}, \quad d\sigma_c^{(d)} = \frac{2\pi |a|^2}{v_n \eta_0} \left(\frac{2\pi\hbar}{m'} \right) \Phi_d(q, \omega) \frac{dp'_n}{(2\pi\hbar)^3}.$$

При $F = \text{const}$ имеем, согласно (29), (30),

$$d\sigma^{(0)} = \frac{3}{\pi} \left(\frac{m^*}{m'} \right)^2 |a|^2 \omega (N_\omega + 1) \frac{\eta_0^2 - 1}{v_n F_0 (1 - \eta_0^2 + F_0)} \times \times \left\{ \frac{\gamma_0}{(\omega - \eta_0 v_0 q)^2 + \gamma_0^2} + \frac{\gamma_0}{(\omega + \eta_0 v_0 q)^2 + \gamma_0^2} \right\} \frac{dp'_n}{p_0^3}, \quad (32)$$

$$d\sigma_c^{(d)} = \frac{3}{2} \left(\frac{m^*}{m'} \right)^2 |a|^2 \frac{\omega}{qv_n} (N_\omega + 1) R_0 \left(\frac{\omega}{qv_0} \right) \theta \left(1 - \left| \frac{\omega}{qv_0} \right| \right) \frac{dp'_n}{p_0^3}. \quad (33)$$

Величина $d\sigma^{(0)}$ представляет собой сечение рассеяния нейтрона с возбуждением (или поглощением) нулевого звука, а $d\sigma_c^{(d)}$ — сечение прямого когерентного рассеяния нейтрона без изменения ориентации его спина.

Если $\gamma_0 \rightarrow 0$, то²

$$\Phi_0(q, \omega) = \frac{\hbar\omega}{qv_0} \left(\frac{d\tau_p}{de_p} \right) \zeta (N_\omega + 1) \frac{\eta_0^2 - 1}{F_0 (1 - \eta_0^2 + F_0)} \left\{ \delta \left(\frac{\omega}{qv_0} - \eta_0 \right) + \delta \left(\frac{\omega}{qv_0} + \eta_0 \right) \right\}. \quad (29')$$

¹ Выражение для Φ_d при $\gamma = 0$ и $F = \text{const}$ может быть непосредственно взято из формулы (23) работы Абрикосова и Халатникова [5].

² Выражение (29') может быть непосредственно взято из формулы (23) в [5]. Заменяя в этой формуле

$\delta(\Delta\omega \pm \eta_0 v_0 q)$ на $\pi^{-1} \gamma [(\Delta\omega \pm \eta_0 v_0 q)^2 + \gamma^2]^{-1}$,

мы учтем влияние поглощения нулевого звука на рассеяние света в ферми-жидкости.

Подстановка этого выражения в $d\sigma^{(0)}$ приводит, как легко видеть, к формулам (13), (20) для сечения рассеяния нейтрона с возбуждением нулевого звука при $F = \text{const}$.

Отметим, что применимость выражения (29) ограничена неравенствами $\tau^{-1} \ll |\omega| \ll T/\hbar$. Если $T \lesssim \hbar\omega$, то для величины Φ можно пользоваться лишь выражением (29'), так как в (29) не учитывается квантово-механический эффект в поглощении нулевого звука, указанный Ландау [1]. Можно ожидать, однако, учитывая результаты [1], что формула (29) останется справедливой и при $T \gtrsim \hbar\omega$, если заменить в ней γ_0 на $\gamma = \gamma_0 \{1 + (\hbar\omega/2\pi T)^2\}$.

4. Выше мы видели, что при $\gamma \rightarrow 0$ и $\eta_0 v_0 < v_n < 2\eta_0 v_0$ угол рассеяния нейтрона с возбуждением нулевого звука не может пре-восходить некоторого предельного значения χ_0 и что сечение этого процесса при $\chi \sim \chi_0$ обращается в бесконечность. Если учесть затухание нулевого звука, то сечение рассеяния при $\chi \sim \chi_0$ будет, согласно (32), иметь вид

$$d\sigma^{(0)} = G(J + O(\xi)) \sin \chi d\chi, \quad J = \int \frac{\xi dt}{(\eta - \eta_0)^2 + \xi^2},$$

где

$$t = p'_n/m\eta_0 v_0, \quad \xi = \xi(\chi) = \gamma/qv_0, \quad \eta = \eta(\chi, t) = \omega/qv_0$$

и G — некоторая функция χ . Предельный угол χ_0 определяется, очевидно, из условий

$$\eta(\chi_0, t_0) = \eta_0, \quad \partial\eta(\chi_0, t)/\partial t|_{t_0} = 0.$$

При $\chi > \chi_0$ разность $\eta(\chi, t) - \eta_0$, рассматриваемая как функция t , не обращается в нуль и интеграл J имеет порядок величины $\xi: J = O(\xi)$. При $\chi < \chi_0$ и $\xi \ll 1$ интеграл J равен

$$J = \pi \int \sigma(\eta - \eta_0) dt + O(\xi) = \pi |\partial\eta/\partial t|_{t_0}^{-1} + O(\xi) \sim 1,$$

и с точностью до членов порядка ξ для сечения $d\sigma^{(0)}$ справедлива формула (13).

Наконец, если $\chi \approx \chi_0$, то, используя разложение

$$\eta_0 - \eta = \alpha(\chi - \chi_0) + \beta(t - t_0)^2,$$

где

$$\alpha = -(\partial\eta/\partial\chi)|_{\chi_0, t_0}, \quad \beta = -\frac{1}{2}(\partial^2\eta/\partial t^2)|_{\chi_0, t_0},$$

можно представить J в виде

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi dz}{[\alpha(\chi - \chi_0) + \beta z^2]^2 + \xi^2}, \quad z = t - t_0.$$

При $\chi = \chi_0$ мы получим отсюда $J \sim (\beta\xi)^{-1/2} \gg 1$.

Таким образом, учет затухания нулевого звука приводит к размытию предельного угла рассеяния.

5. Сечение прямого когерентного рассеяния нейтрона ядрами ферми-жидкости (без изменения ориентации спина нейтрона), определяемое формулой (33), отличается от сечения когерентного рассеяния нейтрона без изменения ориентации его спина в идеальном ферми-газе той же плотности множителем R_0 . Этот множитель при $|\omega|/qv_0 \ll 1$ не зависит от передаваемых энергии и импульса и равен $R_0 \approx (1 + F_0)^{-2}$. Если $|\omega|/qv_0 \rightarrow 1$, то $R_0 \rightarrow 0$; поэтому сечение прямого когерентного рассеяния на углы, близкие к

$$\chi_d = \arccos \left\{ \frac{1}{2p_n p'_n} [p_n^2 + p'^2_n - (2mv_0)^{-2} (p_n^2 - p'^2_n)^2] \right\},$$

в ферми-жидкости значительно меньше, чем в идеальном газе

Если в разложении F учесть две первые гармоники, то сечение прямого рассеяния будет иметь вид

$$d\sigma_c^{(d)} = \frac{3}{2} \left(\frac{m^*}{m'} \right)^2 |a|^2 \frac{\omega}{qv_n} (N_\omega + 1) R_1 \left(\frac{\omega}{qv_0} \right) \theta \left(1 - \frac{|\omega|}{qv_0} \right) \frac{dp'_n}{p_0^3}, \quad (33')$$

где множитель R_1 , которым это сечение отличается от соответствующего сечения рассеяния в идеальном ферми-газе, равен

$$\begin{aligned} R_1 \left(\frac{\omega}{qv_0} \right) &= \left(1 + \frac{F_1}{3} \right)^2 L^{-2} \left\{ (1 + F_0 Q_1)^2 + \left(\frac{\pi}{2} \eta F_0 Q_2 \right)^2 \right\}^{-1}, \\ Q_1 &= w - \frac{\eta^2 F_1}{Q} \left\{ L \left(w^2 - \frac{\pi^2}{4} \eta^2 \right) + \frac{\pi^2}{2} w \eta^4 F_1 \right\}, \\ Q_2 &= 1 + \frac{\eta^2 F_1}{Q} \left\{ \eta F_1 \left(w^2 - \frac{\pi^2}{4} \eta^2 \right) - 2wL \right\}, \\ L &= 1 + F_1 \left(\frac{1}{3} + \eta^2 w \right), \quad Q = L^2 + \frac{\pi^2}{4} \eta^6 F_1^2. \end{aligned}$$

6. Рассмотрим теперь некогерентное рассеяние нейтрона в ферми-жидкости. Это рассеяние, обусловленное величиной b в псевдопотенциале (1), происходит так же, как рассеяние нейтрона в идеальном ферми-газе ядер, масса которых равна эффективной массе m^* квазичастиц ферми-жидкости. Суммарное сечение некогерентного рассеяния (без изменения и с изменением ориентации спина нейтрона), отнесенное к одному ядру, равно

$$d\sigma' = \frac{9}{32} \left(\frac{m^*}{m'} \right)^2 |b|^2 \frac{\omega}{qv_n} (N_\omega + 1) \theta \left(1 - \frac{|\omega|}{qv_0} \right) p_0^{-3} dp'_n. \quad (34)$$

Отметим, что в это выражение, в отличие от $d\sigma_c^{(d)}$, не входит фактор R , зависящий от корреляции между ядрами.

При прямом рассеянии, как следует из (33) и (34), нет однозначной связи между передаваемой энергией и импульсом, в то вре-

мя как такая связь существует (при $\gamma \rightarrow 0$) для рассеяния с возбуждением нулевого звука (наличие δ -функции в формуле (29')). Это обстоятельство позволяет в принципе отличить оба типа рассеяния.

Остановимся еще на угловом распределении нейтронов при прямом рассеянии в области малых углов $\chi \ll 1$. Если $v_n \sim v_0$, то сечение будет пропорционально $\chi^2 d\chi$. При больших скоростях нейтронов сечение будет вести себя как $\chi^2 d\chi$. Считая при оценке порядка величины сечения $R \sim 1$, получим при $v_n \gg v_0$ и $\chi \ll 1$

$$d\sigma^{(d)} \sim \frac{3}{8} (m/m')^2 \sigma_0 (p_n/p_0) \chi^2 d\chi, \quad \sigma_0 = 4\pi \left(|a|^2 + \frac{3}{16} |b|^2 \right). \quad (34')$$

Это выражение зависит от χ так же, как $d^{(v_i)}$ (см. (18)). Отношение сечений по порядку величины равно

$$d\sigma^{(v_i)}/d\sigma^{(d)} \sim (s/v_0) (1 - s^2/v_n^2)^{-1/2} \quad (35)$$

и может быть больше единицы, если $v_n \sim s$; вообще же $d\sigma^{(0)} \sim d\sigma^{(d)}$.

7. Сечение рассеяния нейтронов с возбуждением колебаний нулевого звука определяется, как мы видели выше, полюсами функции $\Phi(q, \omega)$ при $|\omega| \tau \gg 1$. Если $|\omega| \tau \sim 1$, то Φ не имеет полюсов при значениях ω , близких к вещественным. Поэтому при $|\omega| \tau \sim 1$ из сечения рассеяния не выделяется член, соответствующий возбуждению резко выраженных коллективных колебаний ферми-жидкости. Если же $|\omega| \tau \ll 1$, то у функции Φ вновь появляются полюса при близких к вещественным значениях ω . Эти полюса ($\omega = \eta_s v_0 q - i\gamma_s$) определяют закон дисперсии и коэффициент затухания колебаний обычного звука (выражения для скорости $\eta_s v_0$ и затухания γ_s звука найдены в работах Ландау, Халатникова и Абрикосова [1,6]).

Величина Φ при $|\omega| \tau \ll 1$, которую мы обозначим через Φ_s , имеет вид

$$\Phi_s(q, \omega) = \frac{\hbar\omega}{6\pi\eta_s^2} \left(\frac{d\tau_p}{d\varepsilon_p} \right) \zeta (N_\omega + 1) \left\{ \frac{\gamma_s}{(\omega - \eta_s v_0 q)^2 + \gamma_s^2} + \frac{\gamma_s}{(\omega + \eta_s v_0 q)^2 + \gamma_s^2} \right\}. \quad (36)$$

Подставляя (36) в (21), получим сечение рассеяния нейтрона с возбуждением ($\omega > 0$) и поглощением ($\omega < 0$) колебаний обычного звука:

$$\begin{aligned} d\sigma^{(s)} &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m^*}{m'} \right)^2 |a|^2 \frac{v_0}{v_n} \omega (N_\omega + 1) \frac{1}{\eta_s^2} \times \\ &\times \left\{ \frac{\gamma_s}{(\omega - \eta_s v_0 q)^2 + \gamma_s^2} + \frac{\gamma_s}{(\omega + \eta_s v_0 q)^2 + \gamma_s^2} \right\} \frac{dp'_n}{p_0^3}. \quad (37) \end{aligned}$$

Заметим, что сечение прямого рассеяния нейtronов с малой передачей энергии ($|\omega| \ll \tau^{-1}$) имеет порядок величины $|\omega| \tau$; поэтому при $|\omega| \tau \ll 1$ можно пренебречь вероятностью прямого рассеяния по сравнению с вероятностью рассеяния с возбуждением обычного звука.

Если $\gamma_s = 0$, то сечение возбуждения обычного звука¹, согласно (37), содержит $\delta(\omega - \eta_s v_0 q)$. Заменяя $(2\pi\hbar)^{-3} d\mathbf{p}_n$ на $(2\pi)^{-3} dq$ и интегрируя по углам вектора \mathbf{q} , получим сечение возбуждения обычного звука с волновым вектором в интервале $(q, q + dq)$:

$$d\sigma^{(s)} = \pi (m^*/m')^2 |a|^2 (N_\omega + 1) (v_0/v_n)^2 \hbar^3 q^2 dq / \eta_s p_0^3. \quad (38)$$

Возбуждение обычного звука возможно только в том случае, если $v_n > \eta_s v_0$.

Сравнение формул (37) и (32) показывает, что зависящая от ω, \mathbf{q} часть $d\sigma^{(s)}$ может быть получена из соответствующей части $d\sigma^{(0)}$ заменой $\eta_0 \rightarrow \eta_s, \gamma_0 \rightarrow \gamma_s$. Поэтому ряд соотношений, относящихся к рассеянию нейtronов с возбуждением нулевого звука, справедлив также для рассеяния с возбуждением обычного звука.

В частности, если $\gamma_s = 0$ и $\eta_s v_0 < v_n < 2\eta_s v_0$, то нейtronы не могут рассеяться на угол, больший некоторого предельного угла χ_s . Этот уголдается формулой (16), если заменить в ней ξ_0 на $\xi_s = v_n/\eta_s v_0$. Как и в случае нулевого звука, учет затухания обычного звука приводит к размытию предельного угла рассеяния, причем сечение рассеяния нейtrона в интервале углов $d\chi$ (принтегрированное по модулю вектора \mathbf{p}_n) пропорционально вблизи угла χ_s величине $\gamma_s^{-1/2}$.

8. К сожалению, в единственной известной ферми-жидкости — жидкому Не³ — очень велико поглощение медленных нейtronов. При энергии порядка 1° К сечение захвата нейtronов в Не³ составляет $\sigma_c \sim 10^5 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, в то время как сечение рассеяния только $\sigma_0 \sim 10^{-24} \text{ см}^2$. Поэтому на каждый акт рассеяния будет приходить очень большое число захватов нейtronов, приводящее к сильному поглощению нейtronной волны. Так как длина пробега нейtrона по отношению к захвату равна $l_c \sim (\rho_0 \sigma_c)^{-1} \sim 10^{-3} \text{ см}$, то рассеяние нейtronов будет происходить только в поверхностном слое Не³, эффективная толщина которого составляет $\sim 10^{-3} \text{ см}$. Кроме того, следует иметь в виду, что жидкий Не³ будет разогреваться за счет энергии ядерных реакций, обусловленных захватом нейtronов (эта энергия составляет $5 \cdot 10^6 \text{ эВ}$ на один захват нейtrона, что соответствует нагреву 10^{15} ядер Не³ на 1° К на один акт рассеяния). Все это затрудняет проведение экспериментов по рас-

сению медленных нейtronов в жидком Не³. Можно, однако, надеяться, что такие опыты со временем станут возможны.

Авторы благодарны Л. Д. Ландау, С. В. Пелетминскому и Л. П. Питаевскому за полезные дискуссии.

Физико-технический институт Академии наук
Украинской ССР

Институт теоретической и экспериментальной физики
Академии наук ССР

Получено
24 февраля 1960 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 1957, 32, 59.
2. Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин. ЖЭТФ, 1952, 23, 151.
3. Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 1956, 30, 1058.
4. L. Van Hove. Phys. Rev., 1954, 95, 249.
5. А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ЖЭТФ, 1958, 34, 198.
6. И. М. Халатников, А. А. Абрикосов. ЖЭТФ, 1957, 33, 1154.

¹ Выражение для $d\sigma^{(s)}$ без учета затухания звука было иным путем независимо получено М. Кагановым.

О РАССЕЯНИИ МЕДЛЕННЫХ НЕЙТРОНОВ В ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ *

Совместно с А. И. Ахиезером и И. А. Ахиезером

Теоретически исследуется рассеяние медленных нейтронов в ферми-жидкости. Если изменение импульса и энергии нейтрана при рассеянии много меньше импульса и энергии, соответствующих границе Ферми, то в рассеянии возникают характерные эффекты. Если скорость нейтрана превышает скорость нулевого звука, то нейтраны при рассеянии могут возбуждать волны нулевого звука. Для такого рассеяния существует однозначная связь между передачей энергии и импульса, в противоположность прямому рассеянию, сопровождаемому выбиванием квазичастицы ферми-жидкости за пределы заполненной ферми-сферы. Это дает возможность, в принципе, различить между собой оба типа рассеяния.

В статье определены сечения прямого рассеяния и рассеяния с возбуждением нулевого звука, а также коэффициент деполяризации нейтронов и коэффициент отражения нейтронов от поверхности ферми-жидкости. При скользящем падении коэффициент отражения имеет острый максимум, соответствующий возбуждению нулевого звука.

1. Введение

Авторами было показано [1], что медленные нейтраны, проходя через ферми-жидкость, могут возбуждать волны нулевого звука, и были исследованы особенности прямого рассеяния нейтронов на ядрах ферми-жидкости. При этом для простоты предполагалось, что изменение энергии квазичастиц, обязанное изменению функции распределения, не зависит от спина квазичастиц.

В настоящей работе мы изучим эффекты, возникающие при рассеянии медленных нейтронов в ферми-жидкости, в общем случае, принимая во внимание зависимость самосогласованной части энергии квазичастиц от их спина. Наряду с сечениями рассеяния мы определим коэффициенты деполяризации и отражения нейтронов.

2. Дифференциальные сечения рассеяния

Начнем с общего выражения для дифференциального сечения рассеяния, отнесенного к одному ядру ферми-жидкости, при котором нейtron переходит из состояния с импульсом p_n и проекцией

спина σ в состояние с импульсом $p_n' = p_n - \hbar q$ и проекцией спина σ' , а ферми-жидкость — из состояния f , χ в состояние f' , χ' (χ характеризует спиновое состояние ферми-жидкости):

$$d\sigma = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{v_n V p_0} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} (f', \chi', \sigma' | \mathcal{H}(\mathbf{r}) | f, \chi, \sigma) \times \\ \times (f, \chi, \sigma | \mathcal{H}^+(\mathbf{r}') | f', \chi', \sigma') \delta(E_n - E_n' + \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_{f'}) \frac{dp_n'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (1)$$

Здесь \mathcal{H} — гамильтониан взаимодействия медленного нейтрана с ядрами ферми-жидкости, представляющий собой сумму фермиевых псевдопотенциалов

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}) = - \frac{2\pi\hbar^2}{m'} \sum_l (a + b s K^l) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

где a и b — длины рассеяния нейтрана свободным ядром ферми-жидкости (эти величины являются комплексными из-за поглощения нейтронов ядрами), s — спин нейтрана, \mathbf{r}' и K^l — радиус-вектор и спин l -го ядра, m' — приведенная масса нейтрана и ядра, E_n и E_n' — энергия нейтрана до и после рассеяния, \mathcal{E}_f — уровни энергии ферми-жидкости, p_0 — ее плотность, v_n — начальная скорость нейтрана и V — объем системы.

Уравнение (1) для сечения рассеяния следует просуммировать по конечным состояниям ферми-жидкости и усреднить по начальным состояниям с фактором Гиббса P_f . Учитывая, что для ферми-жидкости нельзя построить аксиальныйного вектора, мы можем представить усредненное сечение в виде

$$d\sigma = \frac{2\pi}{v_n p_0} \left(\frac{2\pi\hbar}{m'} \right)^2 \left\{ |a|^2 \delta_{\sigma\sigma'} \Phi(q, \omega) + \frac{|b|^2}{16} s_{ij}(\sigma, \sigma') \Psi_{ij}(q, \omega) \right\} \frac{dp_n'}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (2)$$

где $\hbar\omega = E_n - E_n'$,

$$\Phi(q, \omega) = V^{-1} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \exp\{-i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\} \sum_{f, f'} P_f \times \\ \times \sum_{l, l'} (f' | \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') | f) (f | \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') | f') \delta\left(\omega + \frac{\mathcal{E}_f - \mathcal{E}_{f'}}{\hbar}\right), \quad (3)$$

$$\Psi_{ij}(q, \omega) = 4V^{-1} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \exp\{-i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\} \sum_{f, f'; \chi, \chi'} P_f \times \\ \times \sum_{l, l'} (f', \chi' | K_i^l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') | f, \chi) (\chi, f | K_j^{l'} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') | f', \chi') \times \\ \times \delta\left(\omega + \frac{\mathcal{E}_f - \mathcal{E}_{f'}}{\hbar}\right), \\ s_{ij}(\sigma, \sigma') = (\sigma' | s_i | \sigma) (\sigma | s_j | \sigma').$$

* Nucl. Phys., 1963, 40, 139. Перевод В. С. Попова.

Если между спинами ферми-частиц существует обменное взаимодействие, то, как будет показано ниже, тензор Ψ_{ij} имеет вид

$$\Psi_{ij}(q, \omega) = \delta_{ij} \Psi(q, \omega).$$

Поэтому из уравнения (2) вытекают следующие выражения для сечений рассеяния нейтронов без переворота и с переворотом спина:

$$d\sigma_{\uparrow\uparrow} = \frac{2\pi}{v_n \rho_0} \left(\frac{2\pi\hbar}{m'} \right)^2 \left\{ |a|^2 \Phi(q, \omega) + \frac{|b|^2}{16} \Psi(q, \omega) \right\} \frac{dp'_n}{(2\pi\hbar)^3},$$

$$d\sigma_{\uparrow\downarrow} = \frac{2\pi}{v_n \rho_0} \left(\frac{2\pi\hbar}{m'} \right)^2 \frac{|b|^2}{8} \Psi(q, \omega) \frac{dp'_n}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (4)$$

3. Функции плотности

Покажем, что величины $\Phi(q, \omega)$ и $\Psi_{ij}(q, \omega)$ являются корреляционными функциями плотности ядер ферми-жидкости и плотности их спинов¹. Для этой цели заменим δ -функцию в уравнении (3) ее выражением через интеграл по времени и перейдем от шредингеровских операторов L для физических величин, относящихся к ферми-жидкости, к гейзенберговским операторам

$$\check{L} = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_0 t \right\} L \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_0 t \right\},$$

имеющим классический аналог (здесь \mathcal{H}_0 — гамильтониан ферми-жидкости). Вводя операторы плотности ядер ферми-жидкости и плотности их спинов

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^l), \quad \kappa(\mathbf{r}, t) = \sum_l \mathbf{K}^l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^l),$$

мы окончательно получаем следующие выражения для функций Φ и Ψ :

$$\Phi(q, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{r} dt \exp \{-iq(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + i\omega(t - t')\} \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}', t') \rangle,$$

$$\Psi_{ij}(q, \omega) = \frac{2}{\pi} \int d\mathbf{r} dt \exp \{-iq(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + i\omega(t - t')\} \times$$

$$\times \langle \kappa_i(\mathbf{r}, t) \kappa_j(\mathbf{r}', t') \rangle, \quad (5)$$

где скобки $\langle \dots \rangle$ означают термодинамическое и квантовое усреднение

$$\langle L \rangle = \frac{1}{2} \sum_{f, \kappa} P_f(f, \kappa | L | \kappa, f).$$

¹ Общая связь между сечением рассеяния нейтронов и корреляционной функцией ядерной плотности была установлена Ван-Ховом [2].

4. Функция распределения квазичастиц

В дальнейшем мы примем, что изменения импульса и энергии нейтрона при рассеянии $\hbar q$ и $\hbar\omega$ много меньше граничного импульса p_0 и граничной энергии ζ , поскольку в этом случае эффекты ферми-жидкости наиболее резко выражены. Для малых q и ω при вычислении корреляторов Φ и Ψ можно использовать квазиклассическое приближение, в котором плотность ядер ферми-жидкости и плотность их спинов связаны с функцией распределения квазичастиц n , являющейся матрицей плотности для их спинов [3].

$$\rho(\mathbf{r}, t) = Sp \int n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p}, \quad \kappa(\mathbf{r}, t) = Sp_k \int n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p}. \quad (6)$$

Здесь \mathbf{p} — импульс квазичастицы и $d\mathbf{p} = (2\pi\hbar)^3 d\mathbf{p}$. Эти соотношения сводят вычисления корреляторов для величин ρ и κ к вычислению коррелятора для флуктуаций функций распределения $\delta n = n - n^0$, удовлетворяющих кинетическому уравнению Ландау [3]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon_p}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \delta n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) - \frac{\partial n_p^0}{\partial \mathbf{p}} Sp_k \int F(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta n(\mathbf{p}', \mathbf{r}, t) d\mathbf{p}' = I\{\delta n\}, \quad (7)$$

где $n_p^0 = [\exp \{(\epsilon_p - \zeta)/T\} + 1]^{-1}$ — равновесная функция квазичастицы, ϵ_p — энергия квазичастицы, I — интеграл столкновений и F — функция, характеризующая взаимодействие между квазичастицами и зависящая, вообще говоря, от их спинов. Мы примем, что взаимодействие между спинами ферми-частиц имеет обменное происхождение; в этом случае величина F определяется двумя скалярными функциями f и g (см. работу [3]):

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + 4K \cdot K' g(\mathbf{p}, \mathbf{p}').$$

5. Флуктуации функции распределения

Флуктуации функции распределения могут быть вычислены в соответствии с общей теорией флуктуаций путем введения в правую часть кинетического уравнения (7) случайных сил $Y(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ и определения скорости изменения энтропии под действием этих сил¹. Замечая, что при $T \ll \zeta$ флуктуации функций распределения возникают только вблизи поверхности Ферми, можно привести кинетическое уравнение со случайными силами к форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 n \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) v(\mathbf{n}) + v_0 n \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int F(n\mathbf{n}') v(\mathbf{n}') \frac{dO'}{4\pi} = I\{v\} + y_0, \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 n \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mu(\mathbf{n}) + v_0 \left(n \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \int G(n\mathbf{n}') \mu(\mathbf{n}') \frac{dO'}{4\pi} = I\{\mu\} + y, \quad (9)$$

¹ Этот метод был впервые использован Абрикосовым и Халатниковым [4], вычислившими коррелятор Φ в пренебрежении столкновениями.

$$F(\mathbf{n}\mathbf{n}') = \frac{p_0 m^*}{\pi^2 \hbar^3} [f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')]_{p=p'=p_0},$$

$$G(\mathbf{n}\mathbf{n}') = \frac{p_0 m^*}{\pi^2 \hbar^3} [g(\mathbf{p}, \mathbf{p}')]_{p=p'=p_0},$$

в то время, как $n = p/p$ и $m^* = p_0/v_0$. Далее, v_0 есть граничная скорость, и функции v , μ , y_0 , y связаны с флуктуациями функций распределения δn и случайными силами Y соотношениями

$$\begin{aligned} \delta n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) &= \{v(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t) + K\mu(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t)\} \delta(\epsilon_p - \zeta), \\ Y(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) &= \{y_0(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t) + Ky(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t)\} \delta(\epsilon_p - \zeta). \end{aligned} \quad (9)$$

Определим теперь временную производную энтропии ферми-жидкости $S = -S_{\mathbf{p}} \int \{n \ln n + (1-n) \ln(1-n)\} d\tau dr$:

$$\begin{aligned} \dot{S} = & -\frac{p_0 m^*}{\pi^2 \hbar^3} \int d\mathbf{r} \left\{ \int v(\mathbf{n}) [I\{v(\mathbf{n})\} + y_0(\mathbf{n})] \frac{dO}{4\pi} + \right. \\ & + \int v(\mathbf{n}') F(\mathbf{n}\mathbf{n}') [I\{v(\mathbf{n})\} + y_0(\mathbf{n})] \frac{dO dO'}{(4\pi)^2} + \\ & + \frac{1}{4} \int \mu(\mathbf{n}) [I\{\mu(\mathbf{n})\} + y(\mathbf{n})] \frac{dO}{4\pi} + \\ & \left. + \int \mu(\mathbf{n}') G(\mathbf{n}\mathbf{n}') [I\{\mu(\mathbf{n})\} + y(\mathbf{n})] \frac{dO dO'}{(4\pi)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Выбирая интеграл столкновений в простейшей форме, удовлетворяющей законам сохранения числа частиц, импульса и энергии¹

$$\begin{aligned} I\{v\} &= -\tau^{-1} \left\{ v(\mathbf{n}) - v^0 - \sum_{m=-1}^1 v^{lm} P_1^m(\cos \theta) e^{im\phi} \right\}, \\ I\{\mu\} &= -\tau^{-1} \left\{ \mu(\mathbf{n}) - \mu^0 - \sum_{m=-1}^1 \mu^{lm} P_1^m(\cos \theta) e^{im\phi} \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где τ — среднее время между столкновениями, которое всюду, где это можно, полагается равным бесконечности, мы можем привести уравнение (10) к форме

$$\dot{S} = \int d\mathbf{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (X^{lm} \dot{x}^{lm} + X^{lm} \dot{x}^{lm}), \quad (10')$$

¹ Интеграл столкновений $I\{\mu\}$ можно выбрать в простейшей форме $I\{\mu\} = -\tau^{-1} \mu$. Мы выбираем $I\{\mu\}$ в форме, аналогичной $I\{v\}$, поскольку при этом получаются более симметричные выражения для корреляторов Φ и Ψ . Заметим, что большая часть полученных результатов относится к случаю $I = 0$, когда точная форма интеграла столкновений несущественна.

также

$$\begin{aligned} X^{lm} &= \frac{p_0 m^*}{\pi^2 \hbar^3 T} \left(\frac{F_l}{2l+1} + 1 \right) \frac{1}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} v^{l,-m}, \\ X^{lm} &= \frac{p_0 m^*}{4\pi^2 \hbar^3 T} \left(\frac{G_l}{2l+1} + 1 \right) \frac{1}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \mu^{l,-m}, \\ \dot{x}^0 &= y_0^0, \quad \dot{x}^{1m} = y_0^{1m}, \quad \dot{x}^{lm} = -\tau^{-1} v^{lm} + y_0^{lm} \quad \text{при } l \leq 2, \\ \dot{x}^0 &= y^0, \quad \dot{x}^{1m} = y^{1m}, \quad \dot{x}^{lm} = -\tau^{-1} \mu^{lm} + y^{lm} \quad \text{при } l \geq 2. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь a^{lm} — коэффициент разложения функции $a(\mathbf{n})$ по сферическим гармоникам $P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$, а F_l и G_l — коэффициенты разложения функций $F(\mathbf{n}\mathbf{n}')$ и $G(\mathbf{n}\mathbf{n}')$ по полиномам Лежандра $P_l(\mathbf{n}\mathbf{n}')$.

В соответствии с теорией флуктуаций [5], если \dot{S} дается выражением (10') и установлены следующие соотношения:

$$\dot{x}^{lm} = - \sum_{l', m'} \gamma_{00}^{lm, l'm'} X^{l'm'} + y_0^{lm}, \quad \dot{x}_i^{lm} = - \sum_{l', m'} \gamma_{ij}^{lm, l'm'} X_j^{l'm'} + y_i^{lm}, \quad (12')$$

то произведения случайных сил, усредненные по флуктуациям, даются формулой

$$\langle y_i^{lm}(\mathbf{r}, t) y_j^{l'm'}(\mathbf{r}', t') \rangle = (\gamma_{ij}^{lm, l'm'} + \gamma_{ij}^{l'm', lm}) \delta(t-t') \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (i, j = 0, 1, 2, 3)$$

Сравнивая уравнения (12) и (12'), получаем

$$\begin{aligned} \langle y_i^{lm}(\mathbf{r}, t) y_j^{l'm'}(\mathbf{r}', t') \rangle &= \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } l = 0, 1, \\ 2\delta(t-t') \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \delta_{ll'} \delta_{mm'} \frac{T}{\tau} \left(\frac{p_0 m^*}{\pi^2 \hbar^3} \right)^{-1} (2l+1) \Gamma_{ij}^l & \text{при } l \geq 2, \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\Gamma_{00}^l = \left(\frac{F_l}{2l+1} + 1 \right)^{-1}, \quad \Gamma_{0k}^l = \Gamma_{k0}^l = 0,$$

$$\Gamma_{kk'}^l = \frac{1}{4} \left(\frac{G_l}{2l+1} + 1 \right)^{-1} \delta_{kk'}, \quad (k, k' = 1, 2, 3).$$

Решая кинетические уравнения (8) со случайными силами и используя уравнение (6), находим связь между компонентами Фурье функций $\delta\rho = \rho - \rho_0$, \mathbf{x} и функциями y_0 , y ($\sim \exp\{i(\mathbf{qr} - \omega t)\}$). Принимая для простоты, что $F(\mathbf{n}) = F_0 = \text{const}$, $G(\mathbf{n}) = G_0 = \text{const}$, получаем

$$\delta\rho = -i \frac{(m^*)^2}{\pi^2 \hbar^3 q D_F} \frac{1}{4\pi} \int y_0(\mathbf{n}) h(\mathbf{n}) \frac{dO}{4\pi}, \quad \mathbf{x} = -i \frac{(m^*)^2}{\pi^2 \hbar^3 q D_G} \frac{1}{4\pi} \int y(\mathbf{n}) h(\mathbf{n}) \frac{dO}{4\pi}, \quad (14)$$

где функции D_F и h имеют вид

$$D_F = 1 + (A_1 F_0 + i\eta \xi A_0) - (A_2 F_0 + i\eta \xi A_1) \frac{3i\eta \xi}{1 + 3i\eta \xi},$$

$$h(n) = [\cos \theta - \eta(1 + i\xi)]^{-1} \left[1 - \frac{3i\eta \xi}{1 + 3i\eta \xi} \cos \theta \right],$$

причем

$$A_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x^n dx}{x - \eta(1 + i\xi)}.$$

Здесь θ — полярный угол вектора n , в то время как $\eta = \omega/qv_0$ и $\xi = 1/\omega\tau$. Функция D_G получается из функции D_F заменой $F_0 \rightarrow G_0$.

Теперь следует представить выражения (14) для Φ и Ψ в соотношении (5) и выполнить усреднение в соответствии с уравнением (13). Таким путем получаются выражения для корреляторов, справедливые в классической области температур ($T \gg \hbar\omega$), причем Φ и Ψ содержат температуру только в виде множителя T , если $\tau \rightarrow \infty$. Заменяя этот множитель на фактор $\hbar\omega(N_\omega + 1)$, где N_ω — функция распределения Планка, мы получаем выражения для корреляторов, справедливые при любой температуре (если только $T \ll \zeta$ и τ достаточно велико [5, 4]):

$$\begin{aligned} \Phi(q, \omega) &= \frac{2\hbar\omega}{\tau(qv_0)^2} \frac{p_0 m^* N_\omega + 1}{\pi^2 \hbar^3 |D_F|^2} \left\{ \int |h(n)|^2 \frac{dO}{4\pi} - \left| \int h(n) \frac{dO}{4\pi} \right|^2 - \right. \\ &\quad \left. - 3 \left| \int h(n) \cos \theta \frac{dO}{4\pi} \right|^2 \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Psi(q, \omega) &= \frac{2\hbar\omega}{\tau(qv_0)^2} \frac{p_0 m^* N_\omega + 1}{\pi^2 \hbar^3 |D_G|^2} \left\{ \int |h(n)|^2 \frac{dO}{4\pi} - \right. \\ &\quad \left. - \left| \int h(n) \frac{dO}{4\pi} \right|^2 - 3 \left| \int h(n) \cos \theta \frac{dO}{4\pi} \right|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Эти формулы в комбинации с уравнением (4) дают сечение рассеяния нейтронов в ферми-жидкости.

6. Полюса функций Φ и Ψ

При $F_0 > 0$ и $|\omega| \tau \gg 1$ функция $\Phi(q, \omega)$ имеет полюса при значениях $\omega = \pm sq - i\gamma$, расположенных близко к вещественной оси; эти значения являются корнями уравнения $|D_F(q, \omega)|^2 = 0$, совпадающего с дисперсионным уравнением для колебаний нулевого звука (s и γ скорость и коэффициент затухания нулевого звука, определенные в работах [6, 7]).

Аналогично, если $|\omega| \tau \gg 1$ и $G_0 > 0$, то коррелятор Ψ имеет полюса при значениях $\omega = \pm s'q - i\gamma'$, близких к вещественной оси;

эти полюса соответствуют возможности распространения спинового звука в ферми-жидкости (s' и γ' — скорость и коэффициент затухания спинового звука [6, 7]).

Отделим полюса функций Φ и Ψ , записав их в форме

$$\Phi(q, \omega) = \Phi_c(q, \omega) + \Phi_d(q, \omega), \quad \Psi(q, \omega) = \Psi_c(q, \omega) + \Psi_d(q, \omega),$$

где

$$\Phi_c(q, \omega) = \hbar\omega (N_\omega + 1) \frac{p_0 m^*}{\pi^2 \hbar^3} R_v \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\gamma}{(\omega - sq)^2 + \gamma^2} + \frac{\gamma}{(\omega + sq)^2 + \gamma^2} \right\}, \quad (17)$$

$$\Psi_c(q, \omega) = \hbar\omega (N_\omega + 1) \frac{p_0 m^*}{\pi^2 \hbar^3} R_u \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\gamma'}{(\omega - s'q)^2 + \gamma'^2} + \frac{\gamma'}{(\omega + s'q)^2 + \gamma'^2} \right\}$$

связаны с полюсами корреляторов, в то время как функции Φ_d и Ψ_d не содержат полюсных особенностей:

$$\Phi_d(q, \omega) = \frac{\hbar\omega}{2qv_0} (N_\omega + 1) \frac{p_0 m^*}{\pi^2 \hbar^3} R_F \left(\frac{\omega}{qv_0} \right) \theta \left(1 - \frac{|\omega|}{qv_0} \right), \quad (18)$$

$$\Psi_d(q, \omega) = \frac{\hbar\omega}{2qv_0} (N_\omega + 1) \frac{p_0 m^*}{\pi^2 \hbar^3} R_G \left(\frac{\omega}{qv_0} \right) \theta \left(1 - \frac{|\omega|}{qv_0} \right).$$

Здесь введены обозначения:

$$R_v = \frac{s^2/v_0^2 - 1}{F_0(1 - s^2/v_0^2 + F_0)}, \quad R_u = \frac{s'^2/v_0^2 - 1}{G_0(1 - s'^2/v_0^2 + G_0)},$$

$$\begin{aligned} R_F(\eta) &= \left\{ (1 + F_0 w)^2 + \left(\frac{\pi}{2} \eta F_0 \right)^2 \right\}^{-1}, \quad R_G(\eta) = \left\{ (1 + G_0 w)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\pi}{2} \eta G_0 \right)^2 \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$w = 1 - \frac{1}{2} \eta \ln \left| \frac{1+\eta}{1-\eta} \right|, \quad \theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Заметим, что мы учитываем затухание γ , γ' в уравнении (17) при условии $T \gg \hbar\omega$; в этом случае $\gamma \sim T^2$. В соответствии с результатами Ландау [6], при $T \gg \hbar\omega$ следует сделать подстановку

$$\gamma \rightarrow \gamma \left\{ 1 + \left(\frac{\hbar\omega}{2\pi T} \right)^2 \right\}$$

в уравнении (18) для Φ_d и Ψ_d , являющихся плавными функциями ω , мы положим $\tau = \infty$.

7. Разделение сечений на различные составляющие

Выделение полюсных особенностей из корреляторов соответствует разделению сечения рассеяния $d\sigma_{\parallel\parallel}$ на три и сечения $d\sigma_{\perp\parallel}$ на два члена:

$$d\sigma_{\parallel\parallel} = d\sigma_{\parallel\parallel}^v + d\sigma_{\parallel\parallel}^u + d\sigma_{\parallel\parallel}^d, \quad d\sigma_{\perp\parallel} = d\sigma_{\perp\parallel}^u + d\sigma_{\perp\parallel}^d. \quad (20a)$$

Различные вклады имеют вид

$$\begin{aligned} d\sigma_{\uparrow\uparrow}^v &= \frac{2\pi |a|^2}{v_n p_0} \left(\frac{2\pi\hbar}{m'}\right)^2 \Phi_c(q, \omega) \frac{dp'_n}{(2\pi\hbar)^3}, \\ d\sigma_{\uparrow\uparrow}^\mu &= \frac{\pi |b|^2}{8v_n p_0} \left(\frac{2\pi\hbar}{m'}\right)^2 \Psi_c(q, \omega) \frac{dp'_n}{(2\pi\hbar)^3}, \\ d\sigma_{\uparrow\uparrow}^d &= \frac{2\pi}{v_n p_0} \left(\frac{2\pi\hbar}{m'}\right)^2 \left\{ |a|^2 \Phi_d(q, \omega) + \frac{|b|^2}{16} \Psi_d(q, \omega) \right\} \frac{dp'_n}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (206) \\ d\sigma_{\uparrow\downarrow}^\mu &= \frac{\pi |b|^2}{4v_n p_0} \left(\frac{2\pi\hbar}{m'}\right)^2 \Psi_c(q, \omega) \frac{dp'_n}{(2\pi\hbar)^3}, \\ d\sigma_{\downarrow\uparrow}^d &= \frac{\pi |b|^2}{4v_n p_0} \left(\frac{2\pi\hbar}{m'}\right)^2 \Psi_d(q, \omega) \frac{dp'_n}{(2\pi\hbar)^3}. \end{aligned}$$

Величины $d\sigma_{\uparrow\uparrow}^d$ и $d\sigma_{\downarrow\downarrow}^d$ являются сечениями рассеяния нейтронов с образованием пары квазичастица — дырка, т. е. с переходом из заполненной сферы Ферми $p \leq p_0$ в состояние с $p > p_0$. Этот тип нейтронного рассеяния существует также в идеальном ферми-газе и будет называться прямым рассеянием нейтрона.

Величины $d\sigma_{\uparrow\uparrow}^v$, $d\sigma_{\uparrow\downarrow}^\mu$ и $d\sigma_{\downarrow\uparrow}^\mu$ являются сечениями рассеяния нейтрона с возбуждением (или поглощением) нулевого или спинового звука (v - или μ -звук). Ниже мы увидим, что такое рассеяние является специфическим эффектом ферми-жидкости и не существует в идеальном ферми-газе.

8. Сечение возбуждения нулевого звука

Рассмотрим сначала сечение рассеяния $d\sigma_{\uparrow\uparrow}^v$. При $\gamma \rightarrow 0$ его можно представить в виде

$$d\sigma_{\uparrow\uparrow}^v = 3 \left(\frac{m^*}{m'}\right)^2 |a|^2 \omega (N_\omega + 1) \frac{v_0}{v_n} R_v \{ \delta(\omega - sq) + \delta(\omega + sq) \} \frac{dp'_n}{p_0^3} \quad (21)$$

и интерпретировать как сечение рассеяния нейтрона с излучением ($\omega > 0$) или поглощением ($\omega < 0$) одного кванта нулевого звука с частотой $\omega = sq$ и волновым вектором q . При таком рассеянии выполняются законы сохранения $E_n = E'_n \pm \hbar qs$, $p_n = p'_n \pm \hbar q$, из которых следует, что угол θ между p_n и q так же, как и угол рассеяния χ (угол между p_n и p'_n), определяется передачей энергии $\Delta E = E_n - E'_n$

$$\cos \theta = \frac{s}{v_n} + \frac{\Delta E}{2s p_n}, \quad \cos \chi = \frac{2p_n^2 - 2m\Delta E - \left(\frac{\Delta E}{s}\right)^2}{2p_n \sqrt{(p_n^2 - 2m\Delta E)}}, \quad (22)$$

где m — масса нейтрона. Другими словами, излучение нулевого звука происходит так же, как и черенковское излучение. В частности, лишь нейтроны со скоростями $v_n > s$ могут вызывать колебания нулевого звука.

Поскольку импульс кванта нулевого звука мал по сравнению с граничным импульсом ферми-жидкости и $s \approx v_0$, то нулевой звук может возбуждаться (или поглощаться) только при рассеянии нейтронов на малые углы. Если $v_n - s \approx s$, то мы имеем

$$\chi^2 = \left(\frac{\hbar q}{p_n}\right)^2 \left(1 - \frac{s^2}{v_n^2}\right),$$

и энергия, переданная в рассеянии, пропорциональна углу рассеяния: $\hbar |\omega| = sp_n \chi (1 - s^2/v_n^2)^{-1/2}$. В этом случае сечение рассеяния нейтронов в интервале углов $(\chi, \chi + d\chi)$ с излучением нулевого звука имеет вид

$$d\sigma_{\uparrow\uparrow}^v = 6\pi \left(\frac{m}{m'}\right)^2 \frac{sp_n}{v_n p_0} (N_\omega + 1) (1 - s^2/v_n^2)^{-3/2} R_v \chi^2 d\chi \quad (23)$$

(сечение рассеяния с поглощением нулевого звука может быть получено из этого выражения подстановкой $N_\omega + 1 \rightarrow N_\omega$).

Если $v_n - s \ll s$, то угол рассеяния при возбуждении нулевого звука не может превысить некоторый предел, который, как видно из уравнения (22), дается формулой

$$\chi_0 = 2 \left[\frac{2(v_n - s)}{3s} \right]^{1/2}. \quad (24)$$

В этой области скоростей v_n изменение энергии нейтрона $\hbar\omega$, как функция угла рассеяния, определяется из уравнения

$$(\hbar\omega)^2 (2p_n s - 2ms^2 - \hbar\omega) = (ms^2)^3 \chi^2. \quad (25)$$

Если $\chi < \chi_0$, то уравнение (25) имеет три корня, два из которых ($\omega_1, \omega_2 > 0$) соответствуют возбуждению и один ($\omega_3 < 0$) поглощению квантов нулевого звука.

Сечение рассеяния нейтрона в интервале углов $(\chi, \chi + d\chi)$ с возбуждением или поглощением нулевого звука частоты $|\omega_i|$ ($i = 1, 2, 3$) имеет вид

$$d\sigma_{\uparrow\uparrow}^v = 12\pi \left(\frac{m}{m'}\right)^2 \frac{ms^2}{p_0 v_0} |a|^2 R_v B_i(\chi) \chi d\chi, \quad (26)$$

где

$$B_i(\chi) = \frac{\hbar\omega_i (N_{\omega_i} + 1)}{|4p_n s - 4ms^2 - 3\hbar\omega_i|}. \quad (27)$$

Когда $\chi \ll (1 - s/v_n)^{1/2}$, то доминирует рассеяние с излучением кван-

та нулевого звука с энергией $\hbar\omega_1 = 2ms^2(1 - s/v_n)$. В этом случае $B_1(\chi) = N_{\omega_1} + 1$ и

$$d\sigma_{\parallel}^v = 12\pi \left(\frac{m}{m'}\right)^2 \frac{ms^2}{p_0 v_0} |a|^2 R_v (N_{\omega_1} + 1) \chi d\chi, \\ \hbar\omega_1 = 2ms^2(1 - s/v_n). \quad (28)$$

Когда $\chi > \chi_0$, то уравнение (25) имеет единственное решение, соответствующее поглощению нулевого звука с частотой $|\omega_3| \geq \frac{4ms^2}{\hbar}(1 - s/v_n)$. Сечение для этого процесса также дается уравнением (26) и экспоненциально мало при $T \ll \hbar|\omega_3|$.

9. Затухание нулевого звука

Согласно уравнению (26), сечение рассеяния с возбуждением нулевого звука ведет себя вблизи предельного угла χ_0 как $(\chi_0^2 - \chi^2)^{-1/2} \chi^2 d\chi$, т. е. имеет особенность. Этот вывод, так же, как и само уравнение (26), получен в пренебрежении затуханием нулевого звука. Найдем поэтому угловое распределение рассеянных нейтронов с учетом затухания нулевого звука.

Проинтегрируем общее выражение для сечения рассеяния $d\sigma_{\parallel}^v$, даваемое формулами (20) и (17), по p' . Принимая для простоты, что $ms^2(1 - s/v_n) \gg T$, мы получим для углового распределения рассеянных нейтронов выражение, отличающееся от (28) заменой множителя $B_1(\chi)$ на множитель

$$B(\chi; \gamma) = \frac{2}{3\pi} (1 - s/v_n) \int dt \frac{\xi}{[f(t, \chi)]^2 + \xi^2}, \quad (29)$$

где

$$f(t, \chi) = \sqrt{t^2 + \chi^2} - t \left(v_n/s - \frac{1}{2}t\right), \quad t = \frac{p_n - p'_n}{ms}, \quad \xi = \frac{\hbar\gamma}{ms^2}.$$

Предельный угол χ_0 дается, очевидно, соотношениями

$$f(t_0, \chi_0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} f(t, \chi_0)|_{t=t_0} = 0,$$

Если $\chi > \chi_0$, то величина $f(t, \chi)$ как функция t не исчезает, и мы имеем

$$B(\chi; \gamma) = O\left(\frac{\hbar\gamma}{ms^2\chi}\right) \ll 1.$$

Когда $\chi < \chi_0$, то функция $B(\chi; \gamma)$ отличается от $B_1(\chi)$ только в малых членах, пропорциональных γ

$$B(\chi; \gamma) \approx \frac{2}{3} (1 - s/v_n) \int_0^\infty dt \delta(f(t, \chi)) = B_1(\chi).$$

Наконец, если $\chi \approx \chi_0$, то используя разложение

$$f(t, \chi) = f_1(\chi - \chi_0) + f_2(t - t_0)^2, \\ f_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \chi}\right)_{t_0, \chi_0} = \sqrt{\frac{2}{3}(v_n/s - 1)}, \\ f_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_{t_0, \chi_0} = \frac{3}{4},$$

можно представить $B(\chi; \gamma)$ в виде

$$B(\chi; \gamma) = \frac{2}{3\pi} (1 - s/v_n) \int_0^\infty \frac{\xi dt}{[f_1(\chi - \chi_0) + f_2(t - t_0)^2]^2 + \xi^2}. \quad (29')$$

При $\chi = \chi_0$ имеем

$$B(\chi_0; \gamma) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (1 - s/v_n) \sqrt{\frac{ms^2}{\hbar\gamma}}, \\ d\sigma_{\parallel}^v = 4\pi \cdot 2^{-1/2} \left(\frac{m}{m'}\right)^2 \frac{ms^2}{p_0 v_0} |a|^2 R_v \sqrt{\frac{3ms^2}{\hbar\gamma}} \chi_0^{5/2} d\chi. \quad (30)$$

Таким образом, сечение рассеяния $d\sigma_{\parallel}^v$ как функция угла рассеяния χ достигает при $\chi = \chi_0$ максимума, который пропорционален $\gamma^{-1/2}$ и затем резко уменьшается при $\chi > \chi_0$ и становится пропорциональным γ .

10. Сечения возбуждения спинового звука

Все выводы, относящиеся к рассеянию нейтронов с возбуждением v -звука, легко можно обобщить на рассеяние нейтронов с возбуждением μ -звука. Для этой цели достаточно заметить, что общее выражение для $d\sigma_{\parallel}^v$ (см. уравнение (20)) может быть получено из общего выражения для $d\sigma_{\parallel}^v$ с помощью подстановок $|a|^2 \rightarrow \frac{1}{16}|b|^2$, $R_v \rightarrow R_\mu$, $s \rightarrow s'$, $\gamma \rightarrow \gamma'$, и что сечение $d\sigma_{\parallel}^v$ вдвое больше сечения $d\sigma_{\perp}^v$.

В частности, такая подстановка в (21) дает сечение рассеяния $d\sigma^{\mu}$ в пренебрежении затуханием μ -звука

$$d\sigma_{\parallel}^{\mu} = \frac{1}{2} d\sigma_{\perp}^{\mu} = \frac{3}{16} \left(\frac{m^*}{m'}\right)^2 |b|^2 \omega (N_\omega + 1) R_\mu \{ \delta(\omega - s'q) + \\ + \delta(\omega + s'q) \} \frac{dp'_n}{p_0^3}. \quad (31)$$

Аналогично уравнения (23), (26), (28), и (30) можно использовать для нахождения углового распределения нейтронов с возбуждением μ -звука как вдали, так и вблизи предельного угла рассеяния χ_0' (выражение для χ_0' может быть получено из (24) заменой $s \rightarrow s'$).

Как уже было показано, возбуждение ν - и μ -звука нейтронами является ферми-жидкостным эффектом, исчезающим при переходе к идеальному ферми-газу. Это легко увидеть, если заметить, что величины R_ν и R_μ исчезают при $F = G = 0$.

11. Сечения прямого рассеяния

Перейдем к прямому рассеянию нейтронов. Согласно уравнениям (20) и (18), поперечные сечения этого процесса имеют вид:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\uparrow\uparrow}^d &= \frac{3}{2} \left(\frac{m^*}{m'} \right)^2 \frac{\omega}{qv_n} (N_\omega + 1) \left\{ |a|^2 R_F \left(\frac{\omega}{qv_0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{|b|^2}{16} R_G \left(\frac{\omega}{qv_0} \right) \right\} \theta \left(1 - \frac{|\omega|}{qv_0} \right) \frac{dp'_n}{p_0^3}, \\ d\sigma_{\uparrow\downarrow}^d &= \frac{3}{2} \left(\frac{m^*}{m'} \right)^2 \frac{\omega}{qv_n} (N_\omega + 1) \frac{|b|^2}{8} R_G \left(\frac{\omega}{qv_0} \right) \theta \left(1 - \frac{|\omega|}{qv_0} \right) \frac{dp'_n}{p_0^3}, \end{aligned} \quad (32)$$

где функции R_F и R_G определены в (19).

Мы видим, что эти сечения не обращаются в нуль, пока выполнено условие $|\omega| \leq qv_0$. Отсюда следует, что при $v_n > v_0$ и фиксированном значении энергии рассеянных нейтронов E_n' (близкой к E_n) рассеяние может происходить лишь на углы $\chi \geq \chi_1(E_n')$, где

$$\chi_1(E_n') = \frac{|v_n - v_n'|}{\sqrt{v_n v_n'}} \left[\left(\frac{v_n + v_n'}{2v_0} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \quad (33)$$

При $F = G = 0$ величины $d\sigma^d$ переходят в сечения рассеяния нейтронов на идеальном ферми-газе. Действительно, эти сечения даются, очевидно, формулами

$$\begin{aligned} d\sigma_{\uparrow\uparrow} &= \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m'} \right)^2 \left(|a|^2 + \frac{|b|^2}{16} \right) \left\{ \int n_p (1 - n_{p'}) \times \right. \\ &\quad \times \delta(\varepsilon - \varepsilon' + E_n - E_n') \frac{dp'_n}{v_n p_0 (2\pi\hbar)^3}, \\ d\sigma_{\uparrow\downarrow} &= \frac{1/8 |b|^2}{|a|^2 + 1/16 |b|^2} d\sigma_{\uparrow\uparrow}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon, \varepsilon' = \varepsilon + \hbar\omega$ и $p, p' = p + \hbar q$ — энергия и импульс ядра до и после рассеяния, n_p — функция распределения Ферми для ядер. Когда $\hbar\omega \ll \zeta$, $\hbar q \ll p_0$ и $T \ll \zeta$, мы имеем отсюда

$$\begin{aligned} d\sigma_{\uparrow\uparrow} &= \frac{3}{2} \left(\frac{m^*}{m'} \right)^2 \frac{\omega}{qv_n} (N_\omega + 1) \left(|a|^2 + \frac{1}{16} |b|^2 \right) \theta \left(1 - \frac{|\omega|}{qv_0} \right) \frac{dp'_n}{p_0^3}, \\ d\sigma_{\uparrow\downarrow} &= \frac{\frac{1}{8} |b|^2}{|a|^2 + \frac{1}{16} |b|^2} d\sigma_{\uparrow\uparrow}. \end{aligned} \quad (32')$$

где m^* — масса ядра.

Сравнивая уравнения (32) и (32'), мы видим, что сечения прямого рассеяния нейтронов в ферми-жидкости с переворотом и без переворота спина отличаются от аналогичных сечений в идеальном ферми-газе той же плотности (с массой ядра m^*) на множители

$$R_{\uparrow\uparrow} = \frac{|a|^2 R_F + \frac{1}{16} |b|^2 R_G}{\frac{1}{|a|^2 + \frac{1}{16} |b|^2}}, \quad R_{\uparrow\downarrow} = R_G,$$

учитывающие корреляцию между ядрами в ферми-жидкости. При $|\omega| \ll qv_0$ эти множители не зависят от переданного импульса и равны

$$R_{\uparrow\uparrow} = \frac{|a|^2 (1 + F_0)^{-2} + \frac{1}{16} |b|^2 (1 + G_0)^{-2}}{\frac{1}{|a|^2 + \frac{1}{16} |b|^2}}, \quad R_{\uparrow\downarrow} = (1 + G_0)^{-2}.$$

Если $|\omega|/qv_0 \rightarrow 1$, т. е. $\chi \rightarrow \chi_1(E_n')$, то $R_{\uparrow\uparrow} \rightarrow 0$ и $R_{\uparrow\downarrow} \rightarrow 0$; поэтому сечения прямого рассеяния для углов, близких к $\chi_1(E_n')$, значительно меньше в ферми-жидкости, чем в идеальном газе.

12. Различие между прямым рассеянием и рассеянием с возбуждением нулевого звука

Как видно из уравнения (32), для прямого рассеяния не существует однозначной связи между передачей энергии и импульса (выполняется лишь условие $|\omega| \leq qv_0$), в противоположность рассеянию с возбуждением нулевого звука. Это обстоятельство позволяет, в принципе, сделать различие между обоими типами рассеяния.

Рассмотрим, например, угловое распределение рассеянных нейтронов с фиксированной энергией E_n' . В этом процессе нейтроны, испытавшие прямое рассеяние, летят под углами $\chi > \chi_1(E_n')$. С другой стороны, в области углов $\chi < \chi_1(E_n')$ могут двигаться лишь нейтроны, возбудившие нулевой звук, для которых угол рассеяния равен

$$\chi(E_n') = \frac{|v_n - v_n'|}{\sqrt{v_n v_n'}} \left[\left(\frac{v_n + v_n'}{2s} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (33)$$

(для простоты принято, что в ферми-жидкости может распространяться лишь один тип звука).

Сравним теперь сечение для прямого рассеяния нейтронов, проинтегрированное по всем p'_n , с сечением рассеяния с возбуждением нулевого звука. Рассмотрим малые углы рассеяния $\chi \ll 1$ и при-

мем, что $v_n - v_0 \geq v_0$. Для оценки $d\sigma^d$ используем тот факт, что эта величина отличается от сечения рассеяния в идеальном газе на множитель порядка единицы.

Если $v_n - v_0 \approx v_0$, то сечение прямого рассеяния, проинтегрированное по всем p_n , имеет ту же угловую зависимость $\chi d\chi$, что и сечение $d\sigma^s$, определяемое соотношением (26). При $\chi \approx \chi_0$ оба сечения равны по порядку величины. Когда $\chi \gg \chi_0$, сечение рассеяния с возбуждением нулевого звука много больше сечения прямого рассеяния.

Если $v_n \gg v_0$, то сечение прямого рассеяния, проинтегрированное по импульсу рассеянного нейтрона, пропорционально $\chi^2 d\chi$, т. е. имеет ту же угловую зависимость, что и сечение рассеяния с возбуждением нулевого звука в этой области v_n (см. уравнение (23)); оба сечения одного порядка величины.

13. Деполяризация нейтронов

Рассмотрим деполяризацию нейтронов при рассеянии. Если угол рассеяния χ превышает $\chi_1(E'_n)$, то, как мы видели выше, происходит прямое рассеяние; в этом случае коэффициент деполяризации

$$d(E'_n, \chi) = \frac{d\sigma_{\perp\perp}/d^3 p'_n}{(d\sigma_{\parallel\parallel} + d\sigma_{\perp\perp})/d^3 p'_n}$$

отличается от коэффициента деполяризации в идеальном газе $d_0 = 2|b|^2 \{16|a|^2 + 3|b|^2\}^{-1}$ только на множитель порядка единицы (зависящий от E'_n и χ).

Когда $\chi < \chi_1(E'_n)$, возможно лишь рассеяние нейтронов с возбуждением ν - или μ -звука, причем $d = 0$ в первом случае и $d = \frac{2}{3}$ в последнем.

Коэффициент деполяризации нейтронов, рассеянных на определенный угол

$$D(\chi) = \frac{d\sigma_{\perp\perp}/d\chi}{(d\sigma_{\parallel\parallel} + d\sigma_{\perp\perp})/d\chi}$$

для углов χ , не близких к предельным углам рассеяния χ_0, χ_0' , отличается от величины d_0 на множитель порядка единицы (являющийся плавной функцией χ). Если $\chi \approx \chi_0$, то $D = 0$; когда $\chi \approx \chi_0'$, то $D = \frac{2}{3}$.

14. Отражение от поверхности ферми-жидкости

Наконец, рассмотрим отражение нейтронов от поверхности ферми-жидкости. Так же, как и сечение рассеяния, коэффициент отражения можно связать с корреляционными функциями для плотности ядер ферми-жидкости и плотности их спинов Φ, Ψ .

Чтобы определить коэффициент отражения нейтронов от ферми-жидкости (будем предполагать, что она заполняет полупространство $z > 0$), необходимо найти волновую функцию нейтрона, удовлетворяющую, очевидно, уравнению

$$\left\{ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \theta(z) \mathcal{H} \right\} \psi(r, t) = 0,$$

где \mathcal{H} — гамильтониан взаимодействия нейтронов с ядрами ферми-жидкости. Функция ψ должна удовлетворять следующим граничным условиям: при $z = -\infty$ она сводится к сумме падающей волны $c \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(pr - Et)\right\}$ (где c — единичная спинорная амплитуда и $p_z > 0$) и отраженных волн; при $z = +\infty$ исчезает.

Подставляя величину \mathcal{H} в форме $\mathcal{H} = V + \delta\mathcal{H}$, где

$$V \equiv \langle \mathcal{H} \rangle = -\frac{2\pi\hbar^2}{m'} a\rho_0, \quad \delta\mathcal{H} = -\frac{2\pi\hbar^2}{m'} (a\delta\rho + b\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\kappa}), \quad (34)$$

будем искать волновую функцию нейтрона в виде ряда по степеням $\delta\mathcal{H}$: $\psi = \psi_0 + \delta\psi + \dots$. Для функции ψ_0 получаем

$$\begin{aligned} \psi_0(r, t) = & \\ = & \begin{cases} c \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(p \cdot r - Et)\right\} + c_1 \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(p_t \cdot \rho - p_z z - Et)\right\} & \text{при } z < 0, \\ c_2 \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(p_t \cdot \rho + gz - Et)\right\} & \text{при } z > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

где ρ и p_t — компоненты векторов r и p , параллельные поверхности жидкости,

$$g = \sqrt{p_z^2 - 2mV} (\operatorname{Im} g > 0) \text{ и } c_1 = (p_z - g)/(p_z + g), c_2 = 2p_z/(p_z + g).$$

Поскольку функция $\delta\psi$ удовлетворяет уравнению

$$\left\{ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \theta(z) V \right\} \delta\psi(r, t) = -\delta\mathcal{H}(r, t) \psi_0(r, t), \quad (35)$$

то ясно, что при $z < 0$ она является суперпозицией отраженных плоских волн

$$\delta\psi(r, t) = \int \eta(p'_t, E') \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(p' \cdot r - E't)\right\} \frac{dp'_t dE'}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (36)$$

где $p'_z = -\sqrt{2mE' - p'^2}$.

Чтобы найти $\delta\psi$ при $z > 0$, применим к уравнению (35) преобразование Фурье по переменным ρ и t и преобразование Лапласа

по переменной z . Вводя обозначение

$$\varphi(\mathbf{p}'_t, E'; w) = \int d\mathbf{p} dt \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}'_t \mathbf{p} - E' t) \right\} \int_0^\infty dz \exp \left(-\frac{wz}{\hbar} \right) \delta\psi(\mathbf{r}, t),$$

получаем

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{p}'_t, E'; w) &= (g'^2 + w^2)^{-1} \{ \hbar(w + i p'_z) \eta(\mathbf{p}'_t, E') + \\ &+ 2m\delta\mathcal{H}(\mathbf{p}'_t - \mathbf{p}_t, E' - E; w - ig) c_2 \}, \end{aligned} \quad (37)$$

где $\delta\mathcal{H}(\mathbf{p}_t, E; w)$ — преобразование Фурье — Лапласа от функции

$$\delta\mathcal{H}(\mathbf{r}, t) \text{ и } g' = \sqrt{p_z'^2 - 2mV} (\operatorname{Im} g' > 0).$$

Амплитуда отраженной волны η может быть найдена из условия $\delta\psi = 0$ при $z = +\infty$. Действительно, из этого условия следует, что функция $\varphi(w) \equiv \varphi(\mathbf{p}_t, E'; w)$ не может иметь полюсов при $\operatorname{Re} w > 0$. Поэтому выражение, стоящее в скобках в уравнении (37), должно обращаться в нуль при $w = -ig'$

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{p}'_t, E') &= -\frac{2m}{\hbar} \frac{\delta\mathcal{H}(\mathbf{p}'_t - \mathbf{p}_t, E' - E; w - ig) c_2}{w + i p'_z} \Big|_{w=-ig'} = \\ &= \frac{-2im}{\hbar(g' - p'_z)} \int dr dt \theta(z) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [(g + g')z - \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{p}'_t - \mathbf{p}_t) \mathbf{p} + (E' - E)t] \right\} \delta\mathcal{H}(\mathbf{r}, t) c_2. \end{aligned} \quad (38)$$

Это соотношение, в комбинации с уравнениями (36) и (34), выражает волновую функцию отраженных нейтронов через флуктуации $\delta\psi$ и \mathbf{x} .

15. Коэффициент отражения

Поскольку теперь мы знаем волновую функцию ψ при $z < 0$, следует найти поток отраженных нейтронов, усреднить его по флуктуациям ферми-жидкости и найти коэффициент отражения, т. е. отношение потока отраженных частиц к потоку падающих.

Если бы флуктуации в ферми-жидкости отсутствовали, то $\delta\psi$ исчезало бы и существовало бы только упругое отражение нейтронов от поверхности $E' = E$, $\mathbf{p}'_t = \mathbf{p}_t$, $p'_z = -p_z$, $\sigma' = \sigma$ с коэффициентом отражения, равным $A^0 = |p_z - g|^2 / |p_z + g|^2$. Благодаря флуктуациям ферми-жидкости $\delta\psi \neq 0$, поэтому коэффициент отражения содержит также дополнительный член

$$\delta A = \frac{i\hbar}{2p_z} \operatorname{Sp} \left\langle \delta\psi^* \frac{\partial}{\partial z} \delta\psi - \delta\psi \frac{\partial}{\partial z} \delta\psi^* \right\rangle.$$

Используя уравнения (34), (36) и (38), представим коэффициент отражения нейтронов в форме

$$A = A^0 + \delta A = \int (dA_{\uparrow\uparrow} + dA_{\uparrow\downarrow}),$$

где

$$\begin{aligned} dA_{\uparrow\uparrow} &= \left(\frac{2\pi\hbar}{m'} \right)^2 \theta(-p_z') \frac{f(p_z, p'_z)}{v_z} \int_0^\infty dz e^{-Z/l_c} \int d\mathbf{p} dt \times \\ &\times \int_{-2Z}^{2Z} dz e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} + i\omega t} \left\{ |a|^2 \langle \delta\psi(r_1, t_1) \delta\psi(r_2, t_2) \rangle + \frac{1}{48} |b|^2 \times \right. \\ &\times \left. \langle \mathbf{x}(r_1, t_1) \mathbf{x}(r_2, t_2) \rangle \right\} \frac{dp'}{(2\pi\hbar)^3} + A^0 \delta(\mathbf{p}'_t - \mathbf{p}_t) \delta(p_z' + p_z) dp' \cdot \\ dA_{\uparrow\downarrow} &= \left(\frac{2\pi\hbar}{m'} \right)^2 \theta(-p_z') \frac{f(p_z, p'_z)}{v_z} \int_0^\infty dz e^{-Z/l_c} \int d\mathbf{p} dt \times \\ &\times \int_{-2Z}^{2Z} dz e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} + i\omega t} \frac{1}{24} |b|^2 \langle \mathbf{x}(r_1, t_1) \cdot \mathbf{x}(r_2, t_2) \rangle \frac{dp'}{(2\pi\hbar)^3}. \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь имеем

$$f(p_z, p'_z) = \left| \frac{2p_z}{p_z + g} \right|^2 \left| \frac{2p'_z}{p'_z - g} \right|^2,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, & Z &= \frac{1}{2}(z_1 + z_2), & \hbar\mathbf{q}_t &= \mathbf{p}'_t - \mathbf{p}_t, \\ \hbar q_z &= -\operatorname{Re}(g + g'), & \hbar\omega &= E' - E, & l_c^{-1} &= \frac{2}{\hbar} \operatorname{Im}(g + g'). \end{aligned}$$

Мы учли, что коррелятор $\langle \delta\mathcal{H}(\mathbf{r}_1, t_1) \delta\mathcal{H}^+(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle$ зависит от переменных \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 и t_1 , t_2 только в комбинациях $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $t_1 - t_2$.

Величины $dA_{\uparrow\uparrow}$, $dA_{\uparrow\downarrow}$, характеризующие потоки отраженных нейтронов с импульсом \mathbf{p}' без переворота и с переворотом спина, могут быть названы дифференциальными коэффициентами отражения.

Как мы видим, они определяются корреляторами флуктуаций плотности ядер ферми-жидкости и их спинов. Эти последние должны быть определены, вообще говоря, с учетом границы ферми-жидкости. Если, однако, рассмотреть длинноволновые флуктуации, для которых $1/q \gg d$, где $d \approx \frac{\hbar}{p^6}$ есть среднее расстояние между ядрами ферми-жидкости, то можно, очевидно, пренебречь граничным эффектом и вычислять корреляторы так, как если бы ферми-жидкость заполняла все пространство. В этом случае, которым мы только и будем интересоваться, корреляторы даются уравнениями (5) и (15).

Если $l_c \gg \frac{1}{q_z}$, то пределы интегрирования по z в уравнении (39) можно заменить на $-\infty$ и ∞ . В итоге получаем следующее окон-

чательное выражение для дифференциальных коэффициентов отражения нейтронов от поверхности ферми-жидкости:

$$dA_{\text{II}} = \frac{l_c f(p_z, p'_z)}{\hbar v_z (m')^2} \left\{ |a|^2 \Phi(q, \omega) + \frac{1}{16} |b|^2 \Psi(q, \omega) \right\} \theta(-p'_z) d\mathbf{p}' + \\ + \{ A^0 \delta(\mathbf{p}'_t - \mathbf{p}_t) \delta(p'_z + p_z) d\mathbf{p}' \}, \quad (40)$$
$$dA_{\text{II}} = \frac{l_c f(p_z, p'_z)}{\hbar v_z (m')^2} \frac{1}{8} |b|^2 \Psi(q, \omega) \theta(-p'_z) d\mathbf{p}'.$$

Мы видим, что коэффициенты отражения имеют ту же структуру, что и сечения рассеяния. В частности, полюса функций Φ и Ψ соответствуют острым максимумам коэффициентов отражения, обусловленным возбуждению нулевого звука нейtronами. Поскольку для возбуждения нулевого звука должны выполняться неравенства $v_n > s, s'$ и $\hbar q \ll p_0$, максимумы в отражении существуют лишь при скользящем падении нейтронов ($p_z \ll p$; $p'_z \ll p$).

16. Применения

Теория, развитая выше, может быть применена к изучению рассеяния нейтронов в жидком Не³. Скорость нулевого звука (v -звук) в нем составляет, согласно Ландау, 192 м/сек (μ -звук, по-видимому, [8] не может распространяться в жидком Не³).

К сожалению, в жидком Не³ велико поглощение медленных нейтронов. При энергии порядка 1° К сечение радиационного захвата нейтронов в Не³ составляет $\sigma_c \approx 10^6$ б, в то время, как сечение рассеяния только $\sigma_0 \approx 1$ б. Поэтому на каждый акт рассеяния будет приходиться очень большое число захватов нейтронов, что приведет к сильному поглощению нейтронной волны. Так как длина пробега нейтрона по отношению к захвату равна $(\rho_0 \sigma_c)^{-1} \approx 10^{-3}$ см, то рассеяние нейтронов будет происходить только в поверхностном слое Не³, эффективная толщина которого составляет 10^{-3} см. Кроме того, следует иметь в виду, что жидкий Не³ будет разогреваться за счет энергии ядерных реакций, обусловленных захватом нейтронов (эта энергия составляет $50 \cdot 10^4$ эв на один захват нейтрона, что соответствует нагреву 10^{15} ядер Не³ на 1° К на один акт рассеяния). Все это затрудняет проведение экспериментов по рассеянию медленных нейтронов в жидком Не³.

Эксперименты по отражению нейтронов от поверхности жидкого гелия, возможно, окажутся более плодотворными для изучения нулевого звука¹ в Не³. Коэффициент отражения при

скользящем падении нейтронов должен иметь, как было показано выше, максимумы, соответствующие возбуждению нулевого звука нейтронами.

Авторы хотели бы выразить благодарность Л. Д. Ландау, С. В. Пелетминскому и Л. П. Питаевскому за стимулирующие обсуждения.

Физико-технический институт

Академии наук

Украинской ССР

Институт теоретической

и экспериментальной физики

Академии наук СССР

Получено 1 апреля 1962 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 1961, 41, 478 (Собр. трудов, № 23).
2. L. Van Hove. Phys. Rev., 1954, 95, 249.
3. Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 1956, 30, 1058.
4. А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ЖЭТФ, 1958, 34, 198.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Либшиц. Электродинамика сплошных сред. М., Гос. техиздат, 1957.
6. Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 1957, 32, 59.
7. И. М. Халатников, А. А. Абрикосов. ЖЭТФ, 1957, 33, 1154.
8. А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. УФН, 1958, 66, 177.

Это соображение было независимо высказано Ф. Л. Шапиро.

РАССЕЯНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ НЕЙТРОНОВ.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

25

О РАССЕЯНИИ МЕДЛЕННЫХ НЕЙТРОНОВ В КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ *

Определяется вероятность упругого и неупругого рассеяния медленных нейтронов в кристаллической решетке. При $k\theta \gg E \gg kT$ (E — энергия нейтронов, θ — дебаевская температура решетки) захват нейтронов становится значительно больше, чем неупругое рассеяние, и поэтому не может установиться тепловое равновесие между нейтронами и решеткой.

Рассеяние и замедление нейтронов свободными ядрами были подробно рассмотрены Ферми [1]. Полученные им результаты могут быть применены к рассеянию нейтронов в кристаллической решетке только в том случае, когда энергия нейтронов велика по сравнению с энергией связи ядер в решетке. Если это условие не соблюдено, то необходимо учесть связь ядер в решетке. Целью настоящей работы является изучение рассеяния и замедления медленных нейтронов связанными ядрами. Этот вопрос был недавно рассмотрен Виком [2,3]. Вик, однако, не учитывает наличие изотопов, а также влияние механических моментов ядер. Полученные нами результаты будут содержать, как частный случай, результаты работы Вика.

В дальнейшем мы будем считать, что энергия нейтронов недостаточна для возбуждения ядер. Это дает возможность пользоваться упрощенной формой взаимодействия между ядрами и нейтронами.

* ЖЭТФ, 1937, 8, 894; Phys. Zs. Sowjet., 1938, 13, 65.

1. Энергия взаимодействия

Несмотря на то что взаимодействие между нейроном и ядром велико, при рассмотрении упругого рассеяния медленных нейтронов ядрами можно, как показали Плачек и Теллер, пользоваться методами теории возмущений, беря энергию взаимодействия в виде δ -функции от расстояния между нейроном и ядром

$$V = \alpha \delta(r), \quad (1.1)$$

где α — коэффициент, не зависящий от r .

Когда у ядра есть механический момент, то при рассеянии направление спина нейтрона может измениться на обратное. Это изменение связано с поворотом момента ядра в соответствии с законом сохранения момента количества движения. Отсюда следует, что коэффициент α состоит из двух членов: постоянной A , не зависящей от спина нейтрона и момента ядра, и члена, учитывающего возможность изменения направления спина, который, очевидно, должен содержать спиновые матрицы нейтрона и матрицы момента ядра. Так как спин нейтрона равен $1/2$, то квадрат его спиновых матриц равен единичной матрице. Поэтому энергия взаимодействия может содержать спиновые матрицы нейтрона только линейно. Отсюда следует, что α имеет вид

$$\alpha = AI + B(KS) = AI + B(K_x S_x + K_y S_y + K_z S_z). \quad (1.2)$$

Здесь B постоянная, K_x , K_y , K_z — матрицы момента ядра, $A S_x$, S_y , S_z с точностью до постоянной равны матрицам Паули:

$$S_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

I — единичная матрица.

K_x , K_y , K_z имеют следующие, отличные от нуля, матричные элементы:

$$(K_z)_{mm} = m, \\ (K_x + iK_y)_{m+1, m} = (K_x - iK_y)_{m, m+1} = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}, \quad (1.4)$$

где m — магнитное квантовое число ядра, j — квантовое число, определяющее момент ядра.

В (1.2) за переходы без изменения направления спина отвечают члены:

$$AI + BK_z S_z;$$

за переходы с изменением направления спина соответственно:

$$BK_x S_x + BK_y S_y.$$

Постоянные A и B , входящие в (1.2), связаны с эффективным поперечником упругого рассеяния нейтронов отдельными ядрами

σ_e следующим легко выводимым соотношением:

$$\sigma_e = \frac{A^2 + 1/4j(j+1)B^2}{\pi\hbar^4} \left(\frac{mM}{m+M} \right)^2, \quad (1.5)$$

где M — масса ядра, m — масса нейтрона.

Заметим, что из условия эрмитовости для оператора Гамильтона следует, что A и B — вещественные числа. Полная энергия взаимодействия нейтрона с кристаллической решеткой получается суммированием (1.2) по всем ядрам решетки:

$$\sum_l [A_l I + B_l (K_l S)] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l). \quad (1.6)$$

Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор нейтрона, \mathbf{R}_l — радиус-вектор l -го ядра.

В заключение следует указать, что A и B могут рассматриваться как постоянные только при рассмотрении рассеяния достаточно медленных нейтронов. Интервал нейтронных энергий, для которых A и B сильно меняются от элемента к элементу, нами не учтен.

В частности при рассмотрении рассеяния нейтронов протонаами A и B являются постоянными вплоть до энергий нейтронов в несколько десятков тысяч электрон-вольт. (Энергия 1S уровня дейтерона равна 120 000 эв.)

В дальнейшем мы всюду будем считать, что рассматриваемые нами нейтроны обладают такими скоростями, что для них предположение о постоянстве A и B является законным.

2. Матричный элемент перехода

Будем рассматривать нейtron и кристаллическую решетку как одну квантово-механическую систему. Ее состояние характеризуется заданием следующих величин: импульса нейтрона \mathbf{p} , его спинового магнитного квантового числа μ , магнитных квантовых чисел всех ядер решетки m_n , квантовых чисел n_i всех осцилляторов, описывающих тепловые колебания решетки.

Рассеяние нейтрона можно представить как переход системы из состояния $\mathbf{p}\mu n_1 \dots n_s \dots m_1 \dots m_l \dots$

в состояние $\mathbf{p}'\mu' n'_1 \dots n'_s \dots m'_1 \dots m'_l \dots$

Волновая функция рассматриваемой нами системы имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{R}_l^0)} \chi_\mu \prod_i \Phi_{n_i}^* \prod_l \Phi_{m_l}, \quad (2.1)$$

где Ω — объем, в котором заключена система, Φ_{n_l} — волновая функция i -го осциллятора, Φ_{m_l} — волновая функция l -го ядра решетки, зависящая от его внутренних координат (из квантовых чисел, описывающих состояние l -го ядра, мы пишем только магнитное m_l , так как все остальные квантовые числа при рассеянии

не изменяются), χ_μ — спиновая функция нейтрона, представляющая собой матрицу с 1 колонкой и 2 строкками:

$$\chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sum_\sigma \chi_\mu^\sigma \chi_\mu^{\sigma*} = 1, \quad \sum_\sigma \chi_{1/2}^\sigma \chi_{-1/2}^{\sigma*} = 0. \quad (2.2)$$

Пользуясь (1.3), легко доказать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} S_x \chi_{1/2} &= \frac{1}{2} \chi_{-1/2}, & S_x \chi_{-1/2} &= \frac{1}{2} \chi_{1/2}, \\ S_y \chi_{1/2} &= \frac{i}{2} \chi_{-1/2}, & S_y \chi_{-1/2} &= -\frac{i}{2} \chi_{1/2}, \\ S_z \chi_{1/2} &= \frac{1}{2} \chi_{1/2}, & S_z \chi_{-1/2} &= -\frac{1}{2} \chi_{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Матричный элемент перехода в соответствии с (1.6) и (2.1) равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega} \sum_l \sum_\sigma \iiint \chi_\mu^{\sigma*} \prod_n \Phi_{m_n}^* \prod_i \Phi_{n_i}^* e^{-\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}, t)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l) [A_l I + \\ + B_l (K_l S)] e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}, t)} \prod_i \Phi_{n_i} \prod_n \Phi_{m_n} \chi_\mu^\sigma d\tau_r d\tau_l \prod_n d\tau_n. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Значок * означает комплексно-сопряженную величину; $d\tau_r$ — есть произведение дифференциалов нейтронных координат; в $d\tau$ решетки; в $d\tau_n$ — дифференциалы внутренних переменных n -го ядра решетки. Уничтожая δ -функцию интегрированием по $d\tau_r$, и подставляя вместо $\mathbf{R}_l \mathbf{R}_l^0 + \mathbf{U}_l$, где \mathbf{R}_l^0 — положение равновесия l -го ядра, \mathbf{U}_l — его смещение из положения равновесия, вызванное тепловыми колебаниями решетки, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{R}_l^0)} \sum_\sigma \chi_\mu^{\sigma*} \prod_n \Phi_{m_n}^* [A_l I + B_l (K_l S)] \prod_n \Phi_{m_n} \prod_i d\tau_n \chi_\mu^\sigma \times \\ \times \int \prod_i \Phi_{n_i}^* e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{U}_l)} \prod_i \Phi_{n_i} d\tau_l e^{\frac{i}{\hbar} (E_p - E_{p'}) t}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Рассмотрим теперь рассеяние, при котором направление спина не меняется. Тогда, согласно (1.4), (2.2) и (2.3), мы имеем следующее выражение для матричного элемента перехода:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{R}_l^0)} \left(A_l \pm \frac{m_l}{2} B_l \right) \times \\ \times \int \prod_i \Phi_{n_i}^* e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{U}_l)} \prod_i \Phi_{n_i} d\tau_l e^{\frac{i}{\hbar} (E_p - E_{p'}) t}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь знак плюс будет в том случае, когда $\mu = \frac{1}{2}$, знак минус, когда $\mu = -\frac{1}{2}$.

При переходах с изменением направления спина матричный элемент неравен нулю, только тогда, когда все $m'_l = m_l$, за исключением одного (m_l), для которого $m_l = m_l \pm 1$. При этом согласно (2.2) и (2.3) мы имеем

$$\frac{1}{\Omega} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{R}_l^0} \frac{B_l}{2} \sqrt{j_l(j_l + 1) - m'_l(m'_l \pm 1)} \times \\ \times \int \prod_i \Phi_{n'_i}^* e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{U}_l} \prod_i \Phi_{n'_i} d\tau \frac{i}{\hbar} (E_p - E_{p'}) t. \quad (2.7)$$

Знак плюс относится к тому случаю, когда $\mu' = \frac{1}{2}$, знак минус, когда $\mu' = -\frac{1}{2}$.

3. Упругое рассеяние

Мы применим теперь формулы (2.6) и (2.7) к рассмотрению упругого рассеяния нейтронов с длиной волны λ большей, чем постоянная решетки d . Нашему условию удовлетворяют нейтроны, энергия которых меньше, чем

$$\hbar^2/2md^2. \quad (3.1)$$

В соответствии с (3.1) мы можем воспользоваться следующим разложением

$$e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{U}_l} = 1 + \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{U}_l \quad (3.2)$$

(легко видеть, что $\left| \frac{\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{U}_l}{\hbar} \right| \sim 2\pi \frac{U}{\lambda} < 1 \right).$

Так как при упругом рассеянии состояние колебаний решетки не меняется (все $n'_i = n_i$), достаточно в (3.2) ограничиться первым членом. Второй член в (3.2) ответствен за неупругое рассеяние.

Подставляя в (2.6) и (2.7) вместо $e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{U}_l}$ единицу, мы имеем:

$$\frac{1}{\Omega} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{R}_l^0} \left(A_l \pm \frac{m_l}{2} B_l \right) e^{\frac{i}{\hbar} (E_p - E_{p'}) t}, \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{\Omega} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{R}_l^0} \frac{B_l}{2} \sqrt{j_l(j_l + 1) - m'_l(m'_l \pm 1)} e^{\frac{i}{\hbar} (E_p - E_{p'}) t}. \quad (2.7)$$

Вероятность упругого рассеяния нейтрона на данный угол будет: при неизменном направлении спина

$$dW_1 = \frac{mp dO_{p'}}{4\pi^2 \hbar^4 \Omega} \left| \sum_l \left(A_l \pm \frac{m_l}{2} B_l \right) e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{R}_l^0} \right|^2, \quad (3.3)$$

при изменении направления спина

$$dW_2 = \frac{mp dO_{p'}}{4\pi^2 \hbar^4 \Omega} \sum_l \frac{1}{4} B_l^2 [j_l(j_l + 1) - m'_l(m'_l \pm 1)], \quad (3.4)$$

где $dO_{p'}$ — элемент телесного угла рассеянного нейтрона. В (3.4) написана вероятность рассеяния, полученная из (2.7) и просуммированная затем по всем ядрам решетки.

Усредняя (3.3) и (3.4) по всем значениям магнитных квантовых чисел m_l , мы находим с помощью хорошо известной формулы:

$$\sum_{-j_l}^{j_l} m_l^2 = \frac{1}{3} j_l(j_l + 1)(2j_l + 1)$$

следующие выражения для вероятностей:

$$\overline{dW_1} = \frac{mp dO_{p'}}{4\pi^2 \hbar^4 \Omega} \left\{ \left| \sum_l A_l e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{R}_l^0} \right|^2 + \frac{1}{4} \sum_l \frac{B_l^2}{3} j_l(j_l + 1) \right\}, \quad (3.5)$$

$$\overline{dW_2} = \frac{mp dO_{p'}}{4\pi^2 \hbar^4 \Omega} \frac{1}{4} \sum_l \frac{2}{3} j_l(j_l + 1) B_l^2. \quad (3.6)$$

Величины $\overline{dW_1}$ и $\overline{dW_2}$ необходимо далее усреднить по всем возможным распределениям изотопов в решетке (каждый изотоп характеризуется своими коэффициентами A и B). При таком усреднении $\sum_l B_l^2 j_l(j_l + 1)$ не изменится, и нам остается только найти среднее значение от

$$\left| \sum_l A_l e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{R}_l^0} \right|^2.$$

Это выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\left| \sum_l (A_l - \bar{A}) e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{R}_l^0} + \bar{A} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{R}_l^0} \right|^2 = \left| \sum_l (A_l - \bar{A}) e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{R}_l^0} \right|^2 + \\ + \bar{A} \sum_{l'} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{R}_{l'}^0} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{R}_l^0} (A_l - \bar{A}) + \\ + \bar{A} \sum_{l'} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{R}_{l'}^0} \sum_l e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{R}_l^0} (A_l - \bar{A}) + \\ + \bar{A}^2 \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{R}_l^0} \right|^2. \quad (3.7)$$

Здесь $\bar{A} = \sum C_s A_s$ — среднее значение A , C_s — концентрация ядер с s -м значением постоянной A . При усреднении (3.7)

вторая и третья суммы дают нуль, например,

$$\begin{aligned} & \overline{A \sum_{l'} e^{-\frac{i}{\hbar} p' - p, R_l^0} \sum_l (A_l - \bar{A}) e^{\frac{i}{\hbar} p' - p, R_l^0}} = \\ & = \bar{A} \sum_{l'} e^{-\frac{i}{\hbar} p' - p, R_l^0} \overline{\sum_l (A_l - \bar{A}) e^{\frac{i}{\hbar} p' - p, R_l^0}} = 0. \end{aligned}$$

Среднее значение от первой суммы будет

$$\sum_l \sum_{l'} \overline{(A_l - \bar{A})(A_{l'} - \bar{A})} e^{\frac{i}{\hbar} p' - p, R_l^0 - R_{l'}^0}.$$

Здесь недиагональные члены равны нулю:

$$\overline{(A_l - \bar{A})(A_{l'} - \bar{A})} = \overline{A_l A_{l'}} - \bar{A} \bar{A}_l - \bar{A} \bar{A}_{l'} + \bar{A}^2 = 0.$$

Заметим, что

$$\overline{A_l A_{l'}} = \sum_{ss'} C_s A_s C_{s'} A_{s'} = \overline{A^2}.$$

Что касается диагональных членов, то каждый из них равен

$$\overline{A_l^2} - \bar{A}^2 = \sum_s C_s A_s^2 - \left(\sum_s C_s A_s \right)^2.$$

Подставляя это в (3.7), находим

$$\left| \sum_l A_l e^{\frac{i}{\hbar} p' - p, R_l^0} \right|^2 = \{N \overline{A^2} - N \bar{A}^2\} + \bar{A}^2 \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} p' - p, R_l^0} \right|^2.$$

Здесь во втором члене можно произвести суммирование сперва по всем ядрам, входящим в состав одной элементарной ячейки, а затем суммировать по всем ячейкам:

$$\bar{A}^2 \left| \sum_v e^{\frac{i}{\hbar} p' - p, R_v^0} \right|^2 \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} p' - p, R_l^0} \right|^2. \quad (3.8)$$

Теперь R_l^0 есть радиус-вектор какой-то определенной точки внутри элементарной ячейки, R_v^0 — радиус-вектор ядра по отношению к этой точке. Сумма по v распространяется по всем ядрам, входящим в состав 1 элементарной ячейки.

Вторая сумма, входящая в (3.8), может быть переписана так:

$$\left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p)_x x_l^0} \right|^2 \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p)_y y_l^0} \right|^2 \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p)_z z_l^0} \right|^2 \quad (3.9)$$

Очевидно, что все три множителя в (3.9) подобны друг другу; поэтому мы вычислим только сумму с x -овыми компонентами. Введем для упрощения обозначения

$$\frac{(p' - p)_x}{\hbar} = q_x, \quad \frac{(p' - p)_y}{\hbar} = q_y, \quad \frac{(p' - p)_z}{\hbar} = q_z$$

и воспользуемся формулами ¹:

$$x_l^0 = n_1 d_1, \quad y_l^0 = n_2 d_2, \quad z_l^0 = n_3 d_3,$$

где n_1, n_2, n_3 — целые положительные числа, $(1 + n_{\max})^3 = N_2$. N_2 — общее число элементарных ячеек в решетке. Первый множитель в (3.9) можно записать так:

$$\left| \sum_{n=0}^{n_{\max}} e^{iq_x d_1 n} \right|^2 = \left| \frac{1 - e^{i(1+n_{\max}) d_1 q_x}}{1 - e^{iq_x d_1}} \right|^2 = \frac{\sin^2 \frac{(n_{\max} + 1) d_1 q_x}{2}}{\sin^2 \frac{d_1 q_x}{2}}. \quad (3.10)$$

(3.10) имеет острый максимум для q_x , удовлетворяющих условию:

$$q_x = 2\pi m_1 / d_1, \quad (3.11)$$

где m_1 — целое число. Для q_y и q_z действуют аналогичные условия. Отсюда видно, что вторая сумма в (3.8) соответствует переходам типа пайерловских процессов переброса.

Так как (3.10) ведет себя подобно δ -функции, удобно преобразовать его к виду, содержащему δ -функцию. (3.10) велико только для таких значений аргумента, при которых $\sin q_x d_1 / 2$ мал. Эти значения даны в (3.11). Поэтому для любой, не обращающейся в бесконечность, функции имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \int_{c_1}^{c_2} f(q_x) \frac{\sin^2 \frac{(1 + n_{\max}) q_x d_1}{2}}{\sin^2 \frac{q_x d_1}{2}} dq_x = \\ & = \sum_m f\left(\frac{2\pi m_k}{d_1}\right) \int_{\frac{2\pi m_k}{d_1} - \varepsilon}^{\frac{2\pi m_k}{d_1} + \varepsilon} \frac{\sin^2 \frac{(1 + n_{\max}) q_x d_1}{2}}{\sin^2 \frac{d_x d_1}{2}} dq_x, \quad (3.12) \end{aligned}$$

где ε — малая величина.

В (3.12) суммирование распространяется по всем m_k , для которых выполнено неравенство

$$c_1 < \frac{2\pi m_k}{d_1} < c_2.$$

¹ Эти формулы справедливы только для определенного вида решеток. Мы можем, однако, воспользоваться ими, так как значение интересующей нас суммы не зависит от типа решетки.

Для вычисления интеграла, входящего в (3.12), сделаем замену переменных: $q_x = 2\pi m_k/d_1 + \eta$, что дает

$$\int_{\frac{2\pi m}{d_1} - \varepsilon}^{\frac{2\pi m}{d_1} + \varepsilon} \frac{\sin^2 \frac{q_x d_1 (n_{\max} + 1)}{2}}{\sin^2 (q_x d_1)/2} dq_x = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\sin^2 \frac{(n_{\max} + 1) \eta d_1}{2}}{\sin^2 (\eta d_1)/2} d\eta.$$

Так как $d_1 \varepsilon \ll 1$, можно $\sin (d_1 \eta)/2$ заменить на $d_1 \eta/2$ и в получном интеграле пределы распространить до бесконечности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{(n_{\max} + 1) \eta d_1}{2}}{\sin^2 (d_1 \eta)/2} d\eta = 2\pi \frac{(n_{\max} + 1)}{d_1}.$$

Подставим это в (3.12)

$$\int_{c_1}^{c_2} f(q_x) \frac{\sin^2 \frac{(n_{\max} + 1) q_x d_1}{2}}{\sin^2 \frac{q_x d_1}{2}} dq_x = \sum_m f\left(\frac{i2\pi m_k}{d_1}\right) 2\pi \left(\frac{n_{\max} + 1}{d_1}\right).$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{\sin^2 \frac{(n_{\max} + 1) q_x d_1}{2}}{\sin^2 (q_x d_1)/2} = \delta\left(q_x - \frac{2\pi m_k}{d_1}\right) \frac{2\pi}{d_1} (n_{\max} + 1). \quad (3.13)$$

С помощью (3.13) и (3.8), (3.5) мы можем записать следующее окончательное выражение для вероятности упругого рассеяния на данный угол:

$$\overline{dW} = \overline{dW}_1 + \overline{dW}_2 = \frac{mp\varrho}{4\pi^2\hbar^4} \left\{ \overline{A^2} - \overline{A^2} + j(j+1) \frac{B^2}{4} + \frac{8\pi^2\rho_1}{pd_1d_2d_3} \overline{A^2} \times \right. \\ \times \left| \sum_v e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{R}_v^0} \right|^2 \delta\left(q_x - \frac{2\pi m_1}{d_1}\right) \delta\left(q_y - \frac{2\pi m_2}{d_2}\right) \times \\ \left. \times \delta\left(q_z - \frac{2\pi m_3}{d_3}\right) \right\} dO_{\mathbf{p}'} \quad (3.14)$$

Вводим величины: ϱ — число ядер в 1 см^3 , ρ_1 — число элементарных ячеек в 1 см^3

$$\rho_1 = N_a/\Omega.$$

Проинтегрировав (3.14) по $dO_{\mathbf{p}'}$, получим полную вероятность упругого рассеяния

$$W = \frac{mp}{\pi\hbar^4} \left\{ \varrho \left[\overline{A^2} - \overline{A^2} + \frac{B^2}{4} j(j+1) \right] + \frac{2\pi^2\rho_1}{d_1d_2d_3} \overline{A^2} \int \delta(\mathbf{q} - \mathbf{t}) \times \right. \\ \times \left| \sum_v e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{U}_v} \right|^2 dO_{\mathbf{p}'} \right\}; \\ \delta(\mathbf{q} - \mathbf{t}) = \delta\left(q_x - \frac{2\pi m_1}{d_1}\right) \delta\left(q_y - \frac{2\pi m_2}{d_2}\right) \delta\left(q_z - \frac{2\pi m_3}{d_3}\right). \quad (3.15)$$

Заменяя под знаком δ функции \mathbf{q} и \mathbf{t} на безразмерные векторы \mathbf{j} и $2\pi\mathbf{m}$ (\mathbf{y} — целочисленные проекции), получаем вместо (3.15)

$$W = \frac{mp}{\pi\hbar^4} \varrho \left\{ \left[\overline{A^2} - \overline{A^2} + \frac{B^2}{4} j(j+1) \right] + \right. \\ \left. + 2\pi^2 \overline{A^2} \frac{\rho_1}{pd_1d_2d_3} \int \left| \sum_v e^{\frac{i\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{R}_v^0}{\hbar}} \right|^2 \delta(\mathbf{j} - 2\pi\mathbf{m}) dO_{\mathbf{p}'} \right\}.$$

Когда импульс нейтрона p становится меньше, чем \hbar/d (d — одна из постоянных решетки), процессы переброса оказываются невозможными [легко видеть, что в этом случае равенство (3.11) не может быть удовлетворено при m , не равном нулю].

Для таких медленных нейтронов W равняется

$$W = \frac{mp\varrho}{\pi\hbar^4} \left[\overline{A^2} - \overline{A^2} + \frac{B^2}{4} j(j+1) \right].$$

Длина свободного пробега λ_e , отвечающая упругому рассеянию, соответственно будет

$$\lambda_e = \frac{\pi\hbar^4}{m^2\varrho \left\{ \overline{A^2} - \overline{A^2} + \frac{B^2}{4} j(j+1) \right\}}. \quad (3.16)$$

Из формулы (3.16) видно, что если ядра решетки не обладают магнитными моментами и в решетке нет изотопов, то исчезает упругое рассеяние нейтронов с длиной волны большей, чем постоянная решетки.

4. Неупругое рассеяние

Рассмотрим неупругое рассеяние медленных нейтронов с энергией, достаточной для возбуждения только дебаевских тепловых колебаний решетки. Обратимся к процессам рассеяния, при которых нейtron отдает 1 квант колебательной энергии решетке. В этом случае в разложении (3.2) необходимо взять оба члена:

$$e_i^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{U}_i} = 1 + \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{U}_i, \quad (4.1)$$

так как первый член (единица) дает при интегрировании нуль в силу ортогональности собственных функций Φ . Заметим, что для нейтронов, энергия которых достаточна только для возбуждения дебаевских тепловых колебаний, величина

$$\left| \frac{\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{U}}{\hbar} \right| \sim \frac{U}{\lambda},$$

где λ — длина волны нейтрона значительно меньше единицы. Поэтому одновременное испускание двух или большего числа кван-

тов является менее вероятным процессом, чем испускание одного кванта, ибо за многоквантовые процессы отвечают высшие члены разложения (4.1). Интеграл, входящий в (2.6) и (2.7), имеет вид

$$\int \Pi \Phi_{n_i}^* \left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{U}_l \right) \Pi \Phi_{n_i} d\tau. \quad (4.2)$$

Как известно, \mathbf{U}_l можно представить в виде

$$\mathbf{U}_l = \sum_j e_{lj} (a_{lj} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{f} \mathbf{R}_l^0} + a_{lj}^* e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{f} \mathbf{R}_l^0}), \quad (4.3)$$

где звездочка означает комплексно-сопряженную величину, e_{lj} — единичный вектор поляризации колебания с волновым вектором \mathbf{f}/\hbar , а a_{lj} — его комплексная амплитуда; значок j отличает различную поляризацию колебаний. Величины a_{lj} и a_{lj}^* имеют следующие, неравные нулю матричные элементы:

$$(a_{lj})_{n, n+1} = \sqrt{\frac{(n+1)\hbar}{2MN\omega_{lj}}} e^{-i\omega_{lj}t};$$

$$(a_{lj}^*)_{n+1, n} = \sqrt{\frac{(n+1)\hbar}{2MN\omega_{lj}}} e^{i\omega_{lj}t}, \quad (4.4)$$

где NM — масса кристалла, ω_{lj} — круговая частота колебания с волновым вектором \mathbf{f}/\hbar .

Подставляя (4.2) в (4.1) и пользуясь (4.3), мы получаем:

$$\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{e}_{lj}) \sqrt{\frac{(n+1)\hbar}{2MN\omega_{lj}}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{f} \mathbf{R}_l^0 - i\omega_{lj}t}, \quad (4.5)$$

где \mathbf{e}_{lj} и ω_{lj} относятся к возбужденному нейtronу колебанию.

Матричный элемент перехода, при котором направление спина не меняется, будет согласно (3.5), (3.9) и (4.4) равен ¹:

$$\frac{1}{\Omega} \left\{ \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{f}, \mathbf{R}_l^0} \left(A_l \pm \frac{m_l}{2} B_l \right) \right\} \frac{1}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \mathbf{e}_{lj}) \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\hbar(n+1)}{2MN\omega_{lj}}} e^{-i\omega_{lj}t + i\frac{E_p - E_{p'}}{\hbar} t}. \quad (4.6)$$

Для того чтобы получить вероятность неупругого рассеяния, необходимо, как и в прошлом параграфе, усреднить квадрат модуля (4.6) по магнитным квантальным числам и по распределениям изотопов. Это усреднение проводится аналогично усреднению в

предыдущем параграфе, так что квадрат модуля (4.5) будет

$$\frac{(p - p')^2 \cos^2 \theta_f}{2\Omega^2 MN s_l} N \left\{ \overline{A^2} - \overline{A^2} + \frac{\overline{B^2 j(j+1)}}{4 \cdot 3} \right\} (n+1).$$

Добавляя согласно (3.17) соответствующее выражение для неупругого рассеяния с изменением направления спина, мы получаем следующее выражение для вероятности неупругого рассеяния, при котором испускается квант продольных колебаний с частотой, лежащей между ω и $\omega + d\omega$ и волновым вектором \mathbf{f}/\hbar , а импульс рассеянного нейтрона находится внутри телесного угла dO_p :

$$\frac{m(p - p')^2}{64\pi^5 \hbar^5 s_l^3 M} \alpha m' \omega d\omega (n+1) dO_f dO_p \cos \theta_f, \quad (4.7)$$

$$a = \overline{A^2} - \overline{A^2} + \frac{1}{4} j(j+1) \overline{B^2},$$

где s_l — скорость продольного звука.

Легко показать, что при $T \ll \theta$ и $E \gg kT$ член с n в (4.7) (индуцированное испускание) играет меньшую роль, чем член с единицей (спонтанное испускание), поэтому в дальнейшем мы заменим $n+1$ на 1. По этой же причине мы не будем рассматривать поглощение нейтроном 1 фонона.

Интегрируя (4.7) по направлениям испущенного фонона, получаем вероятность неупругого рассеяния на данный угол с потерей энергии от $\hbar\omega$ до $\hbar(\omega + d\omega)$. Заметим при этом, что в нашем случае закон сохранения импульса не имеет места:

$$\frac{(p' - p)^2 \alpha dO_p}{64\pi^5 \hbar^5 M s_l^3} m p' \omega d\omega \int \cos^2 \theta_f dO_f.$$

Выбирая за полярную ось $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ и помня, что угол между \mathbf{p} и \mathbf{p}' — \mathbf{p} для продольных колебаний равен углу между \mathbf{f} и $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$ (т. е. углу ϑ в нашей полярной системе координат), получаем, что

$$\int \cos^2 \theta_f dO_f = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{3}. \quad (4.8)$$

Соответствующий интеграл для поперечных колебаний будет $8\pi/3$. [В самом деле, поляризацию одного из поперечных колебаний можно выбрать перпендикулярно к плоскости $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$ и \mathbf{f} ; поляризация другого будет тогда в этой плоскости: $\cos \theta_f$ первого колебания равен 0, $\cos \theta_f$ второго равен $\sin \theta$ в нашей координатной системе $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{8\pi}{3}$]. Подставляя (4.8) в (4.7) и добавляя часть, вызванную испусканием поперечных колеба-

¹ Если все A_l одинаковы (нет изотопов) и моменты ядер равны нулю, то (4.5) отлична от нуля только при условии $\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{f} = 2\pi\hbar\mathbf{q}$ (\mathbf{q} — вектор обратной решетки). В нашем случае это невозможно.

ний, имеем

$$\frac{m(p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta) p' \omega d\omega}{48\pi^4 M \hbar^3} \left(\frac{1}{s_l^3} + \frac{2}{s_\tau^3} \right) dO_{p'}.$$
 (4.9)

Теперь θ есть угол между p и p' , s_τ — скорость поперечного звука.

Интегрируя по $dO_{p'}$, находим вероятность неупругого рассеяния с потерей энергии от $\hbar\omega$ до $\hbar(\omega + d\omega)$:

$$\frac{m(p^2 + p'^2) p' \omega d\omega}{12\pi^3 M \hbar^5} \left(\frac{1}{s_l^3} + \frac{2}{s_\tau^3} \right). \quad (4.10)$$

Здесь $p' = \sqrt{p^2 - 2m\hbar\omega}$.

Выразим в (4.10) ω через $E' = p'^2/2m$

$$\frac{\sqrt{2m} m^2 (E^2 - E'^2)}{6\pi^3 \hbar^2 M} \sqrt{E'} dE' \left(\frac{1}{s_l^3} + \frac{2}{s_\tau^3} \right). \quad (4.11)$$

Из (4.11) видно, что вероятность сильно растет при увеличении потерянной энергии и что главную роль при неупругом рассеянии играют переходы с потерей энергии порядка начальной энергии нейтрона. Интегрируя (4.11) по E' , находим следующее выражение для полной вероятности неупругого рассеяния:

$$4 \frac{\sqrt{2m} m^2 \alpha}{63\pi^3 M \hbar^7} \left(\frac{1}{s_l^3} + \frac{2}{s_\tau^3} \right) E^{7/2} = \frac{4E^8 m^2 \alpha}{63\pi^3 M \hbar^7} \left(\frac{1}{s_l^3} + \frac{2}{s_\tau^3} \right) p. \quad (4.12)$$

Длина свободного пробега λ_u , соответствующая неупругому рассеянию, будет

$$\lambda_u = \frac{63\pi^3 \hbar^7 M}{4m^3 \alpha E^8} \frac{1}{\frac{1}{s_l^3} + \frac{2}{s_\tau^3}} = \lambda_e \frac{63\pi^3 \hbar^3 \rho M}{4 \left(\frac{1}{s_l^3} + \frac{2}{s_\tau^3} \right) E^8 m}. \quad (4.13)$$

Воспользовавшись соотношением:

$$\frac{4\pi}{3} \left(\frac{k\theta}{\hbar} \right)^3 \left(\frac{1}{s_l^3} + \frac{2}{s_\tau^3} \right) = 8\pi^3 \cdot 3\rho$$

(θ — дебаевская температура), мы можем выражению (4.13) привести вид

$$\lambda_u = \frac{7}{8} \lambda_i \frac{M(k\theta)^8}{m E^8}.$$

Так как мы считали $E \ll k\theta$, то $\lambda_u \gg \lambda_i$, т. е. неупругое рассеяние в наших условиях значительно меньше упругого.

5. Соотношение между неупругим рассеянием и захватом нейтронов в твердом водороде

Представляет интерес сравнение длины свободного пробега, соответствующей захвату нейтронов λ_c и длины свободного пробега λ_u , вычисленной в предыдущем параграфе. Если λ_c больше чем λ_u , то рассматриваемые нами нейтроны будут замедляться до энергий, соответствующих тепловому равновесию с решеткой. Если же $\lambda_c < \lambda_u$, то захват нейтронов наступит раньше, чем они замедлятся.

Для того чтобы произвести сравнение λ_c и λ_u , необходимо определить постоянные A и B , входящие в выражение для λ_u . Это можно сделать только для водорода, так как для него экспериментально известны поперечники рассеяния нейтронов протонами при параллельном и антипараллельном спине протона и нейтрона. Из этих поперечников, зная, что синглетный уровень 1S дейтерона является виртуальным (Ферми [4], Теллер и Швингер [5]), можно определить амплитуды рассеянных волн. Сравнивая их с амплитудами, полученными с помощью энергии взаимодействия (2.2), можно определить A и B .

Согласно Мотту [6] амплитуда рассеянной волны, в случае медленных частиц имеет вид

$$\frac{e^{ikr}}{2rik} (e^{2i\eta_0} - 1), \quad (5.1)$$

$k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны нейтрона.

По Бете [7] для параллельных спинов нейтрона и протона (триплетный уровень 3S дейтерона)

$$\operatorname{ctg} \eta_0 = - \frac{\sqrt{me}}{\hbar k}.$$

Здесь e — энергия триплетного уровня дейтерона, равная, согласно Бете, $2,15 \cdot 10^6$ эв. В (5.1) нужно подставить наименьшее по абсолютной величине значение η_0 . Так как $\operatorname{ctg} \eta < 0$, то η_0 будет отрицательным и

$$\sin \eta_0 = - \frac{\hbar k}{\sqrt{\hbar^2 k^2 + me}} \sim - \frac{\hbar k}{\sqrt{me}} \ll 1$$

($p = \hbar k$ — импульс нейтрона — значительно меньше $\sqrt{2me}$).

Заменяя $\sin \eta_0$ на η_0 , мы получаем: $\eta_0 = -\hbar k / \sqrt{me}$, поэтому вместо (5.1) можно написать

$$a_3 = - \frac{e^{ikr}}{kr \sqrt{me}} \hbar k, \quad (5.2)$$

где a_3 — амплитуда рассеянной волны для триплетного уровня. Для синглетного уровня мы будем иметь выражение, аналогич-

ное (5.2), но с противоположным знаком, так как синглетный уровень дейтрана виртуальный

$$a_1 = \frac{e^{ikr}\hbar}{r\sqrt{me}}, \quad (5.3)$$

где $\varepsilon' = 120\,000$ эв.

Коэффициент a (1.2) удобно преобразовать следующим образом:

$$A + B(KS) = A + \frac{B}{2}(K+S)^2 - \frac{B}{2}K^2 - \frac{B}{2}S^2 = A + \frac{B}{2}j_0(j_0+1) - \frac{B}{2}j(j+1) - \frac{B}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right). \quad (5.4)$$

Здесь j_0 — квантовое число, определяющее момент системы, состоящей из ядра и нейтрона; j — квантовое число, определяющее момент ядра. (Для протона $j = \frac{1}{2}$).

Когда спины нейтрона и протона параллельны $j_0 = 1$,

$$V_3 = \delta(r)\left[A + B - \frac{B}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right] = \delta(r)\left(A + \frac{1}{4}B\right). \quad (5.5)$$

При антипараллельных спинах протона и нейтрона $j = 0$

$$V_1 = \delta(r)\left(A - \frac{3}{4}B\right). \quad (5.6)$$

Пользуясь методом Борна [8], мы находим следующие выражения для амплитуд рассеянных волн:

$$a_3 = -\frac{m\left(A + \frac{1}{4}B\right)e^{ikr}}{4\pi\hbar^2 r}, \quad (5.7)$$

$$a_1 = -\frac{m\left(A - \frac{3}{4}B\right)e^{ikr}}{4\pi\hbar^2 r}.$$

Сравнивая (5.2), (5.3) и (5.7), мы находим

$$-\frac{\hbar}{\sqrt{me}} = -\frac{m}{4\pi\hbar^2}\left(A + \frac{1}{4}B\right),$$

$$\frac{\hbar}{\sqrt{me'}} = -\frac{m}{4\pi\hbar^2}\left(A - \frac{3}{4}B\right).$$

Решая эти уравнения, определяем A и B :

$$B = \frac{4\pi\hbar^3}{m^{1/2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'}}\right), \quad A = \frac{\pi\hbar^3}{m^{1/2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{3}{\sqrt{\varepsilon'}}\right),$$

подставляя значение ε и ε' , получаем

$$A = -1.1 \cdot 10^{-42} \text{ эрг см}^3, \quad B = 9 \cdot 10^{-42} \text{ эрг см}^3. \quad (5.8)$$

Формула (4.14) дает для λ_u следующее выражение:

$$\lambda_u = 0.3 \frac{10^{28}}{p} \frac{7}{8} \left(\frac{k\theta}{E}\right)^3, \quad (5.8')$$

$$\theta = 91^\circ.$$

Для нахождения λ_c воспользуемся тем фактом, что для тепловых нейтронов при 300° К отношение эффективных поперечников рассеяния σ_e и захвата (протонами) равно приблизительно 140, а $\sigma_e = 43 \cdot 10^{24} \text{ см}^2$.

Отсюда

$$\lambda_c = \frac{1}{\sigma_c p} = \frac{140v}{2.8 \cdot 10^5 \cdot 43 \cdot 10^{-24} p}, \quad (5.9)$$

где v — скорость нейтрона.

Из сравнения (5.9) и (5.8') мы находим

$$\frac{\lambda_u}{\lambda_c} = \frac{0.32 \cdot 10^6}{140v} \left(\frac{k\theta}{E}\right)^3 = \left(\frac{30}{T_0}\right)^{\frac{7}{2}},$$

где $T_0 = E_0/k$. Когда энергия нейтрона меньше 30° , λ_c становится меньше λ_u и дальнейшее замедление нейтронов в твердом водороде прекращается. По-видимому, и в решетках других веществ должна существовать область нейтронных энергий, где имеют место аналогичные соотношения. Имеющиеся экспериментальные данные подтверждают этот вывод [9].

Украинский физико-технический институт
Харьков

Получено
28 апреля 1938 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fermi. La Ricerca Scientifica, 1936, 2, 13.
2. Wick. Phys. Zs., 1937, 38, 403.
3. Wick. Phys. Zs., 1937, 38, 689.
4. Fermi. Phys. Rev., 1936, 50, 809.
5. Teller, Schwingen. Phys. Rev., 1937, 52, 286.
6. Momm, Messci. Теория атомных столкновений. ОНТИ, 1936, стр. 38.
7. Bethe, Bacher. Rev. Mod. Phys., 1936, 8, 116.
8. Momm, Messci. Теория атомных столкновений. ОНТИ, 1936, стр. 142.
9. Leipunsky, Rusinow. Phys. Zs. Sowjet., 1937, 12, 460.

ТЕОРИЯ РЕЗОНАНСНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СИСТЕМАХ *

Совместно с И. И. Гуревичем

1. Малые блоки¹

Резонансное поглощение в системах, представляющих смесь урана и замедлителя, можно уменьшить, если вещество, поглощающее нейтроны (уран), распределить неравномерно, сосредоточив его в виде отдельных блоков, разделенных замедлителем.

Легко понять причину, вследствие которой применение систем блоков приводит к уменьшению резонансного поглощения.

В случае однородной смеси захватывающего вещества и замедлителя нейтроны, замедлившись до резонансных энергий, продолжают двигаться в среде с равномерным повсюду содержанием захватывающего вещества и поэтому с большой вероятностью поглощаются ядрами последнего. В блочной системе при достаточно больших расстояниях между блоками нейtron выйдет из опасной зоны резонансного поглощения раньше, чем достигнет поверхности одного из блоков. Наряду с этим в гетерогенной системе имеет место эффект экранирования внутренних слоев блока внешними, вследствие чего в резонансном поглощении участвуют не все атомы урана.

Оба эти эффекта существенно уменьшают резонансное поглощение в гетерогенных системах (по сравнению с гомогенной той же концентрации), если

$$\begin{aligned} L &= \bar{l}\omega > \lambda_s, \\ \bar{l} &> \lambda_c(E_0), \end{aligned} \quad (1)$$

где \bar{l} — средний путь нейтрона в блоке; L — средний путь нейтрона в ячейке замедлителя (ω — отношение объемов замедлителя и урана); λ_s — длина пробега рассеяния нейтронов в замедлителе; $\lambda_c(E_0)$ — длина пробега поглощения резонансного нейтрона в уране.

* Международная конференция по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1955, М., 1955, Изд-во АН СССР, стр. 557.

¹ Теория резонансного поглощения в малых блоках урана была развита авторами в 1943 г.

Рассмотрим «малые» блоки, для которых средний размер блока \bar{l} меньше длины рассеяния нейтронов в замедлителе и уране. Пусть $\omega \gg 1$. Условие $\bar{l} < \lambda_s$ позволяет пренебречь эффектом возмущения поля резонансных нейтронов вблизи блока, а такое же условие для урана — считать движение нейтрона в блоке прямолинейным.

Можно показать, что и в случае $\bar{l} > \lambda_s$ поле резонансных нейтронов возмущено слабо, если изменение энергии нейтрона при одном столкновении больше ширины опасной зоны резонансного поглощения

$$\Delta E \ll E_0(1 - \varepsilon),$$

$$\lambda_c(E_0 \pm \Delta E) \sim \bar{l}, \quad \varepsilon = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2. \quad (1')$$

Для «малых» блоков вычисление вероятности избежать резонансного захвата в процессе замедления (φ) может быть проведено по образцу кинетической теории газов, где «молекулами» служат сами блоки.

Длина пробега нейтрона по отношению к столкновению с блоками равна

$$L = \frac{1}{c\Sigma} = \bar{l}\omega, \quad (2)$$

где c — число блоков в единице объема; Σ — среднее геометрическое сечение блока (для шаровых блоков $\Sigma = \pi R^2$)¹.

Определим длину пробега нейтрона энергии E по отношению к захвату его блоками

$$\Lambda_c = \frac{L}{\zeta(E)}, \quad (3)$$

где $\zeta(E)$ — коэффициент «прилипания» нейтрона к блоку, равный

$$\zeta(E) = \int (1 - e^{-l/\lambda_c(E)}) f(l) dl; \quad (4)$$

$f(l)$ — функция распределения пробегов нейтронов в блоке.

Если $\bar{l}/\lambda_c(E) \ll 1$, то

$$\zeta(E) \approx \int \frac{l}{\lambda_c(E)} f(l) dl = \frac{L}{\lambda_c(E)}. \quad (4')$$

Относительная вероятность захвата нейтрона блоком может быть представлена в следующем виде:

$$W(E) = \frac{\frac{1}{\Lambda_c}}{\frac{1}{\Lambda_c} + \frac{1}{\lambda_s}} = \frac{\zeta(E)}{\zeta(E) + \frac{L}{\lambda_s}}. \quad (5)$$

¹ $\Sigma = \frac{V}{l} = \frac{S}{4}$, где V — объем блока, S — его поверхность, $\bar{l} = \frac{4V}{S}$.

Если резонансное поглощение $(1 - \varphi)$ мало, то, как хорошо известно,

$$-\ln \varphi = \frac{1}{\xi} \int W(E) \frac{dE}{E}, \quad (6)$$

где ξ — средняя логарифмическая потеря энергии в замедлителе.

Отметим, что если поле резонансных нейтронов можно считать невозмущенным и резонансное поглощение малым, то связь между величинами φ и W одинакова для гетерогенного и гомогенного случаев. Вероятность поглощения в гомогенном случае [1]

$$W(E) = \frac{1}{1 + \omega \frac{\lambda_c(E)}{\lambda_s}}. \quad (7)$$

Покажем, что выражение (5) для $W(E)$ в случае совсем малых блоков дает гомогенный результат для величины φ .

Если $\bar{l} \ll l_0 = \lambda_s/\omega$, то $L \ll \lambda_s$ и в выражении

$$-\ln \varphi = \frac{1}{\xi} \int \frac{\zeta}{\zeta + \frac{L}{\lambda_s}} \frac{dE}{E},$$

существенную роль будут играть значения $\zeta(E) \approx L/\lambda_s \ll 1$ и поэтому для $\zeta(E)$ можно взять предельное выражение (4').

Тогда

$$\begin{aligned} -\ln \varphi &= \frac{1}{\xi} \int \frac{\frac{1}{\lambda_c}}{\frac{\bar{l}}{\lambda_c} + \frac{L}{\lambda_s}} \frac{dE}{E} = \frac{1}{\xi} \int \frac{1}{1 + \omega \frac{\lambda_c(E)}{\lambda_s}} \frac{dE}{E} = \\ &= \frac{1}{\xi} \int \frac{W_0(E) dE}{E} = (-\ln \varphi_0). \end{aligned}$$

Любопытно отметить, что переход к гомогенности происходит для блоков с размером $\bar{l} \sim l_0 = \lambda_s/\omega$, для которых эффект самоэкранирования может быть еще сильно выраженным ($\bar{l} < \lambda_s/\omega$, но $\lambda_s/\omega \gg \lambda_c$).

Рассмотрим второй предельный случай, представляющий наибольший интерес, — случай достаточно больших блоков,

$$\bar{l} \gg \lambda_s/\omega, \quad L = \omega \bar{l} \gg \lambda_s.$$

Тогда в выражении для

$$-\ln \varphi = \frac{1}{\xi} \int \frac{\zeta(E)}{\zeta(E) + \frac{L}{\lambda_s}} \frac{dE}{E}$$

в знаменателе можно пренебречь величиной $\zeta(E) \ll 1$ по сравнению с большой величиной L/λ_s . Таким образом, φ для блочных

систем выражается формулой

$$-\ln \varphi = \frac{1}{\xi} \int \frac{\lambda_s}{L} \zeta(E) \frac{dE}{E}. \quad (8)$$

Подставляя в формулу (8) выражение для ζ (4), получим

$$-\ln \varphi = \frac{1}{\xi} \int \frac{\lambda_s}{L} I(l) f(l) dl, \quad (9)$$

где

$$I(l) = \int \left(1 - e^{-l/\lambda_c(E)}\right) \frac{dE}{E}. \quad (10)$$

Рассмотрим две группы уровней U^{238} : первая (нижняя) состоит из сильных, не перекрывающихся уровней, для которых сечение захвата в резонансе велико и, следовательно,

$$\frac{l}{\lambda_{c0}} \gg 1, \quad (11)$$

где $\lambda_{c0} = \lambda_c(E_0)$ — длина поглощения в резонансе.

Ко второй группе отнесем высокие уровни (их может быть много, и они могут перекрываться), для которых сечения в резонансе невелики, так что для них

$$\frac{l}{\lambda_{c0}} \ll 1. \quad (12)$$

Для энергетической области, соответствующей второй группе уровней, в формуле (10) можно заменить подинтегральное выражение первым членом разложения, т. е. написать:

$$I(l) = I_1(l) + I_2(l) = \int \left(1 - e^{-l/\lambda_c(E)}\right) \frac{dE}{E} + \int \frac{l}{\lambda_c(E)} \frac{dE}{E}. \quad (13)$$

Предполагая, что уровни первой группы не перекрываются, представим первый интеграл (I_1) в виде суммы интегралов, взятых по отдельным уровням. Используя для каждого из уровней первой группы формулу Брейта — Вигнера¹

$$\lambda_{ci}(E) \approx \lambda_{ci}^0 (1 + x^2), \quad (14)$$

$$x = \frac{E - E_0}{\Gamma_i},$$

и пренебрегая пока допплеровским уширением линий, запишем выражение для $I_1(l)$ в следующем виде:

$$I_1(l) = \frac{1}{2} \sum \frac{\Gamma_i}{E_{ci}} \int \left(1 - e^{-l/\lambda_{ci}(1+x^2)}\right) dx. \quad (15)$$

¹ Фактор $\sqrt{\frac{E_0}{E}}$ полагается равным единице в пределах эффективной зоны резонансного захвата i -м уровнем.

В интеграле (15) существенный вклад вносит область $|x| \gg 1$ [$(l/\lambda_{oi})(1+x^2) \sim 1$], и поэтому он приближенно равен

$$I_1(l) \approx \frac{1}{2} \sum_i \frac{\Gamma_i}{E_{oi}} \int (1 - e^{-l/\lambda_{oi}x^2}) dx = \sum_i \frac{\Gamma_i}{E_{oi}} V \bar{\pi} \sqrt{\frac{l}{\lambda_{oi}}}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (13) и (13) в (9), получим окончательное выражение для величины φ

$$-\ln \varphi = \frac{\lambda_s}{\xi L} \left[V \bar{\pi} N \sqrt{\bar{l}} \sum_i \frac{\sqrt{\sigma_{oi} \Gamma_i^2}}{E_{oi}} + N \bar{l} \int (E) \frac{dE}{E} \right], \quad (17)$$

где N — число ядер U^{238} в 1 см³ уранового блока.

Формула (17) является общей и применима к блокам любой геометрической формы.

Первый член этой формулы представляет блокируемое поглощение, пропорциональное

$$\frac{\sqrt{\bar{l}}}{L} \approx \frac{1}{\omega \sqrt{\bar{l}}}.$$

При заданной концентрации урана в замедлителе блокируемое поглощение меняется как $\bar{l}^{-1/2}$. Для низко расположенных уровней, для которых нейтронная ширина меньше радиационной, $\sigma_{oi} \sim \sim E^{-1/4}$, и, следовательно, в этой области блокируемое резонансное поглощение одним уровнем пропорционально $E_0^{-1/4}$.

Второй член формулы (17) представляет неблокируемое поглощение, пропорциональное $\bar{l}/L = 1/\omega$, т. е. не зависящее при данной концентрации от размера блока.

Для совсем малых блоков (не представляющих, впрочем, практического интереса) φ может быть вычислено по общим формулам (6), (5) и (4). При этом получается непрерывный переход от гомогенного значения φ к величине, даваемой формулой (17).

Рассмотрим в качестве примера бесконечную периодическую решетку, состоящую из длинных цилиндрических урановых блоков. В этом случае

$$\begin{aligned} \bar{l} &= \frac{4V}{S} = \frac{4 \cdot \frac{\pi d^3}{4} h}{\pi d h} = d, \\ L &= \omega \bar{l} = \frac{\left(a^2 - \frac{\pi d^2}{4}\right) h}{\frac{\pi d^2}{4} h}, \quad d = \frac{4}{\pi a} \left(a^2 - \frac{\pi d^2}{4}\right), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\sqrt{\bar{l}} = 0,975 \sqrt{\bar{l}} \approx \sqrt{\bar{l}} = \sqrt{d}.$$

В формулах (18) V , S и h — соответственно объем, поверхность и высота уранового блока; a — шаг квадратной решетки.

Подставляя выражения (18) в формулу (17), получим

$$-\ln \varphi = \frac{\lambda_s}{\xi} \frac{\alpha d^{3/2} + \beta d^2}{a^2 - \frac{\pi d^2}{4}}, \quad (19)$$

где

$$\alpha = \frac{\pi}{4} 0,975 \sqrt{\pi N} \sum_i \frac{\sqrt{\sigma_{oi} \Gamma_i^2}}{E_{oi}}$$

и

$$\beta = \frac{\pi}{4} N \int (E) \frac{dE}{E}. \quad (19')$$

— суть константы, определяемые уровнями U^{238} .

Как видно из формулы (19), резонансное поглощение нейтронов в решетке с цилиндрическими урановыми блоками представляется в виде суммы блокируемого ($\sim d^{3/2}$) и неблокируемых ($\sim d^2$) поглощений.

Разбиение уровней U^{238} на две группы (блокируемые и неблокируемые), соответствующие обоим членам формулы (17), строго говоря, определяется размерами блоков. Поэтому формула (17) может рассматриваться лишь как интерполяционная для не слишком широкого интервала диаметров блоков.

2. Учет допплеровского уширения линий

Допплеровское уширение приводит к увеличению резонансного поглощения ($1 - \varphi$) и к зависимости его от температуры урана. Эффект Допплера не оказывает влияния на неблокируемую часть резонансного поглощения, даваемую вторым членом формулы (17). Это обстоятельство связано с тем, что для каждого уровня

$$\int (E) \frac{dE}{E} \approx \frac{1}{E_0} \int \sigma(E) dE.$$

Площадь уровня $\int \sigma(E) dE$ всегда равна $\frac{1}{2} \pi \sigma_0 \Gamma$ и не зависит от допплеровской ширины Δ .

Для оценок воспользуемся формулой допплеровского уширения в газе. Эффектами, специфическими для твердого тела, будем пренебрегать. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma(\eta, E) &= \sigma_0 \psi(\eta, x), \\ \psi &= \frac{n}{2 V \bar{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4} \eta^2 (x-y)^2}}{1+y^2} dy, \\ x &= \frac{E-E_0}{\Gamma}, \quad \eta = \frac{\Gamma}{\Delta}, \quad \Delta = \sqrt{\frac{E_0 k T}{A}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Дальнейшие оценки будут произведены для одного уровня при $\Delta > \Gamma$. Известно, что далекие крылья полосы поглощения при $\eta^2 x \gg 1$ совпадают с дисперсионной формулой Брейта — Вигнера. При $\eta^2 x \ll 1$ получим

$$\psi(\eta, x) \approx \frac{V\pi}{2} \eta e^{-\frac{1}{4} \eta^2 x^2}. \quad (21)$$

Таким образом, для одного уровня

$$-\ln \varphi_i = \frac{\lambda_s}{\xi L} \int f(l) \int (1 - e^{-l N \sigma_{0i} \psi_i}) \frac{dE}{E} dl. \quad (22)$$

Заметим, что эффект Допплера не должен оказываться на резонансном захвате, обусловленном первыми уровнями блокируемой группы. Для нижних уровней, где λ_{c0} очень мала, это связано с тем, что при условии $\frac{l}{\lambda_{c0}} \gg 1$ из падающего на блок нейтронного спектра «выедаются» почти все нейтроны с $\Delta E = E - E_0 \gg \frac{\Delta^2}{\Gamma}$ и поэтому контур поглощения является практически брейт-вигнеровским. Эффект Допплера может играть существенную роль только для относительно высоких уровней блокируемой группы, т. е. для уровней, непосредственно прилегающих к неблокируемой группе.

В соответствии с приведенными выше замечаниями разобьем блокируемый резонансный захват на две составляющие. К первой составляющей отнесем поглощение, связанное с нижними резонансными уровнями U^{23} , которое описывается выражением, аналогичным первому члену формулы (17). Ко второй слагающей отнесем поглощение, обусловленное уровнями средних энергий с допплеровской формой резонансного контура.

Для грубой оценки второй слагающей блокируемого поглощения воспользуемся предельным выражением для функции $\psi(\eta, x)$, справедливым в том случае, когда резонансный контур имеет чисто допплеровскую форму.

Введем понятие эффективной ширины блокируемого резонансного захвата на одном уровне (ΔE_{eff}) при помощи соотношения

$$\frac{l}{\lambda_c \left(E_0 \pm \frac{\Delta E_{\text{eff}}}{2} \right)} \approx 1. \quad (23)$$

Подставляя в выражение (23) сначала формулу (14), а затем (21), получим

$$\Delta E_{\text{eff}}^{(r)} = \Gamma V \overline{N \sigma_0 l}$$

для резонансного контура, описываемого формулой Брейта — Вигнера и

$$\Delta E_{\text{eff}}^{(D)} = 2\Delta \sqrt{\ln \left(\frac{V\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma}{\Delta} N \sigma_0 l \right)}$$

для чисто допплеровского контура.

Как видно из формулы (17), выражение для блокируемого резонансного захвата, с точностью до множителя порядка единицы, может быть представлено так:

$$-\ln \Phi_{\text{бл}} \approx \frac{\lambda_s}{\xi L} \sum_{(i)} \frac{(\Delta E_{\text{eff}})}{E_{0i}}. \quad (24)$$

Ввиду этого формула для резонансного захвата, учитывающую эффект Допплера, в грубом приближении можно записать следующим образом:

$$-\ln \varphi = \frac{1}{\xi} \frac{\lambda_s}{L} \left[V \overline{\pi N} V \bar{l} \sum_{(i)} \frac{V \overline{\sigma_{0i} l_i^2}}{E_{0i}} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{(k)} \frac{\Delta_k}{E_{0k}} \sqrt{\ln \left(\frac{V\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma_k}{\Delta} N \sigma_0 l \right)} + N \bar{l} \int_E \sigma \frac{dE}{E} \right]. \quad (25)$$

В формуле (25) первый член описывает блокируемое резонансное поглощение на наиболее низких уровнях. В этой области энергий эффект Дооплера практически не оказывает влияния на резонансный захват. Второй член дает блокируемое поглощение в области уровней, характеризующихся допплеровской формой резонансного контура. Наконец, третий член представляет неблокируемый резонансный захват на высоко расположенных уровнях, для которых форма контура не существенна.

Зависимость резонансного поглощения от температуры определяется, очевидно, вторым членом формулы (25). Учитывая, что $\Delta = \sqrt{\frac{E_0 k T}{A}}$ и пренебрегая слабой логарифмической зависимостью $\sqrt{\ln \alpha \bar{l}}$, можно представить выражение для резонансного захвата на один уровень в допплеровской области в следующем виде:

$$-\ln \Phi_{\text{бл}}^{(D)} \sim \frac{1}{L} \frac{\Delta E_{\text{eff}}}{E_0} \sim \frac{1}{T} \sqrt{\frac{T}{E_0}}. \quad (26)$$

Таким образом, в допплеровской области резонансное поглощение на один уровень, грубо говоря, пропорционально корню квадратному из температуры урана (\sqrt{T}) и обратно пропорционально корню квадратному из энергии уровня.

Количественное рассмотрение резонансного захвата блоками с учетом допплеровского уширения линий было произведено Ф. Л. Шапиро.

— Он нашел, что интеграл поглощения

$$\Pi(l) = \int_{(E)} (1 - e^{-lN\sigma_0\Phi(\eta, x)}) dx,$$

определяющий Φ ,

$$-\ln \Phi = \frac{\lambda_s \Gamma_i}{2\xi L E_{0i}} \int_l \Pi(l) f(l) dl,$$

равен:

$$\begin{aligned} \Pi(l) &= \pi \sigma_0 l N \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{V\pi}{2} \right)^k \frac{(\sigma_0 l N \eta)^k}{(k+1)! V^{k+1}} \times \\ &\quad \times e^{\frac{k\eta^2}{4}} \left[1 - \Phi \left(\frac{1}{2} \eta \sqrt{\frac{k}{k+1}} \right)^{(k+1)} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{V\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

При весьма сильных поглощениях ($\sigma_0 l N \eta^2 > 5$):

$$\Pi(l) = 2V\pi \sqrt{\sigma_0 l N} \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sigma_0 l N \eta^2} \right). \quad (28)$$

В промежуточной области, в которой поглощение связано с эффектом Допплера,

$$\begin{aligned} \Pi(l) &= \frac{4}{\eta} \sqrt{\ln \left(\frac{V\pi}{4} N l \sigma_0 \eta \right)} \left[1 + \frac{0,29}{\ln \left(\frac{V\pi}{2} N l \sigma_0 \eta \right)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{0,14}{\left[\ln \left(\frac{V\pi}{2} N l \sigma_0 \eta \right) \right]^2} \right] + \frac{N l \sigma_0 \eta}{\sqrt{\ln \left(\frac{V\pi}{2} N l \sigma_0 \eta \right)}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Формула (28) была получена для промежуточного интервала энергий ($10 < N \sigma_0 l \eta < \frac{4}{\eta} \sqrt{\ln N \sigma_0 l \eta}$), в котором поглощение определяется в основном додиплеровской формой контура. В области применимости формулы (29) основную роль играет первый член выражения, пропорциональный второму члену приближенной формулы (25).

Как уже отмечалось в § 1, полученные выражения для Φ показывают общий характер зависимости Φ от концентрации урана в решетке и размеров блоков. Отсутствие экспериментальных данных о точной структуре всех полос поглощения U^{238} требует определения Φ в макроскопическом опыте.

3. Большие блоки

Теория резонансного поглощения в больших блоках была развита А. Д. Галаниным. Он рассмотрел предельный случай: резонансное поглощение блоками, размеры которых значительно больше длины рассеяния в них ($\rho = \frac{d}{2} \gg \lambda_s^U$).

Так же, как и ранее, будем считать, что ширина энергетической зоны, в которой происходит эффективное поглощение нейтронов блоком, значительно меньше скачка энергии при столкновении с атомом замедлителя.

Здесь будет рассмотрено блокирующее резонансное погложение одним изолированным уровнем.

Поглощение блоком разобьем на две части: — $-\ln \varphi^{(1)}$ — поглощение центральной частью линии (где длина захвата $\lambda_c \ll \lambda_s^U$ — длины рассеяния) и — $-\ln \varphi^{(2)}$ — поглощение крыльями линии ($\lambda_c \sim \lambda_s^U$). В первом случае можно считать поверхность блока плоской, так как поглощение нейтронов в этой области энергии происходит в тонкой корочке и, следовательно, кривизна блока здесь несущественна. Во втором случае, когда длина захвата в блоке λ_c порядка длины рассеяния λ_s^U , будем использовать диффузионное приближение. Условие $\rho \gg \lambda_s^U$ позволяет получить непрерывный переход от одного случая к другому.

В первом случае резонансное поглощение имеет вид (8)

$$-\ln \varphi^{(1)} = \frac{\pi \rho}{2a^2} \cdot \frac{\lambda_s}{\xi E_0} \int \zeta(E) dE, \quad (30)$$

где в качестве $\zeta(E)$ стоит коэффициент прилипания для плоскости и вместо L подставлено $\frac{2a^2}{\pi \rho}$ ($a \gg \rho$). Это коэффициент прилипания, вычисленный в работе [2] путем точного решения кинетического уравнения, равняется:

$$\zeta = 2(1 - \sigma)^{1/2} \int_0^1 S e^{SF(S)} dS, \quad (31)$$

где

$$\sigma = \frac{\lambda_c}{\lambda_c + \lambda_s^U} \quad (32)$$

$$F(S) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 y}{1 + S^2 \operatorname{tg}^2 y} \ln \left(1 - \frac{\sigma y}{\operatorname{tg} y} \right) dy. \quad (33)$$

В этом случае $\lambda_c \ll \lambda_s^U$ и $\sigma \ll 1$. Тогда, как следует из (33), $F(S) \ll 1$ и $e^{SF(S)}$ в подинтегральном выражении (31) можно разложить в ряд:

$$e^{SF(S)} = 1 + SF(S). \quad (34)$$

Подставляя (34) и (33) в (31) и интегрируя по S , получаем

$$\xi = (1 - \sigma)^{1/2} \left[1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 + \operatorname{ctg}^2 y) \left(1 - \frac{y}{\operatorname{tg} y} \right) \ln \left(1 - \frac{\sigma y}{\operatorname{tg} y} \right) dy \right]. \quad (35)$$

Для удобства дальнейших вычислений введем переменную z :

$$z = \sqrt{\frac{\lambda_{c0}}{\lambda_s^U}} x = \sqrt{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \sqrt{1 - \frac{\sigma}{1-x^2}},$$

$$x = \frac{E - E_0}{\frac{\Gamma}{2}}$$

и запишем (30) так:

$$-\ln \varphi^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{4a^2} \cdot \frac{\rho}{\lambda_s^U} \cdot A \int_0^{\tilde{z}} \xi(z) dz;$$

$$A = \frac{2\pi\Gamma}{\xi E_0} \sqrt{\frac{(\lambda_s^U)^3}{3\lambda_{c0}}} \cdot \lambda_s, \quad (36)$$

где \tilde{z} — точка сшивки; при $z > \tilde{z}$ будем считать пригодным диффузионное приближение.

Значения $\xi(z)$, подсчитанные по формуле (35), приведены в табл. 1. При этом учтено, что в той области, где $\xi(z)$ начинает заметно отклоняться от единицы, можно уже считать $x \gg 1$, так что ξ будет функцией только z и не будет зависеть от x .

Таблица 1

z	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$\xi(z)$	1	0,905	0,0832	0,731	0,661

Точку сшивки \tilde{z} выберем, исходя из условия $3\lambda_s^U = \lambda_c$, что соответствует $\tilde{z} = \sqrt{3}$.

При помощи данных табл. 1 находим

$$\int_0^{\sqrt{3}} \xi(z) dz = 1,54.$$

При вычислении второй части резонансного поглощения будем использовать уравнение диффузии с поправкой Боте. Обозначая

через $n(r)$ плотность нейтронов внутри блока, можно записать $\Phi^{(2)}$ так:

$$-\ln \Phi^{(2)} = \frac{2\pi}{a^2} \frac{\lambda_s}{\xi V_0 E_0} \int dE \int_0^r \frac{n(r)}{T} r dr, \quad (37)$$

где T — время жизни нейтрона внутри блока. Как следует из уравнения диффузии, плотность нейтронов [при нормировке $n(p) = 1$] равна

$$n(r) = \frac{I_0\left(\frac{r}{L_U}\right)}{I_0\left(\frac{\rho}{L_U}\right)}, \quad (38)$$

где L_U — диффузионная длина в блоке

$$L_U^2 = TD = \frac{1}{3} \lambda \lambda_c, \quad \lambda^{-1} = (\lambda_s^U)^{-1} + \lambda_c^{-1}.$$

Подставляя (38) в (37) и интегрируя по r , получим

$$-\ln \Phi^{(2)} = \frac{2\pi}{3a^2} \rho \frac{\lambda_s}{\xi E_0} \int \frac{\lambda}{L_U} \frac{I_1\left(\frac{\rho}{L_U}\right)}{I_0\left(\frac{\rho}{L_U}\right)} dE,$$

или, после перехода к переменной интегрирования z и введения обозначений (36):

$$-\ln \Phi^{(2)} = \frac{\rho}{\lambda_s^U} AJ, \quad (39)$$

$$J = \int_{\tilde{z}}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} \frac{I_1\left(\sqrt{3} \cdot \frac{\rho}{\lambda_s^U} \cdot \frac{\sqrt{1+z^2}}{z^2}\right)}{I_0\left(\sqrt{3} \cdot \frac{\rho}{\lambda_s^U} \cdot \frac{\sqrt{1+z^2}}{z^2}\right)}. \quad (40)$$

При $\rho/\lambda_s^U \gg 1$ интеграл J растет логарифмически с ростом ρ/λ_s^U ;

$$J = \text{const} + \ln \frac{\rho}{\lambda_s^U}. \quad (40')$$

(Значение $\varphi^{(1)}$ зависит, конечно, от места сшивки \tilde{z} .) Поэтому при $\rho/\lambda_s^U \gg 1$ с логарифмической точностью

$$-\ln \Phi^{(2)} = A \cdot \frac{\rho}{\lambda_s^U a^2} \ln \frac{\rho}{\lambda_s^U}. \quad (41)$$

Поскольку $\Phi^{(1)}$ не содержит членов с логарифмом ρ/λ_s^U , то с этой же точностью полное резонансное поглощение совпадает с (41).

Для практических целей, когда $\ln \frac{\rho}{\lambda_s^U}$ не столь велик, желательно иметь значение постоянной в (40'). Численный расчет, результаты которого приводятся в табл. 2, дает, что значение постоянной близко к нулю, так что полное резонансное поглощение,

Таблица 2

$\frac{\rho}{\lambda_s^U}$	1	3	5
J	0,475	1,12	1,60

являющееся суммой (36) и (39), может быть с удовлетворительной точностью записано так:

$$-\ln \varphi = \frac{A}{a^2} \frac{\rho}{\lambda_s^U} (0,67 + J) \approx \frac{A}{a^2} \frac{\rho}{\lambda_s^U} \left(0,7 + \ln \frac{\rho}{\lambda_s^U} \right). \quad (42)$$

Можно проверить, что полученное в (42) значение постоянной (0,7) действительно слабо зависит от выбора точки спивки. (Так, например, если спивку производить при $\lambda_c = 2\lambda_s^U$, вместо $\lambda_c = 3\lambda_s^U$, то значение постоянной будет отличаться от прежнего всего лишь на 10%).

Таким образом, мы знаем резонансное поглощение в двух предельных случаях: $\rho \ll \lambda_s^U$ (малые блоки) и $\rho \gg \lambda_s^U$ (большие блоки). Можно попытаться проинтерполировать полученные выражения на область $\rho \sim \lambda_s^U$. Для этой цели построим отношение P резонансного поглощения большими блоками $-\ln \varphi^{(6)}$, даваемого (42), к резонансному поглощению малыми блоками $-\ln \varphi^{(m)}$, которое можно записать в следующем виде [см. (19)]:

$$-\ln \varphi^{(m)} = 1,05 A \left(\frac{\rho}{\lambda_s^U} \right)^{1/2}. \quad (43)$$

Имеем

$$P = \left(\frac{\rho}{\lambda_s^U} \right)^{-1/2} \cdot (0,64 + 0,95J). \quad (44)$$

При $\rho/\lambda_s^U \ll 1$ $P = 1$. С другой стороны, на границе применимости теории больших блоков при $\rho/\lambda_s^U = 1$ $P = 1,08$ и при дальнейшем возрастании ρ/λ_s^U медленно убывает. Это позволяет думать, что теорией резонансного поглощения в малых блоках можно пользоваться вплоть до значений $\rho/\lambda_s^U \approx 1$, причем истинное значение резонансного поглощения $-\ln \varphi$ будет меньше значения, даваемого теорией малых блоков.

При помощи формул (39) и (40) можно проверить правильность основного предположения (1') о малости ширины энергетической зоны, в которой происходит эффективное поглощение, по сравнению с величиной скачка энергии при одном столкновении с атомом замедлителя. Как видно из (40), основной вклад в интеграл внесут те значения z , для которых

$$\sqrt{3} \frac{\rho}{\lambda_s^U} \frac{\sqrt{1+z^2}}{z^2} \sim 1,$$

или, поскольку предполагается, что $\rho/\lambda_s^U \gg 1$,

$$\sqrt{3} \cdot \frac{\rho}{\lambda_s^U} \sim z.$$

Отсюда, переходя от z к энергии, находим, что ширина энергетической полосы ΔE , в которой происходит резонансное поглощение, будет порядка

$$\Delta E \sim \frac{\rho}{L_0} \cdot \frac{\Gamma}{2}; \quad L_0 = \sqrt{\frac{1}{3} \lambda_{co} \lambda_s^U}.$$

Следовательно, должно выполняться условие

$$\frac{\rho}{L_0} \cdot \frac{\Gamma}{2} \ll (1 - \varepsilon) E_0, \quad (45)$$

где ε — доля энергии, теряемая нейтроном при столкновении с атомом замедлителя:

$$\varepsilon = \left(\frac{M - m}{M + m} \right)^2.$$

Для численных оценок примем $E_0/\Gamma = 300$ и сечение поглощения в центре линии $\sigma = 2,5 \cdot 10^4$ барн, так что $L_0 = 2,7 \cdot 10^{-2}$ см. Тогда из (45) получим, что в случае, например, дейtronного замедлителя ($1 - \varepsilon = 8/9$) $\rho \ll 15$ см, а в случае графитового замедлителя ($1 - \varepsilon = 0,285$) $\rho \ll 5$ см.

Академия наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

- Я. Б. Зельдович, Ю. Б. Харитон. ЖЭТФ, 1940, 10, 29.
- O. Halpern, R. Zueenberg, O. Clark. Phys. Rev., 1938, 53, 173.

РЕЗОНАНСНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ*

Совместно с А. И. Ахиезером

§ 1. Основное интегральное уравнение

В мультилиптирующих системах, которые мы изучали в предыдущей главе, быстрые нейтроны, рождающиеся при делении ядер, замедляются до тепловых скоростей.

В процессе замедления, вне тепловой области, возможно, однако, резонансное поглощение нейtronов, не приводящее к делению ядер и препятствующее поэтому протеканию цепной реакции.

Изучению резонансного поглощения посвящена настоящая глава.

В важном практическом случае, когда мультилиптирующая система представляет собой смесь урана и одного или нескольких замедлителей, резонансное поглощение нейtronов, не приводящее к делению, обусловлено главным образом ядрами основного изотопа урана и имеет место при энергиях нейtronов порядка нескольких десятков или сотен вольт.

Только «проскочив» эту опасную энергетическую зону, нейтроны в конце концов превращаются в тепловые и приобретают возможность сильно взаимодействовать с ядрами изотопа U^{235} , благодаря возрастанию эффективного сечения деления по закону $1/v$.

Рассмотрим сперва систему, представляющую собой однородную смесь элемента, ядра которого способны резонансно погло-

* В 1946—1947 гг. А. И. Ахиезером и И. Я. Померанчуком была написана книга «Введение в теорию нейтронных мультилиптирующих систем», которая, к сожалению, не была опубликована. Через несколько лет, когда публикация стала возможной, необходимо было, в связи с развитием теории, переработать рукопись, но научные интересы авторов переместились в другие области, и рукопись в целом осталась неопубликованной. Материал ряда ее глав вошел в другие издания. Так, теория замедления нейтронов вошла в книгу А. И. Ахиезера и И. Я. Померанчука «Некоторые вопросы теории ядра» (Гостехиздат, 1950), теория резонансного поглощения в гетерогенном реакторе явилась содержанием доклада И. И. Гуревича и И. Я. Померанчука на Первой конференции по мирному использованию атомной энергии (Собр. трудов, № 26), гетерогенная теория решетки реактора частично изложена в книге А. Д. Галанина «Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах» (Атомиздат, 1959). Ниже помещена глава из рукописи А. И. Ахиезера и И. Я. Померанчука, посвященная резонансно-поглощению нейтронов в гомогенной среде и ранее не публиковавшаяся.

щать нейтроны, и замедлителя, поглощением в котором можно пренебречь.

Мы предположим, что нейтронное поле можно считать в достаточной степени однородным.

Это предположение об однородности или, вернее говоря, квазиоднородности¹ нейтронного поля дает основание пользоваться диффузионным рассмотрением. Мы видели, что в этом случае резонансное поглощение может быть учтено введением величины φ — вероятности того, что быстрый нейтрон дойдет до тепловой области, не будучи резонансно захваченным ни на один из уровней ядер захватывающего элемента. Именно эта величина входит в интегральное уравнение для тепловых нейтронов.

Наша задача состоит в выяснении тех факторов, от которых зависит φ .

Рассмотрим нейтрон с некоторой энергией E . Нас интересует вероятность того, что такой нейтрон достигнет тепловой области, не будучи захваченным ни на один из резонансных уровней захватывающих ядер. В силу сделанного предположения об однородности нейтронного поля искомая вероятность зависит только от энергии нейтрона. Обозначим ее через $\varphi(E)$. Через σ будем обозначать значение функции $\varphi(E)$ при $E = E_0$, где E_0 — энергия, с которой рождаются при делении нейтроны. Эта энергия значительно больше тех энергий нейтрона, при которых главным образом происходит резонансное поглощение. Поэтому можно считать, что φ равно $\varphi(\infty)$. Мы выведем здесь прежде всего общее интегральное уравнение, которому удовлетворяет функция $\varphi(E)$.

Обозначим через $\sigma_c(E)$ эффективное сечение захвата нейтрона с энергией E ядром захватывающего элемента; пусть далее σ_s^{α} — сечение рассеяния нейтрона ядрами сорта α . Обозначим относительные концентрации захватывающего элемента и различных рассеивателей соответственно через c и c_{α} . Эти величины связаны соотношением

$$c + \sum_{\alpha} c_{\alpha} = 1.$$

Введем в рассмотрение нормированную вероятность того, что нейтрон с энергией E захватывается в ближайшем столкновении; обозначим ее через $W_c(E)$. Она равна, очевидно,

$$W_c(E) = \frac{c\sigma_c(E)}{c\sigma_c(E) + \sum_i c_i \sigma_s^i}, \quad (1.1)$$

где суммирование распространяется на все сорта ядер, включая

¹ В том смысле, что изменение поля нейтронов происходит на расстояниях, которые можно считать большими по сравнению с длиной замедления

ядра поглощающего элемента. (Условимся в дальнейшем использовать при суммировании индекс i , если суммирование распространяется на все сорта ядер, включая и ядра поглощающего элемента; индекс α будем относить только к ядрам рассеивателей.)

Нормированная вероятность рассеяния нейтрона с энергией E ядром сорта i (в ближайшем столкновении)

$$W_i(E) = \frac{c_i \sigma_s^i}{\sum_i c_i \sigma_s^i + c \sigma_c(E)}. \quad (1.2)$$

Напомним, что в результате упругого столкновения нейтрона с ядром сорта i энергия нейтрона будет находиться в пределах от $\varepsilon_i E$ до E , где

$$\varepsilon_i = \left(\frac{M_i - 1}{M_i + 1} \right)^2$$

(M_i — отношение массы ядра i -сорта к массе нейтрона).

Мы будем считать, что все значения энергии в этих пределах равновероятны.

Вероятность того, что ближайшее столкновение нейтрона, имеющего энергию E , происходит с ядром сорта i , причем в результате столкновения энергия нейтрона лежит в интервале $(u, u + du)$, равна, очевидно,

$$\frac{c_i \sigma_s^i}{\sum_i c_i \sigma_s^i + c \sigma_c(E)} \frac{1}{1 - \varepsilon_i} \frac{du}{E}. \quad (1.3)$$

Умножив (1.3) на $\varphi(u)$, мы найдем вероятность того, что нейтрон, испытав рассматриваемое столкновение и имея энергию, равную u , дойдет, не будучи резонансно захваченным до тепловой области. Проинтегрировав далее это произведение по du в пределах $\varepsilon_i E, E$ и просуммировав результат по всем сортам ядер i , получим ис- комую вероятность, $\varphi(E)$, т. е. вероятность того, что нейтрон, имевший энергию E , замедлится до тепловой энергии, не подвернувшись захвату в резонансной области. Итак, $\varphi(E)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\varphi(E) = \sum_i \frac{c_i \sigma_s^i}{\sum_j c_j \sigma_s^j + c \sigma_c(E)} \frac{1}{1 - \varepsilon_i} \frac{1}{E} \int_{\varepsilon_i E}^E \varphi(u) du. \quad (1.4)$$

Основная задача, которой мы будем заниматься, состоит в изучении асимптотического поведения функции $\varphi(E)$ при больших E . Мы покажем, что существует конечное предельное значение функции $\varphi(E)$ при $E \rightarrow \infty$ и выясним, как определять этот предел.

§ 2. Резонансное поглощение в гомогенной системе с замедлителем, содержащим водород

Переходя к исследованию уравнения (1.4), рассмотрим сперва тот случай, когда в числе элементов, входящих в состав замедляющей компоненты, имеется водород (например, в замедлителях типа H_2O , CH_4 и т. д.).

В этом случае, как будет сейчас показано, уравнение (1.4) значительно упрощается. Так как большинство результатов, полученных при рассмотрении водородного замедлителя, применимо также к случаю неводородного замедлителя (§ 4), мы рассмотрим подробно случай водорода.

Предположим, что концентрации водорода и других замедлителей таковы, что сумма $\sum_\alpha c_\alpha^\alpha$, распространенная на все сорта замедляющих ядер, кроме водорода, значительно меньше, чем $c_H^\alpha c_H$, или, по крайней мере, того же порядка величины, что и $c_H^\alpha c_H$. Принимая во внимание это предположение, сводящееся по существу к тому, что слагаемое $\alpha = H$ (водородный замедлитель) играет главную роль в общей сумме ($\sum_\alpha c_\alpha \sigma_s^\alpha$) и замечая, что для тяжелых замедлителей выполняется неравенство $1 - \varepsilon_\alpha \ll 1$; $\alpha \neq H$; $\varepsilon_H = 0$ можно в первом приближении положить в (1.4) (в дальнейшем мы рассматриваем общий случай смеси нескольких рассеивателей, для которых ε не близко к единице):

$$\frac{1}{E} \int_{\varepsilon_H E}^E \varphi(u) du \approx (1 - \varepsilon_H) \varphi(E); \quad \alpha \neq H. \quad (2.1)$$

Уравнение (1.4) приобретает при этом следующий вид:

$$\varphi(E) = \frac{c_H \sigma_s^H}{\sum_j c_j \sigma_s^j + c \sigma_c(E)} \frac{1}{E} \int_0^E \varphi(u) du + \\ + \sum_i' \frac{c_i \sigma_s^i}{\sum_j c_j \sigma_s^j + c \sigma_c(E)} \varphi(E),$$

откуда

$$\varphi(E) = \frac{c_H \sigma_s^H}{c_H \sigma_s^H + c \sigma_c(E)} \frac{1}{E} \int_0^E \varphi(u) du \quad (2.2)$$

(знак ' означает, что в сумме не содержится член $\alpha = H$.)

Мы получили уравнение, соответствующее тому случаю, когда в качестве замедлителя применяется только один водород. Все члены в сумме (1.4), относящиеся к более тяжелым рассеивателям, в уравнение (2.2) вовсе не входят. Это вполне понятно, так как сделанное нами предположение означает, что замедлением, вызываемым всеми сортами ядер, кроме водорода, мы пренебрегаем.

Перейдем к исследованию уравнения (2.2). Введем обозначения

$$W(E) = \frac{\sigma_c(E)}{\sigma_c(E) + \frac{c_H}{c} \sigma_s^H}, \quad (2.3)$$

$$\psi(E) = \int_0^E \varphi(u) du. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.2) может быть переписано в виде

$$\frac{\psi'(E)}{\psi(E)} = \frac{1 - W(E)}{E}, \quad (2.5)$$

откуда

$$\psi(E) = e^{\int \frac{1-W(E)}{E} dE}$$

и

$$-\int_b^E W(u) \frac{du}{u}. \quad (2.6)$$

$$\varphi(E) = \psi'(E) = [1 - W(E)] e^{-\int_b^E W(u) \frac{du}{u}}.$$

Для определения постоянной b заметим, что при $E \rightarrow 0$ функция $\varphi(E)$ по самому смыслу ее определения должна считаться равной единице. Мы предположим, что $\sigma_i(E)$ определено таким образом, что в тепловой области $\sigma_c(E) = 0$ при $E \rightarrow 0$. Такое определение соответствует тому, что нас интересует здесь только резонансный захват нейтронов, а не их поглощение в тепловой области. Итак, мы можем считать $W(0) = 0$. Отсюда следует, что b должно равняться нулю.

Функция $\varphi(E)$ имеет, следовательно, вид

$$\varphi(E) = [1 - W(E)] e^{-\int_0^E W(u) \frac{du}{u}}. \quad (2.7)$$

Интересующая нас величина $\varphi = \varphi(\infty)$ равна

$$\varphi(\infty) = e^{-\int_0^\infty W(u) \frac{du}{u}}. \quad (2.8)$$

(Заметим, что $W(\infty) = 0$, поэтому интеграл, входящий в (2.8), существует.)

Переходя к рассмотрению показателя в выражении для φ , выясним сперва, какой вид имеет функция $W(E)$.

Предположим, что резонансные уровни, ответственные за захват нейтронов, расположены достаточно далеко друг от друга.

так что эффект интерференции уровней не играет существенной роли. Ниже мы уточним условия, при которых выполняется это предположение.

В этом случае показатель в формуле (2.8) можно представить в виде суммы членов, каждый из которых относится к отдельному резонансному уровню, т. е.

$$-\ln \varphi = \int_0^\infty W(u) \frac{du}{u} = \sum_{i=0}^{\infty} W_c^i(E) \frac{dE}{E}, \quad (2.9)$$

где

$$W_c^i(E) = \frac{\sigma_c^i(E)}{\sigma_c^i(E) + p \sigma_s^H}, \quad p = \frac{c_H}{c} \quad (2.9')$$

$(\sigma_c^i(E)$ представляет собой сечение захвата нейтрона, обусловленного существованием i -го резонансного уровня с энергией E_i ; σ_s — сечение рассеяния нейтрона ядрами водорода.

Обозначим область энергии вблизи E_i , играющую существенную роль в интеграле $\int_0^\infty W^i(u) \frac{du}{u}$ через ΔE_i . Мы будем называть в дальнейшем ΔE_i шириной опасной зоны i -го уровня. Далее мы оценим величину ΔE . Ясно, что ширина опасной зоны должна быть много меньше расстояния между уровнями D_i , если мы требуем, чтобы уровни не интерферировали друг с другом. Для наиболее низких уровней, не расположенных аномально близко к тепловой области, расстояние между уровнями D_i того же порядка величины, что и E_i . Поэтому условие

$$\Delta E_i \ll D_i \quad (2.10)$$

может быть заменено условием

$$\Delta E_i \ll E. \quad (2.10')$$

(Это же условие должно быть выполнено для того, чтобы можно было считать γ_n в (2.11) постоянной.)

Заметим, что рассматривая захват нейтронов, необходимо, вообще говоря, учитывать эффект Допплера. (При достаточно низких температурах эффект Допплера, однако, не играет роли.)

Приведем сначала формулу для $\sigma_c^i(E)$ без учета эффекта Допплера. Сечение захвата свободным ядром $\sigma_c^i(E)$ равно

$$\sigma_c^i(E) = \frac{\pi}{2} \left(1 \pm \frac{1}{2j+1} \right) \frac{\lambda^2 \gamma_n(E) \Gamma_\gamma}{(E - E_i)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}, \quad (2.11)$$

где λ — длина волны нейтрона, E_i — резонансная энергия, $\gamma_n(E)$ и Γ_γ — нейтронная и радиационная ширина i -го уровня, Γ — полная ширина уровня, равная $\Gamma = \gamma_n + \Gamma_\gamma$, j — спин ядра.

Так как при интегрировании в формуле (2.9) наиболее существенную роль играют значения энергии, близкие к центру линии E_i , то мы в дальнейшем будем пользоваться следующей формулой для $\sigma_c^i(E)$

$$\sigma_c^i(E) = \frac{\sigma_c(E_i)}{1 + \left(\frac{E - E_i}{\Gamma_i/2}\right)^2}, \quad (2.11')$$

где $\sigma_0(E_i)$ — значение сечения захвата при резонансе.

Перейдем к определению $\ln \varphi$ в том случае, когда эффект Доплера не играет роли. (Далее мы выясним условия, при которых можно не учитывать эффект Доплера.)

Пользуясь формулой (2.11') для $\sigma_c^i(E)$, представим $-\ln \varphi(\infty)$ в виде

$$\begin{aligned} -\ln \varphi(\infty) &= \sum_i \frac{1}{E_i} \int_0^\infty W^i(E) dE = \\ &= \sum_i \frac{1}{E_i} \int_0^\infty \frac{dE}{\frac{p\sigma_s^H}{\sigma_0(E_i)} \left[1 + \left(\frac{E - E_i}{\Gamma_i/2} \right)^2 \right] + 1} \quad (2.12) \end{aligned}$$

(множитель $1/E$, входящий в интеграл (2.9), мы заменили на $1/E_i$).

Введем вместо E новую переменную z согласно формуле

$$E - E_i = \frac{\Gamma_i}{2} \sqrt{1 + \frac{\sigma_0(E_i)}{p\sigma_s^H}} z \quad (2.12')$$

и расширим пределы интегрирования по z от $-\infty$ до $+\infty$. Такое расширение пределов интегрирования будет сейчас оправдано, так как мы убедимся, что область существенных значений энергии расположена вблизи E_i . Мы получим, таким образом,

$$-\ln \varphi = \frac{\pi}{2} \sum_i \frac{\Gamma_i}{E_i} \frac{1}{\left[p \frac{\sigma_s^H}{\sigma_0(E_i)} \left(1 + p \frac{\sigma_s^H}{\sigma_0(E_i)} \right) \right]^{1/2}}. \quad (2.13)$$

Оценим теперь величину области существенных значений энергии в интегралах, образующих сумму (2.12). Считая в формуле (2.12) область эффективных значений z порядка единицы, получим

$$\Delta E_i \approx \Gamma_i \sqrt{1 + \frac{\sigma_0(E_i)}{c_H \sigma_s^H}}. \quad (2.14)$$

Наше рассмотрение, как мы указывали выше, будет законным при

выполнении условия (2.10), которое можно согласно (2.14) переписать в виде

$$\Gamma_i \sqrt{1 + \frac{\sigma_0(E_i)}{c_H \sigma_s^H}} \ll E_i. \quad (2.14')$$

Оценим величину ΔE_i , которую можно назвать шириной «опасной» зоны i -го уровня.

Рассмотрим два предельных случая, когда $c\sigma_0(E_i) \ll c_H \sigma_s^H$ и когда $c\sigma_0(E_i) \gg c_H \sigma_s^H$.

Если $c\sigma_0(E_i) \ll c_H \sigma_s^H$, то ширина опасной зоны по порядку величины равна ширине уровня и не зависит от относительной концентрации захватывающего элемента. В этом случае необходимое условие (2.10') применимости нашего рассмотрения выполняется, если только

$$\Gamma_i \ll E_i. \quad (2.15)$$

Рассмотрим теперь практически наиболее важный предельный случай, когда $c\sigma_0(E_i) \gg c_H \sigma_s^H$. Ширина «опасной» зоны определяется здесь как:

$$\Delta E_i \approx \Gamma_i \sqrt{\frac{\sigma_0(E_i)}{c_H \sigma_s^H}}.$$

Она оказывается пропорциональной $(c/c_H)^{1/2}$. Условие (2.10') налагивает ограничение на величину концентрации захватывающего элемента, которая должна удовлетворять неравенству

$$c \ll c_H \frac{\sigma_s^H}{\sigma_0(E_i)} \left(\frac{E_i}{\Gamma_i} \right)^2. \quad (2.15'')$$

Считая $E_i \approx 10 \text{ эв}$, $\Gamma_i \approx 0,1 \text{ эв}$ и полагая $\frac{\sigma_H}{\sigma_0} \sim 10^{-2}$, мы придем к условию, что концентрация захватывающего элемента должна быть много меньше 100 c_H . В практически интересных случаях это условие выполняется. Таким образом, можно считать доказанной законность нашего рассмотрения.

Выясним, как зависит φ от концентрации захватывающего элемента в предельных случаях слабого и сильного поглощения. В первом случае $c\sigma_0(E_i) \ll c_H \sigma_s^H$, во втором — $c\sigma_0(E_i) \gg c_H \sigma_s^H$.

Если условие $c\sigma_0(E_i) \ll c_H \sigma_s^H$ выполняется для всех уровней, то, согласно общей формулы (2.13), мы получим

$$\varphi \cong e^{-\frac{\pi}{2} \sum_i \frac{\Gamma_i}{E_i} \frac{\sigma_0(E_i)}{\sigma_s^H} \frac{c}{c_H}} \cong 1 - \frac{\pi}{2} \frac{c}{c_H} \sum_i \frac{\Gamma_i}{E_i} \frac{\sigma_0(E_i)}{\sigma_s^H}. \quad (2.16)$$

Вычислить сумму ряда, входящего в (2.16), в общем виде невозможно, так как величины Γ_i , $\sigma_0(E_i)$ сложным образом меняются от уровня к уровню.

Чтобы выяснить свойства его сходимости, можно воспользоваться данными статистической теории ядер об усредненных (по большому числу уровней) значениях ширин γ_n , Γ_γ .

Напомним, что средняя нейтронная ширина при малых энергиях нейтронов пропорциональна $E^{1/2}$; средняя радиационная ширина практически не зависит от энергии. Для не слишком больших возбуждений ядра ($E \ll 10^4$ эВ) радиационная ширина значительно больше нейтронной ширины, так что полная ширина определяется главным образом радиационной шириной.

Мы оценим сумму ряда в (2.16), заменив его интегралом по dE и считая, что число уровней в интервале dE равно: $\frac{1}{D}dE$, где D — среднее расстояние между уровнями, которое будем считать постоянным. Таким образом, мы получим

$$\varphi \cong 1 - \frac{\pi}{2} \frac{c}{c_H \sigma_s^H} \frac{\bar{\Gamma}_r}{D} \int_{E_1}^{\infty} \frac{\sigma_0(E)}{E} dE, \quad (2.17)$$

где E_1 — энергия наименее высокого уровня. Сечение захвата при резонансе $\sigma_0(E_i)$ определяется по формуле

$$\sigma_0(E_i) \cong 2\pi\lambda_i^2 \left(1 \pm \frac{1}{2j+1}\right) \frac{\Gamma_n \Gamma_r}{\Gamma_i^2}. \quad (2.18)$$

Заменяя здесь частичные ширины их средними значениями, получим

$$\sigma_0(E) = \text{const } E^{-1/2}, \quad (2.18')$$

поэтому

$$\varphi = 1 - \frac{\pi}{2} \frac{c}{c_H} \frac{\bar{\Gamma}_r}{D} \text{const} \int_{E_1}^{\infty} \frac{dE}{E^{3/2}}. \quad (2.19)$$

Входящий сюда интеграл хорошо сходится. Это значит, что сумма ряда практически сводится к сумме его первых нескольких членов. Иными словами, главную роль играют несколько первых, наиболее низко расположенных, резонансных уровней. Считая верхний предел в интеграле (2.19) равным бесконечности, мы получим для φ следующую формулу:

$$\varphi \cong 1 - \frac{\pi c}{c_H \sigma_s^H} \frac{\bar{\Gamma}_r}{D} \sigma_0(E_1). \quad (2.20)$$

Итак, в случае достаточно малых концентраций захватывающего элемента c , когда условие $c \sigma_0(E_i) \ll c_H \sigma_s^H$ выполняется для всех резонансных уровней, разность $1 - \varphi$, т. е. $\ln \varphi$, пропорциональна концентрации захватывающего элемента. Условие $c \sigma_0(E_i) \ll c_H \sigma_s^H$ может не выполняться для всех уровней, но оно наверное будет выполняться для уровней, расположенных достаточно высоко, так как сечение $\sigma_0(E_i)$ обратно пропорционально $E_i^{1/2}$.

Определим энергию E_0 , для которой величина $c \sigma_0(E)$ становится равной $c_H \sigma_s^H$. Используя формулы (2.18) и (2.18') для $\sigma_0(E)$, получим E_0

$$E_0 = \left(\frac{c}{c_H}\right)^2 \left(\frac{2 \cdot 10^{-21}}{\sigma_s^H}\right)^2 \cong 4 \cdot 10^4 \left(\frac{c}{c_H}\right)^2 \text{ эВ.} \quad (2.21)$$

Для уровней, расположенных выше E_0 , условие $c \sigma_0(E_i) \ll c_H \sigma_s^H$ выполняется, поэтому вклад, вносимый этими уровнями в выражение для φ , пропорционален концентрации захватывающего элемента.

Перейдем теперь к рассмотрению случая сильного поглощения, когда сечение захвата в резонансе (с учетом концентрации) велико по сравнению с сечением рассеяния, т. е. когда выполняется условие

$$c \sigma_0(E_i) \gg c_H \sigma_s^H.$$

Согласно общей формуле (2.13), мы имеем в этом случае

$$\varphi = \exp \left\{ -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{c}{c_H}} \sum_i \frac{\Gamma_i}{E_i} \sqrt{\frac{\sigma_0(E_i)}{\sigma_s^H}} \right\}. \quad (2.22)$$

Выясним прежде всего как сходится ряд

$$\sum_i \frac{\Gamma_i}{E_i} \sqrt{\frac{\sigma_0(E_i)}{\sigma_s^H}}. \quad (2.22')$$

Пользуясь усредненными значениями ширин и заменяя сумму интегралом, получим

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\Gamma_i}{E_i} \sqrt{\frac{\sigma_0(E_i)}{\sigma_s^H}} &\approx \\ &\approx \frac{\bar{\Gamma}_r}{D} \sqrt{\frac{\sigma_0(E_1)}{\sigma_s^H}} E_1^{1/4} \int_{E_1}^{\infty} \frac{dE}{E^{5/4}}. \end{aligned} \quad (2.22'')$$

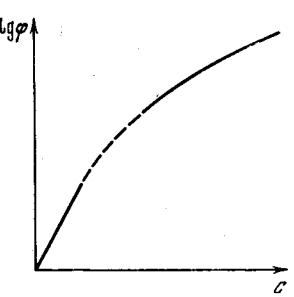


Рис. 1.

Последний интеграл существует. Поэтому ряд (2.22) сходится, но сходится он медленнее ряда, входящего в формулу (2.16), и относящегося к случаю слабого поглощения. Это значит, что высоко расположенные уровни играют в случае сильного поглощения сравнительно более важную роль, чем в случае слабого поглощения.

Обратим внимание на то обстоятельство, что $-\ln \varphi$ в случае сильного поглощения пропорционален \sqrt{c} , в то время как для слабого поглощения $-\ln \varphi \sim c$.

На рис. 1 изображен качественный ход зависимости от концентрации захватывающего элемента для величины $-\ln \varphi$.

§ 3. Учет эффекта Допплера

Перейдем теперь к учету эффекта Допплера. Напомним, что сечение захвата с учетом эффекта Допплера можно представить в виде¹

$$\sigma_c^i(E, \zeta) = \sigma_0(E_i) \psi(\zeta, x), \quad (3.1)$$

где

$$x = \frac{E - E_i}{\Gamma_i/2}, \quad \zeta = \frac{\Gamma_i}{\Delta_i},$$

$$\psi(\zeta, x) = \frac{\zeta}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4}\zeta^2(x-y)^2}}{1+y^2} dy. \quad (3.1')$$

Величина Δ представляет собой так называемую «допплеровскую ширину» i -го уровня, равную

$$\Delta = 2 \left(\frac{mE_i kT}{M} \right)^{1/2}, \quad (3.2)$$

где m и M — массы нейтрона и ядра, T — температура, k — постоянная Больцмана.

Эффект Допплера играет существенную роль, если

$$\zeta = \frac{\Gamma_i}{\Delta_i} \ll 1 \text{ и } x \ll \zeta^{-2}, \text{ т. е. если } |E - E_i| \ll \frac{\Delta_i^2}{\Gamma_i}.$$

Благодаря эффекту Допплера происходит деформация контура линии поглощения — уширение линии и понижение ее высоты в центре (площадь, ограниченная контуром линии поглощения не изменяется). Функция $\psi(\zeta, x)$ в том случае, когда эффект Допплера играет существенную роль, имеет следующий вид:

$$\psi(\zeta, x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta e^{-\frac{1}{4}\zeta^2 x^2}, \quad (\zeta \ll 1, x \ll \zeta^{-2}). \quad (3.3)$$

Далекие крылья линии поглощения ($x \gg \zeta^{-2}$) не подвергаются действию эффекта Допплера и всегда имеют естественную форму, т. е. для них

$$\psi(\zeta, x) = \frac{1}{1+x^2}. \quad (3.4)$$

Если $\zeta = \frac{\Gamma_i}{\Delta_i} \gg 1$, то эффект Допплера не играет роли и линия поглощения имеет естественную форму.

Выясним, какое влияние оказывает эффект Допплера на резонансное поглощение. Мы предположим, что ширина «опасной» зоны i -го уровня, определенная выше (формула (2.14)) и относящая-

¹ Мы не будем при рассмотрении эффекта Допплера учитывать усложнения, связанные с химической связью атомов в кристаллах.

ся к естественной форме линии поглощения, порядка или меньше допплеровской ширины

$$\Delta E_i < \Delta_i. \quad (3.5)$$

При выполнении этого условия вся «опасная» зона, а не только центр линии, подвергается действию эффекта Допплера. Мы можем при этом считать, что линия поглощения имеет допплеровскую форму (3.3).

Подставляя в общую формулу (2.9), определяющую $\ln \varphi$, вместо $\sigma_0^i(E)$ выражение

$$\sigma_0^i(E) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_0(E_i) \frac{\Gamma_i}{\Delta_i} e^{-\frac{(E-E_i)^2}{\Delta_i}}, \quad (3.6)$$

получим

$$-\ln \varphi = \sum_i \frac{1}{E_i} \int_0^\infty W_i(E) dE, \quad (3.7)$$

где

$$\int_0^\infty W_i(E) dE = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma_i}{\Delta_i} \sigma_0(E_i) \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{(E-E_i)^2}{\Delta_i}} dE}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma_i}{\Delta_i} \sigma_0(E_i) e^{-\frac{(E-E_i)^2}{\Delta_i}} + \frac{c_H}{c} \sigma_s^H}. \quad (3.8)$$

Вводя новую переменную $z = \frac{E - E_i}{\Delta_i}$ и расширяя пределы интегрирования по z от $-\infty$ до $+\infty$, перепишем последний интеграл в виде

$$\int_0^\infty W_i(E) dE = \Delta_i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-z^2}}{e^{-z^2} + q_i} dz, \quad (3.8')$$

где

$$q_i = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{c_H}{c} \frac{\sigma_s^H}{\sigma_0(E_i)} \frac{\Delta_i}{\Gamma_i}.$$

Рассмотрим аналогично тому, как мы это делали выше, случаи слабого и сильного поглощения. В первом случае $q_i \gg 1$, т. е.

$$c\sigma_0(E_i) \ll c_H \sigma_s^H \frac{\Delta_i}{\Gamma_i}.$$

Во втором случае $q_i \ll 1$, т. е.

$$c\sigma_0(E_i) \gg c_H \sigma_s^H \frac{\Delta_i}{\Gamma_i}.$$

Напомним, что при естественной форме линии поглощения случаи слабого и сильного поглощения определяются неравенствами:

$$c\sigma_0(E_i) \ll c_H \sigma_s^H \quad \text{и} \quad c\sigma_0(E_i) \gg c_H \sigma_s^H.$$

Если $q_i \gg 1$, то в знаменателе подынтегральной функции в (3.8) можно вычеркнуть e^{-z^2} . Мы получим при этом

$$\int_0^\infty W_i(E) dE = \frac{\Delta_i}{q_i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\pi}{2} \Gamma_i \frac{c}{c_H} \frac{\sigma_0(E_i)}{\sigma_s^H} \quad (3.9)$$

и, следовательно, φ будет равно

$$\varphi = \exp \left\{ -\frac{\pi}{2} \frac{c}{c_H} \sum_i \frac{\Gamma_i}{E_i} \frac{\sigma_0(E_i)}{\sigma_s^H} \right\}. \quad (3.9')$$

Формула (3.9') совпадает с формулой (2.16), относящейся к случаю слабого поглощения при естественной форме линии поглощения.

Итак, в случае слабого поглощения эффект Допплера не меняет вида φ , т. е. не играет роли. Это обстоятельство легко понять, если иметь в виду, что в случае слабого поглощения интеграл $\int_0^\infty W_i(E) dE$ сводится к площади, ограниченной контуром линии поглощения, которая, как мы знаем, не изменяется благодаря эффекту Допплера.

Рассмотрим теперь предельный случай сильного поглощения, когда $q_i \ll 1$.

Вводя в интеграле (3.8) новую переменную $u = e^{-z^2}$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-z^2}}{e^{-z^2} + q_i} dz = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{-1/2} \frac{du}{u + q_i}. \quad (3.10)$$

Последний интеграл при малых q_i равен приближенно¹

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{-1/2} \frac{du}{u} = 2 \left(\ln \frac{1}{q_i} \right)^{1/2},$$

поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-z^2}}{e^{-z^2} + q_i} dz = 2 \left(\ln \frac{1}{q_i} \right)^{1/2}, \quad (q_i \ll 1). \quad (3.10')$$

¹ Действительно, представим (3.10) в виде

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{-1/2} \frac{du}{u + q} &= \int_q^1 \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{-1/2} \frac{du}{u} + \int_0^q \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{-1/2} \frac{du}{u + q} - \\ &- q \int_q^1 \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{-1/2} \frac{du}{u(u + q)}. \end{aligned}$$

Заметим, что область существенных значений энергии в интеграле (3.8') в том случае, когда $q_i \ll 1$ по порядку величины равна $\Delta_i \ln \frac{1}{q_i} \approx \Delta_i$. Используя (3.10'), получим следующее выражение для φ , справедливое при условии $q_i \ll 1$:

$$-\ln \varphi = 2 \sum_i \frac{\Delta_i}{E_i} \sqrt{\ln \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{c}{c_H} \frac{\sigma_0(E_i)}{\sigma_s^H} \frac{\Gamma_i}{\Delta_i}}. \quad (3.11)$$

Напомним, что эта формула выведена нами в предположении, что линия поглощения имеет допплеровскую форму. Такое предположение является законным, если ширина «опасной» зоны i -го уровня порядка или меньше допплеровской ширины. Действительно, при выполнении последнего условия вся «опасная» зона подвергается действию эффекта Допплера и поэтому форма линии поглощения может считаться допплеровской.

В рассматриваемом случае сильного поглощения ширина опасной зоны i -го уровня ΔE_i равна по порядку величины

$$\Delta E_i = \Gamma_i \sqrt{\frac{\sigma_0(E_i)}{c_H \sigma_s^H}}.$$

Поэтому формула (3.11) справедлива в том случае, если

$$\Delta_i \gtrsim \Gamma_i \sqrt{\frac{\sigma_0(E_i)}{c_H \sigma_s^H}}. \quad (3.12)$$

Второй из этих интегралов меньше интеграла

$$\left(\ln \frac{1}{q} \right)^{-1/2} \int_0^q \frac{du}{u + q} = \ln 2 \left(\ln \frac{1}{q} \right)^{-1/2}.$$

Третий интеграл меньше интеграла

$$q \int_q^1 \left(\ln \frac{1}{u} \right)^{-1/2} \frac{du}{u^2} = q \int_1^{1/q} (\ln z)^{-1/2} dz.$$

Последний интеграл вблизи верхнего предела можно представить в виде

$$\begin{aligned} q \int_a^{1/q} (\ln z)^{-1/2} dz &= q \left\{ [z (\ln z)^{-1/2}]_q^{1/q} + \frac{1}{2} \int_a^{1/q} (\ln z)^{-3/2} dz \right\} = \\ &= \left(\ln \frac{1}{q} \right)^{-1/2} + \frac{1}{2} (\ln q)^{-3/2} + \dots + \text{const.} \end{aligned}$$

Поэтому асимптотически интеграл (3.10) при $q \ll 1$ действительно равен

$$2 \left(\ln \frac{1}{q} \right)^{1/2}.$$

Покажем, что влияние эффекта Допплера сводится в случае сильного поглощения к увеличению резонансного поглощения, т. е. к уменьшению φ .

Сравним для этого выражение (3.11) с выражением (2.22), определяющим $\ln \varphi$ в случае сильного поглощения при естественной форме линии поглощения. Отношение соответствующих членов обоих рядов (3.11) и (2.22) равно

$$\frac{4}{\pi} \frac{\Delta_i}{\Gamma_i} \sqrt{\frac{c_H c_s^H}{c \sigma_0(E_i)}} \left(\ln \left[\frac{V\pi}{2} \frac{c}{c_H} \frac{\sigma_0(E_i)}{c_s^H} \frac{\Gamma_i}{\Delta_i} \right] \right)^{1/2}. \quad (3.12')$$

Это отношение, согласно (3.12), больше единицы, чем и доказывается наша утверждение. (Входящий в (3.12') \ln больше единицы.)

Мы видим, что если эффект Допплера оказывает влияние на резонансное поглощение (случай сильного поглощения), то это влияние приводит обязательно к увеличению поглощения, т. е. к уменьшению φ .

Выясним более подробно, какие уровни подвержены действию эффекта Допплера.

Так как допплеровская ширина растет с ростом энергии, а естественная ширина остается постоянной, то влияние эффекта Допплера оказывается тем больше, чем выше расположены уровни.

С другой стороны, эффективное сечение при резонансе падает с увеличением энергии. Если контур линии поглощения имеет естественную форму, то максимальное значение сечения падает с увеличением энергии E по закону

$$\sigma_0(E) \sim \pi \lambda_0^2 \frac{\Gamma_n}{\Gamma} = \frac{\text{const}}{\sqrt{E}}.$$

В случае допплеровской формы линии поглощения падение $\sigma_0(E)$ происходит более быстро, а именно по закону

$$\sigma_0(E) \sim \frac{\text{const}}{E}.$$

Эти соотношения показывают, что при достаточно больших энергиях поглощение становится слабым и поэтому эффект Допплера никакого влияния на него не оказывает.

Мы видим, что при получении резонансного поглощения следует различать три группы резонансных уровней: наиболее низко расположенные уровни с естественной формой линии поглощения; уровни средних энергий, характеризующиеся допплеровской формой линии поглощения, и, наконец, высоко расположенные уровни, попадающие в область слабого поглощения, для которых поэтому форма линии поглощения не играет роли.

Эффект Допплера оказывает существенное влияние на резонансное поглощение, обусловленное уровнями второй группы.

Энергия, разделяющая первую и вторую группы, может быть

определенена, как энергия, при которой допплеровская ширина становится равной естественной ширине.

Допплеровская ширина Δ равна, как мы знаем,

$$\Delta = 2 \sqrt{\frac{m}{M} E k T}.$$

Поэтому энергия E , при которой естественная (радиационная) ширина Γ_γ равна Δ , определяется из соотношения

$$E = \frac{\Gamma_\gamma^2}{4 k T} \frac{M}{m}.$$

Эта энергия не зависит от концентрации захватывающего элемента и обратно пропорциональна температуре.

Полагая $\Gamma_\gamma \sim 0,1 \text{ эв}$, $k T \sim 1/40 \text{ эв}$, мы получим для урана $E \approx 25 \text{ эв}$.

Выше мы видели, что при $E > E_0$ (2.21) поглощение становится слабым. Таким образом, эффект Допплера оказывает влияние на резонансное поглощение, обусловленное теми уровнями, которые расположены между E и E_0 .

§ 4. Асимптотическое решение основного уравнения

В предыдущем § 3 мы рассмотрели резонансное поглощение в том случае, когда замедление нейтронов вызывалось в основном водородом.

Изучим теперь влияние более тяжелых замедлителей. Рассмотрим сперва случай, когда замедлитель состоит из ядер одного сорта.

Основное уравнение, определяющее $\varphi(E)$, т. е. вероятность того, что нейtron с энергией E дойдет до тепловой области, не будучи резонансно захваченным, имеет вид

$$\varphi(E) = \frac{1 - w(E)}{(1 - s) E} \int_{\epsilon E}^E \varphi(u) du, \quad (4.1)$$

где

$$w(E) = \frac{1}{1 + \frac{c_s}{c} \frac{\sigma_s}{\sigma_c(E)}} \quad (4.1')$$

(σ_s и $\sigma_c(E)$ — соответственно сечения рассеяния и захвата нейтрона, c и c_s — концентрации захватывающего элемента и рассеивателя).

Наша задача состоит в нахождении $\varphi(\infty)$.

Приступая к изучению уравнения (4.1), заметим предварительно, что если E_1 есть первый наиболее низкий резонансный уровень, то $w(E)$ может считаться равной нулю для значений энергии нейтрона $E < E'$, где $E' = E - \Delta E_1$, ΔE_1 — ширина «опасной» зоны

уровня E_1 . Ясно, что в области энергий $E < E'$, где $w(E) = 0$, функция $\varphi(E)$ равна единице

$$\varphi(E) = 1, \quad (E < E'). \quad (4.2)$$

Будем предполагать, что резонансные уровни не перекрываются. Легко видеть, что в этих условиях достаточно ограничиться рассмотрением того случая, когда имеется только один резонансный уровень, и указать метод определения φ в этом случае. Действительно, найдя φ , обязанное существованию одного уровня, и взяв полученное значение φ за исходное (см. формулу (4.2)), мы сможем найти φ при наличии двух уровней и т. д.

Пользуясь соотношением (4.2), легко найти решение уравнения (4.1) в интервале энергии $E', E'/\varepsilon$. Действительно, введем в рассмотрение функцию $\Phi(E)$, определенную соотношением:

$$\Phi(E) = \int_0^E \varphi(u) du. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.1) перепишется тогда в виде

$$\Phi'(E) - \frac{1-w(E)}{(1-\varepsilon)E} \Phi(E) = -\frac{1-w(E)}{(1-\varepsilon)E} \Phi(\varepsilon E). \quad (4.4)$$

В интервале энергии $(E', \frac{E'}{\varepsilon})$ функция $\Phi(\varepsilon E)$ известна: она равна εE . Поэтому уравнение (4.4) можно рассматривать как неоднородное дифференциальное уравнение с известной правой частью

$$\Phi'(E) - \frac{1-w(E)}{(1-\varepsilon)E} \Phi(E) = -\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} [1-w(E)], \quad \left(E' < E < \frac{E'}{\varepsilon} \right), \quad (4.5)$$

которое легко интегрируется.

Определив $\Phi(E)$ в интервале $(E', \frac{E'}{\varepsilon})$, мы можем, пользуясь уравнением (4.4), найти $\Phi(E)$ в интервале $(\frac{E'}{\varepsilon}, \frac{E'}{\varepsilon^2})$, так как правая часть уравнения (4.4), содержащая $\Phi(\varepsilon E)$, будет в этом интервале известной функцией.

Аналогичным образом мы сможем последовательно находить $\Phi(E)$ в интервалах $(\frac{E'}{\varepsilon^2}, \frac{E'}{\varepsilon^3})$, $(\frac{E'}{\varepsilon^3}, \frac{E'}{\varepsilon^4})$, ...

Поступая указанным образом несколько раз, мы выйдем в конце концов за пределы «опасной зоны», т. е. перейдем некоторое значение энергии E'' , выше которого $W(E)$ может считаться равной нулю.

Задача, которую нам предстоит теперь решить, заключается в следующем. Известно решение уравнения (4.4) в интервале (E', E'') . Требуется найти решение этого уравнения за пределами этого

интервала, где уравнение имеет вид

$$\varphi(E) = \frac{1}{(1-\varepsilon)E} \int_{\varepsilon E}^E \varphi(u) du, \quad (E > E''). \quad (4.6)$$

Заметим, что в написанное уравнение не входят значения функции $\varphi(u)$ для значений $u < \varepsilon E'$. Поэтому для нахождения решения уравнения (4.6) нет необходимости знать $\varphi(u)$ во всем интервале (E', E'') , достаточно задать функцию $\varphi(u)$ в интервале $(\varepsilon E'', E'')$.

Введем функцию $\varphi_0(u)$, совпадающую с $\varphi(u)$ в интервале $(\varepsilon E'', E'')$, и равную нулю всюду вне этого интервала.

Из сказанного выше следует, что если $\varphi(E)$ удовлетворяет уравнению (4.6) при $E > E''$ и совпадает с $\varphi_0(E)$ при $E \leq E''$, то функции $\psi(E)$ и $\varphi(E)$ совпадают при $E > E''$.

Покажем, как найти $\psi(E)$. Функция $\psi(E)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi(E) = \frac{1}{(1-\varepsilon)E} \int_{\varepsilon E}^E \psi(u) du, \quad (E > E'') \quad (4.6')$$

и условию

$$\psi(E) = \varphi_0(E) \quad (4.6'')$$

при $E \leq E''$.

Уравнение для $\psi(E)$ вместе с условием, которому удовлетворяет $\psi(E)$ при $E < E''$, можно записать в виде одного неоднородного интегрального уравнения

$$\psi(E) - \frac{1}{(1-\varepsilon)E} \int_{\varepsilon E}^E \psi(u) du = g(E), \quad (4.7)$$

где функция $g(E)$ равна

$$g(E) = \varphi_0(E) - \frac{1}{(1-\varepsilon)E} \int_{\varepsilon E}^E \varphi_0(u) du, \quad E \leq E'', \\ g(E) = 0, \quad E > E''. \quad (4.8)$$

Заметим, что нижний предел в интеграле, входящем в (4.8), можно заменить на $\varepsilon E''$, так как в интервале $(\varepsilon E'', E)$ при $E < E''$ функция $\varphi_0(u)$ по определению равна нулю. Ясно, что $g(E) = 0$, если $E < E''$.

Для решения уравнения (4.7) применим к нему преобразование Лапласа — Меллина.

Умножая (4.7) на E^{s-1} и интегрируя по E от $E = 0$ до $E = \infty$, получим

$$\psi_s - \frac{1}{1-s} \int_0^\infty E^{s-2} dE \int_{\varepsilon E}^E \psi(u) du = g_s, \quad (4.9)$$

где

$$\psi_s = \int_0^\infty \psi(E) E^{s-1} dE, \quad (4.10)$$

$$g_s = \int_0^\infty g(E) E^{s-1} dE = \int_{\epsilon E''}^{E''} g(E) E^{s-1} dE. \quad (4.10')$$

Заметим, что для того чтобы ψ_s имело смысл, достаточно считать $s = \operatorname{Re} s < 0$. Вычислим интеграл, входящий в (4.9).

Вводя вместо u новую переменную $z = u/E$ и меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_0^\infty E^{s-2} dE \int_{\epsilon E}^E \psi(u) du = \int_\epsilon^1 dz \int_0^\infty E^{s-1} \psi(Ez) dE = \psi_s \int_\epsilon^1 \frac{dz}{z^s} = \psi_s \frac{1 - \epsilon^{-s+1}}{-s + 1}. \quad (4.9')$$

Пользуясь выражениями (4.9) и (4.9'), получаем

$$\psi_s = \frac{g_s}{1 - \frac{\epsilon^{-s+1}}{(1-\epsilon)(s-1)}}. \quad (4.11)$$

Воспользуемся теперь формулой обращения

$$\psi(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} E^{-s} \psi_s ds \quad (4.12)$$

и найдем

$$\psi(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{E^{-s} g_s ds}{1 - \frac{\epsilon^{-s+1} - 1}{(1-\epsilon)(s-1)}}. \quad (4.13)$$

Входящий сюда интеграл можно представить в виде бесконечной суммы членов вида $A_n E^{-s_n}$, где s_n — полюсы подынтегральной функции.

Действительно, замкнем прямую, вдоль которой производится интегрирование, бесконечной полуокружностью, охватывающей правую полуплоскость. (При $E \rightarrow 0$ интеграл вдоль этой полуокружности равен нулю.) По теореме о вычетах будем иметь

$$\psi(E) = \sum A_n E^{-s_n}, \quad (4.14)$$

где s_n — полюсы подынтегральной функции, лежащие справа от прямой $\operatorname{Re} s = c < 0$, а A_n — соответствующие вычеты.

Мы можем теперь найти интересующее нас значение предела

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \varphi(E) = \lim_{E \rightarrow \infty} \psi(E).$$

Этот предел определяется, очевидно, вычетом относительно точки $s = 0$ и равен

$$\varphi(\infty) = -g_0 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + \frac{1 - \epsilon^{-s+1}}{(1-\epsilon)(s-1)}} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon \ln \epsilon - \epsilon} g_0, \quad (4.15)$$

где, согласно (4.10')

$$g_0 = \int_{\epsilon E''}^{E''} g(E) \frac{dE}{E}. \quad (4.15')$$

(Знак минус в формуле (4.15) получается вследствие того, что прямая, вдоль которой производится интегрирование, замыкается кривой, охватывающей прямую полуплоскость).

Подставляя в (4.15') вместо $g(E)$ выражение (4.8), получим

$$\begin{aligned} g_0 &= \int_{\epsilon E''}^{E''} \Phi_0(E) \frac{dE}{E} - \frac{1}{1-\epsilon} \int_{\epsilon E''}^{E''} \frac{dE}{E^2} \int_{\epsilon E}^E \Phi_0(u) du = \\ &= \int_{\epsilon E''}^{E''} \Phi_0(E) \frac{dE}{E} - \frac{1}{1-\epsilon} \int_{\epsilon E''}^{E''} \frac{dE}{E^2} \int_{\epsilon E''}^E \Phi_0(u) du. \end{aligned} \quad (4.16)$$

На рис. 2 изображена область интегрирования в последнем интеграле.

Меняя в этом интеграле порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} g_0 &= \int_{\epsilon E''}^{E''} \Phi_0(E) \frac{dE}{E} - \frac{1}{1-\epsilon} \int_{\epsilon E''}^{E''} \Phi_0(u) du \int_u^{E''} \frac{dE}{E^2} = \\ &= \frac{1}{(1-\epsilon) E''} \int_{\epsilon E''}^{E''} \Phi_0(u) du - \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \int_{\epsilon E''}^{E''} \Phi_0(u) \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Подставляя это значение g_0 в формулу (4.15), получим (4.16) окончательно следующее выражение для φ :

$$\varphi = \varphi(\infty) = \frac{1}{1 + \epsilon(\ln \epsilon - 1)} \left\{ \frac{1}{E''} \int_{\epsilon E''}^{E''} \Phi_0(u) du - \epsilon \int_{\epsilon E''}^{E''} \Phi_0(u) \frac{du}{u} \right\}. \quad (4.17)$$

Покажем теперь, что аналогичная формула может быть получена для φ и в том случае, когда замедлитель представляет собой смесь ядер нескольких сортов.

В последнем случае $\varphi(E)$ удовлетворяет уравнению (1.4), которое мы перепишем в виде

$$\varphi(E) = \sum_i \frac{\gamma_i}{1 - \epsilon_i} [1 - w(E)] \frac{1}{E} \int_{\epsilon_i E}^E \varphi(u) du, \quad (4.18)$$

где

$$1 - w(E) = \frac{\sum_j c_j \sigma_s^j}{\sum_j c_j \sigma_s^j + c \sigma_c(E)}, \quad \gamma_i = \frac{c_i \sigma_s^i}{\sum_j c_j \sigma_s^j}, \quad \sum_i \gamma_i = 1. \quad (4.18')$$

Пусть «опасная» зона простирается до энергии E'' , так что при $E > E''$ сечение захвата $\sigma_c(E)$ может считаться равным нулю, а следовательно, и $W(E) = 0$ при $E > E''$.

Будем по-прежнему считать, что решение уравнения (4.18) известно для значений энергий $E \leq E''$ и найдем $\varphi(E)$ в области $E > E''$.

Нахождение $\varphi(E)$ при $E < E''$ производится так же, как и в случае, когда замедлитель содержит ядра только одного сорта. Введем в рассмотрение функцию $\Phi(E)$

$$\Phi(E) = \int_0^E \varphi(u) du.$$

Уравнение (4.18) перепишется тогда в виде

$$\begin{aligned} \Phi'(E) - \frac{1 - w(E)}{E} \sum_i \frac{\gamma_i}{1 - \varepsilon_i} \Phi(E) = \\ = - \frac{1 - w(E)}{E} \sum_i \frac{\gamma_i}{1 - \varepsilon_i} \Phi(\varepsilon_i E). \end{aligned} \quad (4.19)$$

В интервале $(0, E')$ функция $\varphi(E) = 1$ и, следовательно, $\Phi(E) = E$. Поэтому в интервале $(E', \frac{E'}{\varepsilon_n})$, $(\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_n)$ уравнение (4.19) можно рассматривать как неоднородное уравнение относительно $\Phi(E)$ с известной правой частью.

Найдя решение последнего уравнения, можно использовать его для нахождения $\Phi(E)$ в интервале $(\frac{E'}{\varepsilon_n}, \frac{E'}{\varepsilon_n^2})$ и т. д.

После того, как $\Phi(E)$ определена, $\varphi(E)$ находится дифференцированием $\Phi(E)$.

Итак, будем считать, что функция $\varphi(E)$ известна вплоть до значения энергии $E = E''$. Для значений энергии $E > E''$, $\varphi(E)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(E) = \sum_i \frac{\gamma_i}{1 - \varepsilon_i} \frac{1}{E} \int_{\varepsilon_i E}^E \varphi(u) du, \quad (E > E''), \quad (4.20)$$

где суммирование распространяется на все сорта ядер рассеивателя.

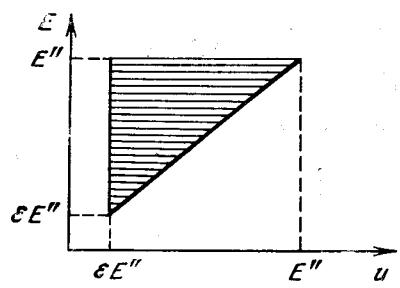


Рис. 2

В написанное уравнение не входят значения функции $\varphi(E)$ для $u < \varepsilon_1 E''$ (ε_1 — наименьшее из чисел ε_i). Поэтому достаточно знать функцию $\varphi(u)$ в интервале $(\varepsilon_1 E'', E'')$. Обозначим через $\varphi_0(u)$ функцию, совпадающую с $\varphi(u)$ в интервале $(\varepsilon_1 E'', E'')$ и равную нулю повсюду вне этого интервала.

Аналогично рассмотренному ранее случаю одного сорта рассеивающих ядер задача сводится теперь к решению уравнения

$$\psi(E) = \sum_i \frac{\gamma_i}{1 - \varepsilon_i} \frac{1}{E} \int_{\varepsilon_i E}^E \psi(u) du, \quad (E > E''), \quad (4.21)$$

если известно, что

$$\psi(E) = \varphi_0(E), \quad (E \leq E''). \quad (4.21')$$

Уравнение (4.21) вместе с условием (4.21') можно записать в виде одного неоднородного интегрального уравнения

$$\psi(E) - \sum_i \frac{\gamma_i}{1 - \varepsilon_i} \frac{1}{E} \int_{\varepsilon_i E}^E \psi(u) du = g(E), \quad (4.22)$$

где

$$g(E) = \varphi_0(E) - \sum_i \frac{\gamma_i}{1 - \varepsilon_i} \frac{1}{E} \int_{\varepsilon_i E}^E \varphi_0(u) du, \quad (E \leq E''), \quad (4.22')$$

$$g(E) = 0 \quad (E > E'').$$

Для решения уравнения (4.22) применяем к нему преобразование Лапласа — Меллина.

Умножая (4.22) на E^{s-1} и интегрируя по E в пределах от $E = 0$ до $E = \infty$, получим, используя формулу (4.9'),

$$\psi_s \left[1 - \sum_i \frac{\gamma_i}{(1 - \varepsilon_i)(s - 1)} (\varepsilon_i^{-s+1} - 1) \right] = g_s, \quad (4.23)$$

где

$$\psi_s = \int_0^\infty \psi(E) E^{s-1} dE, \quad (4.23')$$

$$g_s = \int_0^\infty g(E) E^{s-1} dE = \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} g(E) E^{s-1} dE, \quad (4.23'')$$

причем мы должны считать, что $c = \operatorname{Re} s < 0$.

По формуле обращения (4.12) найдем отсюда

$$\psi(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{E^{-s} g_s ds}{1 - \sum_i \frac{\gamma_i}{(1-\varepsilon_i)(s-1)} (\varepsilon_i^{-s+1} - 1)}. \quad (4.24)$$

Значение $\psi(E)$ при $E = \infty$ определяется, очевидно, вычетом подынтегральной функции относительно полюса $s = 0$.

Поэтому

$$\varphi(\infty) = -g_0 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 - \sum_i \frac{\gamma_i}{1-\varepsilon_i} \frac{\varepsilon_i^{-s+1} - 1}{s-1}} = g_0 \frac{1}{1 + \sum_i \gamma_i \frac{\varepsilon_i \ln \varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}} \quad (4.25)$$

где, согласно (4.23''),

$$g_0 = \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} g(E) \frac{dE}{E}.$$

Преобразуем несколько выражение для g_0 . Представим для этой цели $g(E)$ в виде

$$g(E) = \varphi_0(E) - \sum_i \frac{\gamma_i}{1-\varepsilon_i} \frac{1}{E} \int_{\varepsilon_1 E}^E \mu\left(\frac{u}{\varepsilon_i E}\right) \varphi_0(u) du, \quad (4.26)$$

где функция $\mu(x)$ определяется следующим образом:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases} \quad (4.26')$$

Подставим (4.26) в формулу для

$$g_0 = \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \varphi_0(E) \frac{dE}{E} - \sum_j \frac{\gamma_j}{1-\varepsilon_j} \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \frac{dE}{E^2} \int_{\varepsilon_1 E''}^E \mu\left(\frac{u}{\varepsilon_j E}\right) \varphi_0(u) du. \quad (4.27)$$

Рассмотрим двойной интеграл, входящий в (4.27). Пользуясь тем, что $\varphi_0(u)$ отлична от нуля только в интервале $(\varepsilon_1 E'', E'')$, представим интеграл в виде

$$\int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \frac{dE}{E^2} \int_{\varepsilon_1 E}^E \mu\left(\frac{u}{\varepsilon_j E}\right) \varphi_0(u) du = \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \frac{dE}{E^2} \int_{\varepsilon_1 E''}^E \mu\left(\frac{u}{\varepsilon_j E}\right) \varphi_0(u) du. \quad (4.27')$$

Меняя в последнем интеграле порядок интегрирования, получим

$$\int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \frac{dE}{E^2} \int_{\varepsilon_1 E''}^E \mu\left(\frac{u}{\varepsilon_j E}\right) \varphi_0(u) du = \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \varphi_0(u) du \int_u^{E''} \mu\left(\frac{u}{\varepsilon_j E}\right) \frac{dE}{E^2} =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \varphi_0(u) du \int_u^{E''} \frac{dE}{E^2} = \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \varphi_0(u) \left\{ \frac{1}{u} - \max\left(\frac{1}{E''}; \frac{\varepsilon_j}{u}\right) \right\} du = \\ &= \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \varphi_0(u) \frac{du}{u} - \varepsilon_j \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \varphi_0(u) \frac{du}{u} - \frac{1}{E''} \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \varphi_0(u) du. \end{aligned} \quad (4.27'')$$

Подставим (4.27'') в выражение для g_0

$$\begin{aligned} g_0 &= \left(1 - \sum_j \frac{\gamma_j}{1-\varepsilon_j}\right) \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \varphi_0(u) \frac{du}{u} + \sum_j \frac{\varepsilon_j \gamma_j}{1-\varepsilon_j} \int_{\varepsilon_1 E''}^{E''} \varphi_0(u) \frac{du}{u} + \\ &\quad + \frac{1}{E''} \sum_j \frac{\gamma_j}{1-\varepsilon_j} \int_{\varepsilon_j E''}^{E''} \varphi_0(u) du. \end{aligned}$$

После упрощений получим

$$g_0 = \sum_j \frac{\gamma_j \varepsilon_j}{1-\varepsilon_j} \int_{\varepsilon_j E''}^{E''} \varphi_0(u) \left[\frac{1}{\varepsilon_j E''} - \frac{1}{u} \right] du. \quad (4.28)$$

Подставляя (4.28) в формулу (4.25), найдем окончательно выражение для

$$\varphi(\infty) = \frac{1}{1 + \sum_j \frac{\varepsilon_j \ln \varepsilon_j}{1-\varepsilon_j}} \sum_j \frac{\gamma_j \varepsilon_j}{1-\varepsilon_j} \int_{\varepsilon_j E''}^{E''} \varphi_0(u) \left[\frac{1}{\varepsilon_j E''} - \frac{1}{u} \right] du. \quad (4.28')$$

Если имеется только один сорт рассеивающих ядер, то эта формула переходит в формулу (4.17).

Формулы (4.17) и (4.28) дают возможность определить $\varphi(\infty)$, если функция $\varphi(E)$ известна в интервале энергии $(\varepsilon E'', E'')$.

§ 5. Резонансное поглощение в однородной системе с неводородным замедлителем

Формулы (4.17), (4.28) в принципе решают поставленную задачу. В общем виде они приводят, однако, к очень громоздким выражениям, которые мы поэтому не будем здесь выписывать.

Рассмотрим подробнее тот практически важный случай, когда φ , обусловленное наличием одного уровня, близко к единице, т. е., когда каждый отдельный уровень поглощает малую часть нейтронов.

Считая для простоты, что замедлитель содержит ядра только одного сорта, мы будем предполагать, что выполняется условие

$$\beta = \int_{E'}^{\infty} W(E) \frac{dE}{E} \ll 1, \quad (5.1)$$

где $W(E)$ вероятность захвата, обусловленного одним уровнем. Мы увидим далее, что условие $\beta \ll 1$ приводит к результату $1 - \varphi \ll 1$. Заметим, что, строго говоря, (5.1) представляет собой менее жесткое условие, чем требование малости $1 - \varphi$, так как

$$1 - \varphi = \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon} \beta > \beta.$$

Обратимся к основному уравнению

$$\varphi(E) = \frac{1 - W(E)}{(1 - \varepsilon) E} \int_{\varepsilon E}^E \varphi(u) du \quad (5.2)$$

и разложим $\varphi(E)$ в ряд по степеням β

$$\varphi(E) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \varphi_k(E). \quad (5.3)$$

Вводя обозначение

$$W(E) = \beta W_0(E),$$

получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(E) \beta^k = \frac{1 - \beta W_0(E)}{(1 - \varepsilon) E} \int_{\varepsilon E}^E \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \varphi_k(u) du. \quad (5.4)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях β , найдем

$$\varphi_k(E) = \frac{1}{(1 - \varepsilon) E} \int_{\varepsilon E}^E \varphi_k(u) du - \frac{W_0(E)}{(1 - \varepsilon) E} \int_{\varepsilon E}^E \varphi_{k-1}(u) du. \quad (5.5)$$

Полагая здесь $k = 0$, получим

$$\varphi_0(E) = \frac{1}{(1 - \varepsilon) E} \int_{\varepsilon E}^E \varphi_0(u) du. \quad (5.6)$$

Рассматривая действие наиболее низко расположенного уровня, мы должны считать

$$\varphi_0(E) = 1.$$

Соотношение (5.5) приводит при $k = 1$ к уравнению

$$\varphi_1(E) = \frac{1}{(1 - \varepsilon) E} \int_{\varepsilon E}^E \varphi_1(u) du - W_0(u). \quad (5.7)$$

Мы получили неоднородное интегральное уравнение, для решения которого применим преобразование Лапласа — Меллина.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Psi_s &= \int_0^{\infty} E^{s-1} \varphi_1(E) dE = \int_{\varepsilon E}^{\infty} E^{s-1} \varphi_1(E) dE, \quad \operatorname{Re} s = -a < 0, \\ v_s &= \int_0^{\infty} W_0(E) E^{s-1} dE = \int_{\varepsilon E}^{\infty} E^{s-1} W_0(E) dE \end{aligned} \quad (5.8)$$

(мы заменили нижний предел на E' , так как при $E < E'$, $\varphi = 1$, т. е. $\varphi_1 = 0$). Величину a , т. е. $\operatorname{Re} s$ следует выбрать столь большой, чтобы первый интеграл сходился (второй интеграл в силу условия (5.1) сходится очевидно при любом $\operatorname{Re} s \leq 0$).

Умножим (5.7) на E^{s-1} и проинтегрируем по E , в результате получим

$$\Psi_s = \int_0^{\infty} \frac{E^{s-2}}{1 - \varepsilon} dE \int_{\varepsilon E}^E \varphi_1(u) du - v_s. \quad (5.9)$$

Входящий сюда интеграл легко вычисляется

$$\int_0^{\infty} \frac{E^{s-2}}{1 - \varepsilon} dE \int_{\varepsilon E}^E \varphi_1(u) du = \int_0^{\infty} \frac{\varphi_1(u) du}{1 - \varepsilon} \int_u^{\varepsilon E} E^{s-2} dE = \frac{(1/\varepsilon)^{s-1} - 1}{(1 - \varepsilon)(s - 1)} \Psi_s.$$

Итак,

$$\Psi_s = \Psi_s \frac{(1/\varepsilon)^{s-1} - 1}{(1 - \varepsilon)(s - 1)} - v_s.$$

Откуда

$$\Psi_s = v_s \left[\frac{(1/\varepsilon)^{s-1} - 1}{(1 - \varepsilon)(s - 1)} - 1 \right]^{-1}. \quad (5.10)$$

Пользуясь формулой обращения, получим

$$\varphi_1(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a-i\infty}^{-a+i\infty} \frac{v_s E^{-s}}{\frac{(1/\varepsilon)^{s-1} - 1}{(1 - \varepsilon)(s - 1)} - 1} ds, \quad (5.11)$$

Чтобы найти $\lim_{E \rightarrow \infty} \varphi(E)$, заметим, что при достаточно большом E вероятность $W(E)$ может считаться равной нулю. Пусть при $E > E_0$, $W(E) = 0$. Легко видеть, что при $\operatorname{Re} s > 0$

$$|v_s| < E^{\operatorname{Re}s}.$$

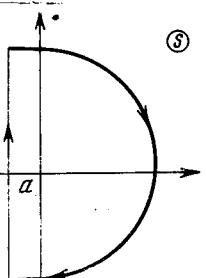
Поэтому при $E > E_0$ интеграл (5.11) можно вычислить, замыкая контур интегрирования, как показано на рис. 3. Подынтегральная функция имеет в качестве полюсов только нуль знаменателя, причем все они, кроме полюса $s = 0$, лежат в правой полуплоскости. Поэтому все вычеты подынтегральной функции, кроме вычета относительно точки $s = 0$, стремятся к нулю с возрастанием E . Отсюда следует, что предел $\varphi_1(\infty)$ равен

$$\varphi_1(\infty) = -\frac{\frac{v_0}{s}}{\frac{d}{ds} \left[\frac{(1/\varepsilon)^{s-1} - 1}{(1-\varepsilon)(s-1)} - 1 \right]_{s=0}} = -\frac{v_0(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon+\varepsilon \ln \varepsilon}. \quad (5.12)$$

Пользуясь формулой (5.8) для v_s , получим

$$\varphi_1(\infty) = -\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon+\varepsilon \ln \varepsilon} \int_{E'}^{\infty} W_0(E) \frac{dE}{E}. \quad (5.13)$$

Переходя от φ_1 и W_0 к величинам φ и W , найдем окончательно



$$\lim_{E \rightarrow \infty} \varphi(E) = 1 - \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon+\varepsilon \ln \varepsilon} \int_{E'}^{\infty} W(E) \frac{dE}{E}. \quad (5.14)$$

Положив здесь $\varepsilon = 0$, получим формулу, справедливую в том случае, когда замедлителем является водород

$$\varphi_H = 1 - \int_{E'}^{\infty} W(E) \frac{dE}{E}. \quad (5.14')$$

Рис. 3.

Сравнивая эту формулу с формулой (5.14) и считая в них функцию $W(E)$ одинаковой, получим соотношение

$$1 - \varphi = (1 - \varphi_H) \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon+\varepsilon \ln \varepsilon}, \quad (5.15)$$

из которого следует, что резонансное поглощение в неводородном замедлителе больше, чем в водороде (при одинаковом $W(E)$).

Это обстоятельство связано с тем, что водород отличается наибольшей замедляющей способностью. Ясно, что чем меньше скорость замедления, тем больше времени проводит замедляющийся нейtron в опасной зоне близи уровней резонансного поглощения и тем больше поэтому вероятность захвата.

Переходя от φ , обязанного одному уровню к общему φ с учетом всех резонансных уровней, получим

$$\varphi = \prod_i \left[1 - \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon+\varepsilon \ln \varepsilon} \int W_i(E) \frac{dE}{E} \right], \quad (5.16)$$

где $W_i(E)$ вероятность захвата, обусловленного i -м уровнем.

Эта формула справедлива в том случае, если для всех уровней выполняется условие

$$\int W_i(E) \frac{dE}{E} \ll 1. \quad (5.17)$$

Если к этому же для всех уравнений выполнено более жесткое условие $\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon+\varepsilon \ln \varepsilon} \int W_i \frac{dE}{E} \ll 1$, т. е. малость резонансного поглощения каждым уровнем, то мы можем представить φ в следующем виде

$$\varphi = \exp \left[-\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon+\varepsilon \ln \varepsilon} \int W \frac{dE}{E} \right], \quad (5.18)$$

где интеграл $\int W \frac{dE}{E}$, так же как и в § 2, определяется как сумма интегралов $\int W_i \frac{dE}{E}$, каждый из которых относится к отдельному резонансному уровню.

В § 2 мы видели, что в случае водородного замедлителя φ имело вид

$$\varphi_H = e^{-\int W \frac{dE}{E}}. \quad (5.19)$$

Сравнение формул (5.18), (5.19) показывает, что при одинаковых $\int W \frac{dE}{E}$ имеет место соотношение

$$\varphi = (\varphi_H)^{\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon+\varepsilon \ln \varepsilon}}. \quad (5.20)$$

Отметим, что для применения формул (5.20), (5.18) требуется выполнение лишь одного условия: вероятность поглощения отдельным уровнем должна быть мала. Общее φ , обусловленное действием всех уровней, может сильно отличаться от единицы.

Благодаря этому формула (5.20) охватывает практически все наиболее важные случаи резонансного поглощения в однородных системах.

Заметим, что для протекания цепной реакции в системах с естественным ураном φ должно дать больше 0,7, поэтому $1 - \varphi$ для каждого из уровней меньше 0,3, т. е. мало по сравнению с единицей.

Это показывает, что условия применимости формул (5.18) и (5.20) практически выполнены.

О РАССЕЯНИИ МЕДЛЕННЫХ НЕЙТРОНОВ В КРИСТАЛЛАХ *

Совместно с А. Ахизером

Рассматривается рассеяние медленных нейтронов в кристаллах с тождественными ядрами. Выведены формулы для сечений упругого и неупругого рассеяния нейтронов (в частности, для скоростей нейтронов, меньших скорости звука в кристалле). Показано, что если длина волны нейтрона много меньше постоянной решетки, то рассеяние происходит одинаково в кристаллах с тождественными и отличающимися ядрами (предполагается, что отличие вызвано наличием изотопов и магнитных моментов ядер). В этих условиях отношение сечения неупругого к сечению упругого рассеяния с учетом только однофононных процессов составляет $8m/7M(E/\Theta)^3$, где m — масса нейтрона, E — его энергия, M — масса ядра, Θ — температура Дебая.

Выясняется, как осуществляется переход при увеличении энергии нейтрона от рассеяния связанными к рассеянию свободными ядрами. Для этого выведена общая формула для сечения рассеяния, учитывающая испускание и поглощение любого числа фононов. При энергиях $E \gg M\Theta/m$ связь атомов в кристалле не отражается на рассеянии нейтронов. В области малых энергий $E \ll \Theta$ при малом общем сечении неупругого рассеяния передаваемая решетке энергии велика, — порядка всей энергии нейтрона.

Вопросу о рассеянии медленных нейтронов в кристаллах посвящено несколько работ [1—4]. Под медленными при этом понимаются нейтроны, энергия которых недостаточна для возбуждения ядер. Замедление таких нейтронов может происходить поэтому только благодаря возбуждению тепловых колебаний решетки. Рассеяние и замедление нейтронов в кристаллах с тождественными ядрами было впервые рассмотрено Виком [1]. В этом случае при рассмотрении процессов испускания и поглощения тепловых фононов может точно выполняться как закон сохранения энергии, так и закон сохранения импульса. Именно этот случай выполнения закона сохранения импульса рассмотрен в [1]. Простым вычислением легко убедиться в том, что при этом испускание фононов невозможно, если скорость нейтрона меньше скорости звука в рассматриваемом кристалле. Поэтому при точном выполнении закона сохранения импульса невозможно замедление нейтронов, скорость которых меньше скорости звука в кристалле. Закон сохранения

импульса не имеет места, если ядра отличаются друг от друга (изотопы, наличие магнитных моментов ядер). В этом случае, рассмотренном в [2], возможно замедление нейтронов, скорость которых меньше скорости звука. В недавней работе Вайншток [4] вновь рассмотрел вопрос о замедлении нейтронов в решетке с тождественными ядрами. Он обратил внимание на то, что, если учитывать процессы переброса, нарушающие строгое выполнение закона сохранения импульса, то становится возможным испускание фононов также при скоростях нейтронов меньших, чем скорость звука. Вайншток, однако, не получил общей формулы для сечения неупругого рассеяния нейтронов и ограничился численным вычислением для случая нейтронов с энергией в 300° К, рассеиваемых в железе при различных температурах. Он также не рассмотрел вопроса о взаимоотношении между замедлением нейтронов в решетках с тождественными и отличающимися ядрами.

В настоящей статье мы рассматриваем этот вопрос и даем общую формулу для сечения неупругого рассеяния нейтронов в кристаллах с тождественными ядрами. Мы выясняем также, как осуществляется при увеличении энергии нейтрона переход от рассеяния связанными к рассеянию свободными ядрами. Для полноты изложения мы приводим здесь также формулы для упругого рассеивания нейтронов в решетке с тождественными ядрами и даем простой квантово-механический вывод теплового фактора.

1. Будем считать решетку состоящей из тождественных ядер, положения которых определяются радиусами-векторами $R_l = R_l^0 + u_l$; R_l^0 определяет положение равновесия l -го ядра, u_l — его смещение из положения равновесия, обусловленное тепловыми колебаниями. Это смещение может быть представлено в виде¹

$$u_l = \sum_{lj} e_{lj} (a_{lj} e^{\frac{i}{\hbar} f R_l^0} + a_{lj}^* e^{-\frac{i}{\hbar} f R_l^0}),$$

где f — импульс и j — поляризация колебания частоты ω_{lj} , a_{lj} и a_{lj}^* — амплитуда колебания и комплексно сопряженная ей величина, имеющие следующие не равные нулю матричные элементы:

$$(a_{lj})_{n_l, n_{l+1}} = \sqrt{\frac{n_l + 1}{2MN\omega_{lj}}} e^{-i\omega_{lj}t}, \quad (a_{lj}^*)_{n_l, n_{l-1}} = \sqrt{\frac{n_l}{2MN\omega_{lj}}} e^{-i\omega_{lj}t}, \quad (1)$$

где n_l — число фононов частоты ω_{lj} , M — масса атома, N — число атомов в кристалле.

Энергия взаимодействия нейтрона с решеткой представляет собой сумму энергий взаимодействия с отдельными ядрами, имеющими вид $A\delta(R - R_l)$, где R — радиус-вектор нейтрона, A —

¹ В этой работе \hbar обозначает везде постоянную Планка, деленную на 2π .

величина, связанная с сечением упругого рассеяния нейтронов свободными ядрами соотношением

$$\sigma_0^{el} = \frac{A^2}{\pi h^4} \left(\frac{mM}{m+M} \right)^2 \quad (2)$$

(m — масса нейтрона). При наличии изотопов A есть, очевидно, функция l . Состояние системы нейtron + кристаллическая решетка определяется заданием импульса нейтрона p и чисел фононов n_1, n_2, \dots с импульсами f_1, f_2, \dots

Рассмотрим прежде всего упругое рассеяние нейтрона, при котором числа n_i не изменяются. Матричный элемент энергии возмущения нейтрона имеет вид

$$M_{p, n_1, n_2, \dots} = \frac{A}{\Omega} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p) R_l^0} \prod_s (n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p) u_{ls}} | n_s), \quad (3)$$

где n_s — число фононов частоты ω_s , Ω — объем кристалла,

$$u_{ls} = e_s (a_s e^{\frac{i}{\hbar} f_s R_l^0} + a_s^* e^{-\frac{i}{\hbar} f_s R_l^0}),$$

p и p' — импульсы нейтрона до и после рассеяния.

Вычисление матричного элемента $(n_s | \dots | n_s)$ может быть просто выполнено, если заметить, что $a_s \sim N^{-1/2}$, причем $N \gg 1$. Разложив $e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p) u_{ls}}$ в ряд по степеням a_s, a_s^* , получим

$$(n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p) u_{ls}} | n_s) = 1 - \frac{1}{2\hbar^2} |(p' - p)e_s|^2 (n_s | a_s a_s^* + a_s^* a_s | n_s) + \dots = \\ = 1 - \frac{1}{2\hbar^2} |(p' - p)e_s|^2 \frac{(n_s + \frac{1}{2})}{MN\omega_s} + \dots$$

Невыписанные члены содержат N^{-2}, N^{-3}, \dots Эти члены могут быть поэтому опущены. Матричный элемент $(n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p) u_{ls}} | n_s)$ можно представить в виде:

$$(n_s | e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p) u_{ls}} | n_s) = \exp \left\{ - \frac{|(p' - p)e_s|^2}{2\hbar^2 MN\omega_s} \left(n_s + \frac{1}{2} \right) \right\},$$

поскольку $N \gg 1$.

Произведение таких матричных элементов, входящее в $M_{p, n_1, n_2, \dots}$, имеет вид e^{-W} , где

$$W = \frac{1}{2} \sum_s \frac{|(p' - p)e_s|^2}{MN\hbar\omega_s} \left(n_s + \frac{1}{2} \right) \quad (4)$$

есть известный из теории рассеяния рентгеновских лучей экспо-

нент теплового фактора. В изотропном случае, если пренебречь дисперсией, W имеет вид

$$W = \frac{3}{2} \frac{(p' - p)^2}{M\Theta} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{T}{\Theta} D \left(\frac{\Theta}{T} \right) \right\}, \quad D(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{z dz}{e^z - 1}, \quad (4')$$

где T — температура, Θ — температура Дебая, измеренные в энергетических единицах. Замечая, что

$$\left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar}(p' - p) R_l^0} \right|^2 = \frac{(2\pi)^3 N}{B} \delta \left(\frac{p' - p}{\hbar} - 2\pi\tau \right),$$

где B — объем элементарной ячейки, τ — вектор обратной решетки, получим из (3) следующее выражение для эффективного сечения упругого рассеяния, отнесенное к единице телесного угла и на одно ядро:

$$\sigma_l^{el} = \frac{2\pi^2 \sigma_0}{B} \delta \left(\frac{p' - p}{\hbar} - 2\pi\tau \right) e^{-2W_\tau}, \quad (5)$$

где $W_\tau = W$ при $p' - p = 2\pi\hbar\tau$, $\sigma_0 = A^2 m^2 / \pi h^4$.

Для того чтобы получить сечение упругого рассеяния в случае поликристалла, нужно усреднить (5) по ориентациям τ . В результате получим:

$$\bar{\sigma}^{el} = \frac{\sigma_0}{8\pi B t^2} \delta \left(\frac{2p}{\hbar} \sin \frac{\vartheta}{2} - 2\pi\tau \right) e^{-2W_\tau}, \quad (5')$$

где ϑ — угол между p и p' .

Аналогичной формулой выражается рассеяние рентгеновских лучей в поликристаллах. Полное сечение упругого рассеяния равно

$$\sigma^{el} = \frac{\pi \sigma_0}{2Bk^2} \sum_{\tau \leq k} \frac{1}{\tau} e^{-2W_\tau}, \quad \hbar k = p. \quad (5'')$$

Эта формула относится к случаю простой решетки. Для сложной решетки должен быть еще введен структурный фактор. Для достаточно больших ka (a — постоянная решетки) сумма в (5'') содержит много слагаемых и может быть поэтому заменена интегралом

$$(для простой кубической решетки \sum_{\tau} \rightarrow 4\pi a^3 \int_0^{\pi} \dots \tau^2 d\tau).$$

В изотропном случае, в пренебрежении дисперсией, получаем при этом

$$\sigma^{el} = \sigma_0 \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}, \quad \alpha = 24 \frac{m}{M} \frac{E}{\Theta} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{T}{\Theta} D \left(\frac{\Theta}{T} \right) \right\}, \quad (6)$$

где E — энергия нейтрона.

Если $k < \pi\tau_{min}$, то сумма (5'') вовсе не содержит членов, упругое рассеяние в этих условиях невозможно. Если увеличивать

волновой вектор k нейтрона, то при значении волнового вектора, равном $\pi\tau_{\min}$, начинается рассеяние, причем сечение вплоть до $k = \pi\tau_2$ (τ_2 — второе в порядке возрастания значение τ) монотонно убывает обратно пропорционально энергии нейтрона. При $k = \pi\tau_2$ сечение скачком возрастает [в (5'') теперь входят два члена] и затем вплоть до $k = \pi\tau_3$ (τ_3 — третье в порядке возрастания значение τ) убывает обратно пропорционально энергии нейтрона. С дальнейшим ростом энергии нейтрона скачки в сечении уменьшаются и в пределе мы получаем формулу (6).

Формулы (5) и (6) получены и исследованы в [3].

2. Перейдем к рассмотрению неупругого рассеяния нейтронов решеткой с тождественными ядрами. Мы рассмотрим наиболее вероятные процессы при малых энергиях нейтрона — испускание и поглощение одного фона. Если таковым является фонон f_j с частотой ω_{fj} , то матричный элемент энергии возмущения нейтрона, отвечающий испусканию этого фона, будет

$$M_{p_{n_1 n_2 \dots n_f} \dots p'_{n_1 n_2 \dots n_f+1} \dots} = \frac{A}{\Omega} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{R}_l^0} \left(n_f \left| e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{u}_{lf}} \right| n_f + 1 \right) \times \\ \times \prod_s' \left(n_s \left| e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{u}_{ls}} \right| n_s \right).$$

Здесь штрих у знака произведения означает, что в нем отсутствует множитель с $s = f$. Так как каждый множитель бесконечно мало отличается от единицы ($N \rightarrow \infty$), то \prod_s' не отличается от \prod_s , входящего в матричный элемент для упругого рассеяния. Мы можем поэтому для \prod_s' , воспользоваться полученным ранее выражением e^{-W} , где W по-прежнему выражается формулой (4). Иными словами, тепловой фактор для рассеяния с учетом однофононных процессов не отличается от теплового фактора для упругого рассеяния.

Для вычисления матричного элемента $(n_f \left| e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{u}_{lf}} \right| n_f + 1)$ нужно разложить $e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{u}_{lf}}$ в ряд, сохранив в нем линейный член. Пользуясь (1), получим:

$$M_{p_{n_f} \dots p'_{n_f+1}} = \frac{A}{\Omega} \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{f}) \mathbf{R}_l^0} \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{e}_{lj} \sqrt{\frac{n_f + 1}{2MN\omega_f}} e^{-W}. \quad (6')$$

Заменив в этом выражении \mathbf{f} на $-\mathbf{f}$ и $n_f + 1$ на n_f , получим матричный элемент для поглощения фона.

Дифференциальное сечение рассеяния с испусканием фона в телесном угле dO_f , отнесенное к одному ядру, равно:

$$d\sigma_+ = \pi^2 \sigma_0 \frac{p'}{p} \frac{|(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{e}_{lj}|^2}{M\hbar\omega_{lj}} (n_f + 1) \delta \left(\frac{\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{f}}{\hbar} - 2\pi\tau \right) \times \\ \times e^{-2W} dO' \frac{f^2 df dO_f}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (6'')$$

где dO' — элемент телесного угла \mathbf{p}' .

В случае поликристалла (6) следует усреднить по всем ориентациям вектора τ . Выполнив это усреднение и проинтегрировав результат по dO_f , получим:

$$d\sigma_+^\tau = \frac{\sigma_0}{32\pi^2} \frac{p'}{p} \frac{|(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{e}_{lj}|^2}{M\hbar\omega_{lj}} (n_f + 1) e^{-2W} \frac{\int f df dO'}{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}| \hbar\tau}. \quad (7)$$

Рассмотрим подробнее тот случай, когда можно не учитывать дисперсии фона. Для простоты расчета будем считать, что существует одна скорость звука s . Вводя вместо угла между \mathbf{p}' и \mathbf{p} новую переменную $x = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|$ и просуммировав (7) по поляризациям j , получим:

$$d\sigma_+^\tau = \frac{\sigma_0}{16\pi} (n_f + 1) e^{-2W} \frac{x^2 dx df}{Ms\hbar^2\tau}. \quad (7')$$

Аналогичный вид с n_f вместо $n_f + 1$ имеет сечение для поглощения фона \mathbf{f} .

Для определения полного сечения неупругого рассеяния с испусканием фона выясним, каковы пределы изменения переменных x и f . В (7') предполагаются выполнеными законы сохранения ²

$$\frac{p^2 - p'^2}{2m} - sf = 0, \quad \mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{f} = 2\pi\hbar\tau. \quad (8)$$

[Мы пишем здесь, имея в виду в дальнейшем исследование формулы (7'), энергию фона в виде sf .]

Заметим, что из (8) вытекает соотношение $\frac{1}{2}(v + v')(f - 2\pi\hbar\tau) = sf$, где v и v' — скорости нейтрона до и после испускания фона. Если считать скорость нейтрона v меньшей, чем скорость звука, то при $\tau = 0$ выполнение написанного соотношения невозможно. Иными словами, при точном выполнении закона сохранения импульса испускание фона невозможно [1], если $v < s$. Оно становится, однако, возможным при $\tau \neq 0$. На это обстоятельство обратил внимание Вайншток [4]. Поглощение фона при $v < s$ возможно, но при этом должно выполняться условие [1]: $f \geq 2m(s - v)$, что часто противоречит требованию $f < f_0(sf_0 = \Theta)$ [4].

Вводя переменную $x = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|$, получим из второго условия (8)

$$x + f \geq 2\pi\hbar\tau, \quad |x - f| \leq 2\pi\hbar\tau.$$

² Рассмотрению законов сохранения в случае неупругого рассеяния нейтронов в кристаллах посвящена статья Теллера и Зигера [5].

Из закона сохранения энергии (в случае испускания фонона) следует, что

$$x \leq p + p' = p + \sqrt{p^2 - 2msf}, \quad x \geq p - \sqrt{p^2 - 2msf}.$$

Этими соотношениями определяется область интегрирования по x, f . Мы изобразим ее графически, однако предварительно введем безразмерные величины:

$$\xi = \frac{sf}{E}, \quad \eta = \frac{x}{2p}, \quad \tau^* = \frac{\pi h \tau}{p}.$$

На рис. 1 заштрихована получающаяся область интегрирования, причем $\beta = \frac{1}{4} \frac{v}{s}$. Легко видеть, что максимально возможное τ^* при $v < s$ равно единице, иными словами, допустимые при неупругом рассеянии с испусканием фонона значения τ , так же как и при упругом рассеянии, не превосходят k/π .

Для получения полного сечения неупругого рассеяния с испусканием одного фонона, σ^+ , нужно проинтегрировать (7) по f, x и просуммировать по всем допустимым значениям τ^*

$$\sigma_+ = \frac{1}{4} \sigma_0 \frac{m}{M} \left(\frac{p}{ms} \right)^2 \sum_{\tau^* < 1} \frac{1}{\tau^*} \int (n_f + 1) e^{-2W} \eta^2 d\eta d\xi. \quad (9)$$

Приведем результат интегрирования в формуле (9) при $\beta \ll 1$, т. е. $v \ll 4s$. В этом случае при интегрировании по η можно подын-

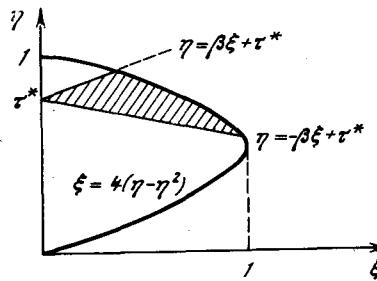


Рис. 1

тегральную функцию заменить ее значением при $\eta = \tau^*$ и считать интервал изменения η равным $2\beta\xi$. Таким образом, мы получим

$$\begin{aligned} \sigma_+ &= \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{p}{ms} \right)^3 \times \\ &\times \sum_{\tau^* < 1} \left\{ \tau^{*3} (1 - \tau^*)^2 + \frac{1}{8} \tau^{*2} \left(\frac{T}{E} \right)^2 \int_0^{4\tau^*(1-\tau^*)\frac{E}{T}} \frac{z dz}{e^z - 1} \right\} e^{-2W}, \quad (9') \end{aligned}$$

где

$$W_\tau = 12 \frac{mE}{M\Theta} \tau^{*2} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{T}{\Theta} D \left(\frac{\Theta}{T} \right) \right\}.$$

Если сумма (9) содержит много членов, что имеет место при выполнении условия $ak \gg 1$, то суммирование может быть заменено интегрированием по $\frac{4\pi a^3 p^3}{(\pi h)^3} \tau^{*2} d\tau^*$. Первый член в (9'), при пренебрежении тепловым фактором, дает при этом

$$\frac{\sigma_+}{\sigma_0} = \frac{8}{7} \frac{m}{M} \left(\frac{E}{\Theta} \right)^3. \quad (10)$$

[В рассматриваемом случае температура Дебая определяется, как $\Theta = (6\pi^2)^{1/3} \frac{hs}{a}$.]

Как показано в [2], такой же формулой определяется отношение сечений неупругого и упругого рассеяния в кристаллах с отличающимися ядрами (предполагается, что отличие вызывается наличием изотопов и магнитных моментов ядер).

Таким образом, при достаточно больших k ($ka \gg 1$) неупругое рассеяние нейтронов в решетках с тождественными и отличающимися ядрами происходит одинаково. Это обстоятельство легко понять, если заметить, что при достаточно больших k в рассмотрение входит большое число возможных значений τ , так что в (6) суммирование может быть заменено интегрированием по τ . Благодаря этому исчезнет δ -функция от импульсов. Таким образом, учет всех возможных процессов переброса приводит к полному устранению интерференционных условий, заменяющих закон сохранения импульса в кристаллической решетке. С другой стороны, ясно, что в решетке с нетождественными ядрами также не выполняется закон сохранения импульса, так что различие между этими двумя типами решеток исчезает.

Если p столь велико, что суммирование по τ может быть заменено интегрированием, то сечение σ_+ может быть представлено как

$$\begin{aligned} \sigma_+ &= \frac{3}{4\pi} \sigma_0 \frac{m}{M} \int \frac{p'}{p} \frac{(p' - p)^2}{2m} (n_e + 1) e^{-\frac{3}{M\Theta} (p' - p)^2 F} \frac{e^{\Theta} d\Theta dO'}{\Theta^3} = \\ &= 24 \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{E}{\Theta} \right)^3 \int \left(\frac{1}{e^{E\xi/T} - 1} + 1 \right) e^{-24 \frac{m}{M} \frac{E}{\Theta} F \eta^2} \xi \eta^3 d\xi d\eta, \\ F &= \frac{1}{4} + \frac{T}{\Theta} D \left(\frac{\Theta}{T} \right) \end{aligned}$$

[η при заданном ξ меняется между $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \xi})$ и $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \xi})$, $0 \leq \xi \leq 1$].

Если не учитывать тепловой фактор, то

$$\sigma_+ = 3 \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{E}{\Theta} \right)^3 \int_0^1 (2 - \xi) \sqrt{1 - \xi} \left(1 + \frac{1}{e^{E\xi/T} - 1} \right) \xi d\xi,$$

откуда

$$\begin{aligned} \text{и} \quad \sigma_+ &= \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{E}{\Theta} \right)^3 \left\{ \frac{8}{7} + \pi^2 \left(\frac{T}{E} \right)^2 \right\} \quad \text{при } T \ll E, \\ \sigma_+ &= \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{E}{\Theta} \right)^3 \left\{ \frac{8}{7} + \frac{48}{15} \frac{T}{E} \right\} \quad \text{при } T \gg E. \end{aligned} \quad (10')$$

Однофононныe процессы, которые мы пока рассматриваем, дают первый член в разложении сечения неупругого рассеяния в ряд по степеням E/Θ . Учет двухфононных процессов дал бы сечение, пропорциональное $\left(\frac{m}{M}\right)^2 \left(\frac{E}{\Theta}\right)^6$. Таким образом, речь идет о разложении в ряд по степеням $\frac{m}{M} \left(\frac{E}{\Theta}\right)^3$. Мы можем ограничиться рассмотрением однофононных процессов при выполнении условия $\frac{m}{M} \left(\frac{E}{\Theta}\right)^3 \ll 1$.

Отсюда далее следует, что учет теплового фактора в неупругом рассеянии, в отличие от упругого рассеяния, имеет смысл только в том случае, когда $W \sim \frac{m}{M} \frac{E}{\Theta} \ll \left(\frac{m}{M}\right)^{2/3} \ll 1$. Действительно, член, пропорциональный W^3 в разложении e^{-2W} по степеням W , не может уже рассматриваться без сечения, соответствующего испусканию двух фононов.

Сечение для поглощения фонона σ_- может быть найдено по формуле

$$\sigma_- = \frac{1}{4} \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{p}{ms} \right)^2 \sum_{\tau^*} \frac{1}{\tau^*} \int n_i e^{-2W_\tau} \eta^2 d\eta d\xi. \quad (11)$$

На рис. 2 заштрихованы области интегрирования, отвечающие трем различным значениям τ^* , обозначенным через τ_1^* , τ_2^* , τ_3^* . Уравнение прямой типа (1) имеет вид

$$\eta - \beta \xi = \tau^*, \quad \beta = \frac{1}{4} \frac{v}{s}.$$

Прямая типа (2) имеет уравнение

$$\eta + \beta \xi = \tau^*.$$

Далее ξ_0 обозначает Θ/E . Максимальное возможное τ^* равно, очевидно,

$$\tau_{\max}^* = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + \xi_0}) + \beta \xi_0.$$

Если $\beta \ll 1$, то подынтегральную функцию можно заменить ее значением при $\eta = \tau^*$ и считать интервал изменения η равным $2\beta\xi_0$. Таким образом, мы получим

$$\sigma_- = \frac{1}{2} \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{p}{ms} \right)^3 \sum_{\tau^*} \tau^* e^{-2W_\tau} \int \frac{\xi d\xi}{e^{E\xi/T} - 1}. \quad (11')$$

Пределы интегрирования по ξ зависят от τ^* , как это показано на рис. 2.

В частности, если $\eta_1 = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \xi_0} - 1) < 1$, то

$$\begin{aligned} \sigma_- &= \frac{1}{2} \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{T}{E} \right)^2 \left(\frac{p}{ms} \right)^3 \left\{ \sum_{\substack{\tau^* \\ \tau_{\max} > \tau^* > \eta_1}} \tau^* e^{-2W_\tau} f \left(\frac{\Theta}{T} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{\eta_1 \geq \tau^* > 0}} f \left(\frac{4\tau^{*2} + 4\tau^*}{T} E \right) \tau^* e^{-2W_\tau} - \sum_{\substack{\eta_1 \geq \tau^* > 1}} f \left(\frac{4\tau^{*2} - 4\tau^*}{T} E \right) \tau^* e^{-2W_\tau} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$f(z) = \int_0^z \frac{\xi d\xi}{e^\xi - 1}.$$

Если $T \ll \Theta$, $T \ll E$, то

$$\sigma_- = \frac{\pi^2}{3} \frac{m}{M} \sigma_0 \frac{s}{v} \left(\frac{T}{ms^2} \right)^2 \sum_{\substack{\tau^* \\ \tau_{\max} \geq \tau^* \geq 0}} \tau^* e^{-2W_\tau}. \quad (12)$$

Если $T \gg \Theta$, $T \gg E$, то

$$\begin{aligned} \sigma_- &= \frac{1}{2} \frac{m}{M} \sigma_0 \frac{s}{v} \frac{T}{ms^2} \left\{ \sum_{\substack{\eta_1 \geq \tau^* \geq 0}} 4\tau^{*2} (1 + \tau^*) e^{-2W_\tau} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{\tau^* \\ \tau_{\max} > \tau^* > 1}} 4\tau^{*2} (\tau^* - 1) e^{-2W_\tau} + \frac{\Theta}{E} \sum_{\substack{1 \geq \tau^* > \eta_1}} \tau^* e^{-2W_\tau} \right\}. \quad (12') \end{aligned}$$

Здесь W_τ имеет тот же смысл, что и в формуле (9'), $\eta_1 = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \xi_0} - 1)$.

Если импульс нейтрона достаточно велик, так что в (11) входит много слагаемых, то сумма по τ^* может быть заменена интегралом. Мы получим при этом

$$\begin{aligned} \sigma_- &= \frac{3}{4\pi} \frac{m}{M} \int \frac{p'}{p} \frac{(p' - p)^2}{2m} e^{-\frac{3}{M\Theta} (p' - p)^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{T}{\Theta} D \left(\frac{\Theta}{T} \right) \right) \frac{e^{de/dO'}}{\Theta^3 (e^{\epsilon/T} - 1)} = \\ &= 24 \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{E}{\Theta} \right)^3 \int_0^{\xi_0} \frac{\xi d\xi}{e^{E\xi/T} - 1} \int_{\frac{1}{2} (\sqrt{1 + \xi} - 1)}^{\frac{1}{2} (\sqrt{1 + \xi} + 1)} \eta^3 e^{-24 \frac{m}{M} \frac{E}{\Theta} \left(\frac{1}{4} + \frac{T}{\Theta} D \left(\frac{\Theta}{T} \right) \right) \eta^2} d\eta. \end{aligned}$$

Пренебрегая тепловым фактором, получим

$$\sigma_- = 3 \frac{m}{M} \sigma_0 \frac{E}{\Theta} \left(\frac{T}{\Theta} \right)^2 \int_0^{\Theta/T} \left(2 + \frac{T}{E} z \right) \sqrt{1 + \frac{T}{E} z} \frac{z dz}{e^z - 1}.$$

Если $T \ll \Theta$ и $T \ll E$, то

$$\sigma_- = \pi^2 \frac{m}{M} \sigma_0 \frac{E}{\Theta} \left(\frac{T}{\Theta} \right)^2.$$

Если $T \ll \Theta$, $T \gg E$, то

$$\sigma_- = 3\Gamma \left(\frac{7}{2} \right) \frac{m}{M} \left(\frac{T}{E} \right)^{1/2} \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3 \sigma_0.$$

Если $T \gg \Theta$, то

$$\sigma_- = 6 \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{E}{\Theta} \right)^2 \frac{T}{\Theta} \left\{ \frac{1}{3} \left[\left(1 + \frac{\Theta}{E} \right)^{1/2} - 1 \right] + \frac{1}{5} \left[\left(1 + \frac{\Theta}{E} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}.$$

Укажем формулы для вероятности изменения энергии нейтрона от E к E' , если учитывать однофононные процессы и считать, что суммирование по τ может быть заменено интегрированием.

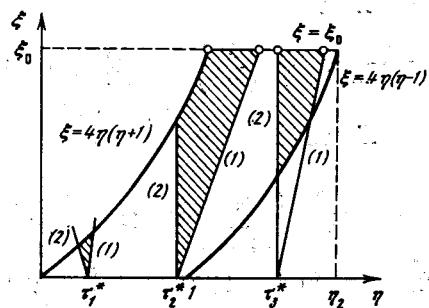


Рис. 2

Вероятность перехода нейтрона с энергией E в область энергий dE' с испусканием фонона равна

$$dw_+ = \sqrt{\frac{2m}{M}} \frac{\sigma_0}{(2\pi\hbar)^3 s^3} \frac{\sqrt{E'}}{\sqrt{M s^3}} (E'^2 - E'^2) (n_\omega + 1) dE', \quad h\omega = E - E' \quad (12'')$$

(n_ω — функция Планка); аналогичная вероятность с поглощением фонона равна

$$dw_- = \sqrt{\frac{2m}{M}} \frac{\sigma_0}{(2\pi\hbar)^3 s^3} \frac{\sqrt{E'}}{\sqrt{M s^3}} (E'^2 - E'^2) n_\omega dE', \quad h\omega = E' - E. \quad (12''')$$

Из этих формул видно, что наиболее вероятны большие передачи энергии нейтрона, — порядка всей его энергии.

Приведем еще формулу для изменения энергии нейтрона на единице его пути

$$-\frac{dE}{dx} = N \sum_{\tau} \int h\omega (d\sigma_+^\tau - d\sigma_-^\tau), \quad (13)$$

где N — число атомов в 1 см^3 . Если $ak \gg 1$, так что суммирование по τ можно заменить интегрированием, то, пренебрегая тепловым фактором, будем иметь

$$-\frac{dE}{dx} = 3 \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{E}{\Theta} \right)^3 EN \left\{ \int_0^1 (2 - \xi) \sqrt{1 - \xi} \left(1 + \frac{1}{e^{E\xi/T} - 1} \right) \xi^2 d\xi - \int_0^{\xi_0} \frac{(2 + \xi) \sqrt{1 + \xi} \xi^2 d\xi}{e^{E\xi/T} - 1} \right\}, \quad (13')$$

где $\xi_0 = \Theta/E$. Если $T \ll \Theta$ и $T \ll E$, то

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{64}{105} \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{E}{\Theta} \right)^4 \Theta N. \quad (13'')$$

Если $T \ll \Theta$ и $E \ll T$, то

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{E}{\Theta} \right)^4 \Theta N \left\{ \frac{64}{105} + \frac{8}{7} \frac{T}{E} - \Gamma \left(\frac{9}{2} \right) \left(\frac{T}{E} \right)^{1/2} \right\}. \quad (13''')$$

Если $E \ll T$ и $T \gg \Theta$, то

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{m}{M} \sigma_0 \left(\frac{E}{\Theta} \right)^4 \Theta N \left\{ \frac{64}{105} + \frac{T}{E} \left[\frac{8}{7} + 2 \left(\left(1 + \frac{\Theta}{E} \right)^{1/2} - 1 \right) - \frac{2}{7} \left(\left(1 + \frac{\Theta}{E} \right)^{1/2} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (13^{IV})$$

3. Мы перейдем теперь к выводу общей формулы для эффективного сечения рассеяния нейтронов с учетом поглощения и испускания любого числа фононов. Пусть по-прежнему p и p' — значения импульса нейтрона до и после рассеяния; n_1^0, n_2^0, \dots и n_1, n_2, \dots — совокупность чисел фононов в начальном и конечном состояниях. Интересующая нас вероятность перехода имеет, очевидно, вид:

$$w = \frac{2\pi}{h} \left(\frac{A}{\Omega} \right)^2 \sum_{n_1 n_2 \dots} \left| \sum_l e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p) R_l^0} \langle n_1^0 n_2^0 \dots | e^{\frac{i}{\hbar} (p' - p) u_l} | n_1 n_2 \dots \rangle \right|^2 \times \\ \times \delta \left(E' + \sum_i (n_l - n_l^0) h\omega_i - E \right).$$

Входящий сюда матричный элемент можно представить как

$$(n_1^0 n_2^0 \dots | \dots | n_f n_{f'} \dots) = \prod_f M_{n_f^0 n_f} = \prod_f (n_f^0 | e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}_f} | n_f),$$

где

$$u_{lf} = e_{lf} (a_{lf} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{R}_f^0} + a_{lf}^* e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{R}_f^0}).$$

Вспоминая, что матричные элементы a_{lf} и a_{lf}^* содержат $N^{-1/2}$, мы можем ограничиться рассмотрением только тех случаев, когда n_f отличается от n_f^0 не больше чем на единицу. Вводя для краткости обозначение

$$q_f^2 = \frac{|(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{e}_{lf}|^2}{2MN\hbar\omega_{lf}},$$

имеем с точностью до членов порядка $1/N$

$$\begin{aligned} |M_{n_f^0 n_f}|^2 &= 1 - (2n_f^0 + 1) q_f^2, & |M_{n_f^0, n_f^0+1}|^2 &= (n_f^0 + 1) q_f^2, \\ |M_{n_f^0, n_f^0-1}|^2 &= n_f^0 q_f^2. \end{aligned}$$

Замечая, что д-функция может быть представлена в виде

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ixx} dx,$$

и переходя от вероятности w к дифференциальному сечению рассеяния $d\sigma$, в результате которого нейtron движется в телесном углу dO' и обладает энергией в интервале dE' , получим

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\sigma_0}{8\pi^2} \frac{p'}{p} dE' dO' \int \left\{ \frac{1}{N} \left| \sum_f e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{R}_f^0} \right|^2 \prod_f [1 - (2\bar{n}_f + 1) q_f^2] + \right. \right. \\ &\quad + \sum_f \frac{1}{N} \left| \sum_f e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{R}_f^0} \right|^2 (\bar{n}_f + 1) q_f^2 e^{i\alpha\hbar\omega_f} + . \\ &\quad + \sum_f \frac{1}{N} \left| \sum_f e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{R}_f^0} \right|^2 \bar{n}_f q_f^2 e^{-i\alpha\hbar\omega_f} + \\ &\quad \left. \left. + \sum_{ff'} \frac{1}{N} \left| \sum_f e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{f} + \mathbf{f}') \cdot \mathbf{R}_f^0} \right|^2 (\bar{n}_f + 1) (\bar{n}_{f'} + 1) q_f^2 q_{f'}^2 e^{i\alpha(\hbar\omega_f + \hbar\omega_{f'})} + \dots \right\} \right. \end{aligned}$$

(для простоты из многофононных процессов здесь выписан только один член, отвечающий возникновению двух фононов f и f'); $d\sigma$ отнесено к одному ядру. Входящие сюда \sum_f дают д-функции от импульса, однако, если энергия нейтрона достаточно велика, а нас интересует именно этот случай, то, как мы видели

в § 2, эти д-функции можно вовсе не учитывать. Поэтому, пренебрегая степенями q_f^2 , получим

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\sigma_0}{8\pi^2} \frac{p'}{p} dE' dO' \int e^{i\alpha(\mathbf{E}' - \mathbf{E})} \left\{ 1 - \sum_f [2\bar{n}_f + 1] q_f^2 - \right. \\ &\quad - (\bar{n}_f + 1) q_f^2 e^{i\alpha\hbar\omega_f} - \bar{n}_f q_f^2 e^{-i\alpha\hbar\omega_f} \left. \right\} + \\ &\quad + \sum_{ff'} (\bar{n}_f + 1) (\bar{n}_{f'} + 1) q_f^2 q_{f'}^2 e^{i\alpha(\hbar\omega_f + \hbar\omega_{f'})} \} d\alpha. \end{aligned}$$

Учитывая малость q_f^2 ($N_f \rightarrow \infty$), можно представить $d\sigma$ в виде

$$d\sigma = \frac{\sigma_0}{8\pi^2} \frac{p'}{p} dO' dE' \int e^{i\alpha(\mathbf{E}' - \mathbf{E}) + g(\alpha)} d\alpha, \quad (14)$$

где

$$g(\alpha) = \sum_f \{ \bar{n}_f + 1 \} e^{i\alpha\hbar\omega_f} + \bar{n}_f e^{-i\alpha\hbar\omega_f} - 2\bar{n}_f - 1 \} q_f^2. \quad (15)$$

Здесь, так же как и в более ранних формулах, \bar{n}_f означает среднее число фононов в состоянии f , определяемое формулой Планка.

Заметим, что данный здесь вывод общей формулы для сечения рассеяния близко примыкает к рассуждениям Лэмба [6] в работе о захвате нейтронов в кристаллах ³.

В изотропном случае при пренебрежении дисперсией фононов функция $g(\alpha)$ может быть представлена в виде:

$$g(\alpha) = \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2}{M\Theta^3} \int_0^\Theta [(n_\epsilon + 1) e^{i\alpha\epsilon} + n_\epsilon e^{-i\alpha\epsilon} - 2n_\epsilon - 1] \epsilon d\epsilon, \quad (15')$$

где $n_\epsilon = 1/(e^{\epsilon/T} - 1)$.

Выполнить интегрирование в (14) в общем виде не представляется возможным, хотя, конечно, формулой (14) можно воспользоваться, чтобы путем численного интегрирования определить $d\sigma$.

Аналитические выражения могут быть получены в двух предельных случаях «слабой» и «сильной» связи, для которых не существует область значений α , лежащих вблизи $\alpha \sim 1/\Theta$. В первом из этих случаев, случае малых Θ , оказываются существенными малые $|\alpha|$, $|\alpha| \Theta \ll 1$. В случае «сильной» связи (большие Θ) существенной является область больших $|\alpha|$, $|\alpha| \Theta \gg 1$. Мы убедимся в справедливости этих утверждений, если рассмотрим выражение для $g(\alpha)$ в случаях $|\alpha| \Theta \ll 1$ и $|\alpha| \Theta \gg 1$. Если $|\alpha| \Theta \ll 1$, то мы можем разложить $g(\alpha)$ в ряд по степеням α . Пользуясь формулой (15'), справедливой в изотропном случае, и ограничиваясь квадратичным по α членом, найдем

$$g(\alpha) = i\alpha \frac{(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2}{2M} - \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2}{M\Theta^3} \alpha^2 \int_0^\Theta \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\epsilon/T} - 1} \right) \epsilon^3 d\epsilon, \quad |\alpha| \Theta \ll 1. \quad (15'')$$

³ Мы пользуемся здесь случаем, чтобы поблагодарить Л. Д. Ландау, указавшего нам на возможность проведения данного вывода.

Вводя обозначение

$$E_0^4 = 3 \int_0^\Theta \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{e/T} - 1} \right) e^3 de,$$

будем иметь

$$g(\alpha) = ta \frac{(p' - p)^2}{2M} - (\alpha \Theta)^2 \frac{(p' - p)^2}{2M} \frac{E_0^4}{\Theta^5}, \quad |\alpha| \Theta \ll 1. \quad (15'')$$

Отметим, что $E_0^4 = \frac{3}{8} \Theta^4$, если $T \ll \Theta$, и $E_0^4 = \Theta^3 T$, если $T \gg \Theta$. Из (15'') в соединении с формулой (14), определяющей сечение рассеяния, легко заключить, что область малых $|\alpha|, |\alpha| \Theta \ll 1$, будет существенной в интеграле (14) при выполнении условия

$$\frac{(p' - p)^2}{2M} \left(\frac{E_0}{\Theta} \right)^4 \gg \Theta. \quad (16)$$

Энергия «отдачи» $R = \frac{(p' - p)^2}{2M}$ по порядку величины равна $\frac{m}{M} E$ (E — энергия нейтрона в начальном состоянии). Поэтому условие (16) может быть переписано так: $E \gg M/m (\Theta/E_0)^4 \Theta$. В предельных случаях высоких и низких температур отсюда следует $E \gg M\Theta/m$, если $T \ll \Theta, E \gg (M/m)(\Theta^2/T)$, если $T \gg \Theta$.

При выполнении условия (16) мы можем пользоваться выражением (15'') для $g(\alpha)$. В этом случае эффективное сечение $d\sigma$ равно

$$d\sigma = \frac{\sigma_0}{8\pi^2} \frac{p'}{p} dE dO' \int e^{i\alpha(E'-E+R)-\alpha^2 \frac{RE_0^4}{\Theta^3}} d\alpha = \\ = \frac{\sigma_0}{8\pi^2} \frac{dE' dO'}{\Theta \sqrt{\frac{R}{\Theta} \left(\frac{E_0}{\Theta} \right)^4}} e^{-\frac{1}{4} \frac{(E'-E+R)^2}{\Theta R (E_0/\Theta)}}. \quad (17)$$

Очевидно, формула (17') практически не отличается от δ -функции:

$$d\sigma = \frac{\sigma_0}{4\pi} \frac{p'}{p} \delta(E' - E + R) dE' dO'. \quad (17')$$

Смысл формулы (17') очевиден: нейtron рассеивается по закону столкновения упругих шаров, связь атомов в кристалле не играет никакой роли. Это и есть случай «слабой» связи, осуществляющейся при выполнении условия (16).

Проинтегрируем сперва (17') по углам dO' . Имея в виду, что под знаком δ -функции стоит выражение

$$E' + \frac{m}{M} (E' + E) - E - \frac{2m}{M} \sqrt{EE'} \cos \vartheta = 0$$

(ϑ — угол между p и p'), получим $d\sigma = M\sigma_0 dE' / 4mE$.

Интегрируя по E' в пределах $\left(\frac{M-m}{M+m} \right)^3 E \leq E' \leq E$, получим

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{M}{m+M} \right)^2 = \sigma_0^{el}, \quad E \geq \frac{M}{m} \left(\frac{\Theta}{E_0} \right)^4 \Theta.$$

Полное сечение рассеяния нейтрона оказывается независящим от энергии нейтрона и равным сечению σ_0^{el} рассеяния отдельным ядром.

Рассмотрим теперь противоположный предельный случай «сильной» связи, когда $\Theta \rightarrow \infty$. Если $R \ll \Theta$, то, как следует из (15'), модуль функции $g(\alpha)$ мал. В этом случае, очевидно, несущественны осциллирующие множители $e^{\pm i\alpha \hbar \omega}$, входящие в (15'). Мы можем поэтому не рассматривать их и считать, что $g(\alpha)$ мало отличается от $g(\infty)$, определяемой как

$$g(\infty) = -3 \frac{(p' - p)^2}{M\Theta^3} \int_0^\Theta \left(n_e + \frac{1}{2} \right) e de.$$

Сравнение $g(\infty)$ с выражением для теплового фактора (4) показывает, что $g(\infty) = -2W$. Возвращаясь к формуле (14) для сечения, мы видим, что при $R \ll \Theta$

$$d\sigma = \frac{\sigma_0}{8\pi^2} \frac{p'}{p} e^{-2W} \int e^{i\alpha(E'-E)} d\alpha \cdot dO' dE' = \frac{\sigma_0}{4\pi} e^{-2W} \delta(E' - E) dO' dE'. \quad (18)$$

Мы получили формулу для сечения упругого рассеяния. Пр

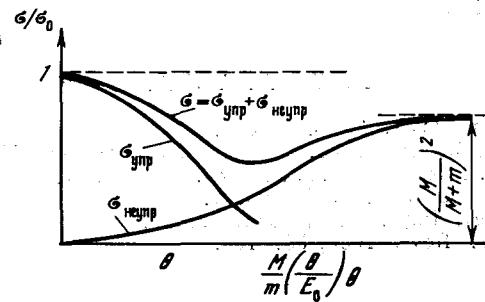


Рис. 3

интегрировав (18) по $dE' dO'$, получим полное сечение упругого рассеяния, совпадающее с даваемым формулой (6).

Таким образом, в области малых энергий нейтрона $E \ll \frac{M}{m} \Theta$ имеет место главным образом упругое рассеяние ($E' = E$). Сечение рассеяния $\sigma(E)$ мало отличается от σ_0 , поскольку тепловой фактор не отличается значительно от единицы ($W \ll 1$). Сечение упругого рассеяния уменьшается с ростом энергии и одновременно начинает

все большую роль играть неупругое рассеяние. В области больших энергий $E \gg \frac{M}{m} \Theta \left(\frac{\Theta}{E_0} \right)^4$ чисто упругое рассеяние отсутствует; главную роль играет неупругое рассеяние, причем энергия, теряемая нейтроном, определяется обычными законами сохранения при столкновении частиц нейтрона и неподвижного атома. В § 3 мы видели, что в области малых энергий можно при рассмотрении неупругого рассеяния ограничиться учетом однофононных процессов, который для сечения неупругого рассеяния дает $\sigma_+/\sigma_0 \sim \sim (m/M)(E/\Theta)^3 \ll 1$. Это находится в соответствии со сделанными только что выводами.

Заметим, что в области малых энергий нейтрона при малом общем сечении неупругого рассеяния наиболее вероятны большие передачи энергии нейтрона, порядка всей его энергии, в то время как в области больших энергий нейтрона, когда неупругое рассеяние составляет главную часть рассеяния, передаваемая энергия будет порядка $(m/M)E$.

На рис. 3 приведен схематически ход зависимости от энергии сечений $\sigma_{\text{упр}}$, $\sigma_{\text{неупр}}$, $\sigma(E) = \sigma_{\text{упр}} + \sigma_{\text{неупр}}$. Как видно из рис. 3, полное сечение $\sigma(E)$ может обладать минимумом при значении энергии, лежащем между Θ и $\frac{M}{m} \left(\frac{\Theta}{E_0} \right)^4 \Theta$.

В заключение мы хотим здесь поблагодарить акад. Л. Д. Ландау за постоянный интерес к работе.

Физико-технический институт
Академии наук УССР
Академия наук СССР

Получено
20 сентября 1946 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wick. Phys. Zs., 1937, 38, 403, 689.
2. И. Померанчук. ЖЭТФ, 1938, 8, 894. (Собр. трудов, № 25).
3. O. Halpern, M. Hamermesh, M. Johnson. Phys. Rev., 1941, 59, 981.
4. R. Weinstock. Phys. Rev., 1944, 65, 1.
5. Teller, R. Siegert. Phys. Rev., 1942, 62, 37.
6. W. Lamb. Phys. Rev., 1939, 55, 490.

Совместно с А. Ахиевером

Указан простой метод рассмотрения задачи о резонансном рассеянии медленных частиц. Показано, что возможны только два общих закона рассеяния медленных частиц ядрами, а именно: рассеяние, амплитуда которого складывается из амплитуд резонансного и потенциального рассеяния, и рассеяние типа рассеяния медленных нейтронов протонами. В излагаемом методе естественным образом, без каких-либо специальных предположений, вводится конечный радиус действия ядерных сил.

Известно, что если энергия нейтрона или другой частицы, сталкивающейся с ядром, принимает некоторые определенные значения, то вероятность соответствующей ядерной реакции становится особенно большой. Максимумы вероятности отвечают состояниям, при которых энергия падающей частицы совпадает с одним из значений энергии составного ядра, образующегося в результате слияния исходного ядра с падающей частицей.

Это явление ядерного резонанса описывается так называемой резонансной формулой, аналогичной формуле, описывающей резонансные явления, имеющие место при взаимодействии света с материей. В последнем случае при выводе резонансной формулы можно пользоваться теорией возмущений, справедливой ввиду малости постоянной тонкой структуры.

При выводе ядерной резонансной формулы вначале также пользовались теорией возмущений [1, 2], хотя это и является незаконным, так как взаимодействие между падающей частицей и исходным ядром весьма велико. В дальнейшем появился целый ряд работ, посвященных выводу дисперсионной формулы, не основывающемуся на применении теории возмущений [3—8]. В этих работах было показано, что формула типа резонансной может быть получена при весьма общих предположениях, не связанных с обычной теорией возмущений. В общем виде, однако, получаются очень громоздкие и плохо обозримые формулы. Сложность в значительной степени обусловлена далекими от резонанса уровнями. Эти уровни играют существенную роль в так называемом потенциальному рассеянию, взаимоотношение которого с резонансным рассеянием в указанных работах выявлено недостаточно ясно.

* ЖЭТФ, 1948, 18, 603.

Настоящая статья также посвящена выводу дисперсионной формулы, не связанному с применением теории возмущений. Мы рассматриваем ниже, главным образом, случай упругого рассеяния частиц и показываем, что дисперсионная формула может быть получена из весьма общих предположений, не основывающихся на малости каких-либо членов в гамильтониане ядерной системы и не связанных поэтому с обычной теорией возмущений.

В методе, которым мы пользуемся, далекие уровни учитываются автоматически, благодаря чему не возникает трудностей с определением потенциального рассеяния. Кроме того, этот метод охватывает одновременно случай рассеяния медленных нейтронов протонами и приводит к заключению, что возможны только два общих закона рассеяния медленных частиц ядрами, а именно: рассеяние, определяемое дисперсионной формулой, и рассеяние типа рассеяния медленных нейтронов протонами (формула Вигнера).

Рассматривая рассеяние медленных частиц, мы будем предполагать, что длина волны частицы значительно больше, чем радиус действия сил. В этих условиях главную роль играет, как известно, момент относительного движения частиц, равный нулю; поэтому рассеяние будет здесь сферически симметричным.

Если расстояние r между частицами велико, то волновая функция частиц имеет следующий асимптотический вид:

$$\psi = (4\pi v)^{-1/2} r^{-1} (e^{-ikr} - \beta_E e^{ikr}) \psi(i), \quad (1)$$

где k — волновой вектор, равный $(2ME)^{1/2}$ (M — приведенная масса частиц, $E = Mv^2/2$ — кинетическая энергия относительного движения, v — относительная скорость частиц); $\psi(i)$ — волновая функция, описывающая внутреннее состояние частиц. Первое слагаемое в скобках представляет собой падающую, а второе — расходящуюся волну, причем обе они нормированы на единичный поток. Величина β_E , зависящая от энергии в рассматриваемом случае упругого рассеяния, равна по модулю единице, т. е.

$$\beta_E = e^{2i\delta},$$

где δ — вещественная величина, называемая «фазой на бесконечности». Сечение рассеяния $\sigma(E)$ связано с β соотношением

$$\sigma(E) = (4\pi/k^2) \sin^2 \delta = (\pi/k^2) |\beta_E - 1|^2. \quad (2)$$

Нас интересует ход зависимости от энергии сечения $\sigma(E)$. Предполагая $\sigma(E)$ аналитической функцией, будем рассматривать также комплексные значения энергии W и исследуем поведение функции $\sigma(W)$ в окрестности особой точки. Мы будем предполагать, что на конечном расстоянии функция $\sigma(W)$ имеет только простые полюсы. Из физических соображений ясно, что на положительной вещественной полуоси $\sigma(E)$ и β_E особенностей не имеют.

В дальнейшем мы будем исходить из двух основных свойств функции β_W . Первое свойство состоит в том, что на положительной вещественной полуоси, т. е. при $W = E$, функция β_W по модулю

равна единице. Это свойство означает, что отсутствует поглощение частиц, в силу чего интенсивность расходящейся волны должна быть равна интенсивности падающей волны.

Чтобы разъяснить второе свойство, представим себе, что мы совершаляем обход в плоскости комплексного переменного W вокруг нуля. После такого обхода величина волнового вектора, пропорциональная \sqrt{E} , меняет свой знак. Отсюда следует, что член e^{-ikr} , представляющий в (1) падающую волну, после обхода будет представлять расходящуюся волну, и наоборот. С другой стороны, ясно, что в результате обхода квадрат модуля волновой функции не может измениться. Отсюда легко заключить, что после обхода вокруг точки $W = 0$, который переводит \sqrt{E} в $-\sqrt{E}$, величина β_E должна перейти в комплексно сопряженную ей величину β_E^* .¹

Введем в рассмотрение новую переменную $z = \sqrt{W}$; мы можем тогда рассматривать β_W как однозначную функцию z : $\beta_W = \beta(z)$, которая равна по модулю единице на вещественной оси и которая принимает комплексно сопряженные значения в точках $z = \sqrt{E}$ и $z = -\sqrt{E}$ ($E > 0$):

$$\beta(-\sqrt{E}) = \beta(\sqrt{E})^* = 1/\beta(\sqrt{E}).$$

В силу аналитичности $\beta(z)$ отсюда следует, что

$$\beta(-z) = 1/\beta(z). \quad (3)$$

Пусть точка $z = z_0$ есть полюс функции $\beta(z)$. Так как на вещественной оси $|\beta(z)| = 1$, то отсюда следует, что точка $z = z_0^*$ будет нулем $\beta(z)$. Поэтому $\beta(z)$ можно представить в виде:

$$\beta(z) = \frac{z - z_0^*}{z - z_0} \beta_1(z), \quad (4)$$

где $\beta_1(z)$ в точке $z = z_0$ регулярна и, подобно $\beta(z)$, равна по модулю единице на вещественной оси.

Используя (3), мы получим из (4):

$$\frac{1}{\beta(z)} = \frac{-z - z_0^*}{-z - z_0} \beta_1(-z),$$

т. е.

$$\beta(z) = \frac{z + z_0}{z + z_0^*} \beta_2(z), \quad (4')$$

где $\beta_2(z)$ регулярна в точке $z = -z_0^*$. Таким образом точка $z = -z_0^*$ является полюсом $\beta(z)$, а точка $z = -z_0$ — нулем $\beta(z)$.

Из (4) и (4') следует, что если полюс z_0 не чисто мнимый, то

$$\beta_E = \beta(E^{1/2}) = \frac{(E^{1/2} - z_0^*)(E^{1/2} + z_0)}{(E^{1/2} - z_0)(E^{1/2} + z_0^*)} \chi(E^{1/2}), \quad (5)$$

¹ Это свойство было указано нам Л. Д. Ландау.

где $\chi(z)$ регулярна в точках z_0 и $-z_0^*$, равна по модулю единице на вещественной оси и так же, как и $\beta(z)$, удовлетворяет условию (3). Если точка z_0 лежит на мнимой оси, то вместо (5) мы получаем более простое представление β_E :

$$\beta_E = \frac{E^{1/2} - i\alpha}{E^{1/2} + i\alpha} \chi(E^{1/2}). \quad (5')$$

Рассмотрим функцию $\ln \chi(z)/z$. В окрестности точки $W = 0$ плоскости W эта функция однозначна, так как при обходе вокруг нуля и числитель и знаменатель меняют свой знак. Отсюда следует, что

$$\chi(z) = \pm e^{iz\varphi(W)}, \quad (6)$$

где $\varphi(W)$ — аналитическая функция от W , регулярная в точке $W = 0$, а также в точках $W = z_0^2, z_0^{*2}$, и принимающая вещественные значения на положительной половине вещественной оси W .

Таким образом, если точка z_0 не лежит на мнимой оси, то мы получаем следующее представление для β_E :

$$\beta_E = \pm e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} \frac{E - E_0 + iE^{1/2}b}{E - E_0 - iE^{1/2}b}, \quad (7)$$

где

$$E_0 = z_0 z_0^*, \quad b = 2\operatorname{Im} z_0.$$

В том случае, если точка z_0 лежит на мнимой оси, представление β_E имеет вид

$$\beta_E = \pm e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} \frac{E^{1/2} + i\alpha}{E^{1/2} - i\alpha}. \quad (8)$$

Выбор знака в формулах (7), (8) может быть произведен, исходя из условия конечности сечения рассеяния при $E = 0$. В силу (2) отсюда следует, что при $E \rightarrow 0$ $\beta_E \rightarrow 1$. Поэтому в формуле (7) следует взять верхний, а в формуле (8) нижний знак

$$\beta_E = e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} \frac{E - E_0 + iE^{1/2}b}{E - E_0 - iE^{1/2}b}, \quad (7')$$

$$\beta_E = e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} \frac{i\alpha + E^{1/2}}{i\alpha - E^{1/2}}. \quad (8')$$

Определим теперь сечение упругого рассеяния. Подставляя (7') в (2) (обозначая $\gamma = 2b\sqrt{E}$), получим

$$\begin{aligned} \sigma(E) &= \frac{\pi}{k^2} \left| e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} \frac{E - E_0 + iE^{1/2}b}{E - E_0 - iE^{1/2}b} - 1 \right|^2 = \frac{\pi}{k^2} \left| e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} - 1 \right|^2 + \\ &+ \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma^2}{(E - E_0)^2 + \gamma^2/4} + 2\operatorname{Re} \frac{i\gamma(1 - e^{-i\sqrt{E}\varphi(E)})}{E - E_0 - i\gamma/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Это выражение полезно при исследовании поведения сечения вблизи точки $E = E_0$, так как при этом $\varphi(E)$ не имеет особенностей. Если $\varphi(E) = 0$, то (9) переходит в известную резонансную формулу

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma^2}{(E - E_0)^2 + \gamma^2/4}, \quad (10)$$

определяющую сечение резонансного рассеяния вблизи уровня E_0 . Ширина уровня γ пропорциональна \sqrt{E} . Этот результат хорошо известен и находится в соответствии с тем, что мы рассматриваем случай малых энергий, когда длина волны частиц велика по сравнению с радиусом действия сил, т. е. размерами ядра.

В общем случае, когда $\varphi(E) \neq 0$, сечение рассеяния (9) состоит из трех слагаемых. Первое слагаемое, не содержащее резонансного знаменателя, представляет собой так называемое потенциальное рассеяние, аналогичное рассеянию, происходящему в потенциальном поле. Второе слагаемое представляет собой резонансное рассеяние, и третье — интерференцию обоих видов рассеяния.

Если энергия стремится к нулю, то потенциальное рассеяние стремится к пределу (мы считаем, что $E = \hbar^2/k^2/2M$)

$$\sigma_{\text{пот}} = (\pi\hbar^2/2M) |\varphi(0)|^2. \quad (11)$$

Экспериментально определяемое сечение рассеяния σ_s для медленных нейтронов порядка πR^2 , где R — радиус ядра ($R = r_0 A^{1/3}$, $r_0 \approx 1.8 \cdot 10^{-13}$ см [9]). Резонансное рассеяние (10) мало по сравнению с πR^2 , исключая случай близкого резонанса, поэтому σ_s обозначено главным образом потенциальному рассеянию.

Заметим, однако, что σ_s изменяется не монотонно с ростом атомного номера A . Это обстоятельство указывает, по-видимому, на то, что потенциальное рассеяние скорее соответствует рассеянию от потенциальной ямы, нежели рассеянию от барьера, так как в последнем случае рассеяние менялось бы монотонно с ростом атомного номера (оно равнялось бы точно $4\pi R^2$).

Определим теперь сечение рассеяния в том случае, когда величина β_E выражается формулой (8). Подставляя (8) в (2), получим

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} |\beta_E - 1|^2 = \frac{\pi}{k^2} \left| e^{i\sqrt{E}\varphi(E)} \frac{E^{1/2} + i\alpha}{E^{1/2} - i\alpha} + 1 \right|^2.$$

Для достаточно малых энергий мы заменим здесь $e^{i\sqrt{E}\varphi(E)}$ на $1 + i\sqrt{E}\varphi(0)$. В результате простых выкладок получим

$$\sigma(E) = \frac{4\pi\hbar^2}{M} \frac{1 - \alpha\varphi(0)}{E + \alpha^2}. \quad (12)$$

Мы получили формулу, которая совпадает с известной формулой, определяющей сечение рассеяния медленных нейтронов протонами [9]. При этом если $\varphi(0) = 0$, то формула (12) соответствует тому случаю, когда радиус действия ядерных сил считается рав-

ным нулю. При $\varphi(0) \neq 0$ формула учитывает конечность радиуса ядра. Последнее обстоятельство находится в соответствии с выражением (11), определяющим потенциальное рассеяние.

Итак, мы видим, что самые общие предположения о величине β_E приводят только к двум возможным выражениям для сечения рассеяния (9), (12).

Перейдем теперь к изучению общего случая распада составного ядра. Будем по-прежнему считать, что относительный момент количества движения частиц, образующих составное ядро, а также частиц, возникающих при его распаде, равняется нулю (это означает, что мы ограничиваемся рассмотрением достаточно медленных частиц). Для простоты мы сначала не будем учитывать спины ядер.

Начнем с определения общего сечения всех неупругих процессов σ_u . Известно [10], что σ_u связано с отношением амплитуд расходящейся и сходящейся волн β_E соотношением

$$\sigma_u = (\pi/k^2)(1 - |\beta_E|^2). \quad (13)$$

(Напомним, что если возможно поглощение частиц, то $|\beta_E| < 1$). Сечение упругого рассеяния равняется при этом

$$\sigma_s = (\pi/k^2)|1 - \beta_E|^2. \quad (14)$$

Выясним, какой вид имеет теперь β_E .

В случае чисто упругого рассеяния β_E вблизи уровня E_0 определяется формулой (7). Если возможно поглощение частиц, то формулу (7) следует заменить следующей:

$$\beta_E = e^{i\psi(E)} \frac{E - E_0 + i[(\gamma/2) - \gamma_e]}{E - E_0 - i\gamma/2}, \quad (15)$$

где $\psi(E)$ — вещественная функция, не имеющая особенностей при $E > 0$. Величина γ_e удовлетворяет условию $\gamma_e < \gamma$, необходимому для того, чтобы было $|\beta_E| < 1$. Если $\gamma_e = \gamma$, то (15) переходит в (7').

Подставляя выражение (15) в (13), мы получим формулу для общего сечения неупругих столкновений

$$\sigma_u = \frac{\pi}{k^2} \left(1 - \left| \frac{E - E_0 + i[(\gamma/2) - \gamma_e]}{E - E_0 - i\gamma/2} \right|^2 \right) = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_e(\gamma - \gamma_e)}{(E - E_0)^2 + (\gamma^2/4)}. \quad (16)$$

Сечение упругого столкновения, согласно (14), имеет вид

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} \left| e^{i\psi(E)} - 1 - e^{i\psi(E)} \frac{i\gamma_e}{E - E_0 - i\gamma/2} \right|^2. \quad (17)$$

Последняя формула отличается от формулы (9) только тем, что в числителе амплитуды резонансного рассеяния вместо полной ширины γ входит теперь величина γ_e . Если не учитывать потенциального рассеяния, то формула (17) дает

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_e^2}{(E - E_0)^2 + (\gamma^2/4)}, \quad (17')$$

откуда следует, что γ_e представляет собой частичную ширину по отношению к упругому рассеянию.

Вводя обозначение $\gamma_u = \gamma - \gamma_e$ (суммарная ширина уровня для всех неупругих процессов), перешифтуем (16) в виде

$$\sigma_u = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_e \gamma_u}{(E - E_0)^2 + (\gamma^2/4)}. \quad (16')$$

Чтобы получить сечение σ_a для какого-либо определенного процесса, необходимо лишь в формуле (16') заменить γ_u на соответствующую частичную ширину γ_a . Мы получим, таким образом, общую дисперсионную формулу

$$\sigma_a = \frac{\pi}{k^2} \frac{\gamma_e \gamma_a}{(E - E_0)^2 + (\gamma^2/4)}. \quad (18)$$

В приведенных выше формулах мы считали спин ядра равным нулю. Покажем теперь, как следует учитывать спин ядра. Так как мы рассматриваем случай медленных частиц, то для них $l = 0$ и поэтому значения момента количества движения составного ядра I заключены в пределах $|i - s| \leq I \leq i + s$, где i — момент количества движения исходного ядра, s — спин падающей частицы. Вероятность данного значения I равна

$$(2I + 1)/(2s + 1)(2i + 1), \quad (19)$$

так как общее число возможных ориентаций векторов i и s равно $(2i + 1)(2s + 1)$, а число ориентаций вектора I равно $2I + 1$. Чтобы учесть спины ядер, нужно приведенные выше формулы для σ_u и σ_s умножить на (19). Мы получим общую дисперсионную формулу [2].

В заключение мы хотели бы поблагодарить А. И. Ахиезера, Л. Д. Ландау и Н. Н. Меймана, дискуссия с которыми помогла выяснению изложенных выше вопросов.

Академия наук СССР
Физико-технический институт
Академии наук УССР

Получено 8 октября 1947 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Breit, E. Wigner. Phys. Rev., 1936, 49, 519.
2. H. Bethe, G. Placzek. Phys. Rev., 1937, 51, 450.
3. P. Kapur, R. Peierls. Proc. Roy. Soc., 1938, 166, 277.
4. A. Siegert. Phys. Rev., 1939, 56, 750.
5. G. Breit. Phys. Rev., 1946, 69, 472.
6. E. Wigner. Phys. Rev., 1946, 70, 15, 606.
7. E. Wigner. Proc. Nat. Acad. Sci., 1946, 32, 302.
8. H. Feshbach, Peaslee, V. Weisskopf. Phys. Rev., 1947, 71, 145.
9. H. Bethe, R. Bacher. Rev. Mod. Phys., 1936, 8.
10. H. Bethe. Phys. Rev., 1940, 57, 1125.

О РЕФРАКЦИИ НЕЙТРОНОВ *

Совместно с А. Ахиезером

Выведены формулы, определяющие коэффициент преломления медленных нейтронов для обычных кристаллов и намагниченных тел (ферромагнетиков и парамагнетиков). В последнем случае коэффициент преломления, а также угол полного отражения зависят от ориентации спина нейтрона по отношению к вектору магнитной индукции. Это обстоятельство может быть использовано для получения полностью поляризованного пучка нейtronов.

Известно [1—3], что в решетках с тождественными ядрами, не имеющими механических моментов, не может происходить рассеяние нейтронов с длиной волны, удовлетворяющей неравенству $\lambda/2\pi \gg (\pi\tau_{\min})^{-1}$, где τ_{\min} — минимальное значение вектора обратной решетки. Однако при прохождении таких нейтронов из одной среды в другую они могут испытывать преломление и отражение. Эти явления можно описывать макроскопически, вводя коэффициент преломления нейтронов n [4]. Такое макроскопическое рассмотрение законно (как и в оптике), если длина волны нейтронов больше, чем расстояние между соседними атомами. Предполагая это условие выполненным, мы выведем здесь выражение для коэффициента преломления n^1 .

Напомним предварительно, что энергия взаимодействия достаточно медленного нейтрона с ядром может быть представлена в виде [5]:

$$A\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}), \quad (1)$$

где \mathbf{r} и \mathbf{R} — радиусы-векторы, определяющие положение нейтрона и ядра. A есть некоторая постоянная, не зависящая от расстояния между частицами; она может быть легко связана с сечениями упругого рассеяния и захвата нейтронов. Учитывая захват нейтронов, следует, как видно из дальнейшего, считать величину A комплексной.

Установим, прежде всего, связь между величиной A и комплексной фазой рассеяния η_0 , определяющей асимптотическое поведение

волновой функции нейтрона (мы рассматриваем, естественно, только s -волну, поэтому величина η снабжена индексом нуль).

Будем предполагать, что модуль фазы рассеяния мал по сравнению с единицей; это значит, что сечения рассеяния и захвата предполагаются малыми по сравнению с $\pi(\lambda/2\pi)^2$. (Последнее условие выполняется во всех практически интересных случаях.)

Известно, что, если модуль фазы η_0 мал, то она может быть представлена в виде [6]:

$$\eta_0 = \eta_0^{(r)} + i\eta_0^{(i)} = -(2mk/\hbar^2) \int_0^\infty V(r) |f_0(r)|^2 r^2 dr, \quad (2)$$

где $\eta_0^{(r)}$ и $\eta_0^{(i)}$ — вещественная и минимая части η_0 , $V(r)$ — энергия взаимодействия нейтрона и ядра, m — масса нейтрона, k — его волновой вектор и

$$f_0(r) = \sin kr/kr.$$

Подставляя в качестве $V(r)$ в (2)

$$A\delta(\mathbf{r}) \rightarrow (A/4\pi r^2)\delta(\mathbf{r}),$$

получим

$$\eta_0 = -\frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^\infty \frac{A}{4\pi r^2} \delta(r) \left(\frac{\sin kr}{kr}\right)^2 r^2 dr = -\frac{mkA}{2\pi\hbar^2}. \quad (3)$$

Сечения рассеяния и захвата нейтронов, σ_s и σ_a , выражаются через $\eta_0^{(r)}$ и $\eta_0^{(i)}$ следующим образом [4, 6]:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= (4\pi/k^2)[(\eta_0^{(r)})^2 + (\eta_0^{(i)})^2], \\ \sigma_a &= (4\pi/k^2)\eta_0^{(i)}(1 - 2\eta_0^{(i)}). \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда следует, что

$$\eta_0^{(i)} \approx (k^2\sigma_a/4\pi), \quad \eta_0^{(r)} \approx \pm [(k^2/4\pi)\sigma_s - (k^2\sigma_a/4\pi)^2]^{1/2}. \quad (5)$$

Пользуясь (3), найдем

$$A = -\frac{2\pi\hbar^2}{km}\eta_0 = -\frac{2\pi\hbar^2}{m} \left\{ \pm \left(\frac{\sigma_s}{4\pi} - \frac{k^2\sigma_a^2}{16\pi^2} \right)^{1/2} + i \frac{k}{4\pi}\sigma_a \right\}. \quad (6)$$

Определим теперь потенциальную энергию нейтрона в кристалле. Она равна, очевидно, сумме энергий взаимодействия нейтрона со всеми ядрами решетки. Предполагая ядра тождественными и не имеющими механических моментов, получим следующее выражение для искомой энергии

$$U(\mathbf{r}) = A \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i), \quad (7)$$

где суммирование распространяется на все ядра решетки.

* ЖЭТФ, 1948, 18, 475.

Общая теория рефракции нейтронов изложена в работе Гольдбергера и Зейца [4]. Ниже приводится простой вывод формулы для коэффициента преломления, несколько отличающейся от вывода, данного в работе [4].

Мы будем предполагать, что длина волны нейтрона значительно больше расстояния между соседними атомами. В этих условиях суммирование по l может быть заменено интегрированием по ρdV , где ρ — число ядер в единице объема, dV — элемент объема. Поэтому энергия взаимодействия (7) приобретает вид

$$U = A\rho. \quad (8)$$

Смысл проделанной нами замены суммирования интегрированием заключается, по существу, в том, что матричные элементы операторов (7) и (8) при выполнении условия $\lambda/2\pi \gg a$, где a — среднее расстояние между соседними атомами, одинаковы. Выражение (8) можно трактовать как потенциальную энергию нейтрона, находящегося в кристалле.

Напишем уравнение Шредингера для нейтрона в кристалле. Обозначим волновую функцию нейтрона через $\psi(\mathbf{r})$. Используя выражение (8) в качестве потенциальной энергии, получим

$$-(\hbar^2/2m)\Delta\psi + A\rho\psi = E\psi, \quad (9)$$

где E — энергия нейтрона. Вне тела уравнение Шредингера имеет вид

$$-(\hbar^2/2m)\Delta\psi_0 = E\psi_0. \quad (10)$$

Будем искать решения уравнений (9), (10) в виде плоских волн

$$\psi = C_1 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \psi_0 = C_2 e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}}, \quad (11)$$

где \mathbf{k} — волновой вектор нейтрона в среде, а \mathbf{k}_0 — в вакууме; C_1 и C_2 — постоянные.

Подстановка (11) в (9) и (10) дает

$$(\hbar^2/2m)k^2 + A\rho = E \quad (\hbar^2/2m)k_0^2 = E;$$

откуда

$$k^2 - k_0^2 = 4\pi\rho \left\{ \pm \left(\frac{\sigma_s}{4\pi} - \frac{k^2\sigma_a^2}{16\pi^2} \right)^{1/2} + i \frac{k}{4\pi} \sigma_a \right\}. \quad (12)$$

Введем теперь коэффициент преломления нейтронов (индекс рефракции) n , как это обычно делается в оптике,

$$n = k/k_0. \quad (13)$$

Величина n очень мало отличается от единицы (см. ниже), поэтому, используя для определения n формулу (12), мы заменим в ее правой части k на k_0 . Итак,

$$n^2 - 1 = \frac{4\pi\rho}{k_0^2} \left\{ \pm \left(\frac{\sigma_s}{4\pi} - \frac{k_0^2\sigma_a^2}{16\pi^2} \right)^{1/2} + i \frac{k_0}{4\pi} \sigma_a \right\}. \quad (14)$$

Если поглощение нейтронов отсутствует, то $\sigma_a = 0$ и

$$n^2 - 1 = \pm (\rho/k^2) \sqrt{4\pi\sigma_s} = \pm \hbar^2\rho \sqrt{4\pi\sigma_s}/2mE. \quad (15)$$

Эти формулы являются основными соотношениями в теории нейтронной рефракции. Подробный анализ этих соотношений дан в работах [4, 5].

Определим теперь коэффициент преломления нейтронов для намагниченного (ферромагнитного или парамагнитного) кристалла. Предполагая, что длина волны нейтрона значительно больше расстояния между соседними ядрами кристалла, мы должны в этом случае добавить к потенциальной энергии $A\rho$ в уравнении Шредингера (9) член $-\mu_s B$, где μ — магнитный момент нейтрона, s — матричный вектор Паули и B — вектор индукции.

Взамен формулы (12) мы получим теперь соотношения:

$$k_{\pm}^2 - k_0^2 = -(2m/\hbar^2)(\rho A \pm \mu B), \quad (16)$$

где k_+ и k_- — значения волнового вектора нейтрона (внутри кристалла), спин которого направлен соответственно по или против вектора магнитной индукции.

Обозначая коэффициенты преломления нейтронов для обеих ориентаций спина через n_+ и n_- , найдем в соответствии с (13) и (16):

$$n_+^2 = 1 + \frac{1}{E} \left\{ \frac{2\pi\hbar^2\rho}{m} \left[\pm \left(\frac{\sigma_s}{4\pi} - \frac{k^2\sigma_a^2}{16\pi^2} \right)^{1/2} + i \frac{k}{4\pi} \sigma_a \right] - \mu B \right\},$$

$$n_-^2 = 1 + \frac{1}{E} \left\{ \frac{2\pi\hbar^2\rho}{m} \left[\pm \left(\frac{\sigma_s}{4\pi} - \frac{k^2\sigma_a^2}{16\pi^2} \right)^{1/2} + i \frac{k}{4\pi} \sigma_a \right] + \mu B \right\}. \quad (17)$$

Пользуясь формулой (42) работы [4], получим следующие выражения, определяющие коэффициенты отражения нейтронов для обеих ориентаций спина нейтрона:

$$R_+ = [(n_+^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} - \cos \theta]^2 / [(n_+^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} + \cos \theta]^2, \quad (18)$$

$$R_- = [(n_-^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} - \cos \theta]^2 / [(n_-^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} + \cos \theta]^2.$$

Так как коэффициент преломления зависит от ориентации спина нейтрона, то угол полного отражения будет также зависеть от ориентации спина нейтрона по отношению к вектору магнитной индукции. Это обстоятельство может быть использовано для получения поляризованного пучка нейтронов. Если угол падения нейтронов таков, что только нейтроны с одной ориентацией спина полностью отражаются от поверхности намагниченного кристалла, то прошедшие в кристалл нейтроны будут полностью поляризованы. Отраженный луч нейтронов будет при этом частично поляризован.

Определим разность углов полного отражения для обеих ориентаций спина нейтрона. Согласно формуле (42) работы [4], полу-

чим в том случае, когда можно пренебречь поглощением нейтронов

$$\varphi_+ = \sqrt{2(1-n_+)} = (\sqrt{\pi\sigma_s}\hbar^2\rho/mE + \mu B/E)^{1/2}, \quad (19)$$

$$\varphi_- = \sqrt{2(1-n_-)} - (\sqrt{\pi\sigma_s}\hbar^2\rho/mE - \mu B/E)^{1/2},$$

где $\varphi_{\pm} = \pi/2 - \theta_{\pm}$, θ_{\pm} — углы полного внутреннего отражения для обеих ориентаций спина ($\sin \theta_{\pm} = n_{\pm}$).

Разность углов φ_+ и φ_- имеет вид

$$\varphi_+ - \varphi_- = (\mu B/E)(mE/\sqrt{\pi\sigma_s}\hbar^2\rho)^{1/2}. \quad (20)$$

Подставляя сюда $B \approx 1.8 \cdot 10^4$, $\mu = 1.93 \mu_0$ [5] (μ_0 — ядерный магнетон), мы получим для тепловых нейтронов $\varphi_+ - \varphi_- \approx 5'$, т. е. величину того же порядка, что и угол полного отражения [4]. Отсюда следует, что опыты по получению поляризованных нейтронов указанным методом не должны приводить к дополнительным трудностям по сравнению с хорошо изученными опытами с полным отражением нейтронов.

Приведем еще формулы для степени поляризации в отраженном и падающем пучках. Под степенью поляризации мы понимаем величину $S = (I_+ - I_-)/(I_+ + I_-)$, где I_+ и I_- — интенсивности нейтронов с обеими ориентациями спина.

Степень поляризации отраженных нейтронов равна

$$S_R = (R_+ - R_-)/(R_+ + R_-) = \frac{(1 - f_+)^2(1 + f_-)^2 - (1 - f_-)^2(1 + f_+)^2}{(1 - f_+)^2(1 + f_-)^2 + (1 - f_-)^2(1 + f_+)^2}, \quad (21)$$

где

$$f_{\pm} = (1 - 2\mu_{\pm}/\Phi)^{1/2}, \quad \mu_{\pm} = 1 - n_{\pm} \quad (22)$$

(Φ есть угол между направлением пучка и плоской поверхностью ферромагнетика). Степень поляризации преломленных нейтронов равняется

$$S_d = [(1 - R_+) - (1 - R_-)]/[(1 - R_+) + (1 - R_-)] = \\ = (R_- - R_+)/(2 - R_+ - R_-). \quad (23)$$

Академия наук СССР
Физико-технический институт
Академии наук УССР

Получено
8 октября 1947 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Wick. Phys. Zs., 1937, 38, 403, 689.
2. R. Weinstock. Phys. Rev., 1944, 65, 1.
3. A. Ахнезер, И. Померанчук. J. Phys. USSR, 1947, 11, 167 (Собр. трудов, № 28).
4. M. Goldberger, F. Seitz. Phys. Rev., 1947, 71, 294.
5. L. Alvarez, F. Bloch. Phys. Rev., 1940, 57, 111.

ЗАМЕЧАНИЕ О РАССЕЯНИИ ЧАСТИЦ С НУЛЕВОЙ ЭНЕРГИЕЙ *

Если силовое поле таково, что не существует связанных уровней, то можно указать некоторые неравенства, которым должны удовлетворять эффективные сечения рассеяния медленных частиц в этом поле.

Мы будем считать поле убывающим на больших расстояниях настолько быстро, что существует интеграл по всему пространству от потенциала. Полагая энергию рассеиваемой частицы E равной нулю, получаем уравнение Шредингера в виде

$$-(\hbar^2/2m)\Delta\psi + V\psi = 0. \quad (1)$$

При отсутствии связанных уровней ψ -функция, отвечающая $E=0$, соответствует низшему энергетическому уровню и поэтому никогда не обращается в нуль [1]. (Если бы низший энергетический уровень находился в дискретном спектре, то ψ -функция обращалась бы в нуль на бесконечности; ввиду отсутствия связанных состояний это исключено.)

Вводим функцию φ , согласно

$$\psi = 1 + \varphi. \quad (2)$$

φ стремится к нулю при возрастании расстояния от силового центра. Единица представляет падающую волну с нулевой энергией:

$$\Delta\varphi = (2mV/\hbar^2)(1 + \varphi).$$

Отсюда

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{V(\mathbf{r}') [1 + \varphi(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3)$$

При очень больших r получаем

$$\varphi = 1 - (m/2\pi\hbar^2 r) \int V(\mathbf{r}) [1 + \varphi(\mathbf{r})] d\mathbf{r}. \quad (4)$$

Амплитуда рассеянной волны S равна

$$S = -(m/2\pi\hbar^2) \int V(\mathbf{r}) [1 + \varphi(\mathbf{r})] d\mathbf{r}. \quad (5)$$

Сравнивая (3) и (5), можем установить некоторые свойства S .

* ЖЭТФ, 1948, 18, 1146.

Пусть $V < 0$ (силы притяжения, но связанных уровней нет). Так как $\psi = 1 + \varphi > 0$, то S и φ положительны: $S > 0$, $\varphi > 0$. Ввиду положительности φ в этом случае имеет место неравенство

$$S > - (m/2\pi\hbar^2) \int V(r) dr. \quad (6)$$

Аналогичное неравенство для эффективного сечения рассеяния $\sigma = 4\pi |S|^2$.

$$\sigma > (m^2/\pi\hbar^4) \left| \int V(r) dr \right|^2. \quad (7)$$

В поле сил притяжения, не приводящих к связанным уровням, эффективное сечение рассеяния медленных частиц всегда больше борновского [2]. Амплитуда рассеянной волны положительна.

Если $V > 0$ (силы отталкивания), то (3) и (5) дают $\varphi < 0$, $S < 0$. Отбрасывание φ в (5) увеличивает S и σ :

$$-S < (m/2\pi\hbar^2) \int V(r) dr, \quad (8)$$

$$\sigma < (m^2/\pi\hbar^4) \left| \int V(r) dr \right|^2. \quad (9)$$

В случае отталкивателей сил эффективное сечение рассеяния медленных частиц всегда меньше борновского. Амплитуда рассеянной волны отрицательна.

Неравенства (6) — (9) могут быть получены также и несколько иным способом. Разделим уравнение (1) на ψ . Это можно сделать, так как ψ нигде не обращается в нуль

$$(1 + \varphi)^{-1} \Delta\varphi = 2mV/\hbar^2.$$

Производя очевидные преобразования, интегрируем это уравнение по сфере большого радиуса R

$$(2m/\hbar^2) \int V dr = 4\pi R^2 (d\varphi/dR) + \int (\nabla\varphi)^2 (1 + \varphi)^{-2} dr.$$

В соответствии с (4) имеем

$$S = - (m/2\pi\hbar^2) \int V dr + (1/4\pi) \int (\nabla\varphi)^2 (1 + \varphi)^{-2} dr.$$

Отсюда сразу получается (6) — (9).

Заметим, что функция ψ предполагалась нами вещественной, что справедливо при $E = 0$.

Академия наук СССР

Получено 22 сентября 1948 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики, т. 1. ГТТИ, 1934, стр. 429, 436.
2. Мотт, Месси. Теория атомных столкновений. ОНТИ, 1936, стр. 112.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НЕЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ЭЛЕКТРОНАМИ И НЕЙТРОНАМИ *

Совместно с А. И. Ахизером

Изучая асимметрию рассеяния тепловых нейтронов в ксеноне, Ферми и Маршалл сделали вывод, что она является свидетельством существования неэлектромагнитного взаимодействия между нейтронами и электронами. При анализе их опытных данных необходимо, однако, учитывать, что асимметрия рассеяния может, помимо специфических короткодействующих сил неэлектромагнитного характера, вызываться также интерференцией волн, рассеянных различными атомами газа. Интерференция возникает вследствие корреляции во взаимном расположении атомов, обязанной тому, что расстояние между центрами двух атомов, практически не может быть меньше двух атомных радиусов. Хотя этот интерференционный эффект, будучи пропорциональным плотности газа, оказывается малым при давлениях порядка атмосферы (при таких давлениях производились опыты) сам эффект, исследованный авторами¹, также очень мал. Простой расчет показывает, что эффект корреляции оказывается того же порядка величины, что и исследованный эффект. Расчету этого интерференционного эффекта и посвящена настоящая заметка.

Сечение рассеяния нейтрона в газе определяется, как известно, следующим выражением:

$$S = \left| \sum_n' e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_n} \right|^2, \quad (1)$$

где \mathbf{q} — изменение волнового вектора нейтрона при рассеянии, \mathbf{r}_n — радиус-вектор, определяющий положение n -го атома, черта сверху означает усреднение по всем возможным расположениям атомов. Представив (1) в виде

$$S = N + \sum_n \overline{e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_{nm}}}, \quad (2)$$

где N — общее число атомов, $\mathbf{r}_{nm} = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m$ (штрих над суммой обозначает, что в сумме отсутствуют члены с $n = m$), мы видим, что асимметрия рассеяния определяется множителем

$$\delta = N^{-1} \sum_{nm} \overline{e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_{nm}}}. \quad (2')$$

* ЖЭТФ, 1949, 19, 558.

¹ E. Fermi, L. Marshall. Phys. Rev., 1947, 72, 1139.

**ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ
ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗИРОВАННОГО ГАЗА
ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ***

B. B. Берестецкий, B. L. Иоффе, И. Я. Померанчук

Мы будем рассматривать теплопроводность полностью ионизированного газа при температурах (в энергетической шкале) порядка 100 кэв. В этих условиях можно считать скорости ионов малыми сравнительно со скоростями электронов и пренебречь вкладом ионов в теплопроводность. Кинетическое уравнение для функции распределения по импульсам $n(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ в общем случае при наличии градиента температуры и внешнего электрического поля \mathbf{E} можно записать в виде

$$(\nabla \nabla n) - \frac{\partial n}{\partial p} e \mathbf{E} = - \mathcal{J}_{ie} - \mathcal{J}_{ee}, \quad (1)$$

где \mathcal{J}_{ie} — интеграл столкновений электронов с ионами и \mathcal{J}_{ee} интеграл столкновений между электронами:

$$\mathcal{J}_{ie} = \int v [N(\mathbf{P}, \mathbf{r}) n(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - N(\mathbf{P}', \mathbf{r}) n(\mathbf{p}', \mathbf{r})] \sigma_s(p, \theta') d\Omega d\mathbf{P}, \quad (2)$$

$$\mathcal{J}_{ee} = \int [n(\mathbf{P}, \mathbf{r}) n(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - n(\mathbf{P}', \mathbf{r}) n(\mathbf{p}', \mathbf{r})] dw(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{P}) d\mathbf{P}, \quad (3)$$

где $N(\mathbf{P}, \mathbf{r})$ — функция распределения ионов, $\sigma_s(p, \theta')$ дифференциальное сечение рассеяния электронов при столкновении с ионами и dw — вероятность рассеяния при столкновении электрон — электрон.

Как известно [1], при газо-кинетических процессах в случае кулоновского взаимодействия основную роль играют столкновения с большими присечными расстояниями, сопровождающиеся малыми передачами импульса. Для таких столкновений, т. е. для столкновений, при которых передача импульса $q = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}| \ll p$ — величины самого импульса — сечение рассеяния электрона с импульсом p на ионе на угол θ будет равно

$$\sigma_s(p, \theta) = 4 \left(\frac{e^2}{pv} \right)^2 \frac{1}{\theta^4} \quad (4)$$

(заряд иона равен единице). Вероятность рассеяния при столкновении релятивистских электронов может быть получена из матричного элемента рассеяния, подсчитанного с помощью релятивистских волновых функций и учетом запаздывания. Согласно [2], этот матричный элемент равен

$$H_{AE} = 4\pi c^2 e^2 \left\{ \frac{(u_{01}^* u_1)(u_{02}^* u_2) - (u_{01}^* \alpha_1 u_1)(u_{02}^* \alpha_2 u_2)}{c^2 (p_{01} - p_1)^2 - (E_{01} - E_1)^2} \right\}, \quad (5)$$

* Работа выполнена в 1951 г. в Институте теоретической и экспериментальной физики. Публикуется впервые.

Пусть $\rho(\mathbf{r}_{nm})$ — есть функция распределения в пространстве \mathbf{r}_{nm} . Тогда

$$\delta = N \frac{\int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_{nm}} \rho(\mathbf{r}_{nm}) d\mathbf{r}_{nm}}{\int \rho(\mathbf{r}_{nm}) d\mathbf{r}_{nm}}. \quad (3)$$

Если $U(r)$ — взаимная потенциальная энергия двух атомов, расстояние между которыми равно r , то $\rho \sim e^{-U/T}$ (T — абсолютная температура, выраженная в эргах). Поэтому

$$\delta = N \frac{\int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} e^{-U/T} d\mathbf{r}}{\int e^{-U/T} d\mathbf{r}}. \quad (4)$$

О функции $U(r)$ в случае благородных газов мы сделаем следующие предположения:

$$U(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } r > 2R, \\ \infty, & \text{если } r \leq 2R, \end{cases} \quad (5)$$

где R — радиус атома.

Используя (5), перепишем (4) в виде:

$$\delta = N \frac{\int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} (e^{-U/T} - 1 + 1) d\mathbf{r}}{\Omega + \int (e^{-U/T} - 1) d\mathbf{r}} \approx -n \int_{r=0}^{r=2R} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} dr, \quad (6)$$

где Ω — объем и n — плотность газа (мы пренебрегаем объемом атома по сравнению с Ω). Выполнив интегрирование, получим

$$\delta = 4\pi (2R)^3 n \left\{ \frac{\cos 2qR}{(2qR)^2} - \frac{\sin 2qR}{(2qR)^3} \right\}, \quad (7)$$

где $q = (2\rho_0/h) \sin(\theta/2)$ (θ — угол рассеяния нейтрона).

Определим, пользуясь формулой (7), отношение интенсивностей рассеянных нейтронов при углах $\theta_1 = 45^\circ$ и $\theta_2 = 135^\circ$. Обозначая это отношение через ρ , найдем

$$\rho = \frac{1 + 4\pi (2R)^3 n f(\theta_1)}{1 + 4\pi (2R)^3 n f(\theta_2)},$$

где

$$f(\theta) = \frac{\cos \eta}{\eta^2} - \frac{\sin \eta}{\eta^3}, \quad \eta = \frac{8\pi R}{\lambda} \sin \frac{\theta}{2}$$

(λ — длина волны нейтрона). Полагая $\lambda = 2 \cdot 10^{-8}$ см, $R = 1,44 \cdot 10^{-8}$ см, получим $\rho - 1 \approx 1,7 \cdot 10^{-4}$.

По экспериментальным данным¹ $\rho - 1 \approx -0,0005 \pm 0,0085$. Отвлекаясь от того обстоятельства, что в этих опытах фон в 17 раз превышает основной результат, мы видим, что интерференционный эффект имеет тот же порядок величины, то и эффект, исследованный авторами¹.

Академия наук СССР

Получено 9 марта 1949 г.

¹ E. Fermi, L. Marshall. Phys. Rev., 1947, 72, 1139.

где u — спинорные амплитуды электронных волновых функций, p — импульсы, E — энергии электронов, индекс 1 относится к 1-му электрону, индекс 2 — ко второму, индекс 0 обозначает начальное состояние. В матричном элементе (5) не учтен обмен между двумя электронами; не проведена антисимметризация по волновым функциям конечного состояния. Однако при столкновениях с прицельными расстояниями $d \gg \lambda$ — длины волны электрона нет необходимости учитывать квантово-механический эффект обмена (т. е. интерференционные члены). Классическое же удвоение вероятности будет учтено нами впоследствии в том, что интегрирование вероятности по углам будет проводиться по всему пространству вместо полупространства, как это должно было быть для одинаковых частиц. При малых передачах импульса можно считать $u_{01} = u_1$ и $u_{02} = u_2$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} u_{01}^* u_1 &= 1, & u_{01}^* \alpha u_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{c}, \\ u_{02}^* u_2 &= 1, & u_{02}^* \alpha u_2 &= \frac{\mathbf{v}_2}{c}. \end{aligned} \quad (6)$$

Кроме того, разложим по степеням

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_{01} \quad (7)$$

разность энергий, стоящую в знаменателе

$$E_1 - E_{01} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{q}. \quad (8)$$

Тогда получаемая обычным образом вероятность рассеяния электрона с импульсом \mathbf{p}_{01} в элемент $d\mathbf{p}_1$ пространства импульсов равна

$$dw = 4e^4 \frac{\left(1 - \frac{\mathbf{v}_{01} \cdot \mathbf{v}_{02}}{c^2}\right)^2}{[q^2 - (\mathbf{v}_{01} \cdot \mathbf{q})^2/c^2]^2} \delta(\mathbf{v}_{01} - \mathbf{v}_{02}, \mathbf{q}) d\mathbf{p}_1. \quad (9)$$

(Аргумент δ -функции, выражающей закон сохранения энергии, разложен по степеням q до первого порядка).

Как обычно, при вычислении теплопроводности предполагаем градиент температуры и электрического поля малыми, и поэтому распределение электронов слабо отличающимся от равновесного максвелловского

$$n = n_0 (1 + \chi), \quad (10)$$

где n_0 — максвелловское распределение релятивистского электронного газа [3]

$$n_0 d\mathbf{p} = \rho_e \frac{\exp[-c \sqrt{m^2 c^2 + p^2}/T]}{2 \left(\frac{T}{mc^2}\right)^2 K_1\left(\frac{mc^2}{T}\right) + \frac{T}{mc^2} K_0\left(\frac{mc^2}{T}\right)} \frac{d\mathbf{p}}{4\pi (mc)^3}, \quad (11)$$

где ρ_e — число электронов в cm^{-3} , T — температура в энергетических единицах, K_0 и K_1 — функции Макдональда. Функция χ , описывающая отклонение от максвелловского распределения, должна с точностью до более высоких степеней градиента температуры и электрического поля иметь вид

$$\chi = \mathbf{p} \nabla T \chi_1(p) + \mathbf{p} E e \chi_2(p), \quad (12)$$

причем $\chi_1(p)$ и $\chi_2(p)$ являются функциями только абсолютной величины импульса. Левая часть уравнения (1) в предположении постоянной плотности числа частиц может быть с той же точностью записана как

$$\frac{\partial n_0}{\partial T} (\mathbf{v} \nabla T) - \frac{\partial n_0}{\partial p} e \frac{\mathbf{p} E}{p}. \quad (13)$$

Найдем теперь выражения для интегралов столкновений. При этом, поскольку получающиеся уравнения линейны относительно функции χ , мы найдем сначала уравнение для χ_1 . Уравнение для χ_2 получится аналогично. Интеграл столкновений электронов с ионами (2) с помощью (10) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{ie} = & \int v \{N(P) n_0(p) [1 + \chi(p, \mathbf{r})] - N(P') n_0(p') [1 + \chi(p', \mathbf{r})]\} \times \\ & \times \sigma_s(p, \theta') d\Omega' d\mathbf{P} = v n_0(p) \int [\chi(p, \mathbf{r}) - \chi(p', \mathbf{r})] N(P) \sigma_s(p, \theta') d\Omega' d\mathbf{P}, \end{aligned} \quad (14)$$

так как согласно закону сохранения энергии при столкновении

$$N(P) n_0(p) = N(P') n_0(p'). \quad (15)$$

Проводя в (14) интегрирование по \mathbf{P} , которое дает

$$\int N(P) d\mathbf{P} = \rho_i, \quad (16)$$

где ρ_i — число ионов в cm^3 , и используя (12), получаем

$$\mathcal{I}_{ie} = \rho_i v n_0(p) \nabla T \int (\mathbf{p} - \mathbf{p}') \chi_1(p) \sigma_s(p, \theta') d\Omega'. \quad (17)$$

Проектируя подынтегральное выражение на единственное выделенное направление \mathbf{p} и подставляя σ_s из (4), находим выражение для интеграла столкновений с ионами

$$\mathcal{I}_{ie} = 4\pi L v \rho_i n_0(p) \left(\frac{e^2}{pv}\right)^2 (p \nabla T) \chi_1(p). \quad (18)$$

В (18)

$$L = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\theta} = \ln \frac{r_{\max}}{r_{\min}}, \quad (19)$$

где r_{\max} — максимальное, r_{\min} — минимальное прицельное расстояние. Максимальное прицельное расстояние выбирается [1] как расстояние, на котором становится существенным экранирование кулоновского поля данного иона соседними зарядами. Без учета магнитных сил это расстояние может быть принято равным радиусу Дебая — Хюккеля

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{T}{4\pi e^2} \frac{1}{\rho_i + \rho_e}}. \quad (20)$$

Учет магнитных сил не изменит порядка величины r_{\max} , и, следовательно, с точностью до малой величины порядка $1/L$ не изменит логарифма в (19). Минимальное прицельное расстояние в случае электронов с высокой температурой

рой должно быть принято равным $\lambda = \hbar/p$, ибо при таких расстояниях нельзя уже считать передачи импульсов малыми. Таким образом,

$$L = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{137}{8\pi} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \frac{1}{\rho_e} \left(\frac{p}{mc} \right)^2 \frac{T}{mc^2} \right]. \quad (21)$$

Метод рассмотрения далеких соударений, приводящий к обрезанию логарифмически-расходящегося интеграла на пределе θ_{\min} (или r_{\max}), ограничивает относительную точность выражений (18), (26) величиной $\sim 1/L \sim 0.1$. Такова же точность кинетического уравнения (43), (45) и значений теплопроводности, приведенных в табл. 1.

Для вычисления интеграла столкновений между электронами воспользуемся общим выражением, полученным в [1] путем разложения по малым передачам импульса:

$$\mathcal{J}_{ee} = \frac{\partial j_i}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (22)$$

$$j_i = \frac{1}{2} \int dP \left[n(P) \frac{dn(P)}{\partial P_k} - n(P) \frac{\partial n(P)}{\partial P_k} \right] q_i q_k dw, \quad (23)$$

причем dw по-прежнему дается (9) (в обозначениях $v_{01} = v$, $v_{02} = V$, $p_{01} = p$, $p_1 = p'$, $q = p' - p$). Подставляя в j_i вместо $n(p)$ выражение (10), сохраняя только линейные по χ члены, получаем для j_i

$$j_i = -\frac{1}{2} n_0(p) \int n_0(P) \left[\frac{\partial \chi(P)}{\partial P_k} - \frac{\partial \chi(P)}{\partial P_k} \right] q_i q_k dw dP \quad (24)$$

При этом в (24) были отброшены члены, получающиеся подстановкой в (23) равновесной функции n_0 , которая должна обращать в нуль интеграл столкновений (то, что n_0 обращает j_i в нуль, легко может быть проверено непосредственно).

После подстановки $\partial \chi / \partial P_k$ из (12)

$$\frac{\partial \chi}{\partial P_k} = \chi_1(p) \frac{\partial T}{\partial x_k} + (\mathbf{P} \nabla T) \frac{p_k}{p} \frac{\partial \chi}{\partial p} \quad (25)$$

и приведения к виду, удобному для интегрирования по углам, получается следующее выражение для интеграла столкновений между электронами:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{ee} = & \frac{1}{2} (\mathbf{P} \nabla T) \frac{1}{p^2} \left\{ \left[n_0(\Phi_2 - 3\Phi_1) - p \frac{\partial}{\partial p} (n_0(p) \Phi_1(p)) \right] \chi_1(p) - \right. \\ & - \left[4n_0(p) p \Phi_1(p) + p^2 \frac{\partial}{\partial p} (n_0(p) \Phi_1(p)) \right] \frac{\partial \chi_1}{\partial p} - \\ & - n_0(p) \Phi_1(p) p^2 \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial p^2} - n_0(p) [\bar{\Phi}_2(p) - 3\bar{\Phi}_1(p)] + \\ & + p \frac{\partial}{\partial p} [n_0(p) \bar{\Phi}_1(p)] + 3n_0 \bar{\Phi}_3(p) + \\ & \left. + p \frac{\partial}{\partial p} [n_0(p) \bar{\Phi}_3(p)] - n_0(p) \bar{\Phi}_1^*(p) \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\Phi_1(p) = \int n_0(P) \left(\frac{qp}{p} \right)^2 dP dw, \quad (27)$$

$$\Phi_2(p) = \int n_0(P) q^2 dP dw, \quad (28)$$

$$\bar{\Phi}_1(p) = \int n_0(P) \left(\frac{qp}{p} \right)^2 \chi_1(P) dP dw, \quad (29)$$

$$\bar{\Phi}_2(p) = \int n_0(P) q^2 \chi_1(P) dP dw, \quad (30)$$

$$\bar{\Phi}_3(p) = \int \frac{Pp}{p} n_0(P) \frac{\partial \chi_1(P)}{\partial P} \frac{v}{V} \left(\frac{qp}{p} \right)^2 dP dw, \quad (31)$$

$$\bar{\Phi}_1^*(p) = \int n_0(P) P \frac{\partial \chi_1(P)}{\partial P} \left(\frac{v}{V} \right)^2 \left(\frac{qp}{p} \right)^2 dP dw. \quad (32)$$

При выводе (26) были учтены также обусловленные наличием в (9) δ -функции равенства

$$Vq = vq, \frac{Pq}{P} = \frac{v}{V} \frac{pq}{p}. \quad (33)$$

Проведем интегрирование выражения

$$\Phi_1(p) = 4e^4 \int n_0(P) \left(\frac{qp}{p} \right)^2 \frac{\left(1 - \frac{1}{c^2} vV \right)^2}{\left[q^2 - \frac{1}{c^2} (vq)^2 \right]^2} \delta(v - V, q) dq dP, \quad (27')$$

причем сначала будем интегрировать по направлениям P , а потом по всем значениям q . Для интегрирования по направлениям P удобно ввести систему координат с осью z , направленной по q . В этой системе единичные вектора P/P и p/p будут иметь составляющие:

$$\frac{P}{P} = \{ \sin \beta \cos \delta; \sin \beta \sin \delta; \cos \beta \}, \quad (34)$$

$$\frac{p}{p} = \{ \sin \theta \cos \varphi; \sin \theta \sin \varphi; \cos \theta \} \quad (34')$$

и интеграл (27) примет вид

$$\begin{aligned} \Phi_1(p) = & 4e^4 \int_0^\infty n_0(P) P^2 dP \int \frac{dq}{q} \int \frac{\cos^2 \theta d\cos \theta d\varphi}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta \right)^2} \times \\ & \times \left[1 - \frac{1}{c^2} Vv (\cos \beta \cos \theta + \sin \beta \sin \theta \cos(\varphi - \delta)) \right]^2 \times \\ & \times \delta(v \cos \theta - V \cos \beta) d\cos \beta d\delta. \end{aligned} \quad (35)$$

Интегрирование по β , δ и φ дает

$$\begin{aligned} \Phi_1(p) = & 16\pi^2 e^4 \int_0^\infty n_0(P) P^2 \frac{1}{V} dP \int \frac{dq}{q} \int \frac{\cos^2 \theta d\cos \theta}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta \right)^2} \times \\ & \times \left\{ \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta \right)^2 + \frac{V^2 v^2}{2c^2} \sin^2 \theta - \frac{v^4}{2c^4} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right\}, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\lambda = \begin{cases} \frac{v}{V} & \text{при } v > V, \\ 1 & \text{при } v < V. \end{cases} \quad (37)$$

Интеграл по передачам импульсов равен так же, как и в случае столкновений электронов с ионами

$$\int \frac{dq}{q} = \ln \frac{q_{\max}}{q_{\min}} = \ln \frac{r_{\max}}{r_{\min}} = L. \quad (38)$$

Обозначая $\cos \theta = u$ и $\beta = v/c$, окончательно получаем

$$\Phi_1(p) = 16\pi^2 Le^4 \int_0^\infty n_0(P) \frac{P^2}{V} dP \int_0^\lambda \frac{u^2 du}{(1 - \beta^2 u^2)^2} \times \\ \times \left\{ (1 - \beta^2 u^2)^2 + \beta^2 \frac{V^2}{2c^2} (1 - u^2) - \frac{1}{2} \beta^4 u^2 (1 - u^2) \right\}. \quad (39)$$

Аналогичным образом находим для Φ_2 и $\bar{\Phi}_3$

$$\Phi_2(p) = 16\pi^2 Le^4 \int_0^\infty n_0(P) \frac{P^2}{V} dP \int_0^\lambda \frac{du}{(1 - \beta^2 u^2)^2} \times \\ \times \left\{ (1 - \beta^2 u^2)^2 + \beta^2 \frac{V^2}{2c^2} (1 - u^2) - \frac{1}{2} \beta^4 u^2 (1 - u^2) \right\}, \quad (40)$$

$$\bar{\Phi}_3(p) = 16\pi^2 Le^4 \int_0^\infty n_0(P) \frac{v^2}{V^3} P^3 dP \frac{\partial \chi_1(P)}{\partial P} \int_0^\lambda \frac{u^2 du}{(1 - \beta^2 u^2)^2} \times \\ \times \left\{ u^2 (1 - \beta^2 u^2)^2 - \frac{3}{2} (1 - u^2) (1 - \beta^2 u^2) \left(\frac{V^2}{c^2} - \beta^2 u^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1 - u^2) \left(\frac{V^2}{c^2} - \beta^2 u^2 \right) \right\}. \quad (41)$$

После подстановки (39), (40), (41) и выражений для $\bar{\Phi}_1$, $\bar{\Phi}_2$ и $\bar{\Phi}_3$ в интеграл столкновений (26), интегрирования некоторых выражений по частям и приведения подобных членов, получается следующее уравнение для функции распределения $\chi_1(x) = 4\pi \frac{e^4}{c} \rho_e L \chi_1(p)$ в переменной

$$x = \frac{cp}{T}, \quad (42)$$

$$1 - \frac{3\alpha K_0(\alpha) + 6K_1(\alpha) + \alpha^2 K_1(\alpha)}{[\alpha K_0(\alpha) + 2K_1(\alpha)] \sqrt{\alpha^2 + x^2}} = \hat{M} \chi_1(x), \quad (43)$$

где $\alpha = mc^2/T$, и линейный интегро-дифференциальный оператор \hat{M} определен как

$$\hat{M} \chi_1(x) = - \frac{\sqrt{\alpha^2 + x^2}}{x^3} \chi_1(x) - \frac{1}{\alpha^2 K_0(\alpha) + 2\alpha K_1(\alpha)} \frac{1}{x^2} \times \\ \times \left\{ A(x) \chi_1(x) + B(x) \frac{d\chi_1(x)}{dx} + C(x) \frac{d^2\chi_1(x)}{dx^2} + \int_0^\infty K(x, y) \chi_1(y) dy \right\}. \quad (44)$$

Коэффициенты $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ и ядро $K(xy)$ приведены ниже:

$$A(x) = - \frac{x^2 \alpha^2}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} e^{-\sqrt{\alpha^2 + x^2}} + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\alpha^2 + x^2}} \left\{ \sqrt{\alpha^2 + x^2} (\alpha^2 + x^2 + \right. \\ \left. + 2\sqrt{\alpha^2 + x^2} + 2) \left[1 - \frac{1}{2\beta} (1 - \beta^2) \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right] - \right. \\ \left. - \alpha^2 \left(1 - \frac{x}{2\beta} \right) \left[3 - \frac{1}{2\beta} (3 - \beta^2) \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right] \right\} + \\ + \frac{1}{2} \int_0^x y \sqrt{\alpha^2 + y^2} e^{-\sqrt{\alpha^2 + y^2}} dy \left\{ - \frac{1}{\beta} \left[\gamma (1 - \beta^2) - \right. \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (3 - \beta^2) (1 - \gamma^2) \ln \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \right] + \frac{x}{2\beta^2} \left[\gamma (5 - 3\beta^2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (5 - 3\beta^2 - 3\gamma^2 + \beta^2 \gamma^2) \ln \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \right]; \\ B(x) = - \frac{x}{4} e^{-\sqrt{\alpha^2 + x^2}} \left\{ \frac{\alpha^2}{\beta^3} \left[3 + 7\beta^2 - \frac{1}{2\beta} (3 + 6\beta^2 - \beta^4 \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}) \right] - \right. \\ \left. - \frac{\alpha^2 x}{\beta} \left(3 - \frac{3 - \beta^2}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) + 2(\alpha^2 + x^2 + 2\sqrt{\alpha^2 + x^2} + 2) \times \right. \\ \times \left[\frac{1}{\beta^2} \left(1 + 3\beta^2 - \frac{1 - \beta^4}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) - \frac{x}{\beta} \left(1 - \frac{1 - \beta^2}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \right] \left. \right\} - \\ - \frac{x}{4} \int_0^x y \sqrt{\alpha^2 + y^2} e^{-\sqrt{\alpha^2 + y^2}} dy \left\{ \frac{1}{\beta^3} \left[\gamma (5 - 3\beta^4 + 6\beta^2) - \right. \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (5 + 6\beta^2 - 3\gamma^2 - 3\beta^4 - 6\beta^2 \gamma^2 + \beta^4 \gamma^2) \ln \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \right] - \\ \left. - \frac{x}{\beta^3} \left[\gamma (5 - 3\beta^2) - \frac{1}{2} (5 - 3\beta^2 - 3\gamma^2 + \beta^2 \gamma^2) \ln \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \right] \right\}; \\ C(x) = - \frac{x^2}{4\beta^3} e^{-\sqrt{\alpha^2 + x^2}} \left\{ 2 \left[1 - \frac{1}{2\beta} (1 - \beta^2) \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right] (\alpha^2 + x^2 + 2\sqrt{\alpha^2 + x^2} + 2) + \right. \\ \left. + \alpha^2 \left[3 - \frac{1}{2\beta} (3 - \beta^2) \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right] - \frac{x^2}{4\beta^3} \int_0^x y \sqrt{\alpha^2 + y^2} e^{-\sqrt{\alpha^2 + y^2}} dy \times \right. \\ \times \left. \left\{ \gamma (5 - 3\beta^2) - \frac{1}{2} (5 - 3\beta^2 - 3\gamma^2 + \beta^2 \gamma^2) \ln \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \right\} \right\}; \\ K(x, y) = y \sqrt{\alpha^2 + y^2} e^{-\sqrt{\alpha^2 + y^2}} \begin{cases} [(1 - \gamma^2)(R_1 + R_2) + R_3 + R_4] & \text{при } y > x, \\ [(1 - \beta^2)(\bar{R}_1 + \bar{R}_2) + \bar{R}_3 + \bar{R}_4] & \text{при } y < x, \end{cases}$$

где

$$R_1 = -1 + \frac{1-\beta^2}{2\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta},$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 + y^2} \left[5 + (3\beta^2 - 5) \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right],$$

$$R_3 = \frac{x}{2\beta} \left[5 - 4\beta^2 - 3\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2 - \frac{1}{2\beta} (1-\beta^2)(5-3\gamma^2) \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right],$$

$$R_4 = -\frac{x}{2\beta} \sqrt{\alpha^2 + y^2} \left[11 - \frac{16}{3}\beta^2 - 9\gamma^2 + 4\beta^2\gamma^2 - \frac{1}{2\beta} (11 - 9\beta^2 - 9\gamma^2 + 7\beta^2\gamma^2) \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right],$$

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{\beta} \left[-\gamma + \frac{1}{2} (1-\gamma^2) \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right],$$

$$\bar{R}_2 = \frac{x}{2\beta^2} \left[5\gamma - \frac{1}{2} (5-3\gamma^2) \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right],$$

$$\bar{R}_3 = \frac{\sqrt{\alpha^2 + y^2}}{2\beta} \left[\gamma (5 - 3\beta^2 - 4\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2) - \frac{1}{2} (1-\gamma^2)(5-3\beta^2) \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right],$$

$$\bar{R}_4 = -x \frac{\sqrt{\alpha^2 + y^2}}{4\beta^2} \left[\gamma \left(11 - 9\beta^2 - \frac{16}{3}\gamma^2 + 4\beta^2\gamma^2 \right) - \frac{1}{2} (11 - 9\beta^2 - 9\gamma^2 + 7\beta^2\gamma^2) \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right],$$

причем использованы обозначения

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}, \quad \gamma = \frac{V}{c} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + \alpha^2}}. \quad (44')$$

Уравнение для функции $\chi_2(x) = 4\pi \frac{e^4}{c} p_e L \chi_2(p)$ отличается от (43) только использованием в качестве неоднородности в левой части второго члена (14) и будет иметь вид

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + x^2}} = \hat{M} \chi_2(x). \quad (45)$$

Границные условия для уравнений (43) и (45) таковы: $\chi = 0$ и $\chi' = 0$ при $x = 0$. Эти условия получаются автоматически из требования конечности интеграла столкновений электронов с ионами, который будет преобладать при малых скоростях электронов, поскольку сечение рассеяния обратно пропорционально 4-й степени относительной скорости сталкивающихся частиц и стремится к бесконечности в случае столкновения электронов с ионами и к конечному пределу в случае столкновения электрон-электрон.

Так как при малых $\mathcal{J}_{ie} \sim \frac{1}{x^3} \chi(x)$, то $\chi(x)$ должно быть пропорционально x^3 , откуда и получаются приведенные выше граничные условия.

С помощью функций распределений можно легко найти поток тепла и теплопроводность газа. Поток тепла j равен

$$j = \int E_{\text{кин}} v n d\mathbf{p} = \int n_0 E_{\text{кин}} v \chi d\mathbf{p} = \int n_0 E_{\text{кин}} v [p \nabla T \chi_1(p) + e E_p \chi_2(p)] d\mathbf{p}, \quad (46)$$

так как равновесная функция распределения обращает j в нуль. Входящее сюда электрическое поле E , вызванное перераспределением зарядов в газе, которое произойдет значительно раньше выравнивания температур, должно быть определено из равенства нулю полного тока

$$\mathbf{j} = \int n v d\mathbf{p} = \int n_0 \chi v d\mathbf{p} = \int n_0 v [(p \nabla T) \chi_1(p) + e E_p \chi_2(p)] d\mathbf{p} = 0. \quad (47)$$

Так как единственным выделенным направлением является направление градиента температуры, то электрическое поле и ток должны иметь то же направление. Обозначая его через x , имеем из (47)

$$e E_x \int n_0(p) v_x p_x \chi_2(p) d\mathbf{p} = - \frac{dT}{dx} \int n_0(p) v_x p_x \chi_1(p) d\mathbf{p}. \quad (48)$$

Отсюда

$$e E = - \nabla T \frac{\int_0^\infty n_0(p) \frac{p^4}{E} \chi_1(p) dp}{\int_0^\infty n_0(p) \frac{p^4}{E} \chi_2(p) dp} \equiv -\zeta \nabla T. \quad (49)$$

Подставляя (49) в (46), находим

$$i_i = \int E_{\text{кин}} n_0(p) [\chi_1(p) - \zeta \chi_2(p)] p_k v_i d\mathbf{p} \frac{dT}{dx_k}. \quad (50)$$

Так как, с другой стороны,

$$i_i = -\kappa \delta_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad (51)$$

где κ — теплопроводность, то

$$\begin{aligned} \kappa &= -\frac{1}{3} \int E_{\text{кин}} n_0(p) [\chi_1(p) - \zeta \chi_2(p)] p v d\mathbf{p} = \\ &= -\frac{4\pi}{3} \int_0^\infty E_{\text{кин}} n_0(p) [\chi_1(p) - \zeta \chi_2(p)] \frac{p^4 c^2}{E} dp. \end{aligned} \quad (52)$$

Выражая все через переменные x и функции $\chi_1(x)$ и $\chi_2(x)$, получаем окончательно

$$\begin{aligned} \kappa &= -\frac{1}{12\pi} \frac{1}{L} \left(\frac{T}{e^2} \right)^2 \left(\frac{T}{m} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\alpha} [2K_1(\alpha) + \alpha K_0(\alpha)]} \times \\ &\times \int_0^\infty \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + x^2}} \right) [\chi_1(x) - \zeta \chi_2(x)] e^{-\sqrt{\alpha^2+x^2}} x^4 dx, \end{aligned} \quad (53)$$

причем

$$\zeta = \frac{\int_0^\infty e^{-\sqrt{\alpha^2+x^2}} \chi_1(x) \frac{x^4}{\sqrt{\alpha^2+x^2}} dx}{\int_0^\infty e^{-\sqrt{\alpha^2+x^2}} \chi_2(x) \frac{x^4}{\sqrt{\alpha^2+x^2}} dx}. \quad (54)$$

Уравнение для функции распределения допускает значительные упрощения в двух предельных случаях: нерелятивистском ($\alpha \gg 1$) и ультрарелятивистском ($\alpha \ll 1$). Уравнение для нерелятивистской задачи удобно написать, положив

$$x' = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} x = \frac{p}{\sqrt{mT}}, \quad (55)$$

$$\chi' = \sqrt{\alpha} \chi. \quad (55')$$

В этих переменных уравнения (43) и (45) в нерелятивистском случае примут вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x'^2 - 3) = & -\frac{1}{x'^3} \chi'_1(x') - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x'^2} \left\{ A'(x') \chi'_1(x') + B'(x') \frac{d\chi'_1(x')}{dx'} + \right. \\ & \left. + C'(x') \frac{d^2\chi'_1(x')}{dx'^2} + \int_0^\infty K'(x', y') \chi'_1(y') dy' \right\}, \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} 1 = & -\frac{1}{x'^3} \chi'_2(x') - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x'^2} \left\{ A'(x') \chi'_2(x') + B'(x') \frac{d\chi'_2(x')}{dx'} + \right. \\ & \left. + C'(x') \frac{d^2\chi'_2(x')}{dx'^2} + \int_0^\infty K'(x', y') \chi_2(y') dy' \right\}, \end{aligned} \quad (57)$$

где

$$A'(x) = -\frac{2}{3} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{x} \left\{ \Gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{x^2}{2}\right) + \frac{2}{3} \Gamma\left(\frac{5}{2}; \frac{x^2}{2}\right) \right\}, \quad (58)$$

$$B'(x) = -\frac{x}{3} (4 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{2^{3/2}}{3} \frac{1 - x^2}{x^2} \Gamma\left(\frac{5}{2}; \frac{x^2}{2}\right), \quad (59)$$

$$C'(x) = -\frac{x^2}{3} e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{2^{3/2}}{3} \Gamma\left(\frac{5}{2}; \frac{x^2}{2}\right), \quad (60)$$

$$K'(x, y) = \begin{cases} x^2 y e^{-y^2/2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} x^2 \right) & \text{при } y > x, \\ \frac{y^4}{x} e^{-y^2/2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} y^2 \right) & \text{при } y < x. \end{cases} \quad (61)$$

Выражение (53) для теплопроводности при $\alpha \gg 1$ (нерелятивистский случай) также упрощается и будет

$$\kappa = -\frac{1}{12\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{L} \left(\frac{T}{e^2} \right)^2 \left(\frac{T}{m} \right)^{1/2} \int_0^\infty x'^6 [\chi'_1(x') - \zeta \chi'_2(x')] e^{-\frac{x'^2}{2}} dx' \quad (62)$$

при

$$\zeta = \frac{\int_0^\infty e^{-\frac{x'^2}{2}} x'^4 \chi'_1(x') dx'}{\int_0^\infty e^{-\frac{x'^2}{2}} x'^4 \chi'_2(x') dx'}. \quad (63)$$

Уравнения (43), (45) решались численно для следующих температур $T = 50 \text{ кэв}$ ($\alpha = 10,2$), $T = 100 \text{ кэв}$ ($\alpha = 5,1$) и $T = 200 \text{ кэв}$ ($\alpha = 2,55$). Кроме того, для контроля метода было проведено численное решение нерелятивистских уравнений (56), (57) и решение методом Чэпмена — Энскога уравнений для ультрарелятивистского случая (см. стр. 356). Полученные в результате расчета значения $\kappa / \frac{1}{L} \left(\frac{T}{e^2} \right)^2 \left(\frac{T}{m} \right)^{1/2}$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

T	$T \ll mc^2$ (нерелятивистский случай)	50 кэв	100 кэв	200 кэв	$T \gg mc^2$ (ультрарелятивистский случай)
	0,97	0,73	0,61	0,47	$0,25 \left(\frac{mc^2}{T} \right)^{1/2}$

Входящее в выражение для χ значение L может согласно (21) быть записано как (при $\beta_e = \rho_i = 4 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$)

$$L = 10,8 - \frac{3}{2} \ln \frac{mc^2}{T} + \ln \bar{x}, \quad (64)$$

где \bar{x} — некоторое эффективное значение x , соответствующее максимуму подынтегрального выражения в (53). Значения \bar{x} и подсчитанные по (64) значения L приведены в табл. 2.

Таблица 2

T	50 кэв	100 кэв	200 кэв
\bar{x}	40	7,5	5,8
L	9,6	10,3	11,1

В работе [4] расчет теплопроводности для нерелятивистского случая методом Чэпмена — Энскога дал для величины $\kappa / \frac{1}{L} \left(\frac{T}{e^2} \right)^2 \left(\frac{T}{m} \right)^{1/2}$ значение 0,95¹, так что расхождение лежит в пределах точности обоих расчетов (точность расчета работы [4] составляет около 2% — см. [5]).

Следует отметить, что падение отношения теплопроводности к ее значению в нерелятивистском случае с ростом температуры можно было ожидать из априорных соображений, поскольку $\chi \sim l c v_c$ (l — длина свободного пробега, пропорциональная E^2 , c_v — теплоемкость газа), что приводит в нерелятивистском случае к зависимости от температуры $\chi \sim T^{6/5}$, а в ультрарелятивистском $\chi \sim T^2$.

¹ Нужно иметь в виду, что в формуле (62) работы [4] имеется опечатка: вместо $\sqrt{2}$ должно быть $\sqrt{2\pi}$.

Вычисление теплопроводности в ультрапрелиативистском случае

Мы рассмотрим случай температур $T \gg mc^2$, но еще таких, когда нет необходимости учитывать движение ионов. В этих условиях кинетическое уравнение может быть получено путем разложения по степеням малого параметра

$$\alpha = \frac{mc^2}{T} \ll 1.$$

Производя такое разложение в (43) и (45) (при этом, очевидно, следует считать $\beta = \gamma = 1$), получаем следующие уравнения для функций распределения $\chi_1(x)$ и $\chi_2(x)$:

$$1 - \frac{3}{x} = -\frac{1}{x^2} \chi_1(x) - \frac{1}{2x^2} \left\{ x\chi_1(x) - x(4-x) \frac{d\chi_1}{dx} - x^2 \frac{d^2\chi_1}{dx^2} - \right. \\ \left. - \frac{x}{6} \int_0^\infty y^3 e^{-y} \chi_1(y) dy \right\}, \quad (65)$$

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \chi_2(x) - \frac{1}{2x^2} \left\{ x\chi_2(x) - x(4-x) \frac{d\chi_2}{dx} - x^2 \frac{d^2\chi_2}{dx^2} - \right. \\ \left. - \frac{x}{6} \int_0^\infty y^3 e^{-y} \chi_2(y) dy \right\}, \quad (66)$$

тогда как выражение для теплопроводности приобретает вид:

$$\kappa = -\frac{1}{24\pi} \frac{1}{L} \left(\frac{T}{e^2} \right)^2 c \int_0^\infty [\chi_1(x) - \zeta \chi_2(x)] x^4 e^{-x} dx, \quad (67)$$

где

$$\zeta = \frac{\int_0^\infty e^{-x} x^3 \chi_1(x) dx}{\int_0^\infty e^{-x} x^3 \chi_2(x) dx}. \quad (68)$$

Разложим $\chi_1(x)$ и $\chi_2(x)$ по обобщенным полиномам Лагерра 3-й степени

$$\chi_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n L_n(x), \quad (69)$$

$$\chi_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n L_n(x), \quad (70)$$

удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$x \frac{d^2 L_n(x)}{dx^2} + (4-x) \frac{dL_n(x)}{dx} + n L_n(x) = 0 \quad (71)$$

и условиям ортогональности

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{mn} \cdot m! (m+3)! \quad (72)$$

Подстановка (69) в (65) и учет (71) дает

$$(3-x)x = \left(1 + \frac{x}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} p_n L_n(x) + \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} p_n n L_n(x) - \\ - \frac{x}{12} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \int_0^\infty y^3 e^{-y} L_n(y) dy. \quad (73)$$

Умножим (73) на $x^3 e^{-x} L_m(x)$ и проинтегрируем по x в пределах от нуля до бесконечности. Тогда, воспользовавшись условием ортогональности и рекуррентной формулой для полиномов Лагерра 3-й степени

$$x L_n(x) = 2(n+2)L_n - L_{n+1} - n(n+3)L_{n-1}, \quad (74)$$

получаем следующую бесконечную систему уравнений для определения коэффициентов p_n :

$$-48\delta_{n0} + 168\delta_{n1} - 240\delta_{n2} = -2p'_0(\delta_{n0} - \delta_{n1}) - \frac{1}{2}n^2(n+3)p'_{n-1} + \\ + (n^2+3n+3)p'_n - \frac{1}{2}(n+2)p'_{n+1}. \quad (75)$$

Мы ввели обозначение $p'_n = n!(n+3)!p_n$. Уравнение для определения q'_n будет отличаться от (75) только левой частью, равной в этом случае:

$$-24(\delta_{n0} - \delta_{n1}). \quad (76)$$

Для определения теплопроводности достаточно знать только нулевой и первый коэффициенты разложения, ибо

$$\kappa = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{L} \left(\frac{T}{e^2} \right)^2 c [p_0 - p_1 - \zeta(q_0 - q_1)], \quad (77)$$

причем

$$\zeta = \frac{p_0}{q_0}. \quad (78)$$

Чтобы получить желаемую точность, достаточно поэтому ограничиться первыми 4 уравнениями в (75) и (76). (Подсчет с 5 уравнениями указывает, что возможная ошибка не превышает 2% в κ .)

Пренебрегая, следовательно, p'_n и q'_n , начиная с $n = 4$ и решая получившуюся систему уравнений, находим

$$p'_1 = 24, \quad p'_0 = -24 \quad q'_0 = -19,7, \\ q'_1 = 4,32, \\ p_1 = 1 \quad p_0 = -4, \quad q_0 = -3,29 \quad q_1 = 0,18. \quad (79)$$

СОДЕРЖАНИЕ

Подставляя эти значения в (77) и (78), находим окончательное выражение для теплопроводности в ультрарелятивистском случае

$$\kappa = 0,25 \frac{1}{L} \left(\frac{T}{e^2} \right)^2 c. \quad (80)$$

Авторы выражают глубокую благодарность А. С. Кронроду за численное решение уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау. Phys. Zs. Sowjet., 1936 10, 154.
2. В. Гайтлер. Квантовая теория излучения. Гостехиздат, 1940.
3. Л. Ландау, Е. Либшиц. Статистическая физика. Гостехиздат, 1951, стр. 435.
4. R. Landshoff. Phys. Rev., 1949, 76, 904.
5. R. Landshoff. Phys. Rev., 1951, 82, 442.

Предисловие	5
Исаак Яковлевич Померанчук	7

I

ТЕОРИЯ МЕТАЛЛОВ

1. О свойствах металлов при очень низких температурах (<i>Совместно с Л. Ландау</i>). 1936	18
2. Критическое поле у сверхпроводников малых размеров. 1938	31
3. О влиянии магнитного поля на электропроводность монокристаллов висмута при низких температурах. (<i>Совместно с Б. Даевым</i>). 1939	34
4. О теплопроводности висмута. (<i>Совместно с А. Ахиезером</i>). 1945	53
5. Изотопический эффект в остаточном электрическом сопротивлении металлов. 1958	59
6. О взаимодействии между электронами проводимости в ферромагнетиках. (<i>Совместно с А. И. Ахиезером</i>). 1959	63

II

СВОЙСТВА ДИЭЛЕКТРИКОВ

7. Теплопроводность парамагнитных диэлектриков при низких температурах. 1941	68
8. О теплопроводности диэлектриков при температурах больше дебаевской. 1941	95
9. О поглощении звука в диэлектриках. 1941	108
10. О теплопроводности диэлектриков. 1941	119
11. О теплопроводности диэлектриков при температурах, меньших дебаевской. 1942	122
12. Теплопроводность диэлектриков при высоких температурах. 1942	143
13. Зависимость поглощения звука в диэлектрике от частоты и температуры . 1943	149
14. К теории поглощения инфракрасных лучей в кристаллах, обладающих центром симметрии. 1943	157
15. О теплопроводности солей, используемых в методе магнитного охлаждения. (<i>Совместно с А. Ахиезером</i>). 1944	163
16. О тепловом равновесии между спинами и решеткой. (<i>Совместно с А. Ахиезером</i>). 1944	168
17. О парамагнитной дисперсии. (<i>Совместно с А. И. Ахиезером</i>). 1952	183

III

БОЗЕ- И ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

18. О рассеянии нейтронов с энергией несколько градусов в жидком гелии II. (<i>Совместно с А. Ахиезером</i>). 1945	186
--	-----

19. О движении посторонних частиц в гелии II. (Совместно с Л. Д. Ландай). 1948	192
20. Влияние примесей на термодинамические свойства и скорость второго звука в гелии II. 1949	195
21. К теории жидкого Не ³ . 1950	210
22. Об устойчивости фермиевской жидкости. 1958	218
23. К теории рассеяния медленных нейтронов в ферми-жидкости. (Совместно с А. И. Ахиезером и И. А. Ахиезером). 1961	221
24. О рассеянии медленных нейтронов в ферми-жидкости. (Совместно с А. И. Ахиезером и И. А. Ахиезером). 1963	234

IV

**РАССЕЯНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ НЕЙТРОНОВ.
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ**

25. О рассеянии медленных нейтронов в кристаллической решетке. 1937	254
26. Теория резонансного поглощения в гетерогенных системах. (Совместно с И. И. Гуревичем). 1955	270
27. Резонансное поглощение. (Совместно с А. И. Ахиезером). 1947	284
28. О рассеянии медленных нейтронов в кристаллах. (Совместно с А. Ахиезером). 1947	312
29. К теории резонансного рассеяния частиц. (Совместно с А. Ахиезером). 1948	329
30. О рефракции нейтронов. (Совместно с А. Ахиезером). 1948	336
31. Замечание о рассеянии частиц с нулевой энергией. 1948	341
32. К определению неэлектромагнитного взаимодействия между электронами и нейтронами. (Совместно с А. И. Ахиезером). 1949	343
Добавление. Теплопроводность полностью ионизированного газа при высоких температурах. (Совместно с В. Б. Берестецким и Б. Л. Иоффе). 1951	345

ИСААК ЯКОВЛЕВИЧ ПОМЕРАНЧУК

Собрание научных трудов. Том I

Физика низких температур. Нейтронная физика

Утверждено к печати Отделением ядерной физики Академии наук СССР

Редактор Л. А. Кондратюк Редактор изд-ва Л. В. Кудрявцева
Художественный редактор Н. Н. Власик. Технический редактор П. С. Кашина

Сдано в набор 26/I-1972 г. Подписано к печати 4/VII-1972.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага № 1. Усл. печ. л. 22,5 Тип. з.з.к. 133
Уч.-изд. л. 21,3. Тираж 2700. Т-08897. Цена 1 р. 73 к.

Издательство «Наука». Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». Москва, Г-99, Шубинский пер., 10